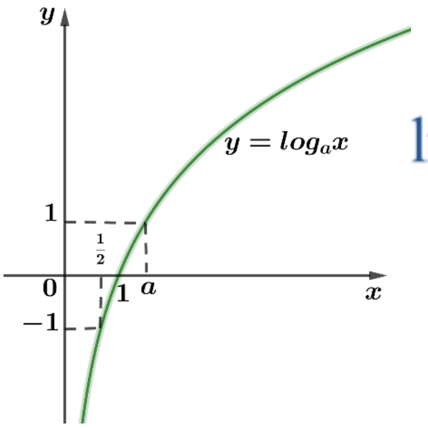
គណិតគណនា ៣

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = k$$



$$\lim \int \overset{?}{=} \int \lim$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

គាំទ្រថវិកាលើការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អដោយ៖

“មូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍”

២០២២

និពន្ធដោយ៖ លោក ឈាន ហាង

គណៈកម្មការរចនាទំព័រ៖ លោកស្រី សំបាត់ អ៊ាត លោកស្រី ឈុំ ពៅ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យ៖

១. លោក ហ៊ុន វ៉ារី ព្រឹទ្ធបុរសរង ប្រធាន
២. លោក យុត ភា គ្រូឧទ្ទេស សមាជិក

បុព្វកថា

ដំណើរអភិវឌ្ឍនៃព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជានៅក្នុងយុគសម័យទំនើបនេះ ជាមេរៀនដ៏ជោគជ័យបំផុតមួយដែលចាក់ឫសគល់ចេញពីការបញ្ចប់របបប្រល័យពូជសាសន៍ ការបញ្ចប់សង្គ្រាម ការផ្សះផ្សារជាតិ ការកសាងមូលដ្ឋានរឹងមាំនៃសន្តិភាពនិងស្ថេរភាព និងការអភិវឌ្ឍសេដ្ឋកិច្ច។ នៅក្រោយពេលដែលសន្តិភាពត្រូវបានកើតឡើងដោយបរិបូរណ៍នៅឆ្នាំ១៩៩៨ កម្ពុជាទទួលកំណើនសេដ្ឋកិច្ចខ្ពស់ គឺប្រមាណ៨%ក្នុងមួយឆ្នាំ។ លើសពីនេះទៀតអត្រានៃភាពក្រីក្រត្រូវបានកាត់បន្ថយពីប្រមាណ៥៣% នៅឆ្នាំ២០០៤មកនៅទាបជាង១០% នៅឆ្នាំ២០១៩។ ដំណើរនៃការអភិវឌ្ឍជាតិជាសកម្មភាពដែលបន្តទៅមុខជាប់ជានិច្ច ហើយគោលនយោបាយថ្មីៗដែលមានលក្ខណៈអន្តរវិស័យគ្រប់ដណ្ដប់ ក៏កំពុងលេចរូបរាងឡើងដើម្បីតម្រង់ទិសកម្ពុជាឆ្ពោះទៅកាន់ប្រទេសមានប្រាក់ចំណូលមធ្យមកម្រិតខ្ពស់នៅឆ្នាំ ២០៣០ និងឈានឡើងជាប្រទេសមានប្រាក់ចំណូលខ្ពស់ នៅឆ្នាំ២០៥០។ ការប្រែប្រួលឆាប់រហ័សនៃនិម្មាបនកម្មពិភពលោក និងតំបន់រួមទាំងទំនាក់ទំនងភូមិសាស្ត្រនយោបាយ បានផ្តល់កាលានុវត្តភាពសម្រាប់ការអភិវឌ្ឍឧស្សាហកម្មនៅកម្ពុជា ដែលត្រូវបានរាជរដ្ឋាភិបាលចាត់ទុកជាមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃកំណើនសេដ្ឋកិច្ចកម្ពុជា។ រាជរដ្ឋាភិបាលកម្ពុជាបានកំពុងបន្តពង្រឹង និងអភិវឌ្ឍវិស័យអប់រំឆ្ពោះទៅរកការស្រាវជ្រាវ និងនវានុវត្តន៍ដើម្បីពង្រឹងសមត្ថភាពនិងជំនាញរបស់ធនធានមនុស្សនៅកម្ពុជាឱ្យស្របទៅនឹងបរិបទថ្មីនៃការអភិវឌ្ឍ ជាពិសេសការពង្រឹងសហគ្រិនភាពក្នុងការរៀបចំម៉ូដែលធុរកិច្ចថ្មីៗ។ ដើម្បីចាប់យកកាលានុវត្តភាពពីបដិវត្តន៍ឧស្សាហកម្មទី៤ និងសេដ្ឋកិច្ចឌីជីថលដែលកំពុងផុសផុលឡើង ប្រព័ន្ធអេកូឡូហ្ស៊ីដែលបង្កលក្ខណៈអំណោយផលដល់ការបង្កើតថ្មី នវានុវត្តន៍ ការស្រាវជ្រាវ និងអភិវឌ្ឍន៍ ត្រូវតែមានការកែលម្អ។

បណ្ដាប្រទេសនៅទ្វីបអាស៊ីកំពុងនាំមុខក្នុងការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍ ដោយមានភាគហ៊ុនប្រមាណ៤៤% នៃការវិនិយោគទាំងមូលរបស់ពិភពលោក។ ប្រទេសចិនកំពុងបន្តកសាងហេដ្ឋារចនាសម្ព័ន្ធនៃការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍ ក៏ដូចជាសមត្ថភាពមនុស្ស។ ផ្ទុយទៅវិញ ប្រទេសនៅទ្វីបអាមេរិកខាងត្បូង និងអាហ្វ្រិក កំពុងស្ថិតនៅឆ្ងាយពីការវិនិយោគនេះ ហើយជាលទ្ធផល ប្រទេសទាំងនោះក៏ពុំមានកំណើនសេដ្ឋកិច្ចគួរឱ្យកត់សម្គាល់ដែរ។ ទុនវិនិយោគសរុបលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍរបស់ប្រទេសនៅទ្វីបអាមេរិកខាងត្បូងនិងអាហ្វ្រិក មានប្រមាណ៥%នៃការវិនិយោគទាំងមូលរបស់ពិភពលោក ក្នុងពេលដែលតំបន់ទាំង២នេះមានប្រជាជនប្រមាណ២០%នៃប្រជាជនពិភពលោក។ ប្រទេសចំនួន៦ដែលមានលំដាប់ខ្ពស់ជាងគេនៅក្នុងការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍ រួមមានសហរដ្ឋអាមេរិក ចិន ជប៉ុន អាល្លឺម៉ង់ ឥណ្ឌា និងកូរ៉េខាងត្បូង ដែលស្មើនឹងប្រមាណ ៧០%នៃទុនវិនិយោគសរុបរបស់ពិភពលោក។

តើចំណេះដឹង ផលិតផល និងសេវាកម្មថ្មីទាំងនេះកើតឡើងពីអ្វី? ហើយកើតឡើងដោយរបៀបណា? ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជាកំពុងតែកសាងមូលដ្ឋានសម្រាប់ការត្រៀមខ្លួនទទួល និងប្រកួតប្រជែងក្នុងយុគសម័យបដិវត្តឧស្សាហកម្មទី៤ នៅក្នុងសេដ្ឋកិច្ចដែលផ្អែកលើពុទ្ធិ ហើយដែលប្រការនេះ

ចាំបាច់តម្រូវឱ្យពលរដ្ឋកម្ពុជា ត្រូវក្លាយខ្លួនជាពលរដ្ឋឌីជីថល ពលរដ្ឋសកល និងពលរដ្ឋដែលប្រកបដោយការទទួលខុសត្រូវ ដែលមានសមត្ថភាពក្នុងការផលិត ចែកចាយ និងប្រើប្រាស់ពុទ្ធិដើម្បីទទួលមនុញ្ញផល និងរួមចំណែកក្នុងកំណើន។ ធនាគារពិភពលោកបានធ្វើការកត់សម្គាល់តាំងពីឆ្នាំ២០០២ នូវបម្លាស់ប្តូរនៃមូលដ្ឋានសេដ្ឋកិច្ច ពីសេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើកម្លាំងពលកម្ម និងធនធានអតិកម្ម (Labour and Resource Based Economy) ទៅកាន់សេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើពុទ្ធិ (Knowledge Based-Economy) ដែលក្នុងន័យនេះ ពុទ្ធិគឺជាគន្លឹះនៃការអភិវឌ្ឍន៍។ អាស្រ័យហេតុនេះ នៅលើគន្លងដែលកម្ពុជាកំពុងធ្វើដំណើរឆ្ពោះទៅកាន់សេដ្ឋកិច្ចឌីជីថល សង្គមកម្ពុជាត្រូវតែមានសមត្ថភាពក្នុងការផលិត ជ្រើសរើស បន្សាំ បង្កើតមុខរបរ និងប្រើប្រាស់ពុទ្ធិ ដើម្បីរក្សានិរន្តរភាពនៃកំណើន និងកែលម្អជីវភាពរស់នៅ។ សមត្ថភាពទាំងនេះ អាចកើតឡើងនៅពេលពលរដ្ឋកម្ពុជាមានឱកាសក្នុងការទទួលបានបទពិសោធន៍ពីការស្រាវជ្រាវ ការបណ្តុះគំនិតច្នៃប្រឌិត និងការស្វែងរកនវានុវត្តន៍។

កំណែទម្រង់វិស័យអប់រំ គឺជាការត្រួសត្រាយមាគ៌ាសម្រាប់ដំណើរឆ្ពោះទៅកាន់សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិ និងប្រជាពលរដ្ឋប្រកបដោយភាពរស់រវើក។ តាមរយៈមូលដ្ឋានអប់រំ សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិនឹងប្រមូលផ្តុំ បង្កើត និងចែករំលែក ទៅកាន់សមាជិកក្នុងសង្គមនូវសម្បទាអប់រំ ពិសេសគឺពុទ្ធិសម្បទាក្នុងបុព្វហេតុនៃមនុស្សជាតិនិងឧត្តមប្រយោជន៍នៃប្រទេស។ សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិ គឺពុំគ្រាន់តែជាសង្គមដែលសម្បូរព័ត៌មានប៉ុណ្ណោះទេ តែជាសង្គមដែលប្រជាពលរដ្ឋអាចធ្វើបរិវត្តកម្មពីព័ត៌មានទៅជាមូលធនប្រកបដោយប្រសិទ្ធភាព។ ការរីកចម្រើនទៅមុខជាលំដាប់នៃបច្ចេកវិទ្យានិងតំណភ្ជាប់ បានពង្រីកព្រំដែននៃការចូលទៅកាន់ និងការទទួលបានព័ត៌មានជាសកល ហើយដែលក្នុងន័យនេះ ការអប់រំនឹងបន្តវិវត្តទៅមុខនិងមានការផ្លាស់ប្តូរ។ សង្គមមួយដែលមានអំណាន និងរបាប់ជាបុរេលក្ខខណ្ឌនៃជីវភាពប្រចាំថ្ងៃនៃប្រជាពលរដ្ឋ ពេលនោះបំណិននៃអំណាន និពន្ធ និងការគណនាលេខនព្វន្ត គឺជាចលករនៃការរៀនរបស់សិស្ស។ ជាតុដ៏ចម្បងមួយដែលស្ថិតនៅក្នុងការកសាងសង្គមដែលប្រកបដោយពុទ្ធិគឺសៀវភៅសិក្សា ហើយការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សាជាប្រចាំ គឺជានវានុវត្តន៍នៃវិស័យអប់រំដែលនាំទៅរកការសិក្សាពេញមួយជីវិត ការអភិវឌ្ឍន៍សម្បទាអប់រំ និងការចែករំលែកចំណេះដឹង។ មូលដ្ឋានអប់រំ ជាពិសេសគឺគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សាត្រូវមានតួនាទីដែលប្រកបដោយការឆ្លើយតប ចំពោះតម្រូវការខាងលើនេះ។ សាស្ត្រាចារ្យ អ្នកស្រាវជ្រាវ និងបុគ្គលិកអប់រំត្រូវបន្តសិក្សាជាប់ជានិច្ច តាមរយៈការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ហើយដែលសៀវភៅសិក្សាទាំងនេះនឹងក្លាយជា ស្ពាននៃទំនាក់ទំនងរវាងនវានុវត្តន៍នៃបច្ចេកវិទ្យា និងការរៀននិងបង្រៀននៅក្នុងថ្នាក់រៀន។

សង្គមដែលប្រកបដោយពុទ្ធិ ក៏ជាសង្គមដែលបណ្តុះឱ្យមានរចនាសម្ព័ន្ធទន់នៃសេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើពុទ្ធិដែរ។ ឧទាហរណ៍ជាក់ស្តែងនៃបែបផែននេះរួមមាន Silicon Valley នៃសហរដ្ឋអាមេរិក សួនឧស្សាហកម្មវិស្វកម្មអាកាសយានយន្តនិងយានយន្តនៅទីក្រុង Munich ប្រទេសអាល្លឺម៉ង់ តំបន់ជីវបច្ចេកវិទ្យានៅក្រុង Hyderabad ប្រទេសឥណ្ឌា តំបន់ផលិតគ្រឿងអេឡិចត្រូនិក និងសារ-គមនាគមន៍ឌីជីថលនៅទីក្រុង Seoul ប្រទេសកូរ៉េខាងត្បូង ក៏ដូចជាសួនឧស្សាហកម្មថាមពល និងឥន្ធនគីមីសាស្ត្រ

នៃប្រទេសប្រេស៊ីល ហើយក៏នៅមានទីក្រុងនៃប្រទេសជាច្រើនទៀតនៅលើពិភពលោក លក្ខណៈសម្បត្តិនៃទីក្រុងទាំងនេះគឺការប្រើប្រាស់និន្នាការនៃការអភិវឌ្ឍដែលជំរុញ និងតម្រង់ទិសដោយចំណេះដឹង ហើយដែលចំណេះដឹងទាំងនោះកើតចេញជាដំបូងពីការវិនិយោគទៅលើគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា ស្ថាប័នស្រាវជ្រាវ មជ្ឈមណ្ឌលឧត្តមភាពនៃជំនាញជាន់ខ្ពស់ ការប្រកួតប្រជែងដោយ គុណាធិបតេយ្យ និង ជាពិសេសគឺការបណ្តុះវប្បធម៌អំណាននិងនិពន្ធសៀវភៅ។ ល្បឿននៃការរីកចម្រើនផ្នែកពុទ្ធិ និងបច្ចេកវិទ្យាកំពុងមានសន្ទុះលឿនជាងអ្វីដែលសិស្ស និងនិស្សិតអាចទទួលបានពីគ្រូនៅគ្រឹះស្ថានសិក្សា ដែលធ្វើឱ្យគោលដៅនៃការអប់រំនៅពេលបច្ចុប្បន្ននេះ មានការប្រឈមខ្លាំងជាងពេលណាទាំងអស់។ ឧទាហរណ៍ ក្នុងមួយឆ្នាំ មានសៀវភៅជាង២,២លានចំណងជើង ត្រូវបានសរសេរ និងបោះពុម្ព ដែលក្នុងនោះប្រទេសចិនមាន៤៤០ពាន់ ចំណែកឯសហរដ្ឋអាមេរិកមាន ៣០៥ពាន់ និងប្រទេសរុស្ស៊ីមាន ១២០ពាន់ចំណងជើង។

ខណៈពេលដែលបច្ចេកវិទ្យាកំពុងរីកចម្រើនជារៀងរាល់ថ្ងៃ មធ្យោបាយសម្រាប់អំណានក៏មានច្រើនជម្រើសសម្រាប់សិស្ស និស្សិត និងសាធារណៈជនរួមមានការអានសៀវភៅ ការអានលើឧបករណ៍អេឡិចត្រូនិក ការអានដោយប្រើទូរសព្ទឆ្លាតវៃ និងការអានលើកុំព្យូទ័រ ដែលសុទ្ធសឹងជាមធ្យោបាយ សំខាន់ៗដែលនាំអ្នកអានទាំងឡាយឱ្យសម្រេចគោលបំណងអានរបស់ខ្លួន។ ម្យ៉ាងវិញទៀត អំណានដោយប្រើមធ្យោបាយបច្ចេកវិទ្យាទំនើប ចំណាយពេលតិច ងាយស្រួលអាន និងជួយដល់បរិស្ថានមួយកម្រិតទៀត។ នាពេលបច្ចុប្បន្ន សិស្ស និស្សិត និងសាធារណៈជនកម្ពុជាដែលស្រឡាញ់អំណានកំពុងតែប្រើប្រាស់មធ្យោបាយអំណានទាំងនេះ។ បើយើងក្រឡេកមើលទៅប្រទេសជឿនលឿន ទោះបីជា បច្ចេកវិទ្យារីកចម្រើនខ្លាំងយ៉ាងណា អំណានតាមរយៈសៀវភៅនៅតែមានសន្ទុះដដែល។ ម្យ៉ាងវិញទៀត បច្ចេកវិទ្យាអានបែបទំនើបតាមរយៈឧបករណ៍ទំនើប អាស្រ័យលើលទ្ធភាពនៃធនធានអប់រំ ឌីជីថល និងមាតិកាឌីជីថលគ្រប់គ្រាន់ដែលបានផលិត និងបង្ហោះចែកចាយសម្រាប់អំណាន។

ក្នុងបរិបទកម្ពុជា ជាពិសេសក្នុងបរិការណ៍នៃការផ្ទុះរីករាលដាលនៃជំងឺកូវីដ-១៩ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានជំរុញឱ្យមានបរិវត្តកម្មឌីជីថលនៅក្នុងអេកូស៊ីស្តែមនៃការអប់រំ ជាពិសេសការអប់រំតាមប្រព័ន្ធអេឡិចត្រូនិកនិងការអប់រំពីចម្ងាយដើម្បីលើកកម្ពស់អំណានតាមរយៈការផលិតមាតិកាឌីជីថលដែលមានភាពចម្រុះ ការកសាងសមត្ថភាពផ្នែកតំណភ្ជាប់និងវេទិកាឌីជីថល ការពង្រីកវិសាលភាពនៃមជ្ឈមណ្ឌលទិន្នន័យ និងការលើកកម្ពស់គុណភាពនៃការផលិតធនធានអប់រំឌីជីថល គួបផ្សំជាមួយការចែកសន្លឹកកិច្ចការឱ្យសិស្សយកទៅរៀននៅផ្ទះ និងការចុះទៅជួបជាមួយសិស្សជាបណ្តុំនៅតាមសហគមន៍។ ក្នុងន័យលើកកម្ពស់អំណាន និងភាពសម្បូរបែបនៃធនធានសៀវភៅសិក្សាឱ្យកាន់តែមានប្រសិទ្ធភាពនិងភាពស័ក្តិសិទ្ធិ និងផ្តល់ឱកាសអំណានកាន់តែច្រើនថែមទៀតដល់សិស្សានុសិស្ស និស្សិត និងសាធារណៈជន ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាលើកទឹកចិត្តនូវចំណុចមួយចំនួនដូចខាងក្រោម៖

1. សាស្ត្រាចារ្យ អ្នកស្រាវជ្រាវ និងបុគ្គលិកអប់រំ សូមបន្តនិងបង្កើនការបោះពុម្ពស្នាដៃបន្ថែមទៀត ដើម្បីធ្វើឱ្យធនធានសម្រាប់អំណានកាន់តែសម្បូរបែប ជាពិសេសធនធានអំណានជាខេមរភាសា
2. គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា សូមផ្តល់លទ្ធភាពគ្រប់បែបយ៉ាង ដើម្បីឱ្យបុគ្គលិកអប់រំគ្រប់លំដាប់ថ្នាក់ និង និស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សាអាចចូលរួមអាន និងសិក្សាស្រាវជ្រាវតាមគ្រប់លទ្ធភាពជាមួយធនធានអំណាន ជាពិសេសការរៀបចំឱ្យមានពេលវេលាសម្រាប់សហសិក្សា និងអំណានក្នុងបណ្ណាល័យ
3. សាស្ត្រាចារ្យតាមមុខវិជ្ជា និងអ្នកស្រាវជ្រាវតាមជំនាញឬវិស័យ ត្រូវរៀបចំដំណើរការរៀនបង្រៀន និងស្រាវជ្រាវដែលមានដាក់បញ្ចូលកិច្ចការស្វ័យសិក្សា សហសិក្សា ឬការស្រាវជ្រាវបណ្ណាល័យដែលតម្រូវឱ្យនិស្សិត ត្រូវអាននិងស្រាវជ្រាវជាមួយធនធានអំណាន
4. គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងមជ្ឈមណ្ឌលស្រាវជ្រាវ ត្រូវខិតខំឱ្យអស់លទ្ធភាពក្នុងការបង្កើតបណ្ណាល័យ មជ្ឈមណ្ឌលរក្សាឯកសារ ឬមជ្ឈមណ្ឌលអប់រំឌីជីថល ជាដើម ដើម្បីឱ្យបុគ្គលិកអប់រំគ្រប់លំដាប់ថ្នាក់និងនិស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សា អាចទទួលបាន និងស្វែងរកប្រភពសម្រាប់អំណាន កាន់តែសម្បូរបែប និងមានភាពបត់បែន ឆ្លើយតបតាមតម្រូវការអ្នកអាន
5. និស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សា ត្រូវខិតខំនិងចំណាយពេលអាន និងចាត់ទុកវប្បធម៌ និងអាកប្បកិរិយាអំណានជាផ្នែកមួយ នៃពេលវេលានិងភាពស៊ីវិល័យនៃជីវិតប្រចាំថ្ងៃ
6. បងប្អូនជនរួមជាតិ ដែលជាមាតាបិតា ឬអ្នកអាណាព្យាបាល សូមជួយជំរុញនិងបង្កលក្ខណៈកាន់តែ ច្រើនថែមទៀត ជាពិសេសការលៃលកចំណាយនៅក្នុងគ្រួសារសម្រាប់ការទិញសម្ភារៈសិក្សា សៀវភៅអាន និងឧបករណ៍សម្រាប់អំណានដល់កូនៗ ដែលចាត់ទុកជាការវិនិយោគមួយដ៏សំខាន់ សម្រាប់ បង្កើនចំណេះដឹង និងអនាគតរបស់ពួកគេ។

ដោយមានការគាំទ្រពីក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ នៅឆ្នាំ២០២០ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានបង្កើតមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ដែលហៅកាត់ថា“មូលនិធិ ស.គ.ន” និងហៅជាភាសាអង់គ្លេសថា The Research Creativity and Innovation Fund ដែលហៅកាត់ជាភាសាអង់គ្លេសថា “RCI Fund”។ គោលដៅចម្បងនៃមូលនិធិនេះ គឺរួមចំណែកលើកកម្ពស់វប្បធម៌នៃការស្រាវជ្រាវ បំផុសគំនិតច្នៃប្រឌិត និងជំរុញការធ្វើនវានុវត្តន៍ ដើម្បីជាប្រយោជន៍ដល់វិស័យអប់រំដែលឆ្លើយតបទៅនឹងទីផ្សារពលកម្ម និងសាកលភាវូបនីយកម្ម។ មូលនិធិ ស.គ.ន បានសម្រេចកំណត់ប្រធានបទ ជាអាទិភាពសម្រាប់ការគាំទ្រដោយមូលនិធិចំនួន៣ រួមមាន ឌីជីថលនីយកម្មសម្រាប់បដិវត្តឧស្សាហកម្ម៤.០ (Digitalization for IR.4.0) ការស្រាវជ្រាវអនុវត្តលើវិស័យកសិកម្ម (Applied Agricultural Research) និងការស្រាវជ្រាវគរុកោសល្យសតវត្សទី២១ (21st Century Pedagogy Research)។

ដោយមានការធ្វើអត្ថិភាពវូបនីយកម្មទៅលើទិសដៅនៃការប្រើប្រាស់ថវិកាមូលនិធិសម្រាប់ឆ្នាំ ២០២០ ក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ និងក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានផ្តល់ការគាំទ្រដល់ការ **រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អ សៀវភៅសិក្សា(Text book) ដែលនឹងត្រូវប្រើប្រាស់នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា**។ គោលបំណងនៃការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អ សៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សាគឺដើម្បីបង្កើនបរិមាណ លើកកម្ពស់គុណភាព និងពង្រីកសមធម៌នៃធនធានសិក្សាជាខេមរភាសាជូនដល់និស្សិតដែលកំពុងបន្តការសិក្សា និងត្រៀមខ្លួនធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។ លើសពីនេះទៀតការរៀបរៀងនិពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សាមានគោលដៅដូចខាងក្រោម ៖

- ឆ្លើយតបជាបន្ទាន់ចំពោះការខ្វះខាតធនធានសិក្សា ដែលជាតម្រូវការសិក្សារបស់និស្សិត នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា
- លើកកម្ពស់ទំនើបភាវូបនីយកម្ម និងឧត្តមានុវត្តន៍នៃការរៀននិងបង្រៀន និងការស្រាវជ្រាវនៅលើមុខវិជ្ជា កម្មវិធីសិក្សា ឬមុខជំនាញជាក់លាក់
- បង្កើនភាពស៊ីជម្រៅក្នុងការកសាងវិជ្ជាជីវៈនិងបទពិសោធន៍សម្រាប់ឋានៈសាស្ត្រាចារ្យ និងអ្នកស្រាវជ្រាវ
- រួមចំណែកដល់ការកសាងភាពជាសហគមន៍វិជ្ជាជីវៈ ការចែករំលែកបទពិសោធន៍ និងវប្បធម៌នៃការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានវាយតម្លៃខ្ពស់ចំពោះការបោះជំហានប្រកបដោយមនសិការវិជ្ជាជីវៈនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងបុគ្គលិកអប់រំទាំងអស់ ក្នុងការរៀបចំ រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ដើម្បីបង្កើនបរិមាណ លើកកម្ពស់គុណភាព និងពង្រឹងសមធម៌នៃធនធានសិក្សាជាខេមរភាសា ជូននិស្សិតដែលកំពុងបន្តការសិក្សា និងត្រៀមខ្លួនធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។ សៀវភៅសិក្សាជាផ្នែកមួយនៃការទទួលស្គាល់គុណភាពអប់រំនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងជាធនធានសិក្សាដែលជាមូលដ្ឋានមួយដ៏សំខាន់ ក្នុងការគាំទ្រដល់ការបង្រៀន និងរៀន ហើយត្រូវមានបរិមាណគ្រប់គ្រាន់ ឆ្លើយតបទៅនឹងកម្មវិធីអប់រំ និងតម្រូវការសិក្សាស្រាវជ្រាវ។ ជាគោលការណ៍ គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សាទាំងអស់ ត្រូវមានសៀវភៅសិក្សាដែលប្រើជាគោលសម្រាប់មុខវិជ្ជានីមួយៗ។ ចំនួនសៀវភៅសិក្សាដែលគ្រប់គ្រាន់សម្រាប់ការស្រាវជ្រាវ និងការសិក្សារបស់និស្សិត ត្រូវមានយ៉ាងតិចមួយចំណងជើងក្នុងមួយមុខវិជ្ជា ហើយត្រូវតម្កល់យ៉ាងតិច២ច្បាប់ នៅក្នុងបណ្ណាល័យ ឬអាចរកបានតាមប្រព័ន្ធអេឡិចត្រូនិច។ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា លើកទឹកចិត្តបន្ថែមទៀតជូនដល់គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សារដ្ឋ និងឯកជនដែលបានស្នើសុំថវិកាមូលនិធិរួច សូមចូលរួមបន្ថែមទៀតដើម្បីបង្កើនចំនួនចំណងជើងសៀវភៅ។ ចំណែកគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សារដ្ឋនិងឯកជនដែលពុំទាន់បានដាក់ពាក្យស្នើសុំ សូមចូលរួមដើម្បីជាគុណប្រយោជន៍ដល់តម្រូវការដ៏ទទូច និងថ្លៃថ្លានៃនិស្សិតកម្ពុជាក្នុងការសិក្សា និងស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។

សេចក្តីបញ្ជាក់
នៃមូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍

សៀវភៅសិក្សានេះជាលទ្ធផលនៃការស្នើសុំអនុវត្តថវិកាមូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ក្នុងគម្រោង**រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ដែលនឹងត្រូវប្រើប្រាស់នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។** សៀវភៅសិក្សានេះ ត្រូវបានរៀបរៀង និពន្ធ ឬកែលម្អដោយមានការធានាអះអាងថាជាស្នាដៃរបស់អ្នកនិពន្ធផ្ទាល់ និងបានឆ្លងកាត់ត្រួតពិនិត្យ ផ្តល់យោបល់ និងវាយតម្លៃដោយក្រុមប្រឹក្សាអប់រំ ក្រុមប្រឹក្សាស្រាវជ្រាវ ឬក្រុមប្រឹក្សាដែលមានតម្លៃស្មើនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងតាមរយៈកិច្ចសន្យាដែលបានធ្វើឡើង និងដែលបានតម្កល់ទុកនៅមូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍។ រាល់ខ្លឹមសារ ការបកស្រាយ និងរូបភាព គឺជាជំហរនិងទស្សនៈផ្ទាល់របស់អ្នកនិពន្ធ ហើយ ពុំឆ្លុះបញ្ចាំង ឬជាតំណាងដល់មូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ នៃក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ឡើយ។

មាតិកា

បុព្វកថា i

សេចក្តីបញ្ជាក់ vi

អារម្ភកថា ix

សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ x

ការបរិយាយលើមុខវិជ្ជា xi

មូលន័យសង្ខេប xii

មេរៀនទី១៖ អនុគមន៍លោការីត 1

១.១. ព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ឱ្យជារាងអាំងតេក្រាល 1

១.២. អនុគមន៍លោការីតនេពែ 3

១.៣. អនុគមន៍លោការីតទូទៅ 9

មេរៀនទី២៖ អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល 16

២.១. អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលគោលe 16

២.២. អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលគោល$a, a>0, a\neq 1$ 20

២.៣. អនុគមន៍អ៊ិចស្បូណង់ស្យែលទូទៅ 23

មេរៀនទី៣៖ អនុគមន៍អ៊ីពែបូលិកផ្ទាល់ និងច្រាស 29

៣.១. អនុគមន៍អ៊ីពែបូលិកផ្ទាល់ 29

៣.២. អនុគមន៍អ៊ីពែបូលិកច្រាស 37

មេរៀនទី៤៖ ប្រៀបធៀបអនុគមន៍ពន្លាតកំណត់ 48

៤.១. ប្រៀបធៀបអនុគមន៍ត្រង់មួយចំណុច 48

៤.២. ពន្លាតកំណត់ 53

៤.៣. អនុវត្តពន្លាតកំណត់ 64

មេរៀនទី៥៖ អាំងតេក្រាលអ៊ីមប្រូភើ 77

៥.១. និយមន័យ 77

៥.២. ការសិក្សាអាំតេក្រាលអ៊ីមប្រូភើ (Improper Integral) 83

៥.៣. ការសិក្សាអាំតេក្រាលអ៊ីមប្រូភើក្នុងករណីអនុគមន៍ $f \geq 0$ 86

៥.៤. អាំងតេក្រាលរួមដាច់ខាត 90

៥.៥. លក្ខណៈនៃអាំងតេក្រាលរួមដាច់ខាត់ 90
មេរៀនទី៦៖ ស៊េរីនៃចំនួនពិត 107
៦.១. និយមន័យ និងលក្ខណៈ 107
៦.២. វិធានកូស៊ីភាពរួមដាច់ខាត 110
៦.៣. ប្រៀបធៀបស៊េរី និងអាំងតេក្រាល 112
៦.៤. ស៊េរីមានតួវិជ្ជមាន 116
៦.៥. ប្រៀបធៀប និងស៊េរីធរណីមាត្រ 118
៦.៦. ប្រៀបធៀបជាមួយ និងស៊េរីរីម៉ាន់ 124
៦.៧. ស៊េរីឆ្លាស់ 125
៦.៨. ស៊េរីនៃអនុគមន៍ 128
៦.៩. ស៊េរីចំនួនគត់ 129
ឯកសារពិគ្រោះ 140
សន្ទានុក្រម 140

អារម្ភកថា

សៀវភៅ គណិតគណនា ៣ នេះត្រូវបានចងក្រងឡើងសម្រាប់គរុនិស្សិតផ្នែកគណិតវិទ្យា និងសាស្ត្រាចារ្យ។ សៀវភៅនេះអាចជួយឱ្យអ្នកអានទទួលបានចំណេះដឹងខាងទ្រឹស្តី និងការគណនាដែលជាមូលដ្ឋាននៃគណិតវិទ្យាគណនា។ ឯកសារគណិតវិទ្យានេះត្រូវបានចងក្រងពីឯកសារលោកគ្រូសួន សុវណ្ណ និងឯកសារផ្សេងៗដើម្បីបានជាឯកសារប្រើប្រាស់ និងជាឯកសារពិគ្រោះ។

យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថាក្រោយពីអាន និងពិចារណាដោយយកចិត្តទុកដាក់គរុនិស្សិតពិតជាទទួលបានចំណេះដឹងគណិតវិទ្យាផ្នែកគណនាបានទូលំទូលាយ។

យើងខ្ញុំក៏ទទួលការរិះគន់គ្រប់បែបយ៉ាងពីសំណាក់គរុនិស្សិត និងអ្នកអានគ្រប់មជ្ឈដ្ឋានដើម្បីកែលម្អសៀវភៅនេះនៅពេលបោះពុម្ពផ្សាយលើក្រោយ។

សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ

ជាការពិតសៀវភៅ «គណិតគណនា៣ » ដែលលេចចេញជារូបរាងនៅពេលនេះគឺបានកើតឡើងពីការខិតខំ និងយកចិត្តទុកដាក់ចូលរួមពីភាគី និងស្ថាប័នពាក់ព័ន្ធជាច្រើន។

ខ្ញុំបាទសូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅបំផុតដល់ភាគី និងស្ថាប័នពាក់ព័ន្ធទាំងអស់ដូចជា ៖

- ក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ ដែលបានគាំទ្រយ៉ាងពេញទំហឹងដល់ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាឱ្យបង្កើតមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ហៅកាត់ថា «មូលនិធិ ស.គ.ន»។
- ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាដែលបានបង្កើតមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ដែលហៅកាត់ថា «មូលនិធិ ស.គ.ន» ដើម្បីរួមចំណែកលើកកម្ពស់វប្បធម៌នៃការស្រាវជ្រាវ បំផុសគំនិតច្នៃប្រឌិត និងជំរុញការធ្វើនវានុវត្ត ដើម្បីជាប្រយោជន៍ដល់វិស័យអប់រំ យុវជន និងកីឡា ដែលឆ្លើយតបទៅនឹងទីផ្សារពលកម្ម និងសាកលភាវូបនីយកម្ម។
- មូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ដែលបានគាំទ្រដល់ការរៀបរៀង និពន្ធ និង កែលម្អសៀវភៅសិក្សា (Text book) ដែលនឹងត្រូវប្រើប្រាស់នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា ដើម្បីបង្កើនបរិមាណលើកកម្ពស់គុណភាព និងពង្រីកសមធម៌នៃធនធានសិក្សាជាខេមរភាសាជូនដល់និស្សិតដែលកំពុងបន្តការសិក្សា និងត្រៀមខ្លួនធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។
-ឯកឧត្តមវិទ្យាស្ថានគរុកោសល្យបាត់ដំបងដែលបានចាត់តាំងជាគណៈកម្មការនិពន្ធចូលរួមការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សានេះ។
- នាយកដ្ឋានបណ្តុះបណ្តាលដែលបានចាត់តាំងជាគណៈកម្មការនិពន្ធ និងគណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យលើស្នាដៃនៃការចូលរួមការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សានេះ។
- លោកប្រធាន នាយកដ្ឋានបណ្តុះបណ្តាលដែលព្រមព្រៀងទទួលសិទ្ធិជាតំណាងអ្នករៀបរៀងក្នុងការចាត់ចែង និងសម្របសម្រួលជាមួយក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ចុះហត្ថលេខាលើកិច្ចព្រមព្រៀង និងកិច្ចដំណើការទូទាត់ថវិកាតាមរយៈការស្នើសុំ និងទទួលថវិកា បោះពុម្ព និងផ្សព្វផ្សាយបន្តនូវស្នាដៃរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អរបស់អ្នករៀបរៀងក្នុងការរៀន និងបង្រៀនក្នុងគ្រឹះស្ថានសិក្សា និងប្រគល់សិទ្ធិស្របតាមការកំណត់នៃកិច្ចព្រមព្រៀង ស្តីពីការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា ក្រោមការគាំទ្រនៃមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍។
- គ្រូឧទ្ទេសមុខវិជ្ជាគណិតគណនា ៣នៃវិទ្យាស្ថានគរុកោសល្យបាត់ដំបងដែលបានផ្តល់មតិកែលម្អលើខ្លឹមសារ នៃមេរៀននីមួយៗឱ្យកាន់តែមានភាពសុក្រឹត និងមានលក្ខណៈវិទ្យាសាស្ត្រ។

ខ្ញុំបាទសង្ឃឹមថា សៀវភៅនេះនឹងឆ្លើយតបជាបន្ទាន់ចំពោះការខ្វះខាតធនធានសិក្សា ដែលជាតម្រូវការសិក្សារបស់សិស្ស និស្សិត នៅកម្រិតវិទ្យាល័យ និងឧត្តមសិក្សា។

ការបរិយាយលើមុខវិជ្ជា

ខ្លឹមសារមេរៀនដែលបានលើកឡើងក្នុងសៀវភៅនេះអាចជួយដោះស្រាយបញ្ហាក្នុងការបង្រៀន និងរៀនណិតវិទ្យាដែលបង្កលក្ខណៈងាយស្រួលដល់គ្រូឧទ្ទេស គ្រូបង្រៀន គរុនិស្សិត គរុសិស្ស សិស្សានុសិស្សដែលអាចអនុវត្តន៍ និងស្រាវជ្រាវសម្រាប់សាធារណៈជនទូទៅ។ ជាមូលដ្ឋានគ្រឹះសម្រាប់ហ្វឹក ហាត់គរុនិស្សិត សិស្សសិក្សានូវរាល់ខ្លឹមសារស្របតាមកម្មវិធីដែលធ្វើឱ្យមេរៀននីមួយៗមានទំនាក់ទំនងគ្នាពីមួយចំណុចទៅមួយចំណុច។

មេរៀនគណិតគណនា៣នឹងជួយឱ្យគរុនិស្សិតមានចំនេះដឹងមូលដ្ឋានគណិតវិទ្យាទាំងទ្រឹស្តី និង ការអនុវត្តដើម្បីងាយស្រួលក្នុងការសិក្សាមុខវិជ្ជាវិទ្យាសាស្ត្រផ្សេងៗទៀត។ មុខវិជ្ជានេះរួមមាន៖

1. អនុគមន៍ឡូការីត
2. អ៊ីចស្ប៉ូណង់ស្យែល ស្វ័យគុណ
3. អនុគមន៍អ៊ីពែរបូលិកផ្ទាល់ និងច្រាស
4. ប្រៀបធៀបអនុគមន៍ពន្លាតកំនត់
5. អាំងតេក្រាលអ៊ីមប្រូភើ
6. ស៊េរីចំនួន ស៊េរីអនុគមន៍ ។

ការសិក្សាលម្អិតលើកម្មវិធីដែលអាចឱ្យអ្នកសិក្សាចេះប្រើប្រាស់បានដូចជា៖ មេរៀន ឧទាហរណ៍ លំហាត់អនុវត្តន៍ និងលំហាត់ស្រាវជ្រាវរួមមានវិធីផ្សេងក្នុងការដោះស្រាយដោយវិភាគ ការគិតត្រិះរិះពិចារណា ជាដើម។

មូលន័យសង្ខេប

សៀវភៅនេះផ្តោតសំខាន់ទៅការគណនាដែលមានមេរៀនសង្ខេប និយមន័យ ទ្រឹស្តីបទ ឧទាហរណ៍ លំហាត់អនុវត្តន៍ជាដើមព្រមទាំងមានទំនាក់ទំនងនៃមេរៀននីមួយៗ។ នៅក្នុងមេរៀនអនុគមន៍លោការីតក្នុងគោលបំណងដើម្បីឱ្យសិស្សចេះ គណនាអាំងតេក្រាល រាងអនុគមន៍លោការីត និងអនុគមន៍លោការីតទូទៅ។ ចំពោះមេរៀនអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលក្នុងការសិក្សាលើនិយមន័យ អនុគមន៍គោលអឺ និងអនុគមន៍គោលទូទៅ។ ចំពោះអនុគមន៍អ៊ីពែប៉ូលិកប្រាស និងផ្ទាល់សិក្សាទៅលើទំនាក់ទំនងអនុគមន៍កូស៊ីសនុសអ៊ីពែបូលិក ស៊ីនុសអ៊ីពែបូលិក តង់សង់អ៊ីពែបូលិក និងកូតង់សង់អ៊ីពែបូលិកដែលមានការសិក្សាអនុគមន៍ ការគណនាអាំងតេក្រាលជាដើម។ ចំណែកឯមេរៀនការប្រៀបធៀបពន្លាតកំណត់មានគោលបំណងសិក្សាលើអនុគមន៍សមមូល ការគណនាលីមីតដោយប្រើអនុគមន៍សមមូល ប្រមាណវិធីលើពន្លាតកំណត់ និងការសិក្សាអនុគមន៍ដោយប្រើពន្លាតកំណត់។ មេរៀនបន្ទាប់គឺអាំតេក្រាលអ៊ីមប្រូភើគឺសិក្សាលើការគណនាអាំងតេក្រាលដោយប្រើលីមីតថាវារួម ឬក៏រីកជាដើម។ ហើយមេរៀនចុងក្រោយគឺស៊េរីនៃចំនួនពិតសិក្សាលើនិយមន័យ លក្ខណៈ ការប្រៀបធៀបស៊េរីដោយប្រើអាំងតេក្រាលតាមវិធានកូស៊ី អាឡាំប៊ឺត និងស៊េរីអនុគមន៍ដើម្បីសិក្សាពីភាពរួម ឬរីករបស់វា។

មេរៀនទី១៖ អនុគមន៍លោការីត

១.១. ព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ឱ្យជារាងអាំងតេក្រាល

ក.និយមន័យ៖ បើ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[a,b]$ នោះ $\exists c\in[a,b], \int_a^b f(x)dx=(b-a)\cdot f(c)$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

គេបាន៖ f ជាប់លើ $[a,b]$ នោះគេបាន f យកតម្លៃដល់អតិបរិមា M និងអប្បរមា m គឺ

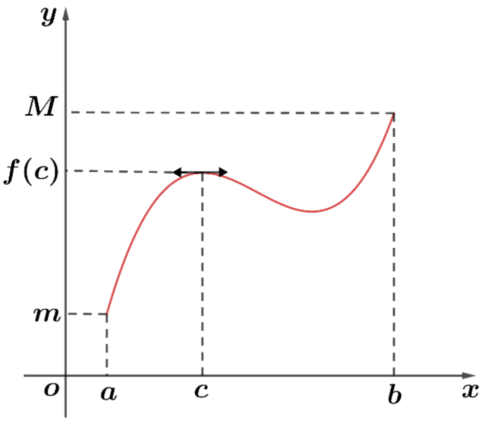
$\forall x\in[a,b], m\le f(x)\le M$

$\Rightarrow m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

$\Rightarrow m\le\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le M$

តែ f ជាប់ $\Rightarrow \exists c\in[a,b], f(c)=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

(ទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល)



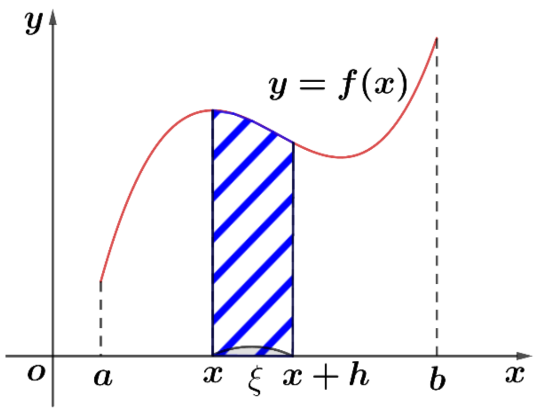
រូបទី១.១

ខ.ទ្រឹស្តីបទ៖ បើ f ជាប់លើ $[a,b]$ នោះអនុគមន៍ $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ f លើ $[a,b]$ ដែលយកតម្លៃ 0 ត្រង់ a គឺ $\boxed{F'(x)=\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x), F(a)=0}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងមាន $F(x+h)-F(x)=\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt$

$$=\int_x^{x+h} f(t)dt=h\,f(\xi), \xi\in[x,x+h]$$



រូបទី១.២

តាមទ្រឹស្តីបទមធ្យមគេបាន៖

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(\xi)$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0} f(\xi)=f(x)$$

$$\Rightarrow F'(x)=f(x)$$

ឧទាហរណ៍១៖ $\left(\int_0^x \cos t dt\right)'=\left(\sin t\Big|_0^x\right)'$

$$=(\sin x)'$$

$$=\cos x$$

គ.រូបមន្ត Leibniz-Newton

បើ F ជាព្រីមីទីវមួយនៃ f លើ $[a,b]$ គេបាន៖ $\int_a^b f(t)dt=F(t)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

គេបាន $\int_a^x f(t)dt$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ f លើ $[a,b]$ ។

ដូច្នេះ បើ F ជាព្រីមីទីវស្គាល់មួយនៃ f លើ $[a,b]$

គេបាន៖ $\int_a^x f(t)dt=F(x)+c$,c ថេរ

យក $x=a$,$0=F(a)+c\Rightarrow c=-F(a)$

ដូចនេះ៖ $\int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a)$ ។

យក $x=b\Rightarrow \int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$

ឧទាហរណ៍២៖ គណនាអាំងតេក្រាល $\int_1^x \frac{1}{1+t^2}dt$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងបាន $\int_1^x \frac{1}{1+t^2}dt=\text{Arctan}\,x\Big|_1^x$

$$=Arc\tan x-\frac{\pi}{4}$$

ឧទាហរណ៍៣៖ គណនាអាំងតេក្រាល $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2 x}dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយប្រើ $1+\tan^2 x=\sec^2 x$ នោះគេបាន

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\sec^2 x}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x\,dx \quad , \quad \sec x\ge 0\Rightarrow 0\le x\le\frac{\pi}{4}$$

$$=\ln\left|\sec x+\tan x\right|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)-\ln 1$$

$$=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$

ឧទាហរណ៍៤៖ ចូររកតម្លៃមធ្យមនៃ $f\left(x\right)=\tan x$ នៅចន្លោះ $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$។

ដំណោះស្រាយ

$$\text{តម្លៃមធ្យម}=\frac{1}{\frac{\pi}{4}-0}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx$$

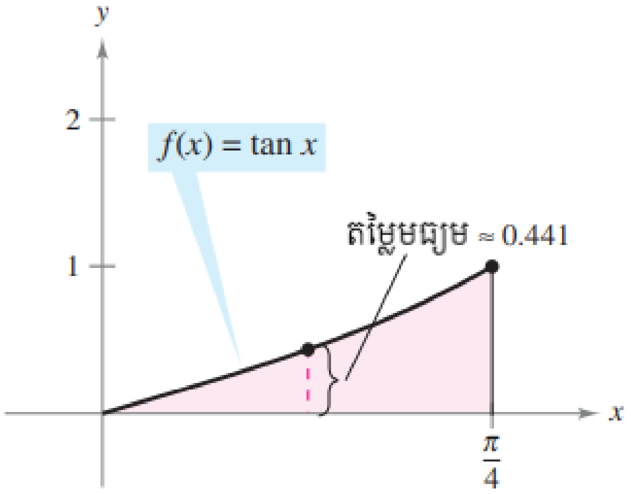
$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx$$

$$=\frac{4}{\pi}\left[-\ln\left|\cos x\right|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=-\frac{4}{\pi}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\ln 1\right]$$

$$=-\frac{4}{\pi}\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=\frac{4}{\pi}\ln\sqrt{2}=\frac{2}{\pi}\ln 2\approx 0.441$$

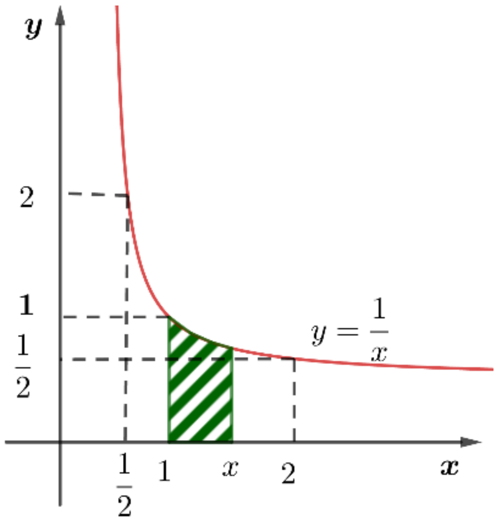


រូបទី១.៣

១.២. អនុគមន៍លោការីតនេពែ

ក.និយមន័យ៖ ដែលហៅថាអនុគមន៍លោការីតនេពែរគឺជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ៖

$$\boxed{\ln x=\int_1^x\frac{dt}{t},x>0}$$ ដែល $\ln x$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $\frac{1}{x},x>0$ ដែលយកតម្លៃ 0 ត្រង់ 1។



រូបទី១.៤

ខ. លក្ខណះគ្រឹះ

គេបាន $F\left(x\right)=\ln ax\ ,a>0$

គេមាន $\quad F'\left(x\right)=\frac{a}{ax}=\frac{1}{x}$

$\Rightarrow \ln ax$ ជាព្រីមីទីវនៃ $\frac{1}{x}$

$\Rightarrow \ln ax = \ln x + c, c$ ថេរ

យក $x = 1, \ln a = 0 + c$

$\Rightarrow \ln ax = \ln x + \ln a$

ដូចនេះ $\oplus \forall a, b > 0$ $\boxed{\ln a \cdot b = \ln a + \ln b}$

$$\oplus \boxed{\begin{array}{l} \ln \frac{1}{a} = -\ln a \;\;,\;\; a > 0 \\ \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b \;,\; a, b > 0 \end{array}}$$

ព្រោះ៖ $0 = \ln 1 = \ln a \cdot \frac{1}{a} = \ln a + \ln \frac{1}{a}$

$\Rightarrow \ln \frac{1}{a} = -\ln a$

ហើយ $\ln \frac{a}{b} = \ln a \cdot \frac{1}{b} = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b$

$\oplus$ បើ $a_1, a_2, ..., a_n > 0$, $\boxed{\ln a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = \ln a_1 + \ln a_2 + ... + \ln a_n}$ ។

ករណីពិសេស៖ បើ $a > 0, n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\ln a^n = n \ln a}$

និង $\ln a^{-n} = \ln \frac{1}{a^n} = -\ln a^n = -n \ln a$

ដូចនេះ $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\boxed{\ln a^k = k \ln a}$ ។

$\oplus \forall r \in \mathbb{Q}, \forall a > 0,$ $\boxed{\ln a^r = r \ln a}$

បើ $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\ln a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \ln a}$

ព្រោះ៖ $\ln a = \ln \left(a^{\frac{1}{n}} \right)^n = n \ln a^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \ln a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \ln a$

បើ $r \in \mathbb{Q}, r = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \ln a^r = \ln a^{\frac{m}{n}} = \ln \left(a^{\frac{1}{n}} \right)^m = m \ln a^{\frac{1}{n}} = \frac{m}{n} \ln a = r \ln a$

$\oplus$ យើងសន្មត់ថា $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall a > 0 :$ $\boxed{\ln a^{\alpha} = \alpha \ln a}$ ។

គ. សិក្សាអនុគមន៍ $y = \ln x$

+អនុគមន៍ $f(x)=\ln x$ ជាប់លើ $]0,+\infty[$ និងមានដេរីវេ $\forall x>0,\ f'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}>0$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $]0,+\infty[$ ។

+លីមីត

$a).\ \boxed{\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty}$

សម្រាយបញ្ជាក់

អនុវត្តន៍រូបមន្តកំណើនកំណត់ចំពោះ $f(x)=\ln x\ ,x\in[a,b],0\le a\le b$ គេបាន៖

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)\ ,a<c<b$$

$$\Rightarrow \ln b-\ln a=\frac{b-a}{c}\ ,a<c<b$$

$$\frac{b-a}{b}<\ln b-\ln a<\frac{b-a}{a}$$

$$\Rightarrow \ln b-\ln a>\frac{b-a}{b}$$

ដូចនេះ

$$\left.\begin{array}{l}\ln 2-\ln 1>\frac{1}{2}\\ \ln 3-\ln 2>\frac{1}{3}\\ \ln 4-\ln 3>\frac{1}{4}\end{array}\right\}+$$

$$\ln 4>\frac{13}{12}>1$$

$$\Rightarrow \ln 4^n=n\ln 4>n,\forall n\in\mathbb{N}$$

ដូចនេះ $\forall A>0$ បើគេយក $n>A$ នោះគេបាន $\ln 4^n>n>A$ ។

វិបាក៖ ដើម្បីឱ្យ $\ln x>A$ គេគ្រាន់តែយក $x\ge 4^n$ គឺយក $\boxed{B=4^n}, n>A$

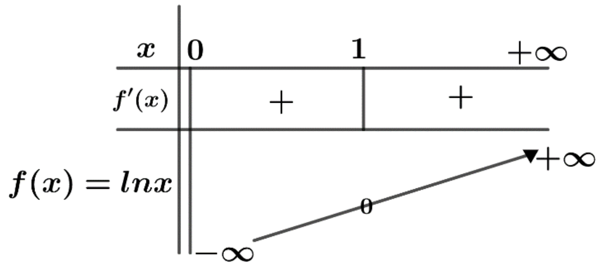
$b).\ \boxed{\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty}$

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង $X=\frac{1}{x}\Leftrightarrow x=\frac{1}{X}$ គេបាន $x\to 0^+\Leftrightarrow X\to+\infty$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0^+}\ln x=\lim_{X\to+\infty}\ln\frac{1}{X}=\lim_{X\to+\infty}(-\ln X)=-\infty\forall A>0$ ។

តារាងអថេរភាព



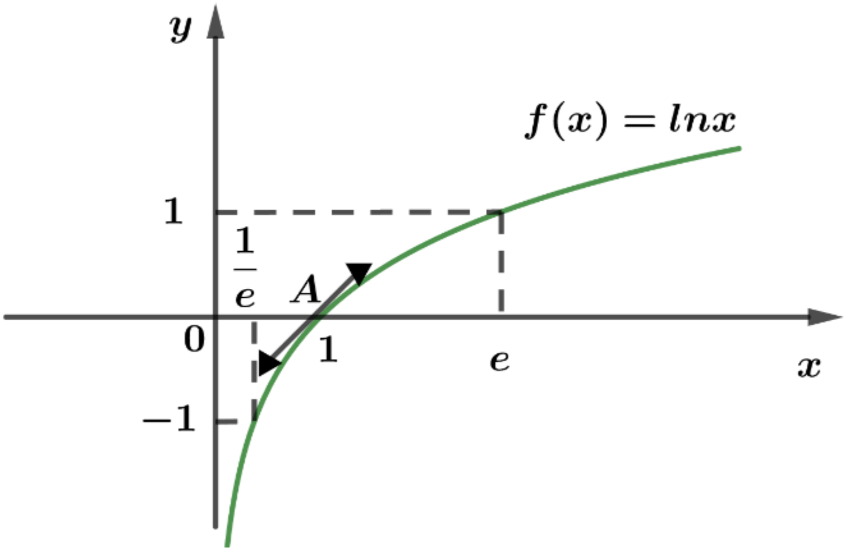
+ខ្សែកោង

អ័ក្ស (oy) ជាអាស៊ីមតូតដេក

ត្រង់ $A(1,0)$, $f'(1)=1$ ដូចនេះ បន្ទាត់ប៉ះស្របនឹងបន្ទាត់ពុះទីមួយ

$f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0\Rightarrow f$ ផតលើ $(0,+\infty)$

តាង $e\approx 2.718$ ដែល $e=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)$



រូបទី១.៥

ឃ. រូបមន្តលីមីតផ្សេងៗ

$c).\ \boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0}$

ជាទូទៅ $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^{\beta} x}{x^{\alpha}}=0}$ $,\alpha,\beta>0$

សម្រាយបញ្ជាក់

$(i).\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

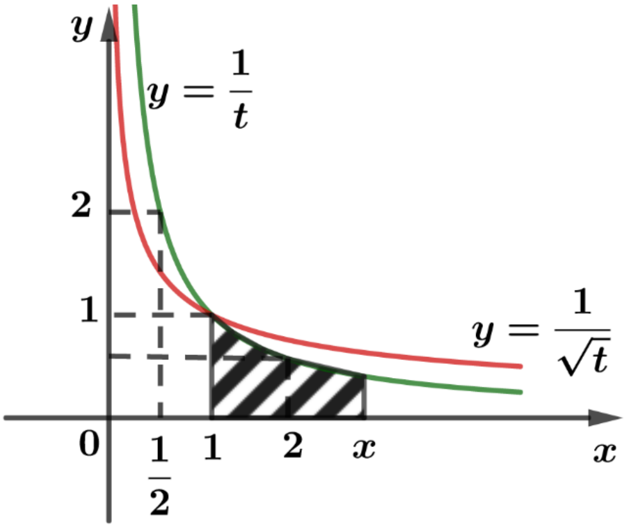
គេបាន $\forall x>1,\forall t\in[1,x],\frac{1}{t}\le\frac{1}{\sqrt{t}}$

$$\Rightarrow\int_1^x\frac{dt}{t}\le\int_1^x\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\sqrt{t}=2\sqrt{x}-2$$

$\Rightarrow \ln x \le 2\sqrt{x} - 2, \forall x > 1$

$\Rightarrow 0 < \dfrac{\ln x}{x} \le \dfrac{2\sqrt{x}}{x} - \dfrac{2}{x}, \forall x > 1$

តែ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{x}\right) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0$



រូបទី១.៦

$(ii).\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^{\beta} x}{x^{\alpha}} = 0, \alpha,\beta > 0$

តាង $X = x^{\alpha} \Leftrightarrow x = X^{\frac{1}{\alpha}}$

បើ $x \to +\infty \Leftrightarrow X \to +\infty$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\alpha}} = \lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\ln X^{\frac{1}{\alpha}}}{X} = \lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{1}{\alpha}\cdot\dfrac{\ln X}{X} = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^{\beta} x}{x^{\alpha}} = 0, \forall \alpha > 0 \ (*)$

វិបាក៖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^{\beta} x}{x^{\alpha}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x^{\alpha}}\right)^{\beta} = 0$ តាម $(*)$

$d).$ $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = 0}$

ជាទូទៅ $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} x^{\alpha}\ln x = 0}$ $,\alpha > 0$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង $X = \dfrac{1}{x} \Rightarrow x = \dfrac{1}{X}$ បើ $x \to 0^+ \Rightarrow X \to +\infty$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = \lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{1}{X}\cdot\ln\dfrac{1}{X} = \lim\limits_{X\to+\infty}\left(-\dfrac{\ln X}{X}\right) = 0^-$ ។

$$\lim_{x\to0^+} x^{\alpha}\ln x = \lim_{X\to+\infty}\left(\frac{1}{X}\right)^{\alpha}\ln\frac{1}{X} = \lim_{X\to+\infty}\left(-\frac{\ln X}{X^{\alpha}}\right) = 0 \text{ តាម}(*)$$

e). $\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$

សម្រាយបញ្ជាក់

បើ $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1$

តែ $f'(1) = \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

$\Rightarrow \lim_{h\to0}\frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

វិបាក៖

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\\ \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e\\ \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e\end{array}}$$

ព្រោះ $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1 = \ln e$

$\Rightarrow \lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

ឧទាហរណ៍៥៖ 1. $\lim_{x\to0}\ln\frac{(1+x^2)}{x^2} = 1$

2. $\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\sqrt{x} = 0$

ង. ដេរីវេអនុគមន៍បណ្តាក់នៃលោការីតនេពែ៖

គេបាន $\boxed{(\ln|x|)' = \frac{1}{x}}$ $x\in\mathbb{R}^*$

ជាទូទៅ $\boxed{(\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}}$ ។

វិបាក៖

$$\boxed{\begin{array}{l}\int\frac{dx}{x} = \ln|x| + c\\ \int\frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln|u(x)| + c\end{array}}, \left[f(u(x))\right]' = f'\left[u(x)\right]\times u'(x)$$

សម្រាយបញ្ជាក់

បើ $x>0$ គេបាន៖ $\left(\ln|x|\right)'=\left(\ln x\right)'=\frac{1}{x}$

បើ $x<0$ គេបាន៖ $\left(\ln|x|\right)'=\left[\ln(-x)\right]'=\frac{-1}{-x}=\frac{1}{x}$

ឧទាហរណ៍៦៖ គណនាអាំងតេក្រាល

$$\oplus\int\cot x dx=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\ln|\sin x|+c$$

$$\oplus\int\tan x dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=\ln|\cos x|+c$$

$$\oplus\int\frac{x}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\left(x^2+a^2\right)'}{x^2+a^2}dx=\ln\left|x^2+a^2\right|+c$$

$$\oplus\int\frac{dx}{x\ln x}=\int\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}dx=\ln|\ln x|+c$$

១.៣. អនុគមន៍លោការីតទូទៅ

ក.និយមន័យ៖ បើ $a>0,\ a\neq 1$ គេកំណត់ $\boxed{\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}}$, $x>0$

- បើ $a=10:\log_{10}x=\log x$ ហៅថាឡូការីតទសភាគ
- បើ $a=e:\log_e x=\ln x$

លក្ខណះ

(i). $\boxed{\log_a 1=0,\ \log_a a=1}$

(ii). $\boxed{\log_a b.c=\log_a b+\log_a c}$ $,b,c>0$

(iii). $\boxed{\log_a b^{\alpha}=\alpha\log_a b}$ $,b>0,\alpha\mathbb{R}$

(iv).រូបមន្តប្តូរគោល៖ $a,b>0,a\neq 1,b\neq 1$

$\boxed{\log_a x=\log_a b.\log_b x}$

ជាពិសេស $\boxed{\log_a b=\frac{1}{\log_b a}}$

ព្រោះ៖ $\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}=\frac{\ln b}{\ln a}\cdot\frac{\ln x}{\ln b}=\log_a b\cdot\log_b x$

ខ. អថេរភាព និងខ្សែកោងតាង $y=\log_a x$

- ដែនកំណត់ $D=(0,+\infty)$
- ដេរីវេ $y'=\left(\log_a x\right)'=\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)'=\frac{1}{x\ln a}$ មានសញ្ញាដូច $\ln a$

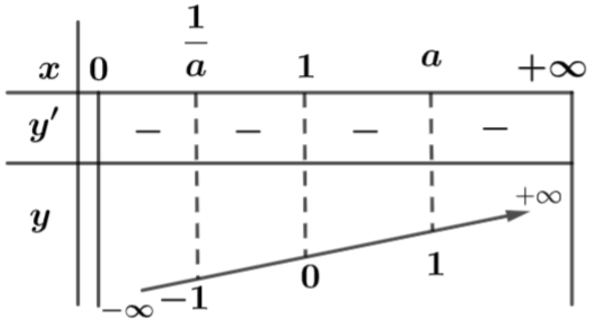
- លីមីត

$$\lim_{x\to+\infty}\log_a x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\ln a}=\begin{cases}+\infty & \text{បើ } a>1\\ -\infty & \text{បើ } 0<a<1\end{cases}$$

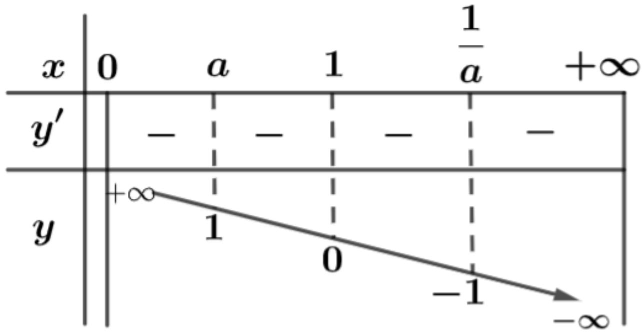
$$\lim_{x\to0^+}\log_a x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\ln a}=\begin{cases}-\infty & \text{បើ } a>1\\ +\infty & \text{បើ } 0<a<1\end{cases}$$

- តារាងអថេរភាព

⊕ ករណី $a>1$

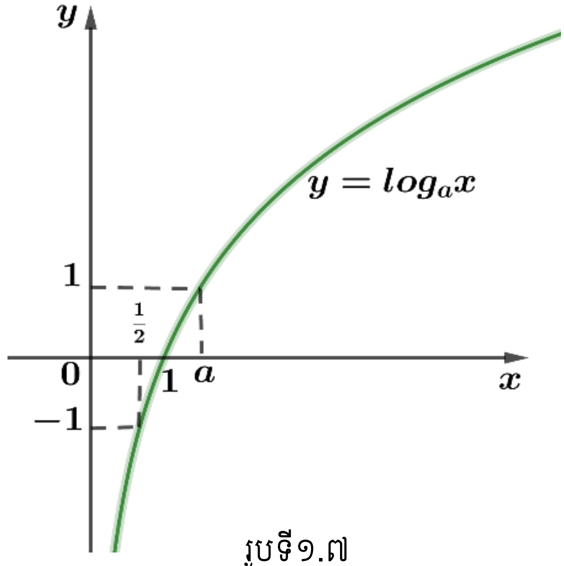


⊕ ករណី $0<a<1$



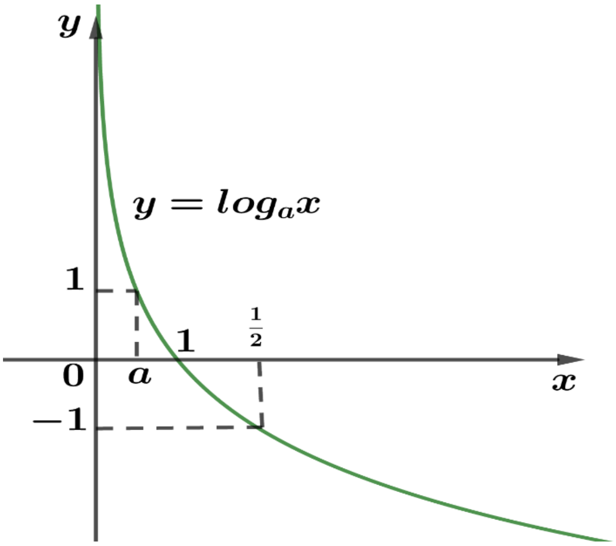
- ខ្សែកោង

⊕ ករណី $a>1$



រូបទី១.៧

⊕ ករណី $0 < a < 1$



រូបទី១.៨

លំហាត់អនុគមន៍លោការីត

១.រកបន្លាយតាមភាពជាប់ g នៃអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ៖ $f(x)=\dfrac{2x\ln|x|}{x+1}$ ត្រង់ 0 និង -1។

២.គេឱ្យអនុគមន៍ f ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់៖ $\begin{cases} f''(x)=\ln x^2, x\neq 0 \\ f(-1)=f'(-1)=0, f(1)=e-2 \end{cases}$ ។កំណត់ f

៣.សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

$a.\ y=3-x+\dfrac{\ln x}{x^3}$ $\qquad b.\ y=x+\dfrac{1+\ln x}{x}$

$c.\ y=\dfrac{\ln(2-x)}{\ln x}$ $\qquad d.\ y=\dfrac{x\ln x}{x+1}$

$e.\ y=\dfrac{x}{2}+\ln\left|1+\dfrac{1}{x}\right|$ $\qquad f.\ y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

$g.\ y=x\ln|x-1|$ $\qquad h.\ y=\dfrac{x}{\ln x}$

$i.\ y=\dfrac{\ln x}{x}$ $\qquad j.\ y=x\ln x$

$k.\ y=\ln|\ln x|$ $\qquad l.\ y=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$

៤. គេឱ្យ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x} \text{ បើ } x>0 \\ 0 \text{ បើ } x=0 \end{cases}$ ។

ក. សិក្សាភាពជាប់នៃ f ខាងស្តាំ 0 ។

ខ. ដោយប្រើរូបមន្តMac-Laurinបង្ហាញថា៖ $\forall x\geq 0, x-\dfrac{x^2}{2}\leq \ln(1+x)\leq x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$

រួចទាញបង្ហាញថា f មានដេរីវេខាងស្តាំ o ។

គ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ f លើ $[0,+\infty)$ ។

៥. ១. បើ $m\in\mathbb{R}$ គេកំណត់អនុគមន៍ $f_m(x)=\begin{cases} mx+\ln x \text{ បើ } x>0 \\ 0 \text{ បើ } x=0 \end{cases}$ មានខ្សែកោង (C_m) ។

ក. សិក្សាភាពជាប់ និងភាពមានដេរីវេនៃ f_m ខាងស្តាំ O ។

ខ. សិក្សាអថេរភាពនៃ f_m ដោយឱ្យកូអរដោនេចំណុចបរមា A_m ។

គ.សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ និង (C_m) ត្រង់ចំណុចប្រសព្វ B_m រវាង (C_m) និង (Ox) ក្រៅពី O ។

២. ក្នុងផ្នែកនេះគេតាង $f(x)=f_{\frac{1}{2}}(x)$ មានខ្សែកោង (C) ។

ក. សង់ខ្សែកោង (C)

ខ. គេកំណត់អនុគមន៍ h លើ $\mathbb{N}$ ដោយ៖ $h(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}+x\ln(-x) & \text{បើ } x<0\\ 0 & \text{បើ } x=0\\ -f(x) & \text{បើ } x>0\end{cases}$

បង្ហាញថា f គូហើយសង់ខ្សែកោង (I) ត្រង់ f ។

៣.ក. គណនា $I(\alpha)=\displaystyle\int_{\alpha}^{e^{-\frac{1}{2}}}\left(\frac{x}{2}+x\ln x\right)dx,\ 0<\alpha<e^{-\frac{1}{2}}$ ។

ខ. ទាញរកផ្ទៃក្រឡា $A(\alpha)$ កំណត់ដោយ $(C),(I)$ និងបន្ទាត់ $x=\alpha$ ។

គ. គណនា $\lim\limits_{\alpha\to 0^+}A(\alpha)$ ។

៦.ក.ដោយប្រើភាពផតនៃ $f(x)=\ln x$ បង្ហាញថា៖

$(\alpha).\ \forall a,b>0:\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

$(\beta).\ \forall a_1,a_2,\ldots,a_n>0:\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots a_n}$

$(\gamma).$ បើ $p,q>0:\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1\Rightarrow\forall a,b>0:ab\leq\dfrac{a^p}{p}+\dfrac{a^q}{q}\ (1)$

ខ.ដោយប្រើ (1) បង្ហាញថាវិសមភាព *Hölder* ៖

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i||b_i|\leq\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}\text{ បើ } p,q>1:\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

គ.ដោយប្រើវិសមភាពHolderបង្ហាញវិសមភាពMinkovski៖

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ p>1$$

៧. ដោយប្រើរូបមន្តឌីផេរ៉ង់ស្យែលលោការីតគណនា $\dfrac{dy}{dx}$ ៖

$(a).\ y=x\sqrt{x^2+1},x>0$ $\qquad$ $(b).\ y=\sqrt{x^2(x+1)(x+2)},\ x>0$

$(c).\ y=\dfrac{x^2\sqrt{3x-2}}{(x+1)^2},\ x>\dfrac{2}{3}$ $\qquad$ $(d).\ y=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}},\ x>1$

$(e).\ y=\dfrac{x(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x+1}},\ x>1$ $\qquad$ $(f).\ y=\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)},x>2$

៨. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម៖

$(a).\int\frac{(\ln x)^2}{x}dx$ $(b).\int\frac{1}{x\ln x^3}dx$

$(c).\int\frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$ $(d).\int\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)}dx$

$(e).\int\frac{1}{1+\sqrt{2x}}dx$ $(f).\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}dx$

$(g).\int\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-3}dx$ $(h).\int\frac{\sec x\tan x}{\sec x-1}dx$

$(i).\int\frac{4x^3+3}{x^4+3x}dx$ $(j).\int\frac{x^2-2x}{x^3-3x^2}dx$

$(k).\int\frac{x^2-4}{x}dx$ $(l).\int\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx$

$(m).\int\frac{x^2+2x+3}{x^3+3x^2+9x}dx$ $(n).\int\frac{x(x+2)}{x^3+3x^2-4}dx$

$(o).\int\frac{x^2-3x+2}{x+1}dx$ $(p).\int\frac{2x^2+7x-3}{x-2}dx$

$(q).\int\frac{x^3-3x^2+5}{x-3}dx$ $(r).\int\frac{x^3-6x-20}{x+5}dx$

$(s).\int\frac{x^4+x-4}{x^2+2}dx$ $(t).\int\frac{x^3-3x^2+4x-9}{x^2+3}dx$

៩. គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ខាងក្រោម៖

$(a).\int_0^4\frac{5}{3x+1}dx$ $(b).\int_{-1}^1\frac{1}{2x+3}dx$

$(c).\int_1^2\frac{1-\cos\theta}{1-\sin\theta}d\theta$ $(d).\int_{0.1}^{0.2}(\csc 2\theta-\cot 2\theta)^2\,d\theta$

$(e).\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\csc x-\sin x)dx$ $(f).\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\cos x}dx$

$(g).\int_1^e\frac{(1+\ln x)^2}{x}dx$ $(h).\int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx$

$(i).\int_0^2\frac{x^2-2}{x+1}dx$ $(j).\int_0^1\frac{x-1}{x+1}dx$

១០. ចូររកតម្លៃនៃ x បើ $\int_1^x\frac{3}{t}dt=\int_{\frac{1}{4}}^x\frac{1}{t}dt$ ។

១១. ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ ជាប់នៅលើចន្លោះ $[0,\infty)$ ។

ក. ចូររកផ្ទៃក្រឡាដែលខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ f ជាមួយបន្ទាត់ $y=\dfrac{1}{2}x$ ។

ខ. ចូរកំណត់តម្លៃមេគុណប្រាប់ទិស m ដែលបន្ទាត់ $y=mx$ និងក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ f ព័ទ្ធជុំវិញដែនបិទជិត។

គ.ចូរគណនាផ្ទៃក្រឡានៃដែននេះជាអនុគមន៍នៃ m ។

១២.វិសមភាពNapier៖ ចំពោះ $0<x<y$ បង្ហាញថា $\dfrac{1}{y}<\dfrac{\ln y-\ln x}{y-x}<\dfrac{1}{x}$ ។

១៣. បង្ហាញវិសមភាពខាងក្រោម៖

$(a)\quad \ln x\le\dfrac{x}{e},\ x>0$

$(b)\quad \dfrac{x}{x+1}\le\ln(1+x)\le x,\ x>-1$

$(c)\quad \dfrac{a-b}{a}\le\ln\dfrac{a}{b}\le\dfrac{a-b}{b},0<a<b$

មេរៀនទី២៖ អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

២.១. អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលគោលe

ក.និយមន័យ៖ គេដឹងថា $\ln:\mathbb{R}_+^* = (0,+\infty)$ នោះ $\mathbb{R}$ ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ មានន័យថាវាមានអនុវត្តន៍ច្រាស។

ឧទាហរណ៍១៖ គេមានអនុវត្តន៍ $\mathbb{R} \to (0,+\infty)$

$$\mathbb{R} \mapsto y = \exp(x) \Leftrightarrow x = \ln y$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{\begin{array}{l}\exp(\ln y) = y \\ \ln(\exp(x)) = x\end{array}}$ $\begin{array}{l}, \forall y > 0 \\ , \forall x \in \mathbb{R}\end{array}$

$\ln 1 = 0 \Leftrightarrow \exp(0) = 1$

$\ln e = 1 \Leftrightarrow \exp(1) = e$

ខ.លក្ខណៈគ្រឹះ

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : \boxed{\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1) \times \exp(x_2)}$

ព្រោះ៖

$$\begin{cases} y_1 = \exp(x_1) \Leftrightarrow x_1 = \ln y_1 \\ y_2 = \exp(x_2) \Leftrightarrow x_2 = \ln y_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow x_1 + x_2 = \ln y_1 + \ln y_2 = \ln y_1 \cdot y_2$

$\Rightarrow y_1 \cdot y_2 = \exp(x_1 + x_2)$

$\Rightarrow \exp(x_1) \times \exp(x_2) = \exp(x_1 + x_2)$

វិបាក៖

$i.$ $\boxed{\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}}$

ព្រោះ៖ $1 = \exp(0) = \exp(x + (-x)) = \exp(x) \times \exp(-x)$

$ii.$ $\boxed{\exp(x_1 - x_2) = \dfrac{\exp(x_1)}{\exp(x_2)}}$

ព្រោះ៖ $\exp(x_1 - x_2) = \exp(x_1 + (-x_2)) = \exp(x_1) \times \exp(-x_2) = \dfrac{\exp(x_1)}{\exp(x_2)}$

$iii.$ $\boxed{\exp(nx) = [\exp(x)]^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

សម្រាយបញ្ជាក់

ដោយប្រើវិចារតាមកំណើន

– បើ $n = 2$: $\exp(2x) = \exp(x + x) = [\exp(x)]^2$ ពិត

– ឧបមាថាវាពិតរហូតដល់ n នោះយើងនឹងស្រាយឱ្យពិតរហូតដល់ $n+1$ គឺស្រាយថា $\exp((n+1)x) = [\exp(x)]^{n+1}$ គេបាន៖

$$\exp((n+1)x)=\exp(nx+x)=\exp(nx)\times\exp(x)$$
$$=[\exp(x)]^{n}\times\exp(x)=[\exp(x)]^{n+1}\text{ ពិត}$$

ជាទូទៅបើ $r\in\mathbb{Q}$, $\boxed{\exp(rx)=[\exp(x)]^{r}}$, $r=\dfrac{k}{n}$

សម្រាយបញ្ជាក់

– $\forall n\in\mathbb{N},\ \exp(-nx)=\exp(n(-x))=[\exp(-x)]^{n}=\left[\dfrac{1}{\exp(x)}\right]^{n}=[\exp(x)]^{-n}$

$\Rightarrow \forall k\in\mathbb{Z},\exp(kx)=[\exp(x)]^{k}$

– $\forall n\in\mathbb{N}^{*},\exp(x)=\exp\left(n\times\dfrac{x}{n}\right)=\left[\exp\left(\dfrac{1}{n}x\right)\right]^{n}$

$\Rightarrow \exp\left(\dfrac{1}{n}x\right)=[\exp(x)]^{\frac{1}{n}}$

វិបាក៖ $\forall r\in\mathbb{Q},r=\dfrac{k}{n},\ k\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}^{*}$

$$\Rightarrow \exp(rx)=\exp\left(k\times\frac{x}{n}\right)=\left[\exp\left(\frac{x}{n}\right)\right]^{k}$$
$$=\left[(\exp(x))^{\frac{1}{n}}\right]^{k}$$
$$=[\exp(x)]^{\frac{k}{n}}$$
$$=[\exp(x)]^{r}$$

ដោយយក $x=1$ គេបាន៖

$\exp(rx)=\exp(r\cdot 1)=[\exp(1)]^{r}=e^{r}$

ដូច្នេះ $\forall r\in\mathbb{Q},\exp(r)=e^{r}$ ។

គេកំណត់សរសេរដោយ៖ $\forall x\in\mathbb{R}:\ \boxed{\exp(x)=e^{x}}$

វិបាក៖

$i).\ \boxed{\begin{array}{l} e^{\ln y}=y \\ \ln e^{x}=x\end{array}}\begin{array}{l}, y>0\\ ,x\in\mathbb{R}\end{array}$

$ii).\ \boxed{e^{0}=1,\ e^{1}=e}$

$iii).\ \boxed{\begin{array}{l} e^{x_1+x_2}=e^{x_1}\times e^{x_2} \\ e^{-x}=\dfrac{1}{e^{x}} \\ e^{x_1-x_2}=\dfrac{e^{x_1}}{e^{x_2}}\end{array}}$

iv). $\boxed{e^{rx}=\left(e^{r}\right)^{x}}$, $\forall r\in\mathbb{Q}$

គ. សិក្សា $f(x)=e^{x}$

តាមនិយមន័យគេបាន៖

$$\boxed{\begin{cases} y=e^{x} \\ x\in\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\ln y \\ y>0 \end{cases}}$$

ដូច្នេះ i). $f(x)=e^{x}$ ជាអនុគមន៍វិជ្ជមានលើ $\mathbb{R}$

ii). $f'(x)=\left(e^{x}\right)'=y'_x=\dfrac{1}{x'_y}=\dfrac{1}{(\ln y)'_y}=\dfrac{1}{\frac{1}{y}}=y=e^{x}>0$

ដូចនេះ $\boxed{\left(e^{x}\right)'=e^{x}}$ ហើយ f កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ។

iii). លីមីត

* $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty}$

ព្រោះ៖ $y=e^{x}\Leftrightarrow x=\ln y$

តែ $\lim\limits_{y\to+\infty}\ln y=+\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$

* $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0}$

ព្រោះ៖បើ $X=-x$ គេបាន៖

$$\lim_{x\to-\infty}e^{x}=\lim_{X\to+\infty}e^{-X}=\lim_{X\to+\infty}\frac{1}{e^{X}}=0$$

គេបានតារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	1	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

* ខ្សែកោង

– ត្រង់ $A(0,1)$ គេបាន $f'(0)=1$ នោះបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុច A មានសមីការ

– $y-1=x\Leftrightarrow y=x+1$ ។

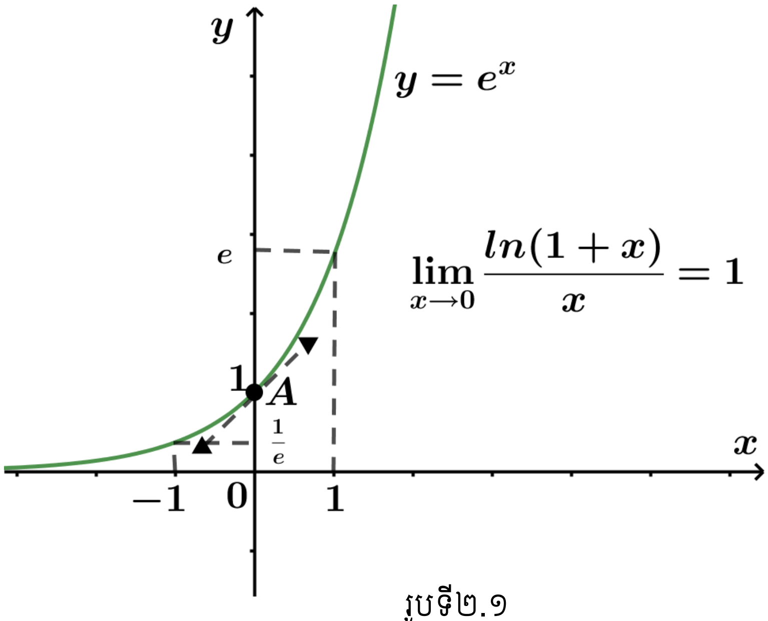
– $f''(x)=\left(e^{x}\right)'=e^{x}>0$ នោះគេបាន f ជាអនុគមន៍ប៉ោង

– អ័ក្ស (Ox) ជាអាស៊ីមតូតដេកខាង $-\infty$

–

– ចំណុចជំនួយ

x	-1	1
y	$\frac{1}{e}$	e



រូបទី២.១

ឃ. លីមីតរាងមិនកំណត់

$i).$ $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

សម្រាយបញ្ជាក់

គេបាន $f(x)=e^x \Rightarrow f'(x)=e^x$

$\Rightarrow f'(0)=1$

តែ $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$

ជាទូទៅ $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{ax}\times a=a$ ។

$ii).$ $\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to +\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to +\infty}xe^{-x}=0$

ជាទូទៅៈ $\forall\alpha>0,$ $\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=+\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to +\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}=0$

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង $y=e^x \Leftrightarrow x=\ln y$

$\Rightarrow \lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x}=\lim_{y\to +\infty}\frac{y}{\ln y}=+\infty$

និង $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{(\ln y)^\alpha}=+\infty$

$iii).$ $\boxed{\lim_{x\to-\infty} xe^x=0 \text{ ឬ } \lim_{x\to+\infty} xe^{-x}=0}$

ជាទូទៅ៖ $\forall\alpha>0,$ $\boxed{\lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x}=0}$ ។

ព្រោះបើយើងតាង $X=-x$ គេបាន៖

$\lim_{x\to-\infty} xe^x=\lim_{X\to+\infty}(-X)e^{-X}$

$=\lim_{X\to+\infty}-\frac{X}{e^X}=0$

$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x}=\lim_{X\to-\infty}(-X)^\alpha e^X$

$\lim_{x\to0^+} x\ln x=0$

តាង $y=e^x \Leftrightarrow x=\ln y$

$X\to-\infty \Leftrightarrow y\to0^+$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x}=\lim_{X\to-\infty}(-X)^\alpha e^X$

$=\lim_{y\to0^+}(-\ln y)^\alpha\times y=0$

២.២. អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលគោល $a, a>0, a\neq1$

ក. និយមន័យ៖ ដូចករណីអនុគមន៍ e^x ដែរបើ $a,\ a>0,\ a\neq1$ គេកំណត់៖

$$\boxed{\begin{cases}y=a^x\\x\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\log_a y\\y>0\end{cases}}$$

ដូច្នេះគេបាន៖

$i).$ $\boxed{\begin{matrix}a^{\log_a y}=y\\ \log_a a^x=x\end{matrix}}$ $\begin{matrix}, y>0\\ , x\in\mathbb{R}\end{matrix}$

ជាពិសេស៖ $\boxed{\begin{matrix}a^0=a^{\log_a 1}=1\\ a^1=a^{\log_a a}=a\end{matrix}}$

$ii).$ $\boxed{a^x=e^{x\ln a}}$

សម្រាយបញ្ជាក់

$y=a^x \Leftrightarrow x=\log_a y=\frac{\ln y}{\ln a}$

$\Leftrightarrow \ln y=x\ln a$

$\Leftrightarrow y=e^{x\ln a}$

$\Leftrightarrow a^x=e^{x\ln a}$

វិបាក៖

$$a^{x+y}=a^x\cdot a^y$$
$$a^{-x}=\frac{1}{a^x}$$
$$a^{x-y}=\frac{a^x}{a^y}$$
$$\left(a^x\right)^r=a^{rx},\ \forall r\in\mathbb{Q}$$

រូបមន្តទូទៅ៖

$i).$ $\left(a^x\right)^\alpha=a^{\alpha x}$, $x\in\mathbb{R},\ \alpha\in\mathbb{R}$

$\log_a x^\alpha=\alpha\log_a x$, $x>0,\ \alpha\in\mathbb{R}$

សម្រាយបញ្ជាក់

$i).$ តាង $y=\left(a^x\right)^\alpha$, $z=a^{\alpha x}$

គេបាន៖

$$\begin{cases}\log_a y=\log_a\left(a^x\right)^\alpha=\log_a a^x\cdot\log_{a^x}\left(a^x\right)^\alpha=x\cdot\alpha\\ \log_a z=\log_a a^{\alpha x}=\alpha x\end{cases}$$

$\Rightarrow y=z$

$ii).$ តាង $y=\log_a x^\alpha$, $z=\alpha\log_a x$

គេបាន ៖ $\begin{cases}a^y=a^{\log_a x^\alpha}=x^\alpha\\ a^z=a^{\alpha\log_a x}=\left(a^{\log_a x}\right)^\alpha=x^\alpha\end{cases}$

$\Rightarrow y=z$

វិបាក៖

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

ព្រោះ៖ $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}=e^1=e$

វិបាក៖ $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

$$\lim_{x\to0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left[(1+ax)^{\frac{1}{ax}}\right]^a=e^a$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

ខ.សិក្សាអនុគមន៍ $y = a^x$

⊕ ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}$

⊕ $a>0, a\neq 1, a^x>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

⊕ ដេរីវេ

$$y'=\left(a^x\right)'=\left(e^{x\ln a}\right)'=e^{x\ln a}\cdot\ln a = a^x\ln a$$

$$\boxed{\left(a^x\right)'=a^x\ln a}$$

y' មានសញ្ញាដូច $\ln a$ គឺ៖

+ករណី $a>1$ នោះ $y'>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ (ព្រោះ $\ln a>0$)

+ករណី $0<a<1$ នោះ $y'<0, \forall x\in\mathbb{R}$ (ព្រោះ $\ln a<0$)

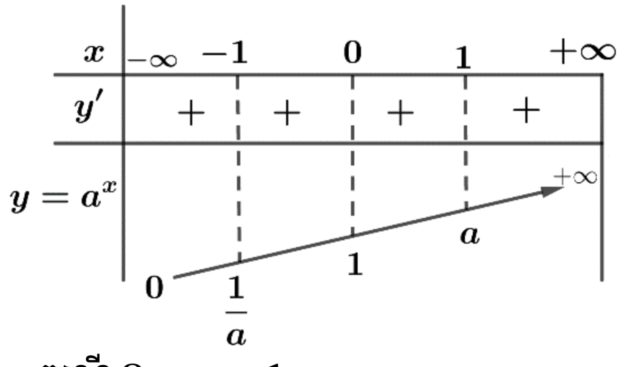
⊕ លីមីត

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln a} = \begin{cases} +\infty & \text{បើ } a>1 \\ 0 & \text{បើ } 0<a<1 \end{cases}$$

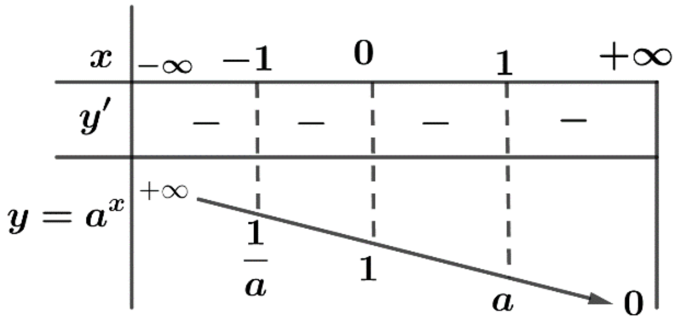
$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} e^{x\ln a} = \begin{cases} 0 & \text{បើ } a>1 \\ +\infty & \text{បើ } 0<a<1 \end{cases}$$

⊕ **តារាងអថេរភាព និងខ្សែកោង**

- ករណី $a>1$

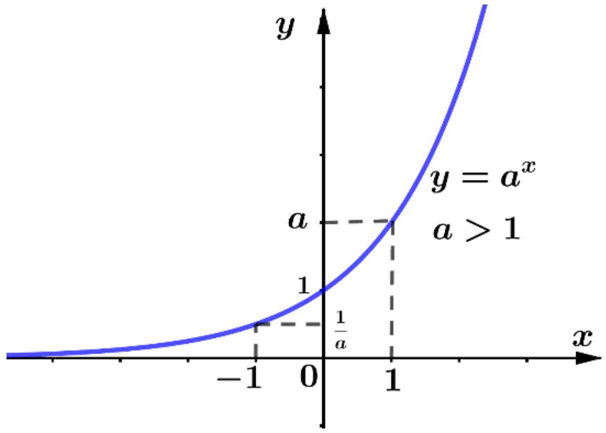


- ករណី $0<a<1$



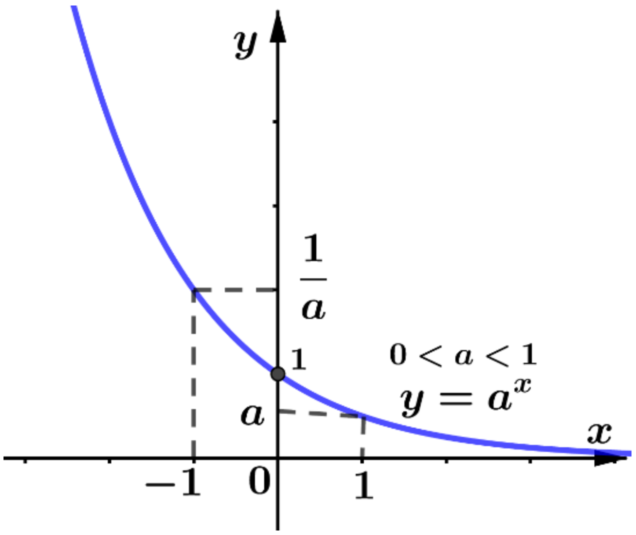
⊕ **ខ្សែកោង**

- ករណី $a>1$



រូបទី២.២

- ករណី $0<a<1$



រូបទី២.៣

២.៣. អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលទូទៅ

ក. អនុគមន៍ស្វ័យគុណ

បើ $\alpha\in\mathbb{R}^*$ គេសិក្សាអនុគមន៍ $f(x)=x^\alpha, x>0$ គេបាន៖

- $f(x)=x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$

$$\Rightarrow f'(x)=\left(e^{\alpha\ln x}\right)'=e^{\alpha\ln x}\times\frac{\alpha}{x}=\alpha\cdot\frac{x^\alpha}{x}=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$$

ដូចនេះ $\boxed{\left(x^\alpha\right)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}}$

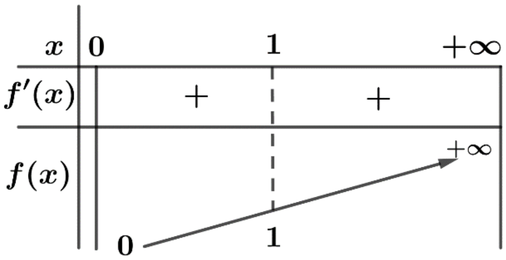
- ដោយ $x>0$ គេបាន f' មានសញ្ញាដូច α

- $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\alpha \ln x} = \begin{cases} 0 & \text{បើ}\ \alpha > 0 \\ +\infty & \text{បើ}\ \alpha < 0 \end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{\alpha \ln x} = \begin{cases} +\infty & \text{បើ}\ \alpha > 0 \\ 0 & \text{បើ}\ \alpha < 0 \end{cases}$

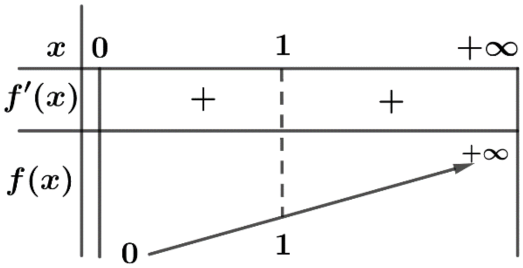
- តារាងអថេរភាព និងខ្សែកោង

  \+ ករណី $\alpha > 0$

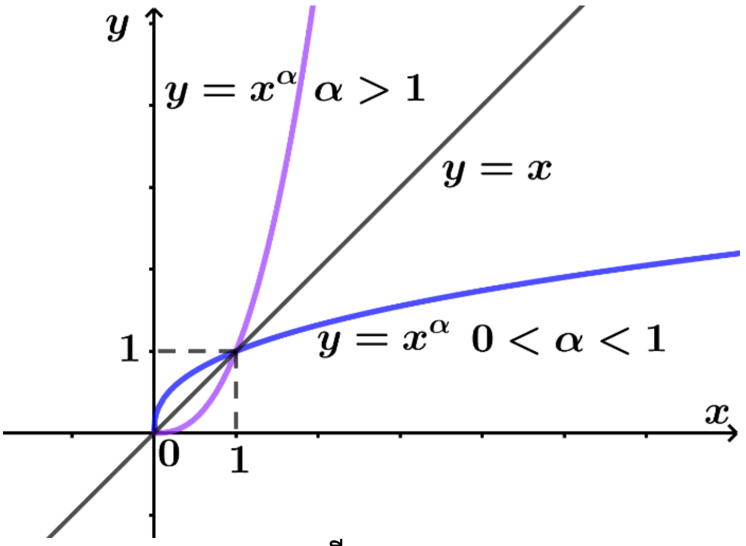


$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \alpha . e^{(\alpha-1)\ln x} = \begin{cases} 0 & \text{បើ}\ \alpha > 1 \\ +\infty & \text{បើ}\ 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

  \+ ករណី $0 < \alpha < 1$



⊕ ខ្សែកោង



រូបទី២.៤

ខ.អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលទូទៅ

អនុគមន៍មានរាង $f(x)=\left[u(x)\right]^{v(x)}$ មានន័យកាលណា $u(x)>0$ ដើម្បីសិក្សាគេសរសេរ f ជារាង $f(x)=e^{v(x)\ln u(x)}$ ចំពោះលីមីតគេដោះស្រាយរាងមិនកំណត់ $0\times\infty$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង(C)តាងអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

$(i).\ f(x)=x^x=e^{x\ln x}$

+ $D=(0,+\infty)$

+ $f'(x)=\left(e^{x\ln x}\right)'=e^{x\ln x}\times(\ln x+1)$

  $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $\ln x+1$

  $f'(x)=0\Rightarrow \ln x+1=0\Leftrightarrow \ln x=-1\Rightarrow x=\dfrac{1}{e}$

  $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=e^{\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}}=e^{-\frac{1}{e}}$

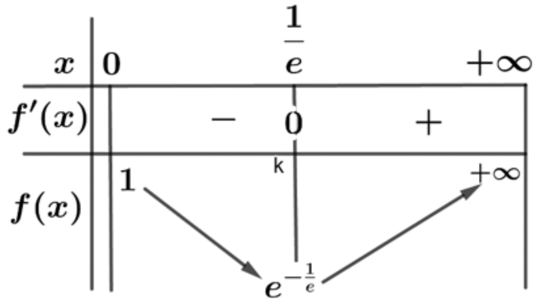
  $f'(x)>0\Leftrightarrow \ln x+1>0\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{e}$

  $f'(x)<0\Leftrightarrow \ln x+1<0\Leftrightarrow x<\dfrac{1}{e}$

+ $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x}=e^0=1$

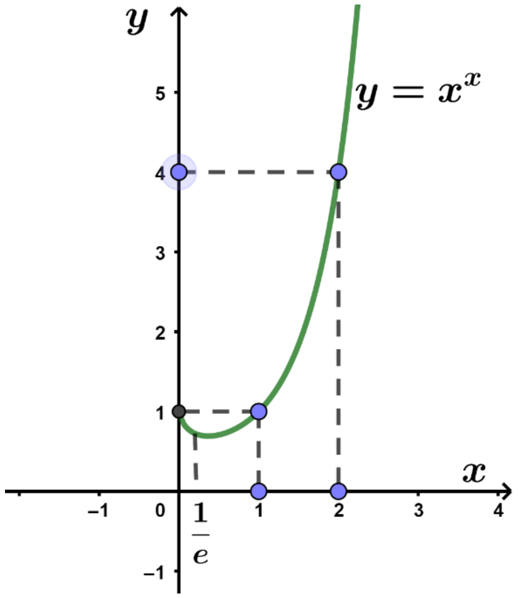
+ $\lim\limits_{x\to +\infty} x^x=+\infty$

តារាងអថេរភាព



+ ខ្សែកោង
+ ចំណុចតិចទៀននៃ $f'(x)$
+ $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x}(\ln x+1)=-\infty$
+ នោះខាងស្តាំ $A(0,1)$ ខ្សែកោងប៉ះនឹង (Oy)
+ ចំណុចជំនួយ

x	$\frac{1}{2}$	1	2
y	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	4



រូបទី២.៥

(ii). $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$

+ $D = (-1, +\infty) - \{0\}$

+ $f'(x) = \left(e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}\right)' = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} \cdot \dfrac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = \dfrac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}}{(1+x)x^2} \times \left[x - (1+x)\ln(1+x)\right]$

+ f' មានសញ្ញាដូច $g(x) = x - (1+x)\ln(x+1)$

  គេបាន $g'(x) = 1 - \ln(1+x) - 1 = -\ln(1+x)$

  – បើ $x > 0 \Rightarrow \ln(1+x) > 0 \Rightarrow g'(x) < 0$

  – បើ $x < 0 \Rightarrow \ln(1+x) < 0 \Rightarrow g'(x) > 0$

តារាងសញ្ញាដេរីវេនៃ $g'(x)$

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$-$	
$g(x)$		↗	0	↘	

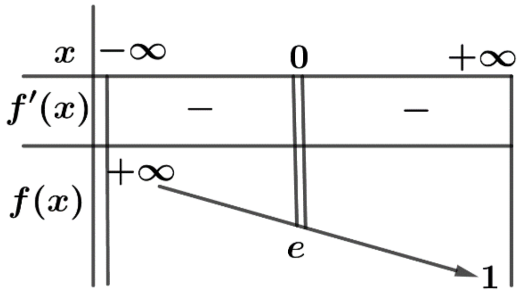
$\Rightarrow f'(x) < 0, \forall x \in D$

+ $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = +\infty$

+ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e$

$+\quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = 1$

តារាងអថេរភាព



$+$ ខ្សែកោង(C)

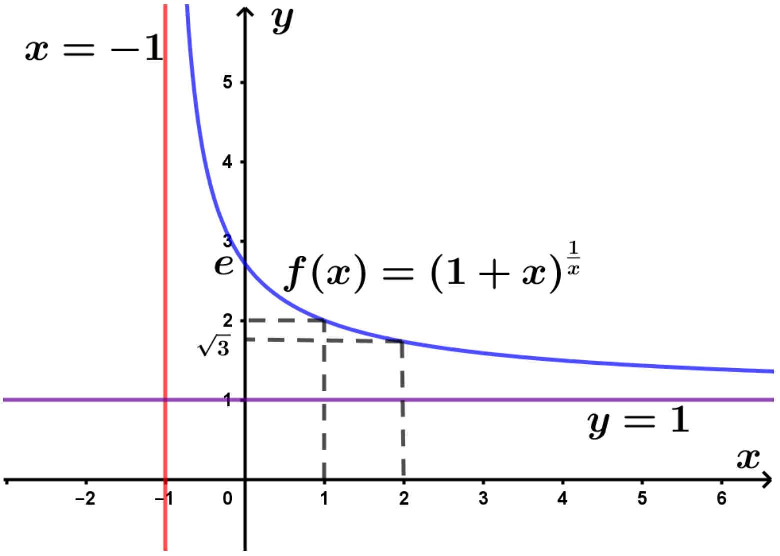
- f អាចបន្លាយជាប់ត្រង់ 0 ដោយយក $f(0)=e$

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1+x)}{2x} = -\frac{1}{2}$$

- បន្ទាត់ $x=-1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ
- បន្ទាត់ $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេក
- ចំណុចជំនួយ

x	$-\frac{1}{2}$	1	2
y	4	2	$\sqrt{3}$



រូបទី២.៦

លំហាត់អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

១. គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

$$a).\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+...+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}\ ,\ a_1,a_2,...,a_n>0$$

$$b).\ \lim_{n\to+\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)$$

$$c).\ \lim_{x\to a}\left(\frac{x^x-a^a}{x-a}\right),\ a>0$$

$$d).\ \lim_{x\to a}\frac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}$$

$$e).\ \lim_{x\to 1^+}(\ln x)^{x-1}$$

$$f).\ \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$g).\ \lim_{x\to\pm\infty}\left[(x+1)e^{\frac{1}{x+1}}-xe^{\frac{1}{x}}\right]$$

២. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង (C) តាង៖

$a).\ y=x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ $\qquad$ $b).\ y=\begin{cases}\frac{e^x-1}{xe^{2x}} & \text{បើ } x>0\\ 1 & \text{បើ } x=0\end{cases}$

$c).\ y=\frac{e^{\frac{1}{1-x^2}}}{1+x^2}$ $\qquad$ $d).\ y=x+e^{-x}$

$e).\ y=e^{\frac{1}{x}}$ $\qquad$ $f).\ y=\frac{e^x}{x+1}$

$g).\ y=e^{\frac{x-1}{x^2}}$ $\qquad$ $h).\ y=e^{\sin x}$

$i).\ y=(1-x)e^{\frac{1}{x}}$ $\qquad$ $j).\ y=x-1-\frac{2}{e^x-1}$

៣. គេឱ្យ $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{e^x-1}+2 & \text{បើ } x\neq 0\\ 3 & \text{បើ } x=0\end{cases}$

ក. សិក្សាភាពជាប់នៃ f ត្រង់ 0 ។

ខ. បង្ហាញថា៖

$\frac{x^2}{2}\le e^x-1-x\le\frac{x^2}{2}+e\frac{x^3}{6}$ បើ $x\in[0,1]$ និង $\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\le e^x-1-x\le\frac{x^2}{2}$ បើ $x\le 0$ ទាញបញ្ជាក់

ថា f មានដេរីវេត្រង់ 0 ហើយ $f'(0)=-\frac{1}{2}$ ។

គ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង (C) តាង f ។

៤. សិក្សាភាពជាប់ និងមានដេរីវេនៃ f ត្រង់ $x=0$ ៖

ក. $f(x)=\begin{cases}\ln\left(1+e^{\frac{1}{x^2}}\right) & \text{បើ } x\neq 0\\ 0 & \text{បើ } x=0\end{cases}$

ខ. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{បើ } x\neq 0\\ 0 & \text{បើ } x=0\end{cases}$

៥.គេឱ្យ $f_n(x)=x^n e^x$ មានខ្សែកោង C_n ៖

ក.សង់ C_1, C_2, C_3

ខ.គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយខ្សែកោងទាំងបីជាមួយអ័ក្ស (Ox) ចំពោះ $x\leq 0$ ។

៦. បើ $f(x)=x^{n-1}\cdot e^{\frac{1}{x}}$ បង្ហាញថា $f_n^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\cdot e^{\frac{1}{x}}$ ។

៧.រកដេរីវេទី n នៃ $f(x)=e^x\cos x$ ។

មេរៀនទី៣៖ អនុគមន៍អ៊ីពែបូលិកផ្ទាល់ និងច្រាស

៣.១. អនុគមន៍អ៊ីពែបូលិកផ្ទាល់

ក.និយមន័យ៖

ទ្រឹស្តីបទ៖ គ្រប់អនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ អាចសរសេរជាផលបូកអនុគមន៍គូ និងអនុគមន៍សេស។

សម្រាយបញ្ជាក់

ឧបមាថា $f(x)=P(x)+I(x)$, ដែល P ជាអនុគមន៍គូ និង I ជាអនុគមន៍សេស

គេបាន $f(-x)=P(-x)+I(-x)=P(x)-I(x)$

ដូចនេះ $\begin{cases} f(x)=P(x)+I(x) \\ f(-x)=P(x)-I(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2} \\ I(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2} \end{cases}$

ប្រាសមកវិញគេបាន $f(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}+\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$

អនុវត្តន៍ទ្រឹស្តីបទនេះចំពោះ $f(x)=e^x$ គេបាន៖

$e^x=\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x$, ch ឬ cosh ជាអនុគមន៍គូហៅថា **កូស៊ីនុសអ៊ីពែបូលិក** និង sinh ឬ sh ជាអនុគមន៍សេសហៅថា **ស៊ីនុសអ៊ីពែបូលិក** គេបាន៖

$$\begin{cases} \operatorname{ch}x=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2} \\ \operatorname{sh}x=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2} \end{cases}$$

គេកំណត់អនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក ពីរទៀតគឺ

$\begin{cases} \operatorname{th}x=\dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \\ \operatorname{coth}x=\dfrac{1}{\operatorname{th}x}=\dfrac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}=\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} \end{cases}$, ដែល tanh ជាអនុគមន៍តង់សង់អ៊ីពែបូលិក និង coth ជាអនុគមន៍កូតង់សង់អ៊ីពែបូលិក។

ខ.ទំនាក់ទំនងរវាងអនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក

គេបាន៖ $\begin{cases} \operatorname{Ch}x+\operatorname{Sh}x=e^x \\ \operatorname{Ch}x-\operatorname{Sh}x=e^{-x} \end{cases}$

$\Leftrightarrow (\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x)(\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x)=e^x\cdot e^{-x}=1$

នោះគេបាន $\boxed{\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1}$ (1)

រំលឹក៖

$$\frac{1}{\cosh^2 x}=\frac{\cosh^2 x-\sinh^2 x}{\cosh^2 x}=1-\tanh^2 x$$
$$\frac{1}{\sinh^2 x}=\frac{\cosh^2 x-\sinh^2 x}{\sinh^2 x}=\coth^2 x-1 \qquad (2)$$

រូបមន្តផលបូក

គេបាន $e^{a+b}=e^a\times e^b$

$\Leftrightarrow \cosh(a+b)+\sinh(a+b)=(\cosh a+\sinh a)(\cosh b+\sinh b)$

$=(\cosh a\cosh b+\sinh a\sinh b)+(\sinh a\cosh b+\sinh b\cdot\cosh a)$

ដោយផ្ទឹមផ្នែកគូ និងផ្នែកសេសគេបានរូបមន្តផលបូក៖

$$\cosh(a+b)=\cosh a\cosh b+\sinh a\sinh b$$
$$\sinh(a+b)=\sinh a\cdot\cosh b+\sinh b\cdot\cosh a \qquad (3)$$

ជំនួស b ដោយ $-b$ គេបាន៖

$$\cosh(a-b)=\cosh a\cdot\cosh b-\sinh a\sinh b$$
$$\sinh(a-b)=\sinh a\cosh b-\sinh b\cosh a \qquad (4)$$

និង

$$\tanh(a+b)=\frac{\sinh a\cosh b+\sinh b\cosh a}{\cosh a\cosh b+\sinh b\cosh a}=\frac{\tanh a+\tanh b}{1+\tanh a\tanh b}$$
$$\tanh(a-b)=\frac{\tanh a-\tanh b}{1-\tanh a\tanh b}$$

<u>រូបមន្តផលគុណ</u>

ក្នុង (3) យក $a=b$ គេបាន៖

$$\cosh 2a=\cosh^2 a+\sinh^2 a=2\sinh^2 a+1=2\cosh^2 a-1$$
$$\sinh 2a=2\sinh a\cdot\cosh a$$
$$\tanh 2a=\frac{2\tanh a}{1+\tanh^2 a} \qquad (5)$$

ជាទូទៅគេគណនា $\cosh na$ និង $\sinh na$ តាមរូបមន្ត៖

$$e^{na}=(e^a)^n=(\cosh a+\sinh a)^n$$

$$\Leftrightarrow \cosh na+\sinh na=(\cosh a+\sinh a)^n$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cosh na=\mathscr{P}\left[(\cosh a+\sinh a)^n\right] & ,(\mathscr{P}\text{ គូ})\\ \sinh na=\Im\left[(\cosh a+\sinh a)^n\right] & ,(\Im\text{ សេស})\end{cases}$$

ឧទាហរណ៍១៖ ពន្លាតកន្សោម $(\cosh a+\sinh a)^3$ និង $(\operatorname{osh} a+\sinh a)^4$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងបាន $(\cosh a+\sinh a)^3=\cosh^3 a+\sinh^3 a+3\cosh^2 a\sinh a+3\cosh a\sinh^2 a$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cosh 3a=\cosh^3 a+3\cosh a\sinh^2 a=4\cosh^3 a-3\cosh a\\ \sinh 3a=3\cosh^2 a\sinh a+\sinh^3 a=4\sinh^3 a+3\sinh a\end{cases}$$

- $(\cosh a+\sinh a)^4=\cosh^4 a+\sinh^4 a+4\cosh^3 a\sinh a+6\cosh^2 a\sinh^2 a+4\cosh a\sinh^3 a$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cosh 4a=\cosh^4 a+6\cosh^2 a\sinh^2 a+\sinh^4 a=8\sinh^4 a-8\cosh^2 a+1\\ \sinh 4a=4\cosh^3 a\sinh a+4\cosh a\sinh^3 a=2\sinh 2a\cosh 2a\end{cases}$$

រូបមន្តលីនេអ៊ែរកម្ម៖

$$\begin{cases}\cosh^n x=\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^n\\ \sinh^n x=\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^n\end{cases}$$

ឧទាហរណ៍២៖ $\sinh^3 x=\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}\left(e^{3x}-3e^{x}+3e^{-x}-e^{-3x}\right)$

$$=\frac{1}{8}\left[\left(e^{3x}-e^{-3x}\right)-3\left(e^{x}-e^{-x}\right)\right]=\frac{1}{4}\left(\text{sh}\,3x-3\,\text{sh}\,x\right)$$

$$\cosh^4 x=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^4=\frac{1}{16}\left(e^{4x}+4e^{2x}+6+4e^{-2x}+e^{-4x}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(\cosh 4x+4\cosh 2x+3\right)$$

រូបមន្តនៃ $t=\text{th}\,\dfrac{x}{2}$

តាមរូបមន្ត (5) គេបាន៖

$$\cosh x=\cosh^2\frac{x}{2}+\sinh^2\frac{x}{2}=\frac{\cosh^2\frac{x}{2}+\sinh^2\frac{x}{2}}{\cosh^2\frac{x}{2}-\sinh^2\frac{x}{2}}=\frac{1+t^2}{1-t^2}$$

$$\sinh x=2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}=\frac{2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}}{\cosh^2\frac{x}{2}-\sinh^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1-t^2},\quad \tanh x=\frac{2t}{1+t^2}\qquad(6)$$

គ. សិក្សាអនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក

a. **អនុគមន៍** $y=\sin x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

+ $D=\mathbb{R}$

+ $y' = (\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x > 0$

គេបាន $\boxed{(\sinh x)' = \cosh x}$

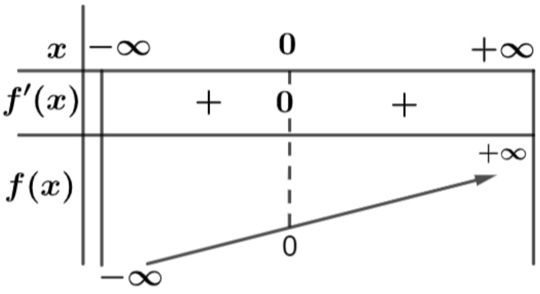
+ y កើនលើ $\mathbb{R}$

$\sinh 0 = 0$

+ $\lim\limits_{x\to-\infty} \sinh x = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\infty$

+ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sinh x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty$

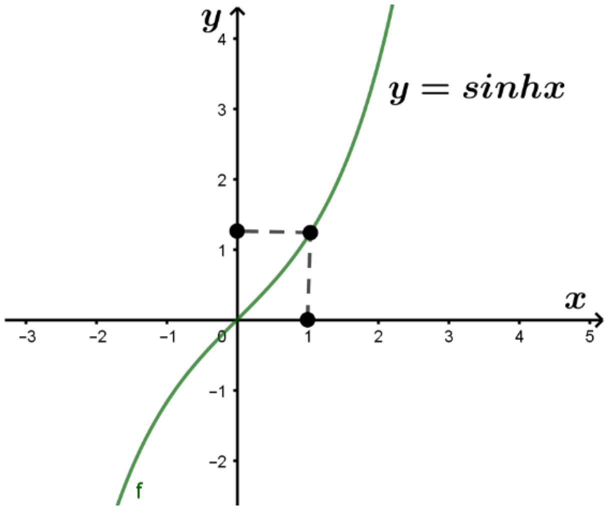
តារាងអថេរភាព



+ ខ្សែកោង

O ជាផ្ចិតឆ្លុះ និងជាចំណុចរបត់

+ $\sinh 1 = \frac{e - e^{-1}}{2} = \frac{e^2 - 1}{2e} = 1.17$



រូបទី៣.១

$b.$អនុគមន៍ $y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

+ $D = \mathbb{R}$

+ $y' = (\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$

$\boxed{(\cosh x)' = \sinh x}$ ឬ $\boxed{(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

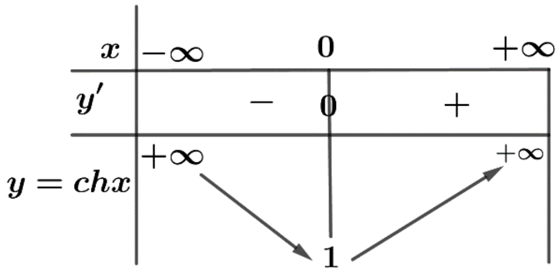
$y' > 0 \Leftrightarrow x > 0$

$y' < 0 \Leftrightarrow x < 0$

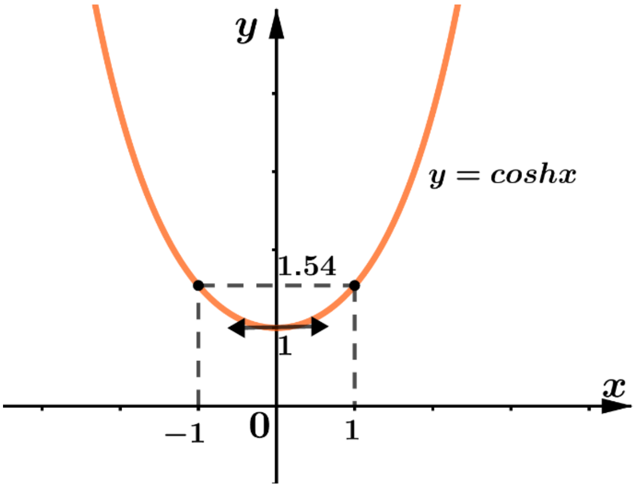
$\cosh 0 = 1$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \cosh x = +\infty$

តារាងអថេរភាព



$$\cosh 1 = \frac{e + e^{-1}}{2} = \frac{e^2 + 1}{2e} = 1.54$$



រូបទី៣.២

$c.$ **អនុគមន៍** $y = \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

$+ \quad D = \mathbb{R}$

$+ \quad y' = \left(\dfrac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \dfrac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \dfrac{1}{\cosh^2 x} > 0$

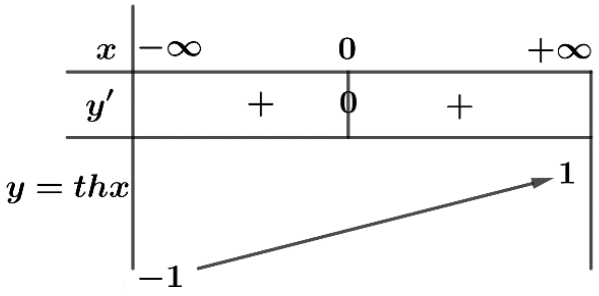
ដូចនេះ: $\boxed{(\tanh x)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x}$

$\tanh 0 = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \tanh x = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = -1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \tanh x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = 1$

តារាងអថេរភាព

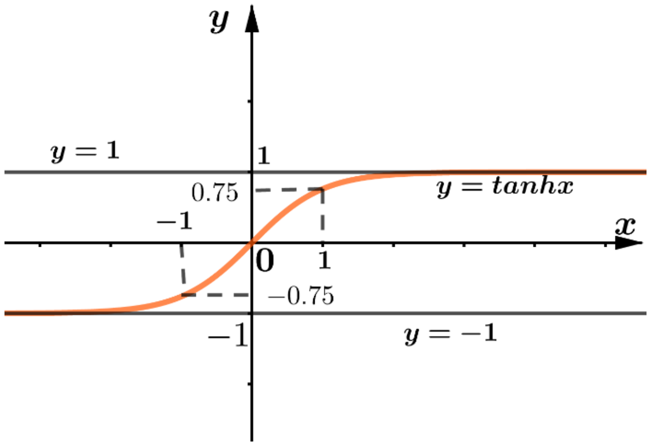


+ ខ្សែកោង

+ បន្ទាត់ $y = \pm 1$ អាស៊ីមតូតដេក

+ O ជាផ្ចិត និងជាចំណុចរបត់

+ $\tanh 1 = \dfrac{e^2-1}{e^2+1} = 0.75$



រូបទី៣.៣

$d.$ **អនុគមន៍** $y = \coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$

+ $D = \mathbb{R} - \{0\}$

+ $y' = \left(\dfrac{\cosh x}{\sinh x}\right)' = \dfrac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = -\dfrac{1}{\sinh^2 x} < 0$

ដូចនេះ $\boxed{(\coth x)' = -\dfrac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x}$

$$\lim_{x\to 0}\coth x=\lim_{x\to 0}\frac{\cosh x}{\sinh x}=\begin{cases}-\infty \text{ បើ } x\to 0^- \\ +\infty \text{ បើ } x\to 0^+\end{cases}$$

$$\lim_{x\to \pm\infty}\coth x=\lim_{x\to \pm\infty}\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}=\begin{cases}-1 \text{ បើ } x\to -\infty \\ 1 \text{ បើ } x\to +\infty\end{cases}$$

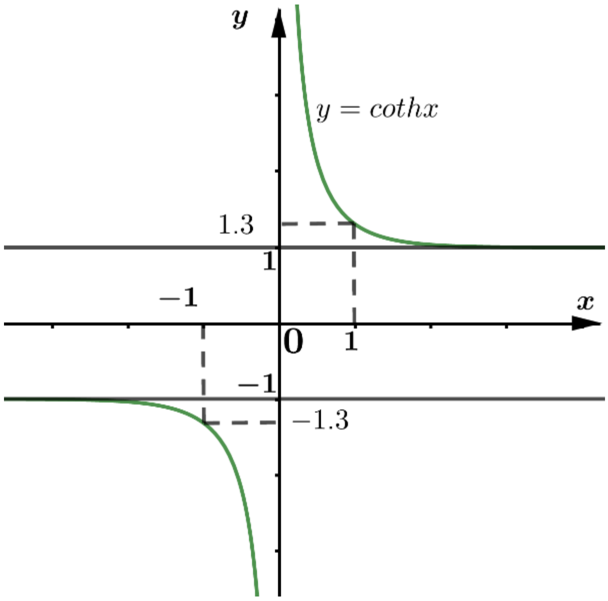
តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
$y=\coth x$	-1 ↘		$-\infty$ || $+\infty$	↘	1

+អ័ក្ស(Oy) ជាអាស៊ីមតូតឈរ

- $y=\pm 1$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

$$\coth 1=\frac{e^2+1}{e^2-1}=1.3$$



រូបទី៣.៤

e). **រូបមន្តដេរីវេ និងអាំងតេក្រាលអនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក**

1). $\frac{d}{dx}(\cosh x)=\sinh x\Rightarrow\int\sinh x\,dx=\cosh x+c$

2). $\frac{d}{dx}(\sinh x)=\cosh x\Rightarrow\int\cosh x\,dx=\sinh x+c$

3). $\frac{d}{dx}(\tanh x)=\operatorname{sech}^2 x\Rightarrow\int\operatorname{sech}^2 x\,dx=\tanh x+c$

4). $\frac{d}{dx}(\coth x)=-\operatorname{csch}^2 x\Rightarrow\int\operatorname{csch}^2 x\,dx=-\coth x+c$

$$5).\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x \Rightarrow \int \operatorname{sech} x \tanh x\, dx = -\operatorname{sech} x + c$$

$$6).\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x \Rightarrow \int \operatorname{csch} x \coth x\, dx = -\operatorname{csch} x + c$$

$$7).\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \int \left(1 - \tanh^2 x\right) dx = \tanh x + c$$

$$8).\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = \int \left(\coth^2 x - 1\right) dx = -\coth x + c$$

$$9).\int \tanh x dx = \int \frac{\sinh x}{\cosh x} dx = \ln \cosh x + c$$

$$10).\int \coth x dx = \int \frac{\cosh x}{\sinh x} dx = \ln|\sinh x| + c$$

សម្រាយបញ្ជាក់

$$10).\int \coth x dx = \int \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} dx$$

$$u = e^{2x} + 1 \Rightarrow du = 2e^{2x} dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2(u-1)}$$

$$\Rightarrow \int \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} dx = \int \frac{u}{u-2} \times \frac{du}{2(u-1)} = \frac{1}{2}\int \frac{u-2+2}{(u-2)(u-1)} du = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u-1} + \int \frac{du}{(u-2)(u-1)}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{u-1} + \int \frac{du}{(u-2)} - \int \frac{du}{u-1} = \frac{1}{2}\ln(u-1) + \ln(u-2) - \ln(u-1) = \ln(u-2) - \ln(u-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \ln \frac{e^{2x}+1-2}{\left(e^{2x}+1-1\right)^{\frac{1}{2}}} = \ln \frac{e^{2x}-1}{e^x} = \ln \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{1}{2}} = \ln \frac{\sinh x}{\frac{1}{2}} = \ln|\sinh x| + c$$

$$\int \coth x dx = \int \frac{\cosh x}{\sinh x} dx = \int \frac{d(\sinh x)}{\sinh x} = \ln|\sinh x| + c$$

ឧទាហរណ៍៣៖ គណនាដេរីវេ និងអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$(a).\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} 3x)$ $\qquad$ $(b).\frac{d^2}{dx^2}(\operatorname{sech} 3x)$

$(c).\int \frac{\operatorname{csch}^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ $\qquad$ $(d).\int_0^{\ln 3} \sinh^3 x \cosh x\, dx$

ដំណោះស្រាយ

$$(a).\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} 3x) = -3\operatorname{sech} 3x \tan 3x$$

$$(b).\frac{d^2}{dx^2}\left(\text{sech}\,3x\right)=\frac{d}{dx}\left(-3\text{sech}\,3x\tanh 3x\right)$$

$$=\underbrace{\frac{d}{dx}\left(-3\text{sech}\,3x\right)}_{9\text{sech}\,3x\tanh 3x}\cdot\tanh 3x+\left(-3\text{sech}\,3x\right)\cdot\underbrace{\frac{d}{dx}\left(\tanh 3x\right)}_{3\text{sech}^2 3x}$$

$$=9\text{sech}\,3x\tanh^2 3x-9\text{sech}^3 3x$$

$$=9\text{sech}\,3x\left(\tanh^2 3x-\text{sech}^2 3x\right)$$

$$c.\int\frac{\text{csch}^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

តាង $u=\sqrt{x}\Rightarrow du=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

$$\int\frac{\text{csch}^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=2\int\text{csch}^2 u\,du$$

$$=-2\coth u+c$$

$$=-2\coth\sqrt{x}+c$$

$$d.\int_0^{\ln 3}\sinh^3 x\cosh x\,dx$$

តាង $u=\sinh x\Rightarrow du=\cosh x\,dx$

បើ $x=0\Rightarrow u=\sinh 0=0$

$$x=\ln 3\Rightarrow u=\sinh\left(\ln 3\right)=\frac{e^{\ln 3}-e^{-\ln 3}}{2}$$

$$=\frac{3-\frac{1}{3}}{2}=\frac{4}{3}$$

$$\int_0^{\ln 3}\sinh^3 x\cosh x\,dx=\int_0^{\frac{4}{3}}u^3du$$

$$=\frac{1}{4}u^4\Big|_0^{4/3}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{4}{3}\right)^4-0^4\right]$$

$$=\frac{64}{81}$$

៣.២. អនុគមន៍អ៊ីពែបូលិកច្រាស

ក. អនុគមន៍ស៊ីនូសអ៊ីពែបូលិកច្រាស

និយមន័យ៖ គេដឹងថាអនុគមន៍ sinh ម៉ូណូតូនកើនដាច់ខាតពី $\mathbb{R}$ ទៅ $\mathbb{R}$ ។

ដូចនេះ វាមានអនុគមន៍ច្រាសតាងដោយ "arcsinh" ឬ "arcsh" ហៅថាអ័ក្សស៊ីនូសអ៊ីពែបូលិកកំណត់ដោយ៖

$\text{argsinh}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto \boxed{y=\text{Arcsinh}\,x \Leftrightarrow x=\sinh y}$

+ដេរីវេ $y'=(\text{Arcsinh}\,x)'=\dfrac{1}{(\sinh y)'}=\dfrac{1}{\cosh y}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0$

$$\boxed{(\text{Arcsinh}\,hx)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

+បំលែងជាកន្សោមនៃ $\ln$ ៖

$y=\text{Arcsh}\,x\Leftrightarrow x=\sinh y=\dfrac{e^{2y}-1}{2e^y}$

$\Leftrightarrow 2xe^y=e^{2y}-1$

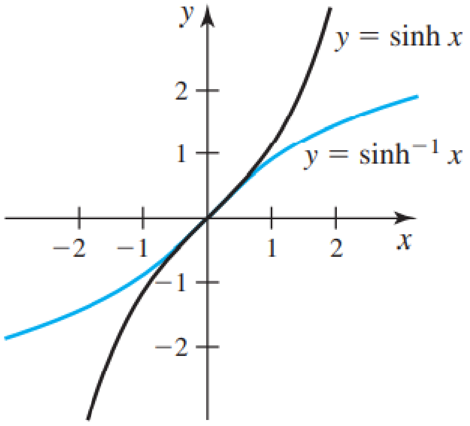
$\Leftrightarrow e^{2y}-2xe^y-1=0$

$\begin{cases} t=e^y>0 \\ t^2-2xt-1=0 \end{cases}$

$\begin{cases} t>0 \\ t=x\pm\sqrt{x^2+1} \end{cases}$

$\Leftrightarrow t=e^y=x+\sqrt{1+x^2}$

$\Leftrightarrow \boxed{y=\text{Arcsh}\,x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}$



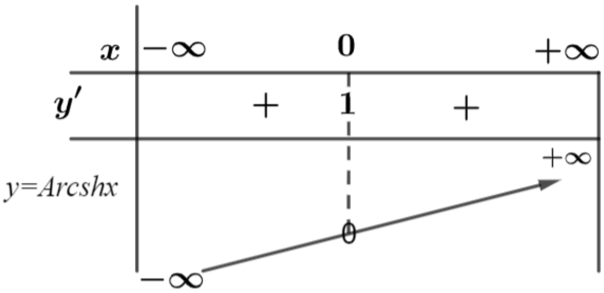
$y=\sinh^{-1}x \Leftrightarrow x=\sinh y$
បើ $-\infty<x<\infty$ និង $-\infty<y<\infty$

រូបទី៣.៥

+លីមីត

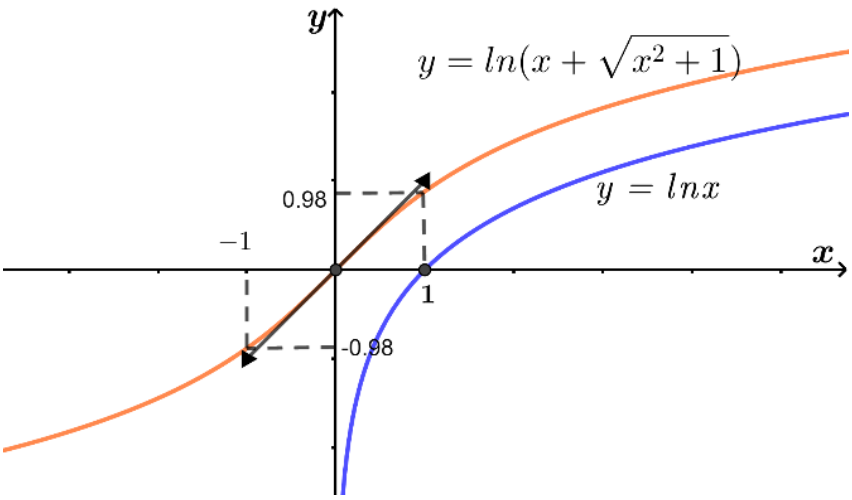
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\text{Arcsh}\,x=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\text{Arcsh}\,x=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=-\infty$

+តារាងអថេរភាព



+ខ្សែកោង O ជាផ្ចិតឆ្លុះនឹងជាចំណុចរបត់ហើយខ្សែកោងប៉ះនិងបន្ទាត់ $y=x$

x	± 1
y	$\operatorname{arcsinh}(\pm 1)=\pm\ln\left(1+\sqrt{2}\pm 0.98\right)$



រូបទី៣.៦

ខ. អនុគមន៍កូស៊ីនូសអ៊ីពែបូលិកច្រាស

⊕ និយមន័យ៖ គេដឹងថាអនុគមន៍ cosh ម៉ូណូតូនកើនដាច់ខាតពី $\mathbb{R}^+$ ទៅ $(1,+\infty)$ ។ ដូចនេះ វាមានអនុគមន៍ច្រាសតាងដោយ "Arccosh" ហៅថា**អនុគមន៍អាក់កូស៊ីនូសអ៊ីពែបូលិក** កំណត់ដោយ៖

$$\operatorname{Arc}\operatorname{ch}:(1,+\infty)\to\mathbb{R}^+$$

$$x\mapsto \boxed{y=\operatorname{Arc}\cosh x_{x>1}\Leftrightarrow x=\cosh y_{y\geq 0}}$$

⊕ ដេរីវេ

$$y'=\left(\operatorname{Arc}\cosh x\right)'=\frac{1}{\left(\cosh y\right)'}=\frac{1}{\sinh y}=\frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y-1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}>0$$

$$\boxed{\left(\operatorname{Arc}\cosh x\right)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}$$

⊕ បំលែងជាកន្សោមនៃលោកនេពែ៖

$$y = \text{Arc}\cosh x \Leftrightarrow x = \cosh y = \frac{e^{2y}+1}{2e^{y}} \Leftrightarrow 2xe^{y} = e^{2y}+1$$

$$\Leftrightarrow e^{2y} - 2xe^{y} + 1 = 0$$

$$\begin{cases} t = e^{y} > 0 \\ t^2 - 2xt + 1 = 0 \end{cases}$$

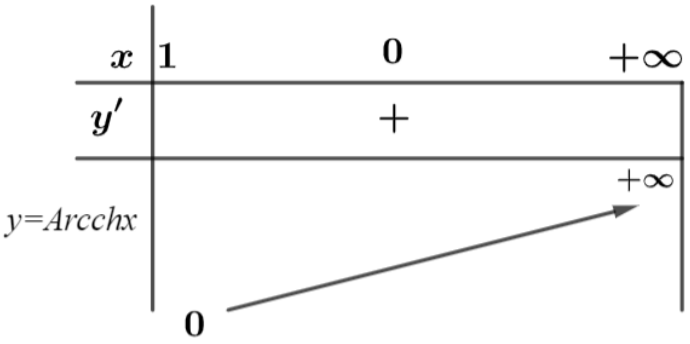
$$\begin{cases} t > 0 \\ t = x \pm \sqrt{x^2-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow t = e^{y} = x + \sqrt{x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y = \text{Arc}\cosh x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)} \quad x \geq 1$$

+តារាងអថេរភាព

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{Arc}\cosh x = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to1} \text{Arc}\cosh x = \lim\limits_{x\to1} \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln 1 = 0$

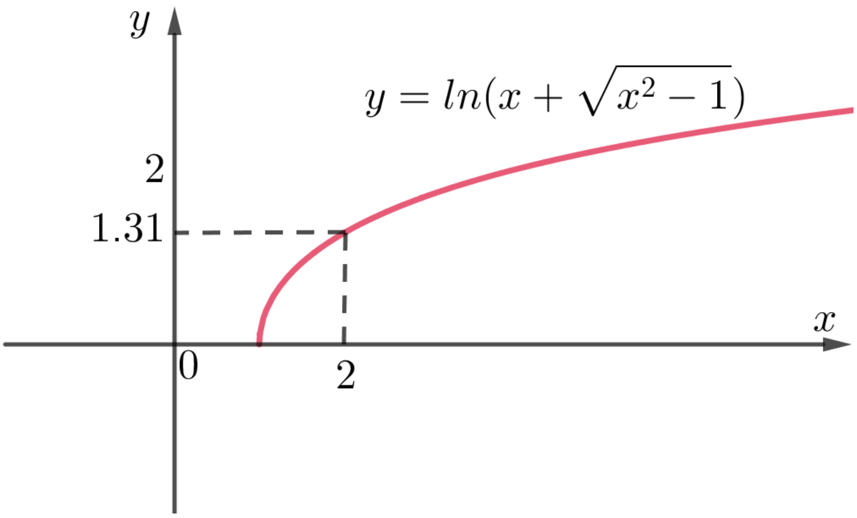


⊕ ខ្សែកោង

– ចំណុចទិទៀននៃ y'

– $\lim\limits_{x\to1^+} y' = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$ នោះគេបានត្រង់ចំណុច $A(1,0)$ ខ្សែកោង មានបន្ទាត់ប៉ះស្របអ័ក្ស (Oy)

x	2
y	$\ln\left(2+\sqrt{3}\right) = 1.31$



រូបទី៣.៧

គ. អនុគមន៍តង់សង់អ៊ីពែបូលិកច្រាស

⊕ និយមន័យ៖ គេដឹងថាអនុគមន៍ tanh ម៉ូណូតូនកើនដាច់ខាតពី $\mathbb{R}$ ទៅ $]-1,1[$ ។ ដូចនេះវាមាន

អនុគមន៍ច្រាសតាងដោយ "arctanh" ហៅថា**អនុគមន៍អាក់តង់សង់អ៊ីពែបូលិក** កំណត់ដោយ៖

$\text{Arctanh} :]-1,1[\to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \boxed{y = \underset{-1<x<1}{\text{Arctanh}\, x} \Leftrightarrow x = \tanh y}$$

⊕ ដេរីវេ

$$y' = (\text{Arctanh}\, x)' = \frac{1}{(\tanh y)'} = \frac{1}{1-\tanh^2 y} = \frac{1}{1-x^2} > 0$$

$$\boxed{(\text{Arc}\tanh x)' = \frac{1}{1-x^2}}$$

⊕ បំលែងជាកន្សោមនៃ $\ln$ ៖

$$y = \text{Arc}\tanh x \Leftrightarrow x = \tanh y = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} \Leftrightarrow xe^{2y} + x = e^{2y} - 1$$

$$\Leftrightarrow e^{2y}(1-x) = x+1$$

$$\Leftrightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow 2y = \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

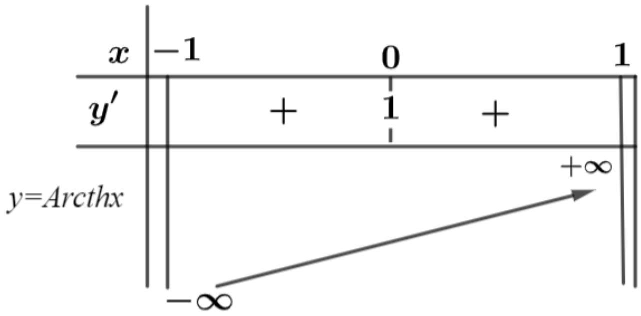
$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{y = \text{Arc}\tanh x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}$ $, -1 < x < 1$។

⊕ លីមីត

- $\lim\limits_{x\to -1^+} \text{Arc}\tanh x = \lim\limits_{x\to -1^+} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} \text{Arc}\tanh x = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = +\infty$

⊕ តារាងអថេរភាព

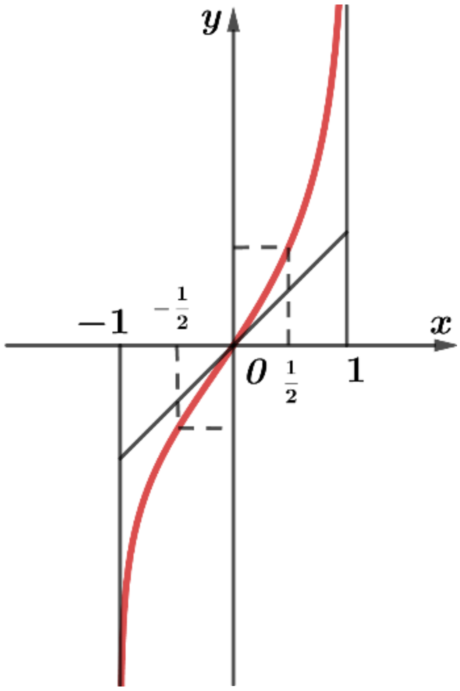


⊕ ខ្សែកោង

– O ជាផ្ចិតឆ្លុះនិងជាចំណុចរបត់ហើយត្រង់ O ខ្សែកោងប៉ះនិងបន្ទាត់ $y = x$

– បន្ទាត់ $x = \pm 1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

x	$\pm\frac{1}{2}$
y	$\pm\frac{1}{2}\ln 3 = \pm 0.55$



រូបទី៣.៨

ឃ. រូបមន្តដេរីវេ និងអាំងតេក្រាល

- **រូបមន្តដេរីវេ**

$$1.\ \frac{d}{dx}\left(\operatorname{arccosh} x\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\left(x>1\right) \qquad 2.\ \frac{d}{dx}\left(\operatorname{arcsinh} x\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$3.\ \frac{d}{dx}\left(\operatorname{arctanh} x\right)=\frac{1}{1-x^2}\left(|x|<1\right) \qquad 4.\ \frac{d}{dx}\left(\operatorname{arccoth} x\right)=\frac{1}{1-x^2}\left(|x|>1\right)$$

$$5.\ \frac{d}{dx}\left(\operatorname{arcsech} x\right)=-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\left(0<x<1\right) \qquad 6.\ \frac{d}{dx}\left(\operatorname{arccsch} x\right)=-\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}\left(x\neq 0\right)$$

រូបមន្តអាំងតេក្រាល

$$(i).\ \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\operatorname{Arcsinh} x+c=\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+c\ ,x\in\mathbb{R}$$

$$(ii).\ \int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c\ \ ,|x|\geq 1$$

$$(iii).\ \int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+c\ ,x\neq\pm 1$$

$$(iv).\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\operatorname{arccosh}\frac{x}{a}+c, x>a$$

$$(v).\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\operatorname{arcsinh}\frac{x}{a}+c,\forall x$$

$$(vi).\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\begin{cases}\frac{1}{a}\operatorname{arctanh}\frac{x}{a}+c,|x|<a\\ \frac{1}{a}\operatorname{arccoth}\frac{x}{a}+c,|x|>a\end{cases}$$

$$(vii).\ \int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{1}{a}\operatorname{arcsech}\frac{x}{a}+c, 0<x<a$$

$$(viii).\ \int\frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}=-\frac{1}{a}\operatorname{arccsch}\frac{|x|}{a}+c,\ \ x\neq 0$$

ឧទាហរណ៍៤៖ គណនាដេរីវេ និងអាំងតេក្រាលខាងក្រោម។

$a).\ y=\operatorname{arctanh} 3x \qquad b).\ y=x^2\operatorname{arcsinh} x$

$c).\ \int_9^{25}\frac{dx}{\sqrt{x}\left(4-x\right)}$

ដំណោះស្រាយ

$a).\ y=\operatorname{arctanh} 3x$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\operatorname{arctanh} 3x\right)=\frac{1}{1-\left(3x\right)^2}\times 3=\frac{3}{1-9x^2}$$

$b).\ y=x^2\operatorname{arcsinh} x$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=2x\operatorname{arcsinh} x+x^2\times\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= x\left(\frac{2\sqrt{x^2+1}\times \operatorname{arcsinh} x + x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$c).\ \int_9^{25} \frac{dx}{\sqrt{x}(4-x)}$

តាង $u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

បើ $x = 9 \Rightarrow u = \sqrt{9} = 3$

$x = 25 \Rightarrow u = \sqrt{25} = 5$

$$\int_9^{25} \frac{dx}{\sqrt{x}(4-x)} = 2\int_3^5 \frac{du}{4-u^2}$$

$$= 2\times\frac{1}{2}\operatorname{arccosh}\frac{u}{2}\Big|_3^5$$

$$= \operatorname{arccosh}\frac{5}{2} - \operatorname{arccosh}\frac{3}{2}$$

ចំណាំ៖ បើ $f(x) = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$

គេបាន $f(-x) = \ln\left|-x+\sqrt{x^2-1}\right| = \ln\left|\frac{-1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right| = -\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| = -f(x)$

នោះគេបាន f ជាអនុគមន៍សេស។

បើ $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$

គេបាន $f(-x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = f(x)$

នោះគេបាន f ជាអនុគមន៍គូ។

លំហាត់អនុគមន៍អ៊ីពែបូលិកផ្ទាល់ និងច្រាស

១. ចំពោះ $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2$ គេកំណត់ $f(a,b)(x)=\ln(a\cosh x+b\sinh x)$ មានខ្សែកោង $C(a,b)$ ។

ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោងតាង $f(1,0)$ និង $f(0,1)$ ។

ខ.រកដែនកំណត់នៃ $f(a,b)$ តាមសញ្ញានៃ a^2-b^2 ហើយបង្ហាញថាខ្សែកោង $C(a,b)$ អាចជាបំលែងធរណីមាត្រ $C(0,1)$ និង $C(0,1)$ ។

២. ដោះស្រាយ និងពិភាក្សាប្រព័ន្ធសមីការ

$$a).\begin{cases}\cosh x+\sinh y=a\\ \sinh x+\cosh y=b\end{cases}\qquad b).\begin{cases}\cosh x+\cosh y=a\cosh x\\ \sinh x+\sinh y=b\sinh x\end{cases}$$

៣. គណនា៖

$$S=\sum_{k=0}^{n}\cosh(a+kb)$$

$$S'=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cosh(a+kb)$$

$$T=\sum_{k=0}^{n}\sinh(a+kb)$$

$$T'=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\sinh(a+kb)$$

៤. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង (C) តាង៖

ក. $y=\ln\operatorname{ch}x+\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2x}$

ខ. $y=\operatorname{sh}2x-2\operatorname{ch}x$

គ. $y=\operatorname{Arc}\operatorname{th}\dfrac{1+3\operatorname{th}x}{3+\operatorname{th}x}$

ឃ. $y=\coth\dfrac{x+1}{x-1}$

ង. $y=x\operatorname{Arc}\operatorname{sh}x-\sqrt{x^2+1}$

ច. $y=\dfrac{1}{2+\operatorname{ch}x}$

ជ. $y=\dfrac{1}{\operatorname{ch}x-2}$

ញ. $y=\begin{cases}\operatorname{ch}\sqrt{x} & \text{បើ } x>0\\ 1 & \text{បើ } x=0\\ \cos\sqrt{-x} & \text{បើ } x<0\end{cases}$

ដ. $y=\ln(\operatorname{ch}x)$

ឋ. $y = \text{th}\dfrac{1-x}{1+x}$

៥.ក. គណនា $P_n = \prod_{k=1}^{n} \text{ch}\dfrac{x}{2^k}$ ខ.សម្រួលកន្សោម $\text{Arc th}\sqrt{\dfrac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}}$ ។

៦.ដោះស្រាយសមីការ និងពិភាក្សាសមីការ៖ $3\cosh x + 2\sinh x = \lambda$ ។

៧.បង្ហាញថា៖

(a). $2\,\text{Arc sh}\, x = \text{Arc sh}\, 2x\sqrt{x^2+1}$

(b). $\text{Arc ch}\, x = \text{Arc sh}\sqrt{x^2-1}$

(c). $\text{Arc th}\dfrac{2x}{1+x^2} = 2\,\text{Arc th}\, x$, $|x| < 1$

៨.គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

(a). $\int \text{sh}^4 x dx$ (b). $\int \text{sh}^2 x\, dx$

(c). $\int \dfrac{dx}{\text{sh}\, x}$ (d). $\int \dfrac{dx}{\text{ch}\, x}$

(e). $\int \text{sh}^2 x\, \text{ch}^4 x\, dx$ (f). $\int \cosh^2(x-1)\sinh(x-1)dx$

(g). $\int \dfrac{\sinh x}{1+\sinh^2 x}dx$ (h). $\int x\,\text{csch}^2\dfrac{x^2}{2}dx$

(i). $\int \text{sech}^3 x \tanh x\, dx$ (j). $\int \dfrac{\cosh x}{\sqrt{9-\sinh^2 x}}dx$

៩.សម្រួលផលបូក៖

$S_n = \text{ch}\, x + \text{ch}\, 2x + \ldots + \text{ch}\, nx$

$T_n = \text{sh}\, x + \text{sh}\, 2x + \ldots + \text{sh}\, nx$

រួចគណនា $\text{ch}\, 5x$ ជាអនុគមន៍នៃ $\text{ch}\, x$ និង $\text{sh}\, 5x$ ជាអនុគមន៍នៃ $\text{sh}\, x$ ។

១០. ពីលំហាត់លេខ (៩) ទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$ ដែល $T_n = \text{sh}\dfrac{1}{n^2} + \text{sh}\dfrac{2}{n^2} + \ldots + \text{sh}\dfrac{n}{n^2}$ ។

១១.សិក្សាកន្សោមងាយនេះ៖

(a). $y = \text{Arc th}\dfrac{x-1}{x+1}$ (b). $y = \text{Arc sh}\left(4x^3+3x\right)$

១២.គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

(a). $y = \text{Arc sh}(\tan x)$ (b). $y = \text{Arcsin}(\text{th}\, x)$

(c). $y = \text{Arctan}\left(\text{th}\dfrac{x}{2}\right)$ (d). $y = \text{Arc th}\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)$

(e). $y = \text{Arc ch}\left(2x^2-1\right)$ (f). $y = \text{Arc th}\left(\dfrac{x-1}{x^2+1}\right)$

$(g).\ y=\operatorname{arcsinh}(\tan x)$ $\qquad$ $(h).\ y=2x\operatorname{arcsinh}2x-\sqrt{1+4x^2}$

$(i).\ y=x\operatorname{arctanh}x+\ln\sqrt{1-x^2}$ $\qquad$ $(j).\ y=\operatorname{arcsech}(\cos 2x),\ 0<x<\dfrac{\pi}{4}$

១៣. គេឱ្យអនុគមន៍៖ (អនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក ប្រាស)

$f_1(x)=\sqrt{\sqrt{1+x^2}+1}$

$f_2(x)=\sqrt{\sqrt{1+x^2}-1}$

$f_3(x)=\sqrt{\sqrt{1+x^2}+x}$

$f_4(x)=\sqrt{\sqrt{1+x^2}-x}$

បើតាង $x=\operatorname{sh}\varphi$ ចូរសម្រួល៖ $f_i:1\le i\le 4$ រួចសរសេរទំនាក់ទំនងទាំងឡាយដែលមានរវាងអនុគមន៍ទាំងនោះ។

១៤. សម្រួលផលបូក៖

$S_n=\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx$

$T_n=\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx$

មេរៀនទី៤៖ ប្រៀបធៀបអនុគមន៍ពន្លាតកំណត់

៤.១. ប្រៀបធៀបអនុគមន៍ត្រង់មួយចំណុច

ក.សញ្ញាណ o និង O

ក្នុងផ្នែកនេះបើ $x_o \in \mathbb{R}$ គេហៅវ៉ស៊ីណា (Voisinage) នៃ x_0 គឺគ្រប់ចន្លោះបើកដែលផ្ទុក x_0 ដូចជា $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$, $\alpha > 0$ ៖

– វ៉ស៊ីណានៃ $+\infty$ គឺគ្រប់ចន្លោះបើករាង $[a,+\infty)$, $a>0$

– វ៉ស៊ីណានៃ $-\infty$ គឺគ្រប់ចន្លោះបើករាង $(-\infty,a]$, $a<0$

និយមន័យ៖ f,g ជាអនុគមន៍ពីរកំណត់ត្រង់វ៉ស៊ីណានៃ x_0 ប្រហែលជាលើកលែងតែត្រង់ x_0 គេថា៖

$i)$.គេថា $f=o\big(g(x)\big)\ (x\to x_0)$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists I, \forall x\in I, |f(x)|\le \varepsilon|g(x)|$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0,$ បើ $g(x)\neq 0$

$ii)$.គេថា $f=O\big(g(x)\big)\ (x\to x_0)$

$\Leftrightarrow \exists I, \exists k>0, \forall x\in I, |f(x)|\le k|g(x)|$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\ell>0$

ឧទាហរណ៍១៖ គេមានអនុគមន៍ដូចខាងក្រោម៖

$a).\ f(x)=x^2 \ \ ,g(x)=x$ គេបាន៖

$$\oplus\ f(x)=o\big(g(x)\big)(x\to 0) \text{ ព្រោះ៖ } \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0$$

$$\oplus\ g(x)=o\big(f(x)\big)(x\to \pm\infty) \text{ ព្រោះ៖ } \lim_{x\to \pm\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to \pm\infty}\frac{x}{x^2}=0$$

$b)$.បើ f មានន័យត្រង់វ៉ស៊ីណានៃ x_0 ហើយបើគេយក $g(x)=1$ នោះគេបាន៖

$$\oplus\ f(x)=O(1)\ (x\to x_0)\Rightarrow \exists I, \exists k>0, \forall x\in I: |f(x)|\le k$$

$\Leftrightarrow f$ ទ័លលើត្រង់វ៉ស៊ីណានៃ x_0 ។

$$\oplus\ f(x)=o(1)\ (x\to x_0)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=0$$

ចំណាំ៖

$i.\quad f=O(f)$

$ii.\quad f=o(g) \quad \Rightarrow f=O(g)$

តែលក្ខណៈប្រាសមកវិញមិនពិតដោយ៖

$f=O(f)$ តែ $f\neq o(f)$

ខ.លក្ខណៈនៃសញ្ញាណ o និង O

+លក្ខណៈឆ្លង

$$\begin{cases} h=o(g)\ (x\to x_0) \\ g=o(f)\ (x\to x_0) \end{cases} \Rightarrow h=o(f)\ (x\to x_0)$$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)}{g(x)}\times\dfrac{g(x)}{f(x)}=0\times 0=0$

+ផលបូក

$$\begin{cases} f=o(h)\ (x\to x_0) \\ g=o(h)\ (x\to x_0) \end{cases} \Rightarrow f\pm g=o(h)\ \ (x\to x_0)$$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)\pm f(x)}{h(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{g(x)}{h(x)}\pm\dfrac{f(x)}{h(x)}\right]=0\pm 0=0$

+ផលគុណ

$$\begin{cases} f=o(f_1)\ (x\to x_0) \\ g=o(g_1)\ (x\to x_0) \end{cases} \Rightarrow f\cdot g=o(f_1\cdot g_1)\ \ (x\to x_0)$$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)\cdot f(x)}{g_1(x)\cdot f_1(x)}=0$

+បណ្តាក់នៃ o និង O

$$\begin{cases} f=o(h)\ (x\to x_0) \\ g=O(h)\ (x\to x_0) \end{cases} \Rightarrow f=o(g)\ \ (x\to x_0)$$

សម្រាយបញ្ជាក់

$g=O(h)\Rightarrow \exists I_1\ ,\exists k>0\ ,\forall x\in I_1,\ |h(x)|\le k|g(x)|$

$f=o(h)\Rightarrow \forall\varepsilon>0,\exists I_2\ ,\forall x\in I_2\ ,|f(x)|\le\dfrac{\varepsilon}{k}|h(x)|$

ដូចនេះបើ $I=I_1\cap I_2\Rightarrow\forall x\in I,|f(x)|\le\varepsilon|g(x)|$

$\Rightarrow f=o(g)\ \ (x\to x_0)$ ព្រោះ $|f(x)|\cdot|h(x)|\le k|g(x)|\cdot\dfrac{\varepsilon}{k}|h(x)|$

គ.អនុគមន៍សមមូល

+និយមន័យ៖ f,g ជាអនុគមន៍ពីរកំណត់ត្រង់វ៉ស៊ីណានៃ x_0 (x_0 អាចស្មើ $\pm\infty$)គេថា៖ f សមមូលនឹង g ពេល $x\to x_0$ ដែលកំណត់សរសេរដោយ៖

$\boxed{f\sim g\ (x\to x_0)}$ កាលណា $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ ឬម្យ៉ាងទៀត $\boxed{f\sim g\Leftrightarrow f=g+o(g)}$ ។

+ទ្រឹស្តីបទ៖ ទំនាក់ទំនង $"\sim"(x\to x_0)$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើសំណុំអនុគមន៍មានន័យត្រង់វ៉ស៊ីណានៃ x_0 ។

សម្រាយបញ្ជាក់

$\boxed{R}$ $f \sim f\,(x \to x_0)$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{f(x)}=1$

$\boxed{S}$ $f \sim g\ (x\to x_0) \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{f(x)}=1$

$\Rightarrow g \sim f\ (x\to x_0)$

$$\boxed{T}\ \begin{cases} f\sim g(x\to x_0) \\ g\sim h\ (x\to x_0)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1 \\ \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{h(x)}=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{h(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{g(x)}{h(x)}=1\times1=1\Rightarrow f\sim h(x\to x_0)$$

ម្យ៉ាងទៀត $\boxed{f\sim g \Leftrightarrow f=g+o(g)}$

តាង $h(x)=f(x)-g(x)\Rightarrow f(x)=g(x)+h(x)$ គេបាន៖

$$f\sim g \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{h(x)}{g(x)}=0 \Leftrightarrow h=o(g)$$

ឧទាហរណ៍២៖ (i) $x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim(e^x-1)\sim$

$\operatorname{sh}x\sim\operatorname{th}x\sim\operatorname{arcsinh}x\sim\operatorname{arctanh}x\ (x\to0)$

(ii). $\dfrac{x^2}{2}\sim(1-\cos x)\sim(\operatorname{ch}x-1)\ (x\to0)$

$$\text{ព្រោះ}\ \begin{cases} \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=1 \\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{ch}x-1}{\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=1\end{cases}$$

(iii). $\sin x=x+o(x)$, $\quad x\to0$

$1-\cos x=\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2),\ x\to0$, $\cos x=1-\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2),\ x\to0$

$\log(1+x)=x+o(x),\quad x\to0$, $\log x=x-1+o(x-1)$, $x\to1$

$e^x=1+x+o(x)$, $\quad x\to0$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+o(x),\quad x\to 0$$

ឧទាហរណ៍៣៖ ចូររកភាពសមមូលនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. គេមាន $e^{t}=1+t+o(t),t\to 0$ បើ $t=5x$

ខ. គេមាន $(1+t)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}t+o(t),t\to 0$ បើ $t=-3x^{2}$

ដំណោះស្រាយ

ក. គេមាន $e^{t}=1+t+o(t),t\to 0$ បើ $t=5x$ នោះគេបាន $e^{5x}=1+5x+o(5x)$ មានន័យថា $e^{5x}=1+5x+o(5x)\,,x\to 0$ ម្យ៉ាងទៀត $e^{5x}-1\sim 5x,\ x\to 0$

ខ. គេមាន $(1+t)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}t+o(t),t\to 0$ បើ $t=-3x^{2}$ នោះគេបាន

$$\left(1-3x^{2}\right)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{3}{2}x^{2}+o\left(-3x^{2}\right)=1-\frac{3}{2}x^{2}+o\left(x^{2}\right),x\to 0$$

ដូចនេះ $\left(1-3x^{2}\right)^{\frac{1}{2}}-1\sim-\frac{3}{2}x^{2},\ x\to 0$ ។

(iii) បើគេឱ្យពហុធា $P(x)=a_{p}x^{p}+a_{p+1}x^{p+1}+\ldots+a_{n}x^{n}\,,n>p,a_{p}\neq 0,\ a_{n}\neq 0$ គេបាន៖

$$P(x)\sim a_{p}x^{p}\quad (x\to x_{0})$$
$$P(x)\sim a_{n}x^{n}\quad (x\to\pm\infty)$$

+ទ្រឹស្ដីបទ៖ $$\begin{cases} f\sim g\,(x\to x_{0})\\ \lim\limits_{x\to x_{0}} g(x)=\ell\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to x_{0}} f(x)=\ell$$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to x_{0}} f(x)=\lim\limits_{x\to x_{0}}\frac{f(x)}{g(x)}\times g(x)=1\times\ell=\ell$

+ទ្រឹស្ដីបទ៖ $$\begin{cases} f_{1}\sim g_{1}\ (x\to x_{0})\\ f_{2}\sim g_{2}\ (x\to x_{0})\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} f_{1}\cdot f_{2}\sim g_{1}\cdot g_{2}\ (x\to x_{0})\\ \frac{f_{1}}{f_{2}}\sim\frac{g_{1}}{g_{2}}\ (x\to x_{0})\end{cases}$$

ព្រោះ៖ $$\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_{0}}\frac{f_{1}(x)f_{2}(x)}{g_{1}(x)g_{2}(x)}=\lim\limits_{x\to x_{0}}\left[\frac{f_{1}(x)}{g_{1}(x)}\cdot\frac{f_{2}(x)}{g_{2}(x)}\right]=1\\[2ex] \lim\limits_{x\to x_{0}}\frac{\frac{f_{1}(x)}{f_{2}(x)}}{\frac{g_{1}(x)}{g_{2}(x)}}=\lim\limits_{x\to x_{0}}\frac{f_{1}(x)}{g_{1}(x)}\cdot\frac{1}{\frac{f_{2}(x)}{g_{2}(x)}}=1\end{cases}$$

ករណីពិសេស $\begin{cases} f_1 \sim g_1 \\ f_2 \sim g_2 \\ \vdots \quad \vdots \\ f_n \sim g_n \end{cases} (x \to x_0) \Rightarrow f_1 \cdot f_2 \cdots f_n \sim g_1 \cdot g_2 \cdots g_n \ (x \to x_0)$

ជាពិសេស $\boxed{f \sim g(x \to x_0) \Rightarrow f^n \sim g^n \ (x \to x_0)}$ $\forall x \in \mathbb{N}^*$

+អនុវត្តន៍ក្នុងការគណនាលីមីត

ក្នុងការគណនាលីមីតនៃកន្សោមដែលមានតែផលគុណ និងផលចែកគេអាចជំនួសអនុគមន៍មួយដោយអនុគមន៍សមមូល។

ឧទាហរណ៍៤៖ $(i)\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(e^x - 1)\operatorname{th} x}{(\operatorname{arcsinh} x)^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cdot x}{x^2} = 1$

$(ii)\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sh}^3 x \cdot \ln(1+x)}{(\operatorname{ch} x - 1)\sin^2 x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 \cdot x}{\frac{x^2}{2} \cdot x^2} = 2$

$(iii).\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{\sin^2 3x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2}{9x^2} = \dfrac{2}{9}$

$(iv).\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x + x^3}{4x + 5\log(1+x^2)}$

ឃ. តូចអនេក និងធំអនេក

f ជាអនុគមន៍កំណត់ត្រង់វ៉ស៊ីណានៃ x_0 (x_0 អាចស្មើ $\pm\infty$)។

⊕ បើ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ គេថា f ជាតូចអនេកពេល $x \to x_0$

⊕ បើ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ គេថា f ជាធំអនេកពេល $x \to x_0$

⊕ គេថា f និង g ជាតូចអនេក(រៀងគ្នាធំអនេក)មានលំដាប់ស្មើគ្នាកាលណា

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \ (k \neq 0, k \neq \pm\infty)$$

ឧទាហរណ៍៥៖ $\sin^2 x$ និង $2x^2$ ជាតូចអនេកលំដាប់ស្មើគ្នាពេល $x \to 0$

⊕ កាលណាគេសិក្សាត្រង់វ៉ស៊ីណានៃ៖

i). 0 នោះ x ហៅថាតូចអនេកគោល ហើយ $\dfrac{1}{x}$ ជាធំអនេកគោល

ii). $\pm\infty$ នោះ x ហៅថាធំអនេកគោលហើយ $\dfrac{1}{x}$ ជាតូចអនេកគោល

iii). x_0 នោះ $x - x_0$ ហៅថាតូចអនេកគោលហើយ $\dfrac{1}{x - x_0}$ ជាធំអនេកគោល

និយមន័យ៖ ត្រង់វ៉ស៊ីណានៃ x_0 បើ f ជាតូចអនេក(រៀងគ្នាធំអនេក)ហើយ α ជាតូចអនេកគោល(រៀងគ្នាធំអនេកគោល) នោះគេថា f មានលំដាប់ p ធៀប α កាលណា f និង α^p មានលំដាប់ស្មើគ្នា។

ឧទាហរណ៍៦៖

១. ពេល $x \to x_0$ នោះ $2\sin x$ ជាតូចអនេកលំដាប់ 1 ធៀប x ។

២.ពេល $x \to 0$ នោះ $1-\cos x$ ជាតូចអនេកលំដាប់ 2 ធៀប x ។

៣.ពហុធា $P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n,\ a_n \neq 0$ ជាធំអនេកលំដាប់ n ត្រង់វ៉ស៊ីណានៃ $\pm\infty$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{P(x)}{x^n} = a_n$ ។

⊕ បើ $x \to x_0$ នោះ f ជាតូចអនេក(រៀងគ្នាធំអនេក)លំដាប់ p ធៀបតូចអនេកគោល α (រៀងគ្នាធំអនេកគោល α)គេបាន $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{\alpha^p} = k\ (k \neq 0, k \neq \pm\infty)$ ។

ដូចនេះ $\boxed{f(x) \sim k\alpha^p\ (x \to x_0)}$,$k\alpha^p$ ហៅថាផ្នែកគោលនៃ f ត្រង់វ៉ស៊ីណានៃ x_0 ។

ឧទាហរណ៍៧៖ ១.ចំពោះ $1-\cos x$ មានផ្នែកគោល $\dfrac{x^2}{2}$ ត្រង់វ៉ស៊ីណានៃ 0 និងតូចអនេក

$$\tan x - \sin x = \sin x\left(\frac{1}{\cos x} - 1\right) = \frac{\sin x 2\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos x} \sim \frac{x \cdot \left(\frac{1}{2}x^2\right)}{1} = \frac{1}{2}x^3$$

មានផ្នែកគោលស្មើ $\dfrac{x^3}{2}$

២. $P(x) = a_px^p + a_{p+1}x^{p+1} + ... + a_nx^n,\ a_p \neq 0,\ a_n \neq 0$

⊕ a_px^p ជាផ្នែកគោលនៃ $P(x)$ បើ $x \to 0$

⊕ a_nx^n ជាផ្នែកគោលនៃ $P(x)$ បើ $x \to \pm\infty$

ចំណាំ៖

សញ្ញាណលំដាប់នេះមិនអាចអនុវត្តន៍បានចំពោះគ្រប់តូចអនេកទូទៅបានទេដូចជា៖

១.e^x ពេល $x \to +\infty$ ជាធំអនេកគ្មានលំដាប់ព្រោះ $\forall p \in \mathbb{N}, \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty$ ។

២. $f(x) = x^2\left(1 + \sin\dfrac{1}{x}\right)$ មិនមែនជាតូចអនេកលំដាប់ 2 ទេពេល $x \to 0$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\left(1 + \sin\dfrac{1}{x}\right)$ គ្មាន។

៤.២. ពន្លាតកំណត់

ក.និយមន័យ៖ f ជាអនុគមន៍កំណត់ត្រង់វ៉ស៊ីណានៃ 0 ប្រហែលជាលើកលែងត្រង់ 0 ។ គេថា f មានពន្លាតកំណត់លំដាប់ n ត្រង់វ៉ស៊ីណានៃ 0 កាលណា៖

$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + o(x^n)$,($\forall x$ ក្បែរ 0)

ឬ $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+x^n\varepsilon(x)$,$\lim\limits_{x\to0}\varepsilon(x)=0$

ក្នុងករណីនេះ $P_n(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ ហៅថា**ពហុធានៃ** f ហើយ $o(x^n)=x^n\varepsilon(x)$ ដែលជាតួចអនេកលំដាប់ធំជាងឬស្មើ $n+1$ ហៅថា **សំណល់**។

ចំណាំ៖

១. បើ f មានពន្លាតកំណត់លំដាប់ n នោះវាមានពន្លាតកំណត់លំដាប់ p ត្រង់ $p<n$។

ព្រោះបើ $f(x)=a_0+\ldots+a_px^p+\ldots+a_nx^n+o(x^n)$ នោះគេបាន

$$f(x)=a_0+\ldots+a_px^p+x^p\left(a_{p+1}x+\ldots+a_px^{n-p}+o(x^{n-p})\right)$$

$$=a_0+\ldots+a_px^p+x^p\varepsilon(x)$$

ដែលមាន $\lim\limits_{x\to0}\varepsilon(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(a_{p+1}x+\ldots+a_nx^{n-p}+o(x^{n-p})\right)=0$។

២.បើ f គ្មានន័យត្រង់ 0 គេបាន $\lim\limits_{x\to0}f(x)=a_0$ បើ f មានន័យត្រង់ 0 គេបាន៖

$$f(0)=a_0,\ \lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-a_0}{x}=a_1$$

$$\Rightarrow f'(0)=a_1$$

បើគេបន្តវិធីនេះរហូត បើ f មានពន្លាតកំណត់លំដាប់ n ដែល $\forall k\le n, f^{(n-1)}$ មានន័យត្រង់ 0 នោះ $f^{(k)}(0)=a_k$ ។

ខ.ឧទាហរណ៍ពន្លាតកំណត់

a).គេដឹងថាបើ f មានដេរីវេដល់លំដាប់ $n+1$ត្រង់វ៉ស៊ីណាននៃសូន្យគេបានរូបមន្តMac-Laurin ឬ(Mac-Laurin Young) លំដាប់ $n+1$នៃ f គឺ៖

$$f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n+\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(\theta x)\ \ ,0<\theta<1$$

កន្សោមនេះជាពន្លាត់កំណត់លំដាប់ n នៃ f កាលណា៖

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)=0$ គឺត្រូវឱ្យ $f^{(n+1)}$ ទ័លត្រង់វ៉ស៊ីណាននៃ 0

ឬ $\left(\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\left[f^{(n+1)}(0)+\varepsilon(x)\right],\lim\limits_{x\to0}\varepsilon(x)=0\right)$។

បើ $\left|f^{(n+1)}(x)\right|<M$ ត្រង់វ៉ស៊ីណាននៃ 0 គេតាង $\varepsilon_1(x)=\dfrac{x}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$

នោះគេបាន $\lim\limits_{x\to0}\varepsilon_1(x)=0$

ដូចនេះគេបាន៖ $$f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n+o(x^n)$$

ដែលជាពន្លាតកំណត់លំដាប់ n ត្រង់វ៉ស៊ីណាននៃ 0 តាមភាពមានតែមួយគត់នៃពន្លាតកំនត់

ឧទាហរណ៍៨៖

ក. $f(x)=e^x,\ f^{(k)}(x)=e^x \Rightarrow f^{(k)}(0)=1, \forall k\in\mathbb{N}$ គេបាន៖

$$\begin{aligned} e^x &=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o\left(x^n\right)\\ e^{-x} &=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}\cdot x^n+o\left(x^n\right)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^k}{k!}+o\left(x^n\right)\\ \operatorname{ch} x &=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n}\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o\left(x^n\right)\\ \operatorname{Sh} x &=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+1}\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o\left(x^n\right)\end{aligned} \quad (1)$$

ខ. $f(x)=\sin x,\ f^{(k)}(x)=\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow f^{(k)}(0)=\sin\frac{k\pi}{2}=\begin{cases}0 \text{ បើ } k=2p\\ (-1)^p \text{ បើ } k=2p+1\end{cases}$$

ដូចនេះគេបាន

$$\begin{aligned}\sin x &=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}+o\left(x^{2n+2}\right)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right)\\ \cos x &=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot x^{2n}+o\left(x^{2n+1}\right)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o\left(x^{2n+1}\right)\end{aligned} \quad ,(2)$$

គ. $f(x)=(1+x)^m\ ,\ m\in\mathbb{R}$

$f(0)=1$

$f'(x)=m(1+x)^{m-1} \Rightarrow f'(0)=m$

$f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2} \Rightarrow f''(0)=m(m-1)$

....

....

$f^{(k)}(x)=m(m-1)\ldots(m-k+1)(1+x)^{m-k} \Rightarrow f^{(k)}(0)=m(m-1)\ldots(m-k+1)$

ដូចនេះគបាន៖

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}\cdot x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}\cdot x^n+o\left(x^n\right) \quad ,(3)$$

⊕ បើយក $m=-1$ គេបាន

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-...+(-1)^n\cdot x^n+o(x^n)$$
$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^n+o\left(x^n\right) \quad ,(4)$$

បើយក $m=\frac{1}{2}$ គេបាន

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+...+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot5...\cdot(2n-3)}{2\cdot4\cdot6...\cdot(2n)}\cdot x^n+o\left(x^n\right)$$
$$=1+\frac{x}{2}+\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1\cdot3\cdot5...\cdot(2k-3)}{2\cdot4\cdot6...\cdot(2k)}\cdot x^k+o\left(x^n\right)$$
$$\sqrt{1-x}=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-...-\frac{1\cdot3\cdot5...\cdot(2n-3)}{2\cdot4\cdot6...\cdot(2n)}\cdot x^n+o\left(x^n\right)$$
$$=1-\frac{x}{2}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1\cdot3\cdot5...\cdot(2k-3)}{2\cdot4\cdot6...\cdot(2k)}\cdot x^k+o\left(x^n\right) \quad ,(5)$$

⊕ បើយក $m=-\frac{1}{2}$ គេបាន

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{x}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{x^2}{2!}+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\frac{x^3}{3!}+...$$
$$\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)...\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right)$$
$$=1-\frac{x}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+...+(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot...\cdot(2n)}x^n+o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}-...+(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot...\cdot(2n)}\cdot x^n+o\left(x^n\right)$$
$$=1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2k-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot...\cdot(2k)}\cdot x^k+o\left(x^n\right)$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}+...+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot...\cdot(2n)}\cdot x^n+o\left(x^n\right)$$
$$=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2k-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot...\cdot(2k)}\cdot x^k+o\left(x^n\right) \quad ,(6)$$

b). ដេរីវេពន្លាតកំណត់៖

បើ $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+o\left(x^n\right)$

នោះគេបាន $f'(x)=a_1+a_2x^2+...+na_nx^{n-1}+o\left(x^{n-1}\right)$

ឧទាហរណ៍៩៖ $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^n+o\left(x^n\right)$

នោះ $\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}+o\left(x^{n-1}\right)$

$c)$.ព្រីមីទីវនៃពន្លាតកំណត់៖

បើ $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+o\left(x^n\right)$ នោះគេបាន៖

$$\int_0^x f(t)dt=\int_0^x\left[a_0+a_1t+a_2t^2+...+a_nt^n+o\left(t^n\right)\right]dt$$

$$=f(x)=a_0+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+...+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+o\left(x^{n+1}\right)$$

ដូច្នេះ F ជាព្រីមីទីវមួយនៃ f គេបាន $\int_0^x f(t)dt=F(x)-F(0)$

$$\Rightarrow F(x)-F(0)=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+...+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+o\left(x^{n+1}\right)$$

ឧទាហរណ៍១០៖ $(i).\begin{cases}\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-...+(-1)^n x^n+o\left(x^n\right)\\ \frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^n+o\left(x^n\right)\end{cases}$

តែ $\begin{cases}\int\frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)\\ \int\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)\end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases}\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+o\left(x^{n+1}\right)\\ \ln(1-x)=-\left[x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+\frac{x^{n+1}}{n+1}+o\left(x^{n+1}\right)\right]\\ \tanh^{-1}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+...+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+1}\right)\end{cases}},(7)$$

$(ii).\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-...+(-1)^n x^{2n}+o\left(x^{2n}\right)$

តែ $\int\frac{dx}{1+x^2}=\mathrm{Arctan}\,x$ ហើយ $\mathrm{Arctan}\,0=0$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Arctan}\,x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+1}\right)},(8)$$

$(iii).\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{8}x^4-...+(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot...\cdot(2n)}x^{2n}+o\left(x^{2n}\right)$

តែ $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\mathrm{Arcsh}\,x=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ ហើយ $\mathrm{Arcsh}\,0=0$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\operatorname{Arcsh} x &= \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\\ &= x-\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}-...+(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot...\cdot(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+1}\right)\end{aligned}},(9)$$

$$(iv).\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{3}{8}x^4+...+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot...\cdot(2n)}x^{2n}+o\left(x^{2n}\right)$$

តែ $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\operatorname{Arcsin} x$ ហើយ $\operatorname{Arcsin} 0=0$

$$\Rightarrow \boxed{\arcsin x = x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+...+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot...\cdot(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+1}\right)},(10)$$

គ. ប្រមាណវិធីលើពន្លាតកំណត់

គេឱ្យ $\begin{cases} f(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n+x^n\varepsilon_1(x)=P_n(x)+x^n\varepsilon_1(x)\\ g(x)=b_0+b_1x+...+b_nx^n+x^n\varepsilon_2(x)=Q_n(x)+x^n\varepsilon_2(x)\end{cases}$

a).វិធីបូក និងដកពន្លាតកំណត់

$$\boxed{f(x)\pm g(x)=P_n(x)\pm Q_n(x)+x^n\left(\varepsilon_1(x)+\varepsilon_2(x)\right)}$$

b).វិធីគុណពន្លាតកំណត់

$$f(x)\cdot g(x)=\left[P_n(x)+x^n\varepsilon_1(x)\right]\cdot\left[Q_n(x)+x^n\varepsilon_2(x)\right]$$

$$=P_n(x)\cdot Q_n(x)+x^n\left(P_n(x)\varepsilon_2(x)+Q_n(x)\varepsilon_1(x)+x^n\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)\right)$$

តែ $P_n(x)\cdot Q_n(x)=R_n(x)+x^{n+1}S(x)$ ដែល R_n ពហុធាដឺក្រេ $\le n$ ហើយ S ជាពហុធា

$$\Rightarrow f(x)\cdot g(x)=R_n(x)+x^n\varepsilon(x)$$

ដែល $\varepsilon(x)=\left[xS(x)+P_n(x)\varepsilon_2(x)+Q_n(x)\varepsilon_1(x)+x^n\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)\right]$

តែ $\lim_{x\to0}\varepsilon(x)=0$

ដូចនេះ $\boxed{f(x)\cdot g(x)=R_n(x)+o\left(x^n\right)}$ ។

ឧទាហរណ៍១១៖ ក. រកពន្លាតកំណត់លំដាប់ 5 នៃ $\sin 2x$ គេបាន៖

$$\sin 2x=2x-\frac{(2x)^3}{6}+\frac{(2x)^5}{120}+o\left(x^5\right)$$

$$=2x-\frac{4}{3}x^3+\frac{4}{15}x^5+o\left(x^5\right)$$

តែ $\sin 2x=2\sin x\cos x=2\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o\left(x^5\right)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^5\right)\right)$

$$=2\left(x-\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{24}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{12}+\frac{x^5}{120}+o\left(x^5\right)\right)$$

$$=2x-\frac{4}{3}x^3+\frac{4}{15}x^5+o\left(x^5\right)$$

ខ.រកពន្លាតកំណត់លំដាប់ 3 នៃ $\left(e^x-1\right)\ln\left(1+x\right)$

$$\left(e^x-1\right)\ln\left(1+x\right)=\left[x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right]\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right]$$

$$=x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^3}{2}+o\left(x^3\right)=x^2+o\left(x^2\right)$$

គ.រកពន្លាតកំណត់លំដាប់ 4 នៃ $\frac{e^x}{1-x}$

c).វិធីចែកពន្លាតកំណត់

គេឧបមាថា $b_0=g\left(0\right)\neq 0$ គេធ្វើវិធីចែកតាមស្វ័យគុណកើន

$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+o(x^n)$	$b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n+o(x^n)$
$a_0+a'_1x+a'_2x^2+\ldots+a'_nx^n+o(x^n)$	$c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n+o(x^n)$
$0+\tilde{a}_1x+\tilde{a}_2x^2+\ldots+\tilde{a}_nx^n+o(x^n)$	
$\tilde{a}_1x+\tilde{a}'_2x^2+\ldots+\tilde{a}'_nx^n+o(x^n)$	
$\vdots$	
$0+o(x^n)$	

ឧទាហរណ៍១២៖ ក. រកពន្លាតកំណត់លំដាប់ 5 នៃ $\tan x,\ \tanh x$ ។

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o\left(x^5\right)}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^5\right)}$$

$x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)$	$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)$
$\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{30}$	$x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5)$
$\frac{2x^5}{15}$	

ដូចនេះ៖ $\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o\left(x^5\right)$ ។

$$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\begin{array}{l|l} x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5) & 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5) \\ \hline -\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{30} & x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5) \\ \frac{2x^5}{15} & \end{array}$$

ដូចនេះ $\tanh x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o\left(x^5\right)$ ។

ខ. ចូររកពន្លាតកំណត់លំដាប់ពីរនៃអនុគមន៍ $h(x)=\frac{e^x}{3+2\log(1+x)}$ ។

ដោយ $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)$, $3+2\log(1+x)=3+2x-x^2+o\left(x^2\right)$

$$\begin{array}{r|l} 1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2) & 3+2x-x^2+o(x^2) \\ \cline{2-2} 1+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}x^2+o(x^2) & \frac{1}{3}+\frac{1}{9}x+\frac{11}{54}x^2+o(x^2) \\ \cline{1-1} \frac{1}{3}x+\frac{5}{6}x^2+o(x^2) & \\ \frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2+o(x^2) & \\ \cline{1-1} \frac{11}{18}x^2+o(x^2) & \\ \frac{11}{18}x^2+o(x^2) & \\ \cline{1-1} o(x^2) & \end{array}$$

ដូចនេះ: $h(x)=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}x+\frac{11}{54}x^2+o\left(x^2\right)$ ។

ឃ. ពន្លាតកំណត់នៃអនុគមន៍បណ្តាក់

បើ $u(x)=b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n+o\left(x^n\right)$

ហើយ $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+o\left(x^n\right)$

គេបាន $F(x)=f\left[u(x)\right]=f\left(b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n+o\left(x^n\right)\right)$

$$=a_0+a_1\left(b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n+o\left(x^n\right)\right)+a_2\left(b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n+o\left(x^n\right)\right)^2$$

$$+\ldots+a_n\left(b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n+o\left(x^n\right)\right)^n+o\left(x^n\right)$$

$$\boxed{F(x)=a_0+a_1b_1x+\left(a_1b_2+a_2b_1^2\right)x^2+\ldots+\left(a_1b_n+\ldots+a_nb_1^2\right)x^n+o\left(x^n\right)}$$

ឧទាហរណ៍១៣៖ ក.រកពន្លាតកំណត់លំដាប់ 4 នៃ $\ln(\cos x)$ ។

គេបាន $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)$

$$\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+o(u^2)$$

$$\Rightarrow \ln(\cos x)=\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right), u=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$

$$=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}\right)+o(x^4)$$

$$=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)$$

ខ.រកពន្លាតកំណត់លំដាប់ 3 នៃ $\sin\left[\ln(1+x)\right]$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

$$\Rightarrow \sin\left[\ln(1+x)\right]=\sin\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{1}{6}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)^3+o(x^3)$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

គ.រកពន្លាតកំណត់លំដាប់ 4 នៃ $\sqrt[3]{\cos x}$

$$\sqrt[3]{\cos x}=\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$=1+\frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)^2+o(x^4)$$

$$=1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^4}{36}+o(x^4)$$

$$=1-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{36}+o(x^4)$$

ឃ.រកពន្លាតកំណត់លំដាប់ 3 នៃអនុគមន៍ $h(x)=\dfrac{1}{1+\log(1+x)}$ ។

តាង $f(x)=\log(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$

$$\Rightarrow g(y)=\frac{1}{1+y}=1-y+y^2-y^3+o(y^3)$$

$$\Rightarrow h(x)=1-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)+\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)^2-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)+o(x^3)$$

$$=1-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)+\left(x^2-x^3+o(x^3)\right)-\left(x^3+o(x^3)\right)+o(x^3)$$

$$=1-x+\frac{3x^2}{2}-\frac{7x^3}{3}+o(x^3)$$

ង.ពន្លាតកំណត់ត្រង់វ៉ស៊ីណានៃ x_0 ទូទៅឬត្រង់វ៉ស៊ីណានៃ $\pm\infty$

a). បើត្រង់វ៉ស៊ីណានៃ x_0 គេតាង $x=X+x_0 \Leftrightarrow X=x-x_0$ គេបាន៖

$f(x)=f(X+x_0)=g(x)$ មានពន្លាតកំណត់លំដាប់ n ៖

$g(X)=a_0+a_1X+...+a_nX^n+o(X^n)$

នោះគេថា f មានពន្លាតកំណត់លំដាប់ n ត្រង់វ៉ស៊ីណានៃ x_0 គឺ៖

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n+o(x-x_0)^n$$

ឧទាហរណ៍១៤៖ ពន្លាតកំនត់លំដាប់3នៃ $f(x)=\ln x$ ត្រង់វ៉ស៊ីណានៃ e

តាង $x=X+e \Leftrightarrow X=x-e$ គេបាន៖

$$\ln x=\ln(e+X)=\ln e\left(1+\frac{X}{e}\right)$$

$$=1+\ln\left(1+\frac{X}{e}\right)$$

$$=1+\frac{X}{e}-\frac{1}{2}\left(\frac{X}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{X}{3}\right)^3+o(X^3)$$

$$\Rightarrow \ln x=1+\frac{x-e}{e}-\frac{1}{2}\left(\frac{x-e}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x-e}{3}\right)^3+o(x-e)^3$$

b). ដូចគ្នាដែរចំពោះវ៉ស៊ីណានៃ $\pm\infty$ គេធ្វើពន្លាតកំណត់នៃ $\frac{1}{x}$ គឺ៖

$$f(x)=g\left(\frac{1}{x}\right)=a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+...+\frac{a_n}{x^n}+o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

ឧទាហរណ៍១៥៖ ពន្លាតកំណត់លំដាប់3ត្រង់វ៉ស៊ីណានៃ $\pm\infty$ ខាងក្រោម៖

(i). $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+2x}=\dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}$

ដូចនេះ៖ $f(x)=1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{6}{x^3}+o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$ ។

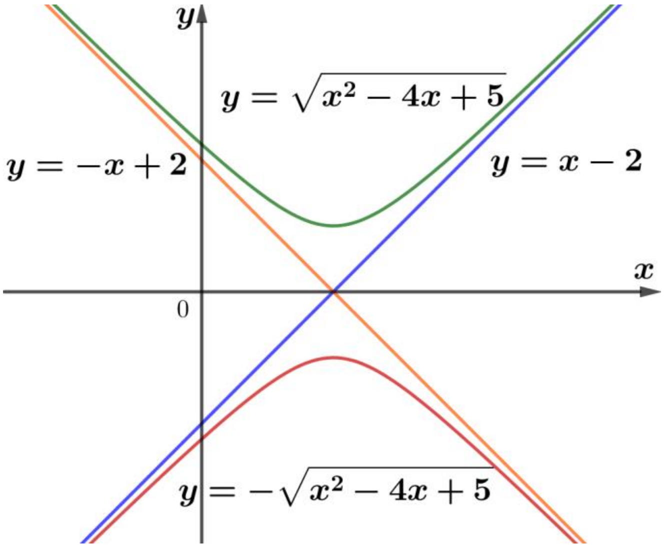
$$(ii).\ f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}=\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}=|x|\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}$$

$$=|x|\left[1+\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)-\frac{1}{8}\left(-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)^2+\frac{1}{16}\left(-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)^3+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]$$

$$=|x|\left(1-\frac{2}{x}+\frac{5}{2x^2}-\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^3}-\frac{4}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$$

$$=|x|\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$$

$$=\begin{cases} x-2+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{បើ } x\to+\infty \\ -x+2-\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{បើ } x\to-\infty \end{cases}$$



រូបទី៤.១

ច.បន្លាយនៃសញ្ញាណពន្លាតកំណត់

ឧបមាថា f គ្មានន័យត្រង់ 0 តែ $x^k f(x)$ មានពន្លាតកំណត់លំដាប់ n ក្នុងករណីគេថា f មាន ពន្លាតកំណត់ទូទៅលំដាប់ n ។

ឧទាហរណ៍១៦៖ $(i).\ f(x)=\dfrac{1}{x-x^2}=\dfrac{1}{x(1-x)}=\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{1-x}$

$$=\frac{1}{x}\left(1+x+x^2+\ldots+x^n+o\left(x^n\right)\right)$$

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{x}+1+x+\ldots+x^{n-1}+o\left(x^{n-1}\right)}$$

$$(ii).\ f(x)=\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)}{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o\left(x^5\right)}$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)}{1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o\left(x^4\right)}$$

ដូចនេះ $\cot x=\frac{1}{x}\left(1-\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{45}+o\left(x^4\right)\right)$ ។

អនុវត្តន៍ $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x}+\frac{x}{3}+o(x)\right)=0$

៤.៣. អនុវត្តពន្លាតកំណត់

ក.អនុវត្តន៍ចំពោះការគណនាលីមីត

ឧទាហរណ៍១៧៖ $i).\ \lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{\tan x-\text{Arctan}\,x}=\lim_{x\to0}\frac{x-\left[x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^n\right)\right]}{x+\frac{x^3}{3}-x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)}=\frac{1}{4}$

$$ii).\lim_{x\to0}\frac{x(1+\cos x)-2\tan x}{2x-\sin x-\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{x\left[1+1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right]-2\left[x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right]}{2x-\left[x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right]-\left[x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right]}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)x^3+o\left(x^3\right)}{\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)x^3+o\left(x^3\right)}=7$$

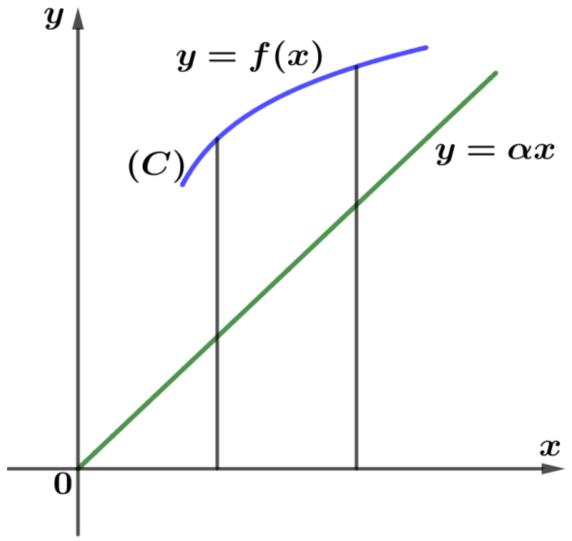
ខ.អនុវត្តន៍ចំពោះការសិក្សាអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង

ពន្លាតកំណត់ត្រង់វ៉ស៊ីណាំនៃអនន្តអាចឱ្យគេសិក្សាបានអំពីអាស៊ីមតូត ឬទិសអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង (C) តាងដោយ $y=f(x)$ ។

⊕ បើនៅវ៉ស៊ីណាំនៃអនន្តនោះគេបាន៖

$f(x)=\alpha x+\beta+\frac{k}{x^p}+o\left(\frac{1}{x^p}\right)$ នោះបន្ទាត់ $y=\alpha x+\beta$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតបើ $\alpha\neq0$ ជាអាស៊ីមតូតដេកបើ $\alpha=0$ ហើយសញ្ញា $\frac{k}{x^p}$ ឱ្យទីតាំងនៃខ្សែកោង (C) ធៀបនឹងអាស៊ីមតូត។

⊕ បើ $\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-\alpha x\right]=\pm\infty$ នោះ (C) ជាមែកប៉ារ៉ាបូលមានបន្ទាត់ $y=ax$ ជាទិសអាស៊ីមតូត។



រូបទី៤.២

ឧទាហរណ៍១៨៖ ក. តាង $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1$ និង $\lim\limits_{x\to-1^{\pm}} f(x)=\pm\infty$

ដូចនេះ អនុគមន៍នេះមានអាស៊ីមតូតដេក $y=1$ និងអាស៊ីមតូតឈរ $x=-1$។

ឧទាហរណ៍១៩៖ សិក្សាអនុគមន៍ខាងក្រោម

$(C): y=x-\sqrt{x}$

$+\ D=[0,+\infty)$

$+\ y'=1-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}>0$

$y'=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=1$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}\ ,\ y=-\dfrac{1}{4}$

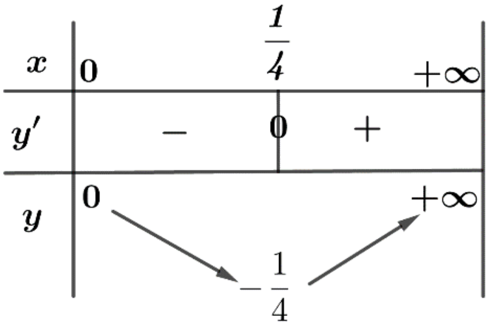
$y'>0\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{4}$

$y'<0\Leftrightarrow x<\dfrac{1}{4}$

$y(0)=0$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x-\sqrt{x}\right)=+\infty$

តារាងអថេរភាព



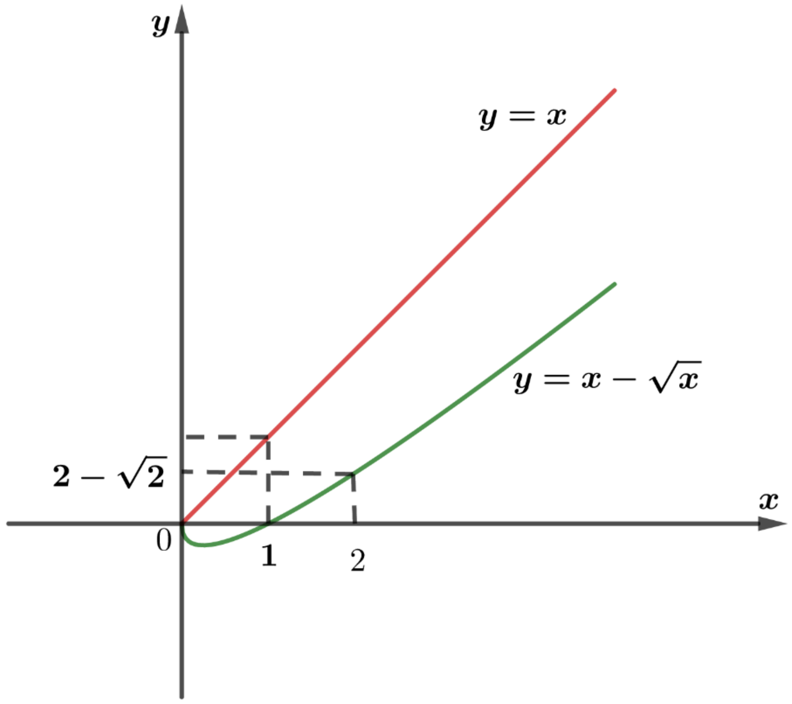
+ខ្សែកោង(C)៖

$\lim\limits_{x\to 0} y' = -\infty$ នោះខ្សែកោង(C)ប៉ះនឹងអ័ក្ស(Oy)ត្រង់ 0

$\lim\limits_{x\to+\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\sqrt{x}\right)=-\infty$ នោះខ្សែកោង(C)ជាមែកប៉ារ៉ាបូលមានបន្ទាត់ $y=x$ ជាទិសអាស៊ីមតូត។

ចំណុចជំនួយ

x	1	2
y	0	$2-\sqrt{2}$



រូបទី៤.៣

+បើ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ នោះខ្សែកោង(C)ជាមែកប៉ារ៉ាបូលមាន(Ox) ជាទិសអាស៊ីមតូត។

ឧទាហរណ៍២០៖ ចំពោះអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

$(i).\ y=\log_a x$ $\qquad$ $(ii).\ y=\sqrt[3]{x}$

+បើ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$ នោះខ្សែកោង(C)ជាមែកប៉ារ៉ាបូលមាន(Oy)ជាទិសអាស៊ីមតូត។

ឧទាហរណ៍២១៖ ក. អនុគមន៍ពហុធា

ខ. អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $y=a^x$

+បើ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ $x=x_0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ។

ឧទាហរណ៍២២៖ សិក្សាអនុគមន៍ខាងក្រោមអថេរភាព និងខ្សែកោង(C)តាង៖

$i).\ y=x+\sin x,\ [-2\pi,2\pi]$

$+y' = 1+\cos x \geq 0$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pi \ , y=\pi \\ x=-\pi \ , y=-\pi \end{array}\right.$$

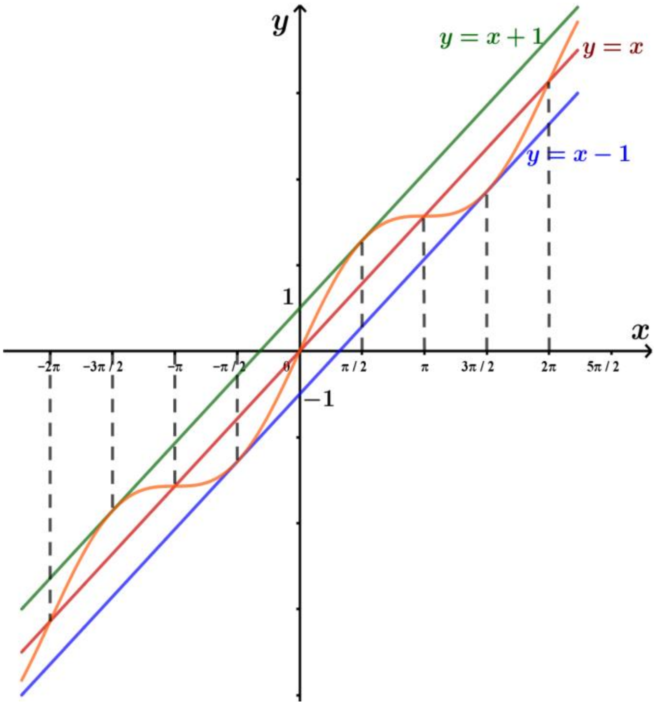
តារាងអថេរភាព

x	-2π		$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y'		+		+		+		+		+		+		+	
y	-2π		$-\pi$				0		$\frac{\pi}{2}+1$		π		$\frac{3\pi}{2}-1$	↗	2π

+ខ្សែកោង(C)៖

- $y'' = -\sin x \Rightarrow I_k(k\pi, k\pi)$ជាចំណុចរបត់
- $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow x-1 \leq x-\sin x \leq x+1$

ដូចនេះ ខ្សែកោង(C)នៅចន្លោះបន្ទាត់ $y=x-1$និង $y=x+1$ ហើយប៉ះនឹងបន្ទាត់ទាំងពីរនេះត្រង់ $J_k\left(\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi+(-1)^k\right)$



រូបទី៤.៤

ឧទាហរណ៍២៣៖ សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង(C)តាងអនុគមន៍៖

ក. $y=\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$

ខ. $y=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $y=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$

+ដែនកំណត់ y មានន័យលុះត្រាតែ $\dfrac{x}{x-1}\geq 0$

x		0		1	
$\dfrac{x}{x-1}\geq 0$	$+$	0	$-$	‖	$+$

នោះគេបាន $]-\infty,0]\cup]1,+\infty[$

$$y'=\frac{3x^2(x-1)-x^3}{(x-1)^2}\times 2\sqrt{\frac{x-1}{x^3}}$$

$$=\frac{2x^2\left(x-\frac{3}{2}\right)}{2(x-1)^2\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}}$$

y'មានសញ្ញាដូច $x-\dfrac{3}{2}$

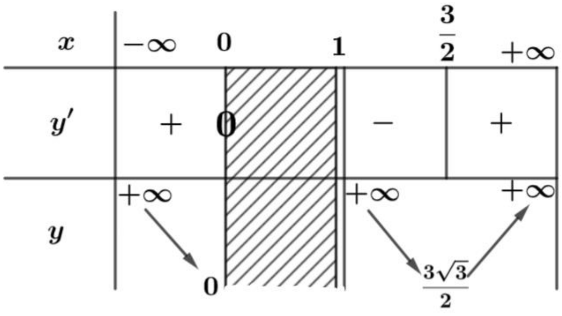
$x=\dfrac{3}{2}\Rightarrow y=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=+\infty$

$x=0\Rightarrow y=0$

$\lim\limits_{x\to 1} y=+\infty$

តារាងអថេរភាព



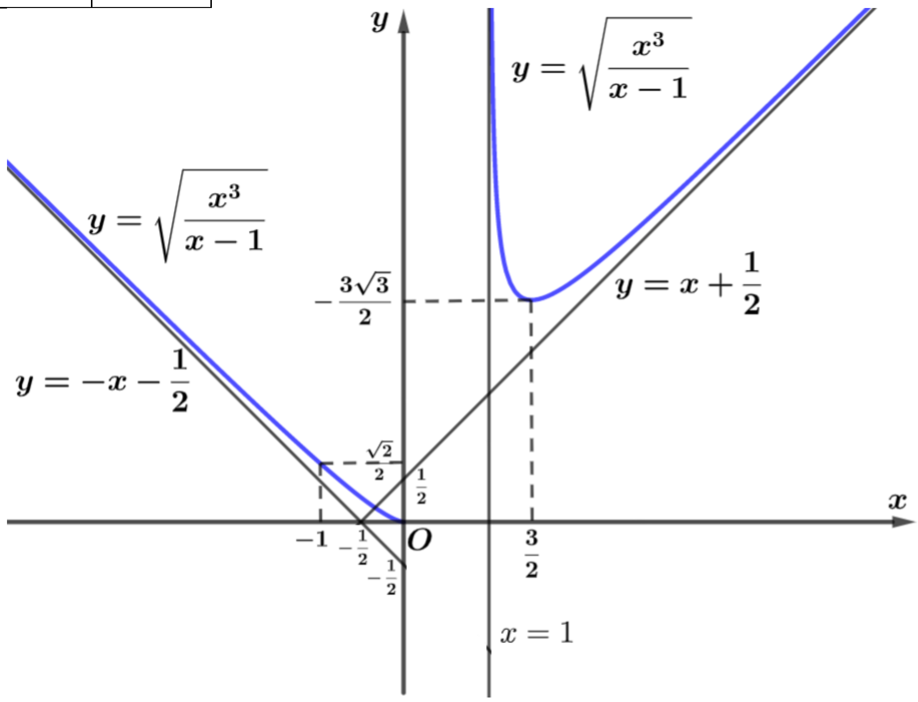
+ខ្សែកោង(C)៖

- បន្ទាត់ $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ
- $\lim\limits_{x\to 0} y'=0$ នោះគេបានត្រង់ 0 ខ្សែកោងប៉ះនឹង (Ox)
- ត្រង់វ៉ស៊ីណា នៃ $\pm\infty$ គេបាន៖

$$y=|x|\sqrt{\frac{x}{x-1}}$$
$$=|x|\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}$$
$$=|x|\left[1+\frac{1}{2x}+\frac{3}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

- បើ $x\to-\infty: y=x+\frac{1}{2}+\frac{3}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$ នោះគេបានបន្ទាត់ $y=x+\frac{1}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ហើយខ្សែកោងនៅខាងលើអាស៊ីមតូត។
- បើ $x\to+\infty: y=-x-\frac{1}{2}-\frac{3}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$ នោះគេបានបន្ទាត់ $y=-x-\frac{1}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ហើយខ្សែកោងនៅខាងលើអាស៊ីមតូត។
- ចំណុចជំនួយ

x	-1
y	$\frac{\sqrt{2}}{2}$



រូបទី៤.៥

ខ. $y=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

ដែនកំណត់៖ $D=\mathbb{R}-\{0\}$

$$y'=\frac{1+e^{\frac{1}{x}}-x\cdot e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$$

$$=\frac{1+e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}\cdot e^{\frac{1}{x}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$$

- បើ $x>0$ នោះ $y'>0$
- បើ $x<0$ តាង $t=\frac{1}{x}<0$

  y' មានសញ្ញាដូច $g(t)=1+e^t+t\cdot e^t,\ t<0$

  $g'(t)=e^t+e^t+te^t$

  $g'(t)=e^t(t+2)$

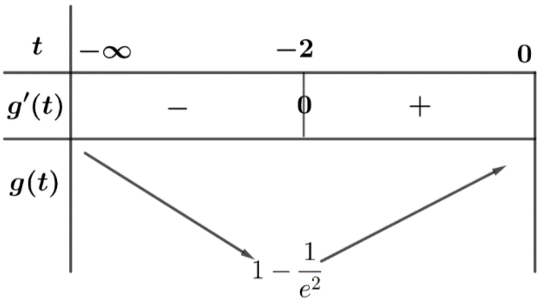
  $g'(t)$ មានសញ្ញាដូច $t+2$

  $g'(t)=0$

  $\Leftrightarrow t=-2\ ,\ g(-2)=1+\frac{1}{e^2}-\frac{2}{e^2}$

  $=1-\frac{1}{e^2}>0$

  តារាងអថេរភាពនៃ g



ដូច្នេះ $g(t)>0,\ \forall t<0 \Rightarrow y'>0\ ,\ \forall x<0$

នោះគេបាន $y'>0,\ \forall x\in D$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$$

ព្រោះ $\lim_{x\to 0}\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)=\begin{cases}1 & \text{បើ } x\to 0^-\\ +\infty & \text{បើ } x\to 0^+\end{cases}$

$\Rightarrow y$ អាចបន្លាយជាប់ត្រង់ 0 ដោយយក $y(0)=0$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}\begin{cases}-\infty \text{ បើ } x\to-\infty\\ +\infty \text{ បើ } x\to+\infty\end{cases}$$

តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y'	$-$	‖	$+$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

- ខ្សែកោង
- $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

$$=\begin{cases}1 \text{ បើ } x\to0^-\\ 0 \text{ បើ } x\to0^+\end{cases}$$

ដូច្នេះ បន្ទាត់ប៉ះខាងឆ្វេង 0 មានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ1។

ហើយខាងស្តាំ 0 ខ្សែកោងប៉ះនឹង (Ox)

- ត្រង់វ៉ែស៊ីណានៃ $\pm\infty$

$$y=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

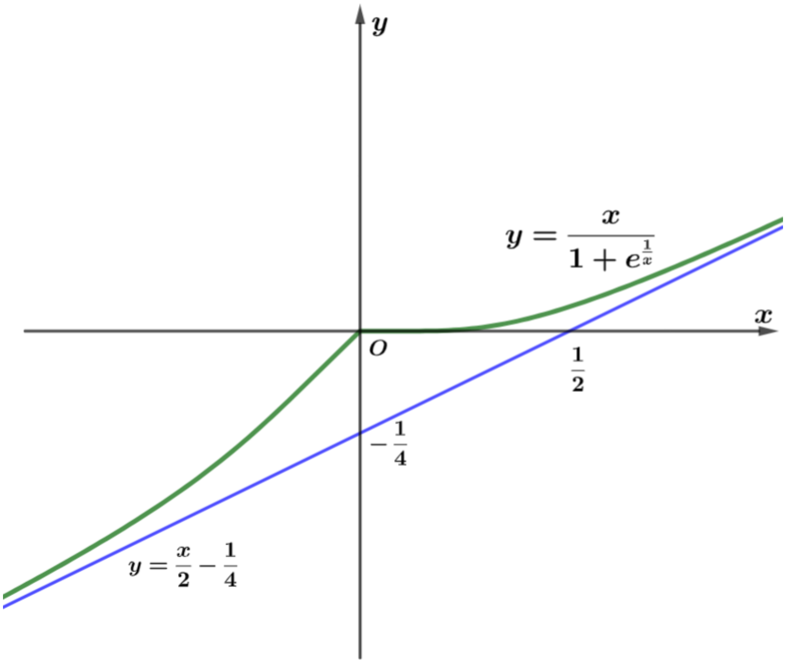
$$=\frac{x}{1+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$=\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{12x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$=\frac{x}{2}\left[1-\frac{1}{2x}-\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{12x^3}+\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{4x^3}-\frac{1}{8x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]$$

$$=\frac{x}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{24x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{48x^2}o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

ដូច្នេះ $y=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតហើយខ្សែកោងនៅខាងលើអាស៊ីមតូត។



រូបទី៤.៦

លំហាត់ប្រៀបធៀបអនុគមន៍ពន្លាតកំណត់

១. គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

$a.\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\tan^2 x}$

$b.\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\,\mathrm{Arctan}\,x}{x\sin^2 x}$

$c.\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-e^x\right)\sin x}{x^2+x^3}$

$d.\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(a^x-1\right)\ln(1-x)}{x\,\mathrm{sh}\,x}$

$e.\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{e^x-1}{x}$

$f.\ \lim\limits_{x\to 0^+}(\cos x)^{\frac{1}{x^m}}\ ,m>0$

២.រកពន្លាតកំណត់លំដាប់ 4 ត្រង់វ៉ស៊ីណានៃ 0 នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

$a.\ \dfrac{x}{\sin x}$ $\qquad b.\ \dfrac{1}{\cos x}$

$c.\ \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ $\qquad d.\ \dfrac{x}{e^x-1}$

$e.\ \dfrac{x}{e^{x-1}}$ $\qquad f.\ \sqrt{1+\sin x}$

$g.\ e^{x\sin x}$ $\qquad h.\ e^{\frac{x}{\cos x}}$

$i.\ (1+x)^{\frac{1}{x}}$ $\qquad j.\ \ln\dfrac{\sin x}{x}$ $\qquad k.\ \ln\left(1-x+x^2\right)$

៣.រកពន្លាតកំណត់លំដាប់ 4 ត្រង់វ៉ស៊ីណានៃ 1 នៃអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$ ។

៤.រកពន្លាតកំណត់លំដាប់ 3 ត្រង់វ៉ស៊ីណានៃ 1 នៃអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{x}$ ។

៥.រកពន្លាតកំណត់លំដាប់ 3 ត្រង់វ៉ស៊ីណានៃ $\pm\infty$ នៃអនុគមន៍ $f(x)=\mathrm{Arctan}\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}$ ។

៦.រកលំដាប់ និងផ្នែកគោលនៃ $y=1-\cos x-\ln\cos x$ ។

៧.កំណត់ a និង b ដើម្បីឱ្យ $y=\sin x-\dfrac{x+ax^3}{1+bx^2}$ ជាតួចអនេកមានលំដាប់ខ្ពស់បំផុតពេល $x\to 0$ ។

៨.រកពន្លាតកំណត់លំដាប់ 5 ត្រង់វ៉ស៊ីណានៃ 0 នៃអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{\mathrm{Arcsin}\,x}{\sqrt{1-x^2}}$ ។

៩.រកពន្លាតកំណត់ទូទៅត្រង់វ៉ស៊ីណានៃ 0 នៃអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{\cos x}{\ln(1+x)}$ ។

១០. គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

$a.\ \lim_{x\to 0}\frac{(x+27)^{\frac{1}{3}}-3}{(x+16)^{\frac{1}{4}}-2}$

$b.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x(1-\cos x)}$

$c.\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)$

$d.\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$

$e.\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right)$

$f.\ \lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$

១១. កំណត់អាស៊ីមតូតនៃអនុគមន៍ត្រង់វ៉ែស៊ីណានៃ $\pm\infty$ នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

$a.\ y=\ln(\mathrm{ch}\, x)$

$b.\ y=\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{x^2+x}$

$c.\ y=\frac{x^2-1}{x}\cdot e^{\frac{1}{x}}$

១២.សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

$a.\ y=x+\sqrt{x^2+1}$ $\qquad$ $b.\ y=\sqrt[3]{x^2(x-2)}$

$c.\ y=x+\frac{\ln x}{x}$ $\qquad$ $d.\ y=(x^2-1)\ln\frac{1+x}{1-x}$

$e.\ y=e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+1)}$ $\qquad$ $f.\ y=\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}$

$g.\ y=(x-1)e^{\frac{x}{x-1}}$ $\qquad$ $h.\ y=x^2\,\mathrm{Arctan}\frac{1}{x+1}$

១៣. ចូរប្រៀបធៀបភាពតូចអនេក

$a).\ x-1,\ \sqrt[3]{\frac{1}{x}-1},\left(\sqrt{x}-1\right)^2$ ចំពោះ $x\to 1$

$b).\ \frac{1}{x^3}, e^{-x},\ x^2e^{-x}, x^2 3^{-x}$ ចំពោះ $x\to+\infty$

១៤. ចូរប្រៀបធៀបអនុវត្តន៍មិនកំណត់

$a).\ x^4, \sqrt[3]{x^{11}-2x^2},\ \frac{x^4}{\log(1+x)}$ ចំពោះ $x\to+\infty$

$b).\ \frac{x^2}{\log x},\ x\log x,\ x^2 3^x,\ 3^x\log x$ ចំពោះ $x\to+\infty$

១៥. ចូរបញ្ជាក់ថា $f(x)=\sqrt{x+3}-\sqrt{3}$ និង $g(x)=\sqrt{x+5}-\sqrt{5}$ គឺជាតូចអនេកនៃលំដាប់ដូចគ្នាចំពោះ $x\to 0$ និងកំណត់ $\ell\in\mathbb{R}$ បើ $f(x)\sim \ell g(x)$ ចំពោះ $x\to 0$ ។

១៦. ចូរកំណត់លំដាប់ និងផ្នែកគោលធៀបទៅនឹង $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$ ចំពោះ $x\to+\infty$ នៃអនុគមន៍តូចអនេក៖

$a).\ f(x)=\dfrac{2x^2+\sqrt[5]{x}}{x^4}$ $\qquad b).\ f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x+3}}-1$

$c).\ f(x)=\sin\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ $\qquad d).\ f(x)=\log\left(9+\sin\dfrac{2}{x}\right)-2\log 3$

១៧. ចូរបញ្ជាក់ថា $f(x)=\sqrt[3]{x^3-2x^2+1}$ និង $g(x)=2x+1$ គឺមិនកំណត់នៃលំដាប់ដូចគ្នាចំពោះ $x\to-\infty$ និងកំណត់ $\ell\in\mathbb{R}$ បើ $f(x)\sim \ell g(x)$ ចំពោះ $x\to-\infty$ ។

១៨. ចូរកំណត់លំដាប់ និងផ្នែកគោលធៀបទៅនឹង $\varphi(x)=x$ ចំពោះ $x\to+\infty$ នៃអនុគមន៍មិនកំណត់ ៖

$a).\ f(x)=x-\sqrt{x^2+x^4}$ $\qquad b).\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}}$

១៩.ចូររកលំដាប់ និងផ្នែកគោលធៀបទៅនឹង $\varphi(x)=x$ ចំពោះ $x\to 0$ នៃអនុគមន៍តូចអនេក៖

$a).\ f(x)=\left(\sqrt{1+3x}-1\right)\sin 2x^2$ $\qquad b).\ f(x)=\sqrt[3]{\cos x}-1$

$c).\ f(x)=\dfrac{\sqrt{1+3x^3}}{1+2x^3}-1$ $\qquad d).\ f(x)=\dfrac{e^x}{1+x^2}-1$

$e).\ f(x)=\log\cos x$ $\qquad f).\ f(x)=e^{\cos x}-e^{\sqrt{x^3+1}}$

២០. ចូររកលំដាប់ និងផ្នែកគោលធៀបទៅនឹង $\varphi(x)=x-x_0$ ចំពោះ $x\to x_0$ តូចអនេក៖

$a).\ f(x)=\log x-\log 3,\ x_0=3$ $\qquad b).\ f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{2}\ ,\quad x_0=2$

$c).\ f(x)=e^{x^2}-e,\qquad x_0=1$ $\qquad d).\ f(x)=\sin x,\qquad x_0=\pi$

$e).\ f(x)=1+\cos x,\ x_0=\pi$ $\qquad f).\ f(x)=\sin(\pi\cos x),\qquad x_0=\pi$

២១. ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

$a).\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{\sqrt{1+3x^2}}{\cos x}-1\right)$ $\qquad b).\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)^2}{x-2}$

$c).\ \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\log\left(3-\sqrt{x+1}\right)}{3-x}$ $\qquad d).\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{\sqrt{x+2}}-e^{\sqrt{3}}}{(x-1)^2}$

២២. ចូរកំណត់ដែន និងអាស៊ីមតូតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

$a).\ f(x)=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}$ $\qquad b).\ f(x)=x+2\arctan x$

$c).\ f(x)=\dfrac{x^2-(x+1)|x-2|}{2x+3}$ $\qquad d).\ f(x)=xe^{\frac{1}{|x^2-1|}}$

$e).\ f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ $\qquad f).\ f(x)=\log\left(x+e^x\right)$

២៣. ចូរគណនាលំដាប់ និងផ្នែកគោលពេល $x\to+\infty$ ធៀបនឹង $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$ នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

$a).\ f(x)=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{2(x-2)-\log(x-1)}$ $\qquad b).\ f(x)=e^{-\frac{x}{4x^2+1}}-1$

$c).\ f(x)=\sqrt[3]{1+3x^2+x^3}-\sqrt[5]{2+5x^4+x^5}$ $\qquad d).\ f(x)=\sqrt[3]{2+\sinh\dfrac{2}{x^2}}-\sqrt[3]{2}$

២៤. គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

$a).\ \lim\limits_{x\to0}\left(1+x^6\right)^{\frac{1}{x^4\sin^2 3x}}$ $\qquad b).\ \lim\limits_{x\to2}\dfrac{\cos\frac{3}{4}\pi x-\frac{3}{2}\pi\log\frac{x}{2}}{\left(4-x^2\right)^2}$

$c).\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\sin(\tan x)}-\dfrac{1}{x}\right)$ $\qquad d).\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^4\left[\log\left(1+\sinh^2 x\right)\right]\cosh^2 x}{1-\sqrt{1+x^3}\cos\sqrt{x^3}}$

$e).\ \lim\limits_{x\to0}\left(e^{x^7}+\sin^2 x-\sinh^2 x\right)^{\frac{1}{x^4}}$ $\qquad f).\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{18x^4}{\sqrt[3]{\cos 6x}-1+6x^2}$

មេរៀនទី៥៖ អាំងតេក្រាលអ៊ីមប្រូពើ
(Improper Integral)

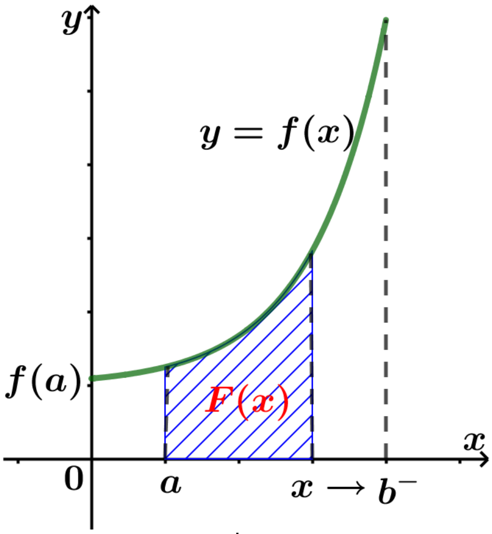
៥.១. និយមន័យ

គេឱ្យអនុគមន៍ $y=f(x)$ ជាប់លើចន្លោះ $[a,b)$ ចំពោះ $\forall x\in[a,b)$, f ជាប់លើ $[a,x]$

នោះគេអាចកំណត់អនុគមន៍ $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, $\forall x\in[a,b)$

⊕ បើ $\lim_{x\to b^-}F(x)=\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt$ ជាចំនួនកំណត់នោះគេថាអាំងតេក្រាល Improper $\int_a^b f(t)dt$ រួម

ហើយគេបាន $$\int_a^b f(t)dt=\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt$$



រូបទី៥.១

ឧទាហរណ៍១៖ សិក្សាអាំងតេក្រាល $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

អនុគមន៍ $\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ ដាច់ត្រង់ $x=3$ គេបាន៖

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}=\lim_{x\to 3}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

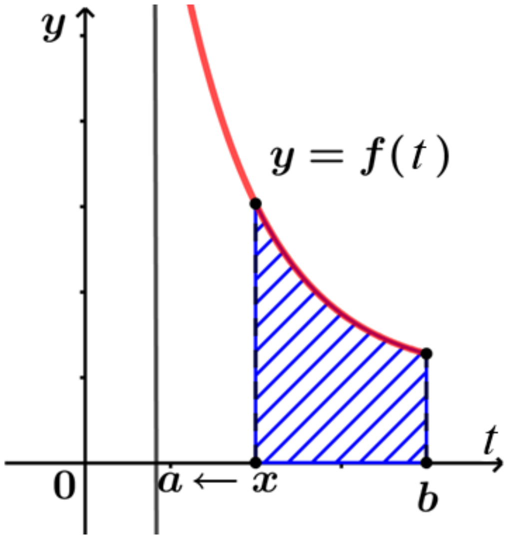
$$=\lim_{x\to 3}\left|\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right|_0^x$$

$$=\lim_{x\to 3}\left[\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)-\sin^{-1}0\right]$$
$$=\sin^{-1}(1)-0$$
$$=\frac{\pi}{2}$$

ដូចនេះ អាំងតេក្រាល $\int_0^3\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ រួម។

⊕ បើ $\lim_{x\to b^-}F(x)$ គ្មានឬស្មើ $\pm\infty$ នោះគេថាអាំងតេក្រាល Improper $\int_a^b f(t)dt$ រីក។ គេឱ្យនិយមន័យដូចគ្នាចំពោះករណីផ្សេងៗទៀតដូចជា៖

\+ f ជាប់លើ $(a,b]$: $\int_a^b f(t)dt=\lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)dt$



រូបទី៥.២

ឧទាហរណ៍២៖ សិក្សាអាំងតេក្រាល $\int_0^1\frac{dx}{1-x}$ ។

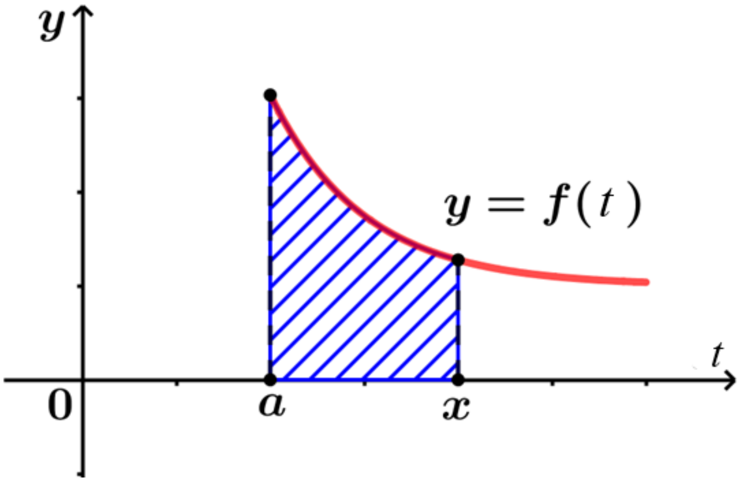
ដំណោះស្រាយ

អនុគមន៍ $\frac{1}{1-x}$ ដាច់ត្រង់ $x=1$ គេបាន៖

$$\int_0^1\frac{dx}{1-x}=\lim_{c\to 1}\int_0^c\frac{1}{1-x}dx$$
$$=\lim_{c\to 1}\left|-\ln(1-x)\right|_0^c$$
$$=\lim_{c\to 1}\left[-\ln(1-c)+\ln 1\right]$$
$$=-\ln(1-1)=+\infty$$

ដូចនេះ អាំងតេក្រាល $\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$ រីក។

+ f ជាប់លើ $[a,+\infty)$: $\boxed{\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt}$



រូបទី៩.៣

ឧទាហរណ៍៣៖ គណនា $\int_2^{+\infty} \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

$$\int_2^{+\infty} \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_2^b\left[\frac{2}{x-1}+\frac{-2x-1}{x^2+1}\right]dx$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[\int_2^b \frac{2}{x-1}dx - \int_2^b \frac{2x}{x^2+1}dx - \int_2^b \frac{1}{x^2+1}dx\right]$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[\left|2\log(x-1)-\log(x^2+1)-\tan^{-1}x\right|_2^b\right]$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[\left|\log\frac{(x-1)^2}{x^2+1}-\tan^{-1}x\right|_2^b\right]$$

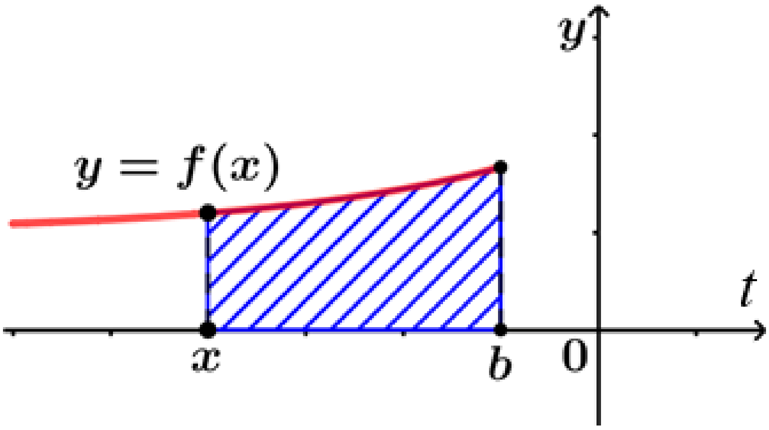
$$= \lim_{b\to+\infty}\left[\log\frac{(b-1)^2}{b^2+1}-\tan^{-1}b-\log\frac{1}{5}+\tan^{-1}2\right]$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[\log\frac{\left(1-\frac{1}{b}\right)^2}{1+\frac{1}{b^2}}-\tan^{-1}b+\log 5+\tan^{-1}2\right]$$

$$= \log 1-\tan^{-1}\infty+\log 5+\tan^{-1}2 = -\frac{\pi}{2}+\log 5+\tan^{-1}2$$

ដូចនេះ $\int_{2}^{+\infty}\frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}dx=-\frac{\pi}{2}+\log 5+\tan^{-1}2$ ។

+ f ជាប់លើ $(-\infty,b]$: $\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(t)dt=\lim_{x\to-\infty}\int_{x}^{b} f(t)dt}$



រូបទី៥.៤

ឧទាហរណ៍៤៖ គណនា $\int_{-\infty}^{2} x^2dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

$$\int_{-\infty}^{2} x^2dx=\lim_{N\to-\infty}\int_{a}^{2} x^2dx$$

$$=\lim_{N\to-\infty}\left[\frac{x^3}{3}\right]_N^2$$

$$=\lim_{N\to-\infty}\left[\frac{1}{3}-\frac{N^3}{3}\right]=\frac{1}{3}-\lim_{N\to-\infty}\frac{N^3}{3}$$

$$=\frac{1}{3}-(-\infty)=+\infty$$

ដូចនេះ $\int_{-\infty}^{2} x^2dx=+\infty$ ។

ចំណាំ៖

ក. បើ f ជាប់ទ័លលើ (a,b) នោះអាំងតេក្រាល Improper $\int_{a}^{b} f(t)dt$ រួមតាមផ្នែក I ។

ខ.បើ f ជាប់លើ $[a,b)$ នោះគេបាន៖ $\forall c\in(a,b)$, $\boxed{\int_{a}^{b} f(t)dt=\int_{a}^{c} f(t)dt+\int_{c}^{b} f(t)dt}$

ដូច្នេះ $\int_{a}^{b} f(t)dt$ និង $\int_{c}^{b} f(t)dt$ មានប្រភេទដូចគ្នា។

ឧទាហរណ៍៥៖ គណនា $\int_{-2}^{3}\frac{1}{x-1}dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

$$\int_{-2}^{3}\frac{1}{x-1}dx=\int_{-2}^{1}\frac{1}{x-1}dx+\int_{1}^{3}\frac{1}{x-1}dx$$

$$=\lim_{a\to1^-}\int_{-2}^{a}\frac{1}{x-1}dx+\lim_{b\to1^+}\int_{b}^{3}\frac{1}{x-1}dx$$

$$=\lim_{a\to1^-}\ln|x-1|\Big|_{-2}^{a}+\lim_{b\to1^+}\ln|x-1|\Big|_{b}^{3}$$

$$=\lim_{a\to1^-}\left[\ln|a-1|-\ln|-3|\right]+\lim_{b\to1^+}\left[\ln2-\ln|b-1|\right]$$

$$=\ln\left(0^+\right)-\ln3+\ln2-\ln\left(0^+\right)$$

$$=-\infty-\ln3+\ln2-(-\infty)$$

$=-\infty+\infty$ មិនមាន

លក្ខណៈដូចគ្នាចំពោះករណីផ្សេងទៀតដូចជា៖

f ជាប់លើ $[0,+\infty)$ គេបាន $\int_{0}^{+\infty}f(t)dt$ & $\int_{1}^{+\infty}f(t)dt$ មានប្រភេទដូចគ្នា។

គ. បើ f ជាប់លើ $[a,+\infty)$ ហើយអាំងតេក្រាល Improper $\int_{a}^{b}f(t)dt$ រួមគឺ $\lim_{x\to b^-}\int_{a}^{x}f(t)dt$ ជាចំនួនកំណត់នោះតាមវិធានCauchyគេបាន៖

$$\int_{a}^{b}f(t)dt \text{ រួម}\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,\forall x_1,x_2\in[a,b),b-\eta<x_1,x_2<b,\left|\int_{x_1}^{x_2}f(t)dt\right|<\varepsilon$$

ដូចគ្នាគេបាន៖ $\int_{a}^{+\infty}f(t)dt$ រួម $\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists A>0\left(A>0\right),\forall x_1,x_2\ge A,\left|\int_{x_1}^{x_2}f(t)dt\right|<\varepsilon$ ។

ឃ. បើ f ជាប់លើ (a,b) នោះគេបាន៖ $\int_{a}^{b}f(t)dt=\int_{a}^{c}f(t)dt+\int_{c}^{b}f(t)dt,c\in(a,b)$

ដូចនេះ: $\int_{a}^{b}f(t)dt$ រួម $\Leftrightarrow\int_{a}^{c}f(t)dt$ & $\int_{c}^{b}f(t)dt$ រួម។

ឬតាមនិយមន័យ $\int_{a}^{b}f(t)dt=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}f(t)dt$ ។

ឧទាហរណ៍៦៖ ក. $\int_{0}^{1}\frac{dt}{t^{\alpha}}$ រួមតែក្នុងករណី $\alpha<1$ ព្រោះ៖

+ បើ $\alpha = 1: \int_0^1 \frac{dt}{t} = \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{dt}{t} = \lim_{x\to 0^+} (-\ln x) = +\infty$ រីក

+ បើ $\alpha \neq 1: \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \left. \frac{-1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}} \right|_x^1$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\alpha-1}\left(1-x^{1-\alpha}\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} \text{ បើ } \alpha < 1 \text{ រួម} \\ +\infty \text{ បើ } \alpha > 1 \text{ រីក} \end{cases}$$

ជាទូទៅ បើ $a > 0$ គេបានអាំងតេក្រាល Improper $\int_0^a \frac{dt}{(a-t)^\alpha}$ រួមតែក្នុងករណី $\alpha < 1$។

ខ. $\int_0^a \frac{dt}{(a-t)^\alpha}$ រួមតែក្នុងករណី $\alpha < 1$

គេសិក្សាអាំងតេក្រាល Improper $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ រួមតែក្នុងករណី $\alpha > 1$

ព្រោះ៖

+ បើ $\alpha = 1: \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t} = \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ រីក

+ បើ $\alpha \neq 1: \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \left. \frac{-1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}} \right|_1^x$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha-1}\left(1-\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} \text{ បើ } \alpha > 1 \text{ រួម} \\ +\infty \text{ បើ } \alpha < 1 \text{ រីក} \end{cases}$$

គ. $\int_{-2}^3 \frac{dx}{(x-1)^3} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\int_{-2}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^3} + \int_{1+\varepsilon}^3 \frac{dx}{(x-1)^3} \right]$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\left[\frac{-1}{2(x-1)^2} \right]_{-2}^{1-\varepsilon} + \left[\frac{-1}{2(x-1)^2} \right]_{1+\varepsilon}^3 \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\frac{-1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{18} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2\varepsilon^2} \right)$$

$$= \frac{1}{18} - \frac{1}{8} = -\frac{5}{72}$$

ឃ. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{dt}{t^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \text{Arctan}\, t \,\Big|_0^x$

$$= \lim_{x\to+\infty} \text{Arctan}\, x = \frac{\pi}{2}$$

ឃ. $I = \int_0^1 \ln t dt = \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \ln t dt$

$$= \lim_{x\to 0^+} t(\ln t - t)\Big|_x^1$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left[-1 - x(\ln x - x)\right] = -1$$

៥.២. ការសិក្សាអាំងតេក្រាលអ៊ីមប្រូពើ (Improper Integral)

គេសិក្សាតែករណី f ជាប់លើ $[a,b)$ (ចំពោះករណីផ្សេងទៀតលក្ខណៈដូចគ្នា)។

ក. $$\boxed{\begin{array}{l} \int_a^b [f(t)+g(t)]dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt \\ \int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt \end{array}}$$ ពិតតាមលក្ខណៈលីមីត

ខ.បើ $f \geq 0$ លើ $[a,b) \Rightarrow \int_a^x f(t)dt \geq 0, \forall x \in [a,b)$

$$\Rightarrow \int_a^b f(t)dt \geq 0$$

វិបាក៖ $f \leq g$ លើ $[a,b) \Rightarrow$ $\boxed{\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt}$

ឧទាហរណ៍៧៖ សិក្សាអាំងតេក្រាលអ៊ីមប្រូពើ ខាងក្រោម៖

ក. $\int_1^3 \sqrt{\frac{7-x}{3-x}} dx$

ខ. $\int_1^2 \frac{e^x+1}{(x-1)^2} dx$

គ. $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\int_1^3 \sqrt{\frac{7-x}{3-x}} dx$

អនុគមន៍ $f(x) = \sqrt{\frac{7-x}{3-x}}$ កំណត់ និងជាប់នៅចន្លោះ $[1,3)$ ប៉ុន្តែមិនជាប់ចំពោះ $x \to 3^-$ ។

ដូចជា $7-x \leq 6$ នៅលើចន្លោះ $[1,3)$ ដោយធ្វើការប្រៀបធៀបយើងបាន៖

$$\int_1^3 \sqrt{\frac{7-x}{3-x}} dx \leq \int_1^3 \sqrt{\frac{6}{3-x}} dx < +\infty$$

ដូចនេះ អាំងតេក្រាលនេះរួម។

ខ. $\int_1^2 \frac{e^x+1}{(x-1)^2}dx$

ចំពោះ $x\in(1,2]$ គេបាន

$\frac{e^x+1}{(x-1)^2} > \frac{e+1}{(x-1)^2}$

$\Rightarrow \int_1^2 \frac{e^x+1}{(x-1)^2}dx > \int_1^2 \frac{e+1}{(x-1)^2}dx$

ដោយធ្វើការប្រៀបធៀបយើងបាន អាំងតេក្រាលនេះរីកទៅរក $+\infty$ ។

គ. $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$

ចំពោះអនុគមន៍ $f(x)=e^{-x^2}$ និងតាងអនុគមន៍ $g(x)=e^{-x}$ នោះគេបាន៖

$$e^{-x^2}\le e^{-x} \text{ ចំពោះ } x\ge 1\begin{bmatrix} \therefore x^2\ge x \\ -x^2\le -x\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} g(x)\,dx = \int_1^{+\infty} e^{-x}dx$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\int_1^b e^{-x}dx$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(e^{-1}-e^{-b}\right)$$

$$= e^{-1}$$

$$= \frac{1}{e}$$

គេបាន $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ គឺរួម

ដូចនេះ អាំងតេក្រាល $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ រួម។

គ.រូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកប្រើបានចំពោះអាំងតេក្រាល Improper គឺ៖

$$\boxed{\int_a^b f(t)g'(t)dt = \lim_{x\to b^-}\left[f(t)g(t)\right]_a^x - \int_a^b g(t)f'(t)dt}$$

ឧទាហរណ៍៨៖ សិក្សាអាំងតេក្រាលអ៊ីមប្រូភើ(Improper) ខាងក្រោម៖

$$i).\ I=\int_0^1 \frac{1}{t}\sin\frac{1}{t}dt=\int_0^1 t\left(\frac{1}{t^2}\sin\frac{1}{t}\right)dt$$

តាង $\begin{cases} u=t \\ dv=\frac{1}{t^2}\sin\frac{1}{t}dt\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dt \\ v=\cos\frac{1}{t}\end{cases}$

ដូចនេះ៖

$$I=\lim_{x\to0^+} t\cos\frac{1}{t}\Big|_x^1-\int_0^1\cos\frac{1}{t}dt$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(\cos1-x\cos\frac{1}{x}\right)-\int_0^1\cos\frac{1}{t}dt$$

$$=\cos1-\int_0^1\cos\frac{1}{t}dt$$ តែ $\int_0^1\cos\frac{1}{t}dt$ រួម $\Rightarrow I$ រួម

$$ii).\ I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\ln(\sin t)dt=\lim_{x\to0^+}\int_x^{\frac{\pi}{2}}\cos t\left[\ln(\sin t)\right]dt$$

តាង $\begin{cases}u=\ln(\sin t)\\ dv=\cos tdt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{\cos t}{\sin t}dt\\ v=\sin t\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\lim_{x\to0^+}\sin t\ln(\sin t)\Big|_x^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos tdt$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left[-\sin x\ln(\sin x)\right]-\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-1$$

ដូចនេះ អាំងតេក្រាល I រួម។

ឃ.វិធីប្តូរអថេរប្រើបានក្នុងអាំងតេក្រាលអ៊ីមប្រូភើ

បើក្នុង $I=\int_a^b f(t)dt=\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt$

គេតាង $\begin{cases}t=\varphi(s)\Leftrightarrow s=\varphi^{-1}(t)\Rightarrow dt=\varphi'(s)ds\\ t=a\Leftrightarrow s=\varphi^{-1}(a)\\ t=x\Leftrightarrow s=\varphi^{-1}(x)\end{cases}$

នោះគេបាន $\boxed{I=\lim_{x\to b^-}\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(x)} f\left[\varphi(s)\right]\varphi'(s)ds}$ ។

ឧទាហរណ៍៩៖ សិក្សាអាំងតេក្រាលអ៊ីមប្រូភើ(Improper) ខាងក្រោម៖

$$i).\ I=\int_0^1\frac{\operatorname{Arccos} t}{\sqrt{t}}dt,\ \begin{cases}s=\sqrt{t}\Leftrightarrow t=s^2\\ dt=2sds\Leftrightarrow 2ds=\dfrac{dt}{s}=\dfrac{dt}{\sqrt{t}}\\ t=0\Leftrightarrow s=0, t=1\Leftrightarrow s=1\end{cases}$$

$$=\int_0^1\operatorname{Arccos} s^2ds$$ រួម

$ii).\ I=\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt,\begin{cases} t=\frac{1}{s}\Leftrightarrow s=\frac{1}{t}\Rightarrow dt=-\frac{ds}{s^2}\\ t=1\Leftrightarrow s=1,\ t\to+\infty\Leftrightarrow s\to 0\end{cases}$

$\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\int_1^0 s\sin\frac{1}{s}\left(-\frac{ds}{s^2}\right)=\int_0^1\frac{1}{s}\sin\frac{1}{s}ds$ តាមឧទាហរណ៍ ៨ (គ) $i)$.

$\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$ រួម

តែ $\int_0^1\frac{\sin t}{t}dt$ រួម នោះគេបាន $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$ រួមហើយស្មើ $\frac{\pi}{2}$ ។

$iii).\ I_\alpha=\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t\ln^\alpha t},\ \alpha\in\mathbb{R}$

តាង $\begin{cases} s=\ln t\Leftrightarrow ds=\frac{dt}{t}\\ t=2\Rightarrow s=\ln 2\\ t\to+\infty\Leftrightarrow s\to+\infty\end{cases}$

$\Rightarrow I_\alpha=\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{ds}{s^\alpha}$ រួមតែក្នុងករណី $\alpha>1$។

៥.៣. ការសិក្សាអាំងតេក្រាលអ៊ីមប្រូពើក្នុងករណីអនុគមន៍ $f\geq 0$

យើងសិក្សាតែករណី $f\geq 0$ ហើយជាប់លើ $[a,b)$ ហើយមានលក្ខណៈនេះដូចគ្នាចំពោះករណីផ្សេងទៀត។

ទ្រឹស្តីបទ៖ គេឱ្យអនុគមន៍ $f,g\geq 0$ ជាប់លើ $[a,b)$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ $f\leq g$ ។ ក្នុងករណីនេះគេបាន៖

$(i).\ \int_a^b g(t)dt$ មានន័យឬ រួម $\Rightarrow\int_a^b f(t)dt$ មានន័យ ឬរួម

$(ii).\ \int_a^b f(t)dt$ គ្មានន័យ ឬរីក $\Rightarrow\int_a^b g(t)dt$ គ្មានន័យ ឬរីក

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង $F(x)=\int_a^x f(t)dt,\ G(x)=\int_a^x g(t)dt,\ x\in[a,b)$ គេបាន៖

- $\oplus\quad f\leq g\Rightarrow F(x)\leq G(x)$
- $\oplus\quad f\geq 0\Rightarrow F$ កើនព្រោះ $x_1<x_2\Rightarrow F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}f(t)dt\geq 0$

ដូចនេះ $g\geq 0\Rightarrow G$ កើន។

(i). ឧបមាថា $\int_a^b g(t)dt$ រួម

គេបាន $F(x) \le G(x) \le \lim\limits_{x\to b^-} \int_a^x g(t)dt = \int_a^b g(t)dt$ (ព្រោះ G កើន)

$\Rightarrow F$ កើនទំលលើ $[a,b)$

$\Rightarrow F$ មានលីមីតឆ្វេងត្រង់ $b \Rightarrow \int_a^b f(t)dt = \lim\limits_{x\to b^-} F(x)$ រួម

(ii). ឧបមា $\int_a^b f(t)dt$ រីក

គេបាន៖

$$\begin{cases} F \text{ កើន} \\ \int_a^b f(t)dt = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) \text{ រីក} \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$$

តែ $F(x) \le G(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$

$\Rightarrow \int_a^b g(t)dt$ រីក

ករណីពិសេស៖

(i). បើ $\lim\limits_{t\to b^-} \dfrac{f(t)}{g(t)} = k \ (k>0)$ នោះគេបាន $\int_a^b f(t)dt \ \& \int_a^b g(t)dt$ មានប្រភេទដូចគ្នា (បើ $k=1$)

គេបាន $f(t) \sim g(t) \ (t\to b^-)$ ។

ព្រោះបើ $\varepsilon > 0 \ (\varepsilon < k)$ គេបាន៖

$$\exists \eta > 0, \forall t \in \left]b-\eta, b\right[, k-\varepsilon < \frac{f(t)}{g(t)} < k+\varepsilon$$

$$\Rightarrow (k-\varepsilon)g(t) < f(t) < g(t)(k+\varepsilon)$$

$\Rightarrow \int_a^b f(t)dt \ \& \int_a^b g(t)dt$ មានប្រភេទដូចគ្នា។

(ii). គេនិយមប្រៀបធៀបនិងអាំងតេក្រាលរីម៉ាន់ $\int_0^1 \dfrac{dt}{t^\alpha}$ និង $\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t^\alpha}$

⊕ បើត្រង់វ៉ស៊ីណានៃ 0 គេបាន៖

- $f(t) \le \dfrac{A}{t^\alpha}, \alpha < 1 \Rightarrow \int_0^1 f(t)dt$ រួម
- $f(t) \ge \dfrac{A}{t^\alpha}, \alpha \ge 1 \Rightarrow \int_0^1 f(t)dt$ រីក

⊕ បើត្រង់វ៉ែស៊ីណាំនៃ $+\infty$ គេបាន៖

– $f(t)\le \frac{A}{t^{\alpha}},\alpha>1\Rightarrow \int_1^{+\infty} f(t)dt$ រួម

– $f(t)\ge \frac{A}{t^{\alpha}},\alpha\le 1\Rightarrow \int_1^{+\infty} f(t)dt$ រីក

ឧទាហរណ៍១០៖ សិក្សាអាំងតេក្រាលអ៊ីមប្រូពើខាងក្រោម៖

$$(i).I=\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

$$\forall t\in[0,1)\ ,\ 0<\frac{1}{\sqrt{1-t^4}}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{1+t}\sqrt{1-t}}\le\frac{1}{\sqrt{1-t}}$$

តែ $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}=-2\sqrt{1-t}\Big|_0^1=-2$ រួម នោះគេបាន I រួម

$$(ii).\int_0^1 \frac{e^t}{t}dt$$

$\forall t\in\,]0,1]\ ,\frac{e^t}{t}>\frac{1}{t}$ តែ $\int_0^1 \frac{dt}{t}$ រីក នោះគេបាន I រីក។

$$(iii).I=\int_0^1 t^p(1-t)^q\,dt\ ,\ p,q\in\mathbb{R}$$

គេបាន៖

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}} t^p(1-t)^q\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^1 t^p(1-t)^q\,dt$$

\+ គេសិក្សា $I_2=\int_{\frac{1}{2}}^1 t^p(1-t)^q\,dt$ គេបាន៖

$$\forall t\in\left[\frac{1}{2},1\right[\ ,\frac{1}{2}\le t<1\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2^p}\le t^p\le 1 \text{ បើ } p\ge 0\\ 1\le t^p\le\frac{1}{2^p} \text{ បើ } p<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow 2^{-|p|}\le t^p\le 2^{|p|}\ ,\forall p\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 2^{-|p|}(1-t)^q\le t^p(1-t)^q\le 2^{|p|}(1-t)^q$$

$\Rightarrow I_2$ និង $\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^q\,dt$ មានប្រភេទដូចគ្នា។

តែ $\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^q\,dt$ រួមតែក្នុងករណី $-q<1\Leftrightarrow q>-1$

ដូចនេះ I_2 រួមតែក្នុងករណី $q>-1$។

+ ចំពោះ $I_1=\int_0^{\frac{1}{2}} t^p(1-t)^q\,dt$

គេតាង $\begin{cases} s=1-t\Rightarrow t=1-s \\ t=0\Rightarrow s=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} dt=-ds \\ t=\frac{1}{2},s=\frac{1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow I_1=-\int_{\frac{1}{2}}^{1} s^q(1-s)^p\,ds$ រួមតែក្នុងករណី $p>-1$

ជាសរុបគេបាន I រួមតែក្នុងករណី $p,q>-1$។

ចំណាំ៖ ក្នុងករណីខ្លះដើម្បីបង្ហាញ $I=\int_a^{+\infty} f(t)dt$

+ រួមត្រូវបង្ហាញថា $\lim_{t\to+\infty} f(t)t^\alpha=0\ ,\ \alpha>1$

+ រីកត្រូវបង្ហាញថា $\lim_{t\to+\infty} f(t)t^\alpha=+\infty\ ,\ \alpha<1$

ឧទាហរណ៍១១៖ $i).\ I=\int_1^{+\infty} e^{-t}t^n dt$ រួម $\forall n\in\mathbb{R}$ ព្រោះ៖ $\lim_{t\to+\infty} e^{-t}t^n t^2=0$

$\Rightarrow \exists A>1,\ \forall t\geq A\ ,e^{-t}t^n t^2<1\Rightarrow e^{-t}t^n<\frac{1}{t^2}$

តែ $\int_A^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ រួម $\Rightarrow I$ រួម $\forall n\in\mathbb{R}$ ។

$ii).\ I=\int_1^{+\infty}\frac{e^t}{t^n}dt$ រីក $\forall n\in\mathbb{R}$ ព្រោះ៖ $\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t^n}t=+\infty\Rightarrow\exists A>1\ ,\forall t\geq A,\frac{e^t.t}{t^n}>1$

$\Rightarrow\frac{e^t}{t^n}>\frac{1}{t}$ តែ $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}dt$ រីក $\Rightarrow I$ រីក $\forall n\in\mathbb{R}$ ។

⊕ **ក្នុងករណីខ្លះគេប្រើពន្លាតកំណត់ដើម្បីសិក្សាអាំងតេក្រាលអ៊ីមប្រូភើ(Improper)**

ឧទាហរណ៍១២៖ គណនាអាំងតេក្រាលដោយប្រើពន្លាតកំណត់ខាងក្រោម

$i).\ I=\int_0^1\frac{\operatorname{ch}t-\cos t}{t^{\frac{5}{2}}}dt$

ត្រង់វ៉ស៊ីណាជនៃ o គេបាន៖

$\operatorname{ch}t-\cos t=1+\frac{t^2}{2}+o\left(t^2\right)-\left(1-\frac{t^2}{2}+o\left(t^2\right)\right)=t^2+o\left(t^2\right)$

$\Rightarrow\frac{\operatorname{ch}t-\cos t}{t^{\frac{5}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{t}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{ch} t-\cos t}{t^{\frac{5}{2}}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}\ (t\to 0)$$

តែ $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ រួម ដូច្នេះ I រួម។

$$ii).\ I=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)dt$$

ត្រង់វ៉ស៊ីណានៃ $+\infty$ គេបាន៖

$$\frac{1}{t}\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)=\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}+o\left(\frac{1}{t}\right)\right)=\frac{1}{t^2}+o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t}\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)\sim\frac{1}{t^2}\ (t\to+\infty)$$

តែ $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ រួម ដូច្នេះ I រួម។

ឬ $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{t}\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)}{\frac{1}{t^2}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{t}}-1}{\frac{1}{t}}=1$

នោះគេបាន I & $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ មានប្រភេទដូចគ្នា

តែ $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ រួមដូច្នេះ I រួម។

៥.៤. អាំងតេក្រាលរួមដាច់ខាត

និយមន័យ៖ បើ f ជាប់លើ $[a,b)$ គេថា $\int_a^b f(t)\,dt$ រួមដាច់ខាតកាលណា $\int_a^b |f(t)|\,dt$ រួម។

ឧទាហរណ៍១៣៖ $I=\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^2}dt$ រួមដាច់ខាតព្រោះ៖

$$\forall t\ge 1,\left|\frac{\sin t}{t^2}\right|=\frac{|\sin t|}{t^2}\le\frac{1}{t^2}$$

តែ $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ រួម $\Rightarrow \int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{t^2}\right|dt$ រួម។

៥.៥. លក្ខណៈនៃអាំងតេក្រាលរួមដាច់ខាត

គ្រប់អាំងតេក្រាលរួមដាច់ខាតជាអាំងតេក្រាលរួម $\left|\int_a^{+\infty} f(x)\,dx\right|\le\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ឧបមាថា $\int_a^b |f(x)|\,dt$ រួម(f ជាប់លើ $[a,b[$)។ គេតាង

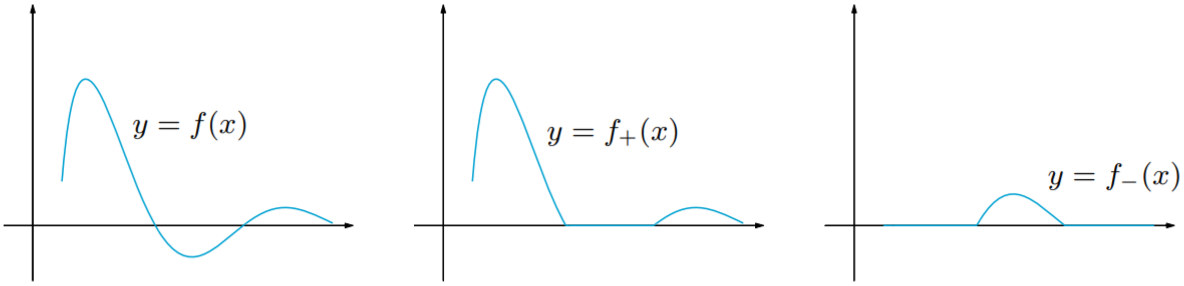
$$f^+(x)=\max\left(f(x),0\right)=\begin{cases} f(x) \text{ បើ } f(x)\geq 0 \\ 0 \text{ បើ } f(x)<0 \end{cases} \text{ ផ្នែកវិជ្ជមាននៃ } f$$

$$f^-(x)=\max\left(-f(x),0\right)=\begin{cases} -f(x) \text{ បើ } f(x)\leq 0 \\ 0 \text{ បើ } f(x)>0 \end{cases} \text{ ផ្នែកអវិជ្ជមាននៃ } f$$

គេបាន $\begin{cases} f(x)=f^+(x)-f^+(x) \\ \left|f(x)\right|=f^+(x)+f^-(x) \end{cases}$

តែ $\begin{cases} 0\leq f^+(x)\leq\left|f(x)\right| \\ 0\leq f^-(x)\leq\left|f(x)\right| \\ \int_a^b\left|f(x)\right|dx \text{ រួម} \end{cases} \Rightarrow \int_a^b f^+(x)dx \;\&\; \int_a^b f^-(x)dx \text{ រួម}$

ដូចនេះ $\int\limits_a^b f(x)dx$ រួម។



រូបទី៥.៥

ចំណាំ៖ អាំងតេក្រាលដែលរួមហើយមិនរួមដាច់ខាតហៅថា **អាំងតេក្រាលកន្លះរួម**។

ឧទាហរណ៍១៤៖ $I=\int\limits_0^1\frac{1}{t}\sin\frac{1}{t}dt$ ជាអាំងតេក្រាលរួមហើយយើងបង្ហាញថាវាមិនរួមដាច់ខាត៖

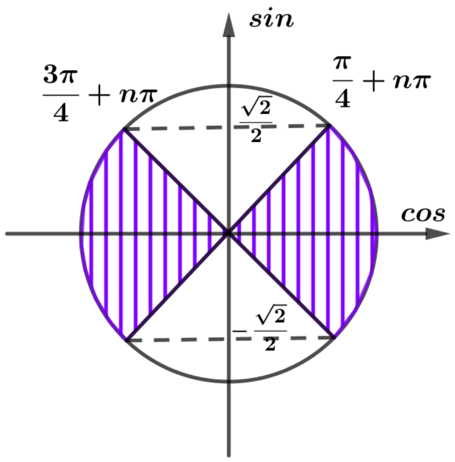
គេបាន៖ $\int\limits_0^1\left|\frac{1}{t}\sin\frac{1}{t}\right|dt=\int\limits_0^1\frac{1}{t}\left|\sin\frac{1}{t}\right|dt$

តាមលក្ខណៈអនុគមនស៊ីនុសគេបាន៖

$\frac{\pi}{4}+n\pi\leq\frac{1}{t}\leq\frac{3\pi}{4}+n\pi \;, n\in\mathbb{N}^*$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{3\pi}{4}+n\pi}\leq t\leq\frac{1}{\frac{\pi}{4}+n\pi} \;, n\in\mathbb{N}^*$

$\Leftrightarrow \left|\sin\frac{1}{t}\right|\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$

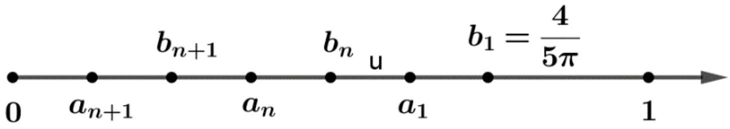


រូបទី៥.៦

ដូច្នេះបើតាង $a_n=\frac{4}{\pi(4n+3)}$, $b_n=\frac{4}{\pi(4n+1)}$

គេបាន៖

$$a_n \le t \le b_n \Rightarrow \left|\sin\frac{1}{t}\right| \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$$



ដូច្នេះ គេបាន $\forall m > 1$, $\int_{a_m}^{1} \frac{1}{t}\left|\sin\frac{1}{t}\right|dt > \sum_{n=1}^{m}\int_{a_n}^{b_n}\frac{1}{t}\left|\sin\frac{1}{t}\right|dt \;\; (1)$

$$\ge \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=1}^{m}\int_{a_n}^{b_n}\frac{dt}{t}$$

$$\Rightarrow \int_{a_m}^{1}\frac{1}{t}\left|\sin\frac{1}{t}\right|dt > \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=1}^{m}\int_{a_n}^{b_n}\frac{dt}{t} \;\; (2)$$

ម្យ៉ាងទៀត $\begin{cases} \int_{a_n}^{b_n}\frac{dt}{t} = \ln\frac{b_n}{a_n} \\ \int_{b_{n+1}}^{a_n}\frac{dt}{t} = \ln\frac{a_n}{b_{n+1}} \end{cases}$

ដូចនេះ $\ln\frac{a_n}{b_{n+1}} < \ln\frac{b_n}{a_n} \Leftrightarrow a_n^2 < b_n b_{n+1}$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{\pi(4n+1)}\cdot\frac{4}{\pi(4n+5)} > \frac{16}{\pi^2(4n+3)^2}$$

$\Leftrightarrow 16n^2 + 24n + 9 > 16n^2 + 24n + 5$ ពិត

ដូចនេះ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_{b_{n+1}}^{a_n}\frac{dt}{t} < \int_{a_n}^{b_n}\frac{dt}{t}$ ។

វិបាក៖

$$\int_{a_m}^{b_1}\frac{dt}{t} = \sum_{n=1}^{m}\int_{a_n}^{b_n}\frac{dt}{t} + \sum_{n=1}^{m-1}\int_{b_{n+1}}^{a_n}\frac{dt}{t} < 2\sum_{n=1}^{m}\int_{a_n}^{b_n}\frac{dt}{t}$$

$$\Rightarrow \ln\frac{b_1}{a_n} < 2\sum_{n=1}^{m}\ln\frac{b_n}{a_n}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{m}\ln\frac{b_n}{a_n} > \frac{1}{2}\ln\frac{b_1}{a_m} \;\; (3)$$

$$(2)\&(3) \Rightarrow \int_{a_m}^{1}\frac{1}{t}\left|\sin\frac{1}{t}\right|dt > \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{b_n}{a_m} = \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{\frac{4}{5}\pi}{\frac{4}{\pi(4n+3)}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{4n+3}{5}$$

តែ $\lim_{m\to+\infty}\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{4m+3}{5} = +\infty \Rightarrow \int_{a_m}^{1}\frac{1}{t}\left|\sin\frac{1}{t}\right|dt = +\infty$

ដូចនេះ I មិនរួមដាច់ខាត(គ្មានន័យ)។

ទ្រឹស្តីបទ៖ តាង f ជាអនុគមន៍ជាប់ វិជ្ជមាន និងចុះនៅលើ $[k_0,+\infty)$ ចំពោះ $k_0 \in \mathbb{N}$ ។

នោះគេបាន $\sum_{k=k_0+1}^{\infty} f(k) \le \int_{k_0}^{+\infty} f(x)dx \le \sum_{k=k_0}^{\infty} f(k)$

ហេតុដូច្នេះ អាំងតេក្រាល និងស៊េរីមានចំណែកលក្ខណៈដូចគ្នា។ ក្នុងករណីនេះគេបាន៖

$a). \int_{k_0}^{+\infty} f(x)dx$ រួម នោះគេបាន $\sum_{k=k_0}^{\infty} f(k)$ រួមដែរ

$b). \int_{k_0}^{+\infty} f(x)dx$ រីក នោះគេបាន $\sum_{k=k_0}^{\infty} f(k)$ រីកដែរ

សម្រាយបញ្ជាក់

ដោយ f ចុះចំពោះគ្រប់ $k \ge k_0$ យើងបាន

$$f(k+1) \le f(x) \le f(k), \qquad \forall x \in [k,k+1]$$

ហើយវាជាអាំងតេក្រាលគឺម៉ូណូតូន

$$f(k+1) \le \int_k^{k+1} f(x)dx \le f(k)$$

នោះចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ដែល $n > k_0$ យើងបាន

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} f(k) \le \int_{k_0}^{+\infty} f(x)dx \le \sum_{k=k_0}^{\infty} f(k)$$

ឧទាហរណ៍១៥៖ សិក្សាស៊េរី $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\log k}$ ។

យើងតាង $f(x) = \frac{1}{x\log x}$ វាជាអាំងតេក្រាលនៅលើ $[2,+\infty)$ រីកដោយ

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log x}dx = \int_{\log 2}^{+\infty} \frac{1}{t}dt = +\infty$$

ដូច្នេះ ស៊េរី $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\log k}$ រីក។

ឧទាហរណ៍១៦៖១.សិក្សាអត្ថិភាព និងគណនាអាំតេក្រាលអ៊ីមប្រូភើនៃ $I = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}$

តាមនិយមន័យ៖ គេបាន $I = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}$ រួម ព្រោះ៖

$$\frac{1}{t\sqrt{1+t^2}} \sim \frac{1}{t^2} \; (t \to +\infty)$$

តែ $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t}\Big|_0^{+\infty} = 1$ រួម

នោះគេបាន I រួម។

គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}$

តាង $x=\frac{1}{t}\Rightarrow t=\frac{1}{x}=\begin{cases} t\to+\infty,\ x\to 0\\ t\to 1\ ,\ x\to 1\end{cases}$

$$dt=-\frac{dx}{x^2}$$

$$\Rightarrow I=\int_1^0\frac{-\frac{dx}{x^2}}{\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1$$

$$=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

ដូចនេះ $I=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ ។

២. សិក្សាអត្ថិភាពនៃអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1\frac{\mathrm{ch}\,t-e^t}{t^{\frac{5}{3}}}dt$

គេបាន $I=\int_0^1\frac{\mathrm{ch}\,t-e^t}{t^{\frac{5}{3}}}dt=\int_0^1\frac{\frac{e^t-e^{-t}}{2}-e^t}{t^{\frac{5}{3}}}dt$

$$=\int_0^1\frac{\frac{-e^t+e^{-t}}{2}}{t^{\frac{5}{3}}}dt$$

$$=-\int_0^1\frac{\mathrm{sh}\,t}{t^{\frac{5}{3}}}dt$$

ដោយត្រង់វ៉ស៊ីណានៃ 0 គេបាន៖

$$\mathrm{sh}\,t\sim t\ (t\to 0)$$

$$\Rightarrow\frac{\mathrm{sh}\,t}{t^{\frac{5}{3}}}\sim\frac{t}{t^{\frac{5}{3}}}=\frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}$$

ដោយ $\int_0^1\frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}dt$ រួម

$$\Rightarrow I=\int_0^1\frac{\mathrm{ch}\,t-e^t}{t^{\frac{5}{3}}}dt\text{ រួម}$$

លំហាត់អាំងតេក្រាលអ៊ីមប្រូភើ

១.សិក្សាអត្ថិភាព និងគណនាអាំតេក្រាលអ៊ីមប្រូភើខាងក្រោមតាមនិយមន័យ៖

$a)\ \int_0^1 \frac{dt}{1-t^2}$ $\qquad b)\ \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

$b)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t}$ $\qquad c)\ \int_0^1 \frac{dt}{t\ln t}$

$d)\ \int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2}dt$ $\qquad e)\ \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2-1}$

$g)\ \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}$ $\qquad h)\ \int_1^{+\infty} \mathrm{Arctan}\frac{1}{t}dt$

$i)\ \int_1^{+\infty} t^2e^{-t}dt$ $\qquad i)\ \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\mathrm{sh}\,t}$

២. សិក្សាអត្ថិភាពនៃអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$a)\ \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}(-1<k<1)$ $\qquad b)\ \int_0^1 \frac{dt}{\ln t}$

$c)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^k-1}{\ln t}dt$ $\qquad d)\ \int_0^1 \frac{\mathrm{ch}\,t-e^t}{t^{\frac{5}{3}}}dt$

$e)\ \int_0^1 \frac{\tan t-t}{t^{\frac{5}{3}}\sin t}dt$ $\qquad f)\ \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt$

$g)\ \int_1^{+\infty} \sin t^2dt$ $\qquad h)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{e^t+t^2e^{-t}}$

$i)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{e^t+|t|}$ $\qquad j)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^2}dt$

$k)\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\left(e^{\frac{1}{t}}-\cos\frac{1}{t}\right)dt$

៣. សិក្សាភាពរួម ឬរីកនៃអាំងតេក្រាលImproperខាងក្រោម៖

$a).\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$ $\qquad b).\int_1^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}dx$

$c).\int_2^{\infty} \frac{x^2-1}{\sqrt{x^6+16}}dx$ $\qquad d).\int_1^{\infty} \frac{x}{3x^4+5x^2+1}dx$

$e).\int_0^1 \frac{\log x}{x+e^{-x}}dx$ $\qquad f).\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2+\sin x}{x^2+1}dx$

$g).\ \int_0^1 \frac{1}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}dx$ $h).\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx$

$i).\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-x}\cos x}{x}dx$ $j).\ \int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{x^{\frac{3}{2}}}dx$

៤.ចូរគណនាអាំងតេក្រាលអ៊ីមប្រូភើខាងក្រោម៖

$1.\ \int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx$ $2.\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$

$3.\int_{-\infty}^{-1} \frac{2}{x^2}dx$ $4.\int_2^{\infty} \frac{1}{x\log^2 x}dx$

$5.\int_0^{\infty} e^{-x}\sin x\,dx$ $6.\int_0^{\infty} x^2 e^{-x}dx$

$7.\int_{-\infty}^{+\infty} |x|e^{-x^2}dx$ $8.\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$

$9.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+5}dx$ $10.\int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

៥.ចូរគណនាអាំងតេក្រាលអ៊ីមប្រូភើខាងក្រោម៖

$1.\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ $2.\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$3.\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$ $4.\ \int_0^1 \log x\,dx$

$5.\int_0^9 \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}dx$ $6.\int_0^1 \frac{1}{1-x^4}dx$

$7.\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}dx$

ដំណោះស្រាយ

១. សិក្សាអត្ថិភាព និងគណនាអាំងតេក្រាល Improper ខាងក្រោមតាមនិយមន័យ

$a)\ \int_0^1 \frac{dt}{1-t^2}$

តាមនិយមន័យគេបាន

$\int_0^1 \frac{dt}{1-t^2}$ រីកព្រោះ

$$\frac{1}{1-t^2} \sim \frac{1}{(1-t)(1+t)} \sim \frac{1}{1-t}\left(t \to 1^-\right)$$

តែ $\int_0^1 \frac{dt}{1-t}$ រីកនាំឱ្យ I រីក

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 1^-} \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|_0^x = +\infty$$

ដូចនេះ $\int_0^1 \frac{dt}{1-t^2}$ រីក។

គណនាអាំងតេក្រាល៖

$$\int_0^1 \frac{dt}{1-t^2} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|_0^1 = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-1}{1+1}\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{0-1}{0+1}\right| = +\infty$$

ដូចនេះ $\int_0^1 \frac{dt}{1-t^2} = +\infty$

$b)\ \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

តាមនិយមន័យគេបាន៖

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-t)(1+t)}} \sim \frac{1}{(1-t)^{\frac{1}{2}}}\left(t \to 1^-\right)$$

តែ $\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^{\frac{1}{2}}}$ រួមព្រោះ $\alpha = \frac{1}{2} < 1$

ដូចនេះ $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ រួម ៕

គណនាអាំងតេក្រាល៖

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \lim_{x\to 1^-}\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \operatorname{Arcsin} t\Big|_0^x$$

$$=\lim_{x\to1^-}\left(\text{Arcsin}\,x-\text{Arcsin}\,0\right)=\frac{\pi}{2}$$

ដូចនេះ $\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{\pi}{2}$

$c)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sin t}$

តាមនិយមន័យគេបាន៖

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sin t}$ រីកព្រោះ $\frac{1}{\sin t}\sim\frac{1}{t}(t\to0)(-1\le\sin t\le1)$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sin t}\ \&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{t}$ មានប្រភេទដូចគ្នា

តែ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{t}$ រីក នាំឱ្យ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sin t}$ រីក

គណនាអាំងតេក្រាល៖

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sin t}=\lim_{x\to0^+}\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sin t}=\lim_{x\to0^+}\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}$$

ដូចនេះ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sin t}=+\infty$ ។

$d).\int_0^1\frac{dt}{t\ln t}$ រីកព្រោះ

តាង $s=\ln t\Rightarrow ds=\frac{dt}{t}$

$$\begin{cases}t\to0^+\\t\to1^-\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}s\to-\infty\\s\to0\end{cases}$$

$I=\int_{-\infty}^0\frac{ds}{s}=\int_{-\infty}^{-1}\frac{ds}{s}+\int_{-1}^0\frac{ds}{s}$ តែ $\int_{-\infty}^{-1}\frac{ds}{s}$ រីក ហើយស្មើ $-\infty$ និង $\int_{-1}^0\frac{ds}{s}$ រីក ស្មើ $-\infty$

នាំឱ្យ I រីកស្មើ $-\infty$ ។

គណនាអាំងតេក្រាល៖

$d)\int_0^1\frac{dt}{t\ln t}$

តាង $u=\ln t\Rightarrow du=\frac{dt}{t}$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{dt}{t\ln t} = \int_0^1 \frac{du}{u} = \left|\ln|u|\right|_0^1$$

$$= \left|\ln\left|\ln|t|\right|\right|_0^1$$

$$= \ln\left|\ln|1|\right| - \ln\left|\ln|0|\right| = -\infty$$

$e).\ \int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$ រីកព្រោះ $\frac{\ln t}{(1+t)^2} \sim \frac{1}{t^2}\left(t \to 0^+\right)$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{dt}{t^2} = \lim_{x\to 0^+}\left|-\frac{1}{t}\right|_0^x = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

គណនាអាំងតេក្រាលៈ

$e)\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$

តាង $u = \ln t \Rightarrow du = \frac{dt}{t}$

$dv = \frac{1}{(1+t)^2} \Rightarrow v = -\frac{1}{1+t}$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2} = \left|-\frac{\ln t}{1+t} + \int \frac{1}{t(1+t)} dt\right|_0^1$$

$$= \left|-\frac{\ln t}{1+t} + \int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{(1+t)}\right) dt\right|_0^1$$

$$= \left|-\frac{\ln t}{1+t} + \ln t - \ln|1+t|\right|_0^1 = +\infty$$

$f)\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2-1}$ រីកព្រោះ $\frac{1}{t^2-1} \sim \frac{1}{t^2}(t \to +\infty)$

តែ $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \left(-\frac{1}{t}\right)\Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{2}$ រួម

គណនាអាំងតេក្រាលៈ

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2-1} = \lim_{x\to+\infty}\int_2^x \frac{dt}{(t-1)(t+1)}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|_2^x$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \ln\frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{2}\ln 3$$

$g)\ \int_1^{+\infty}\frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}$ រួមព្រោះ

$$\frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}\sim\frac{1}{t^2}\left(t\to+\infty\right)$$

$$\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt=\lim_{x\to+\infty}\left|-\frac{1}{t}\right|_1^x=\lim_{x\to+\infty}\left|-\frac{1}{t}+1\right|=1$$

នាំឱ្យ I រួម ។

គណនាអាំងតេក្រាលះ

$$g)\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}$$

តាង $x=\frac{1}{t}\Rightarrow t=\frac{1}{x}\Rightarrow dt=-\frac{1}{x^2}$

បើ $t=1\to x=1;t=+\infty\to x=0$

$$\Rightarrow\int_1^0\frac{-\frac{dx}{x}}{\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\int_1^0\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\left|\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right|_0^1$$

$$=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

$h).\ \int_1^{+\infty}\text{Arctan}\frac{1}{t}dt$ រីកព្រោះ

$$\text{Arctan}\frac{1}{t}\sim\frac{1}{t}\left(t\to+\infty\right)$$

$$\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}dt\lim_{x\to+\infty}=\left|\ln|x|\right|_1^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln|x|-\ln|1|\right)=+\infty$$

ដូចនេះ I រីក។

គណនាអាំងតេក្រាលះ

$$h)\int_0^{+\infty}\text{Arctan}\frac{1}{t}dt$$

តាង $u=\text{Arctan}\frac{1}{t}\Rightarrow du=-\frac{dt}{t^2+1}$

$$dv = dt \Rightarrow v = t$$

$$\Rightarrow uv - \int vdu = \left| t\,\text{Arctan}\frac{1}{t} + \int \frac{t}{t^2+1}dt \right|_0^{+\infty}$$

$$= \left| t\,\text{Arctan}\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right| \right|_0^{+\infty}$$

$$= +\infty$$

i) $k = \int_1^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$ រួមព្រោះ

នោះគេបាន $\lim_{x \to +\infty} e^{-t} t^2 . t^2 = 0$

$$\Rightarrow \exists A > 1, \forall t \ge A$$

$$\Rightarrow t^2 t^2 e^{-1} < 1$$

$$\Rightarrow t^2 e^{-t} < \frac{1}{t^2}$$

តែ $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ នាំឱ្យ k រួម

គណនាអាំងតេក្រាលៈ

$i) \int_1^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$

តាង : $u = t^2 \Rightarrow du = 2tdt$

$$dv = e^{-t}dt \Rightarrow v = -e^{-t}$$

$$\Rightarrow uv - \int vdu = \left| -t^2 e^{-t} + 2\int te^{-t}dt \right|_1^{+\infty}$$

តាង :$k = t \Rightarrow dk = dt$

$$ds = e^{-t}dt \Rightarrow s = -e^{-t}$$

$$\Rightarrow \left| -t^2 e^{-t} - 2te^{-t} + 2\int e^{-t}dt \right|_1^{+\infty}$$

$$= \left| -t^2 e^{-t} - 2te^{-t} - 2e^{-t} \right|_1^{+\infty}$$

$$= \frac{5}{e}$$

$j)\ J = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{sht}$ រួមព្រោះ

$\frac{1}{sht} \sim \frac{1}{\frac{e^t - e^{-t}}{2}} \sim \frac{2}{e^t}(t \to +\infty)$

តែ $\int_1^{+\infty} \frac{2}{e^t} dt = \lim_{x\to 1} \int_1^x \frac{2dt}{e^t}$ រួម

ដូច្នេះ J រួម។

គណនាអាំងតេក្រាលៈ

$$j) \int_1^{+\infty} \frac{dt}{sht} = 2\int_1^{+\infty} \frac{e^t}{e^{2t}+1} dt$$

តាង $u = e^t \Rightarrow du = e^t dt$

$$\Rightarrow 2\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2+1} \quad = 2.\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|_1^{+\infty} = \ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|_1^{+\infty}$$

$$= \ln\left|\frac{1+e^t}{1-e^t}\right| = -\ln\left|\frac{1+e}{1-e}\right|$$

២). សិក្សាអត្ថិភាពនៃអាំងតេក្រាលខាងក្រោមៈ

$a).\ \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}(-1<k<1)$ រីកព្រោះ

ចំពោះ $\forall k \in (-1,1), t \in [0,1)$ គេបាន

$k^2t^2 < k^2$

$-k^2t^2 > -k^2$

$1-k^2t^2 > 1-k^2$

$\Rightarrow \sqrt{1-k^2t^2} > \sqrt{1-k^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-k^2t^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-t^2}.\sqrt{1-k^2t^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-t^2}.\sqrt{1-k^2}} \sim \frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}.\sqrt{1-t}}$$

តែ $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$ រួម។

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$ រួម

$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}.\sqrt{1-t^2k^2}}$ រួម។

ដូចនេះ $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}(-1 \le k \le 1)$ រួម ។

$b)\int_0^1 \frac{dt}{t\ln t}$ រីកព្រោះ

$$I=\int_0^1\frac{dt}{\ln t}=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{\ln t}+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{dt}{\ln t}$$

តែ $\frac{1}{\ln t}$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $(0,\frac{1}{2}]$

នាំឱ្យ $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln t}=0\Rightarrow\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{\ln t}$ រួម (1)

ចំពោះ $\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{dt}{\ln t}=0$ គេបាន $\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{\ln t}}{\frac{1}{t-1}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{t-1}{\ln(t+1)}$

តែ $\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{dt}{t-1}\Rightarrow\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{dt}{\ln t}$ រីក

ដូចនេះ $I=\int_0^1\frac{dt}{\ln t}$ រីក ។

$c)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t^k-1}{\ln t}dt$ រីកព្រោះ

$$\frac{t^k-1}{\ln t}\sim\frac{1}{t}\left(t\to 0^+\right)$$

$$\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{t}dt=\lim_{x\to 0^+}\left|\ln|t|\right|_0^x=\lim_{x\to 0^+}\left(\ln|x|-\ln(0)\right)=+\infty$$

ដូចនេះ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t^k-1}{\ln t}dt$ រីក ។

$d)\int_0^1\frac{cht-e^t}{t^{\frac{5}{3}}}dt$ រួមព្រោះ

$$\int_0^1\frac{cht-e^t}{t^{\frac{5}{3}}}=\int_0^1\frac{\frac{e^t+e^{-t}}{2}-e^t}{t^{\frac{5}{3}}}dt$$

$$=\int_0^1\frac{\frac{-e^t+e^{-t}}{2}}{t^{\frac{5}{3}}}dt=-\int_0^1\frac{sht}{t^{\frac{5}{3}}}dt$$

ដោយត្រង់វ៉ស៊ីណានៃ0

$$sht\sim t\ (t\to 0)$$

$$\Rightarrow\frac{sht}{t^{\frac{5}{3}}}\sim\frac{t}{t^{\frac{5}{3}}}=\frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}$$

ដោយ $\int_0^1 \frac{dt}{t^{\frac{2}{3}}}$ រួមព្រោះ $\alpha = \frac{2}{3} < 1$

ដូចនេះ $\int_0^1 \frac{cht - e^t}{t^{\frac{5}{3}}} dt$ រួម ។

$e) I = \int_0^1 \frac{\tan t - t}{t^{\frac{5}{3}} \sin t} dt$ រីកព្រោះ

ត្រង់វ៉ៃស៊ីណាំនៃសូន្យ

$$\tan t = t + \frac{t^3}{3} + 0\left(t^3\right) \ \left(t \to 0\right)$$

$$\sin t = t + o\left(t^3\right) \ \left(t \to 0\right)$$

$$f\left(t\right) = \frac{\tan t - t}{t^{\frac{5}{2}} \sin t} = \frac{t + \frac{t^3}{3} + o\left(t^3\right) - t}{t^{\frac{5}{2}} - t}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f\left(t\right) dt = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{t^3}{t^{\frac{3}{2}}} dt = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}}$$

ដូចនេះ $\int_0^1 \frac{\tan t - t}{t^{\frac{5}{3}} \sin t} dt$ រួម។

$f). \int_1^{+\infty} \frac{\cos t dt}{\sqrt{t}}$ រួមព្រោះ $\frac{\cos t}{\sqrt{t}} \sim \frac{1}{t^2} \left(t \to +\infty\right)$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = \lim_{x \to +\infty} \left| -\frac{1}{t} \right|_1^x = \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{x} + 1 \right) = 1$$

ដូចនេះ $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t dt}{\sqrt{t}}$ រួម ។

$g). \int_1^{+\infty} \sin t^2 dt$ រួមព្រោះ៖

$$I = \int_1^{+\infty} \sin t^2 dt = \lim_{x \to +\infty} \int_1^x \sin t^2 dt$$

តាង $s = t^2 \Rightarrow ds = 2tdt; \ dt = \frac{sd}{2\sqrt{s}}$

$$I = \int_1^{+\infty} \sin s \frac{ds}{2\sqrt{s}} = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\sin s}{\sqrt{s}} ds$$

តាង $u = \frac{1}{\sqrt{s}} \Rightarrow du = -\frac{sd}{2\sqrt{s}^3}$

$$dv = \sin s ds \Rightarrow v = -\cos s$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\left[-\frac{\cos s ds}{s^{\frac{3}{2}}}\right]_{1}^{+\infty}-\frac{1}{2}\int_{1}^{2}\frac{\cos s ds}{s^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{2}\cos 1-\frac{1}{2}\int_{1}^{+\infty}\frac{\cos s ds}{s^{\frac{3}{2}}}$$

តែ $\left|\frac{\cos s}{s^{\frac{3}{2}}}\right|\le\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}$

និង $\int_{1}^{+\infty}\frac{ds}{s^{\frac{3}{2}}}$ រួម នាំឱ្យ $\int_{1}^{+\infty}\frac{\cos s ds}{s^{\frac{3}{2}}}$ រួម

ដូចនេះ I រួម។

$h).\ I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{e^{t}+t^{2}e^{-t}}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dt}{e^{t}+t^{2}e^{-t}}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dt}{e^{t}+t^{2}e^{-t}}=I_1+I_2$

គេមាន $\frac{1}{e^{t}+t^{2}e^{-t}}\sim\frac{1}{t^{2}e^{-t}}\quad(t\to-\infty)$

តែ $\int_{-\infty}^{0}\frac{dt}{e^{t}}$ រួម $\Rightarrow I_1$ រួម $\quad(1)$

គេមាន $\frac{1}{e^{t}+t^{2}e^{-t}}\sim\frac{1}{e^{t}}\quad(t\to+\infty)$

តែ $\int_{o}^{+\infty}\frac{dt}{e^{t}}$ រួម $\Rightarrow I_2$ រួម $\quad(2)$

តាម $(1)\&(2)$ គេបាន I រួម។

ដូចនេះ I រួម ។

$i).\ I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{e^{t}|t|}$

$$=\int_{-\infty}^{0}\frac{dt}{e^{t}|t|}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dt}{e^{t}|t|}=I_1+I_2$$

ចំពោះ $\frac{1}{e^{t}|t|}\sim-\frac{1}{t}(t\to-\infty)$

តែ $\int_{-\infty}^{1}\frac{dt}{t}$ រីក $\Rightarrow I_1$ រីក $\quad(1)$

ចំពោះ $\frac{1}{e^{t}|t|}\sim\frac{1}{t}\ (t\to+\infty)$

តែ $\int_{0}^{+\infty}\frac{dt}{t}$ រួម $\Rightarrow I_2$ រួម (2)

តាម $(1)\&(2)$ គេបាន I រួម ។

$J).\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{e^{t}+t^{2}e^{-t}}$ រួម

$$\frac{1}{e^t+t^2e^{-t}} \sim \frac{1}{t^2}(t\to+\infty)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt = \lim_{x\to+\infty}\left|-\frac{1}{t}\right|_{-\infty}^{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}+0\right)=0$$

ដូចនេះ $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{e^t+t^2e^{-t}}$ រួម។

$k)$. $I=\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{t}\left(e^{\frac{1}{t}}-\cos\frac{1}{t}\right)dt$ រីកព្រោះ

តាង $f(x)=\frac{1}{t}\left(e^{\frac{1}{t}}-\cos\frac{1}{t}\right)$

ត្រង់វ៉ស៊ីណាំនៃ $+\infty$ គេបាន

$$e^{\frac{1}{t}}=1+\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}+.....+0\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

$$\cos\frac{1}{t}=1-\frac{1}{2t^2}+o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{t}\left[1+\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}+o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right]-\left[1-\frac{1}{2t^2}+o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}+o\left(\frac{1}{t^3}\right)$$

$$\Rightarrow f(t)\sim\frac{1}{t^2}\ (t\to+\infty)$$

តែ $\int_{1}^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ រួម $\Rightarrow f(t)$ រួម

ដូចនេះ I រួម ។

មេរៀនទី៦៖ ស៊េរីនៃចំនួនពិត

៦.១. និយមន័យ និងលក្ខណៈ

១.និយមន័យ

ក. គេឱ្យស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ នៃចំនួនពិត ឬកុំផ្លិចហើយគេផ្ទុំនឹង (u_n) នូវស្វ៊ីត $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កំណត់ដោយ៖

$$\begin{cases} S_0 = u_0 \\ S_1 = u_0 + u_1 \\ S_2 = u_0 + u_1 + u_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \end{cases}$$

និយមន័យ៖ គេហៅស៊េរីតួទូទៅ u_n គឺគូស្វ៊ីត (u_n, S_n) ដែលគេសរសេរ $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ។ ស្វ៊ីត (S_n) ហៅថាស្វ៊ីតផលបូកផ្នែកនៃស៊េរី។

សិក្សាស៊េរី $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ គឺសិក្សាស្វ៊ីត (S_n) ៖

⊕ បើ (S_n) រួមហើយមានលីមីត S នោះគេថាស៊េរី $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ រួមហើយផលបូក S គេអាចសរសេរ

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = S$$

⊕ បើ (S_n) រីក(គ្មានលីមីត ឬមានលីមីតស្មើ $\pm\infty$) នោះគេថាស៊េរី $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ រីក។

ឧទាហរណ៍១៖ គេឱ្យស៊េរីមិនកំណត់ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ ។

ក. រកបួនតួដំបូងនៃផលបូកស្វ៊ីតដោយផ្នែក។

ខ. រកកន្សោមចំពោះ S_n និងតម្លៃនៃស៊េរីនោះ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ផលបូកស្វ៊ីតដោយផ្នែកអាចគណនាតាមជាក់ស្តែង

$$S_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

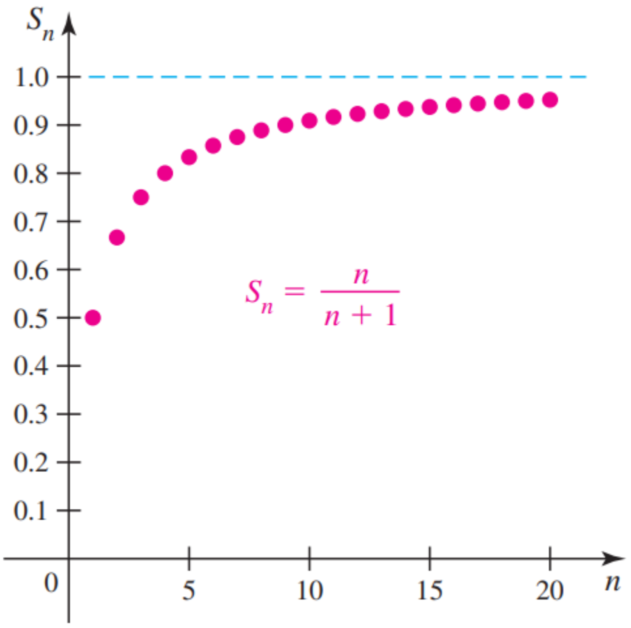
$$S_3=\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$$

$$S_4=\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}=\frac{4}{5}$$

ខ. ដោយផ្អែកលើគំរូនៃផលបូកស៊ីតដោយផ្អែកដោយសន្មត់គេបាន

$S_n=\dfrac{n}{n+1},\ n=1,2,3,\cdots$ ជាមួយស៊ីតរួម $\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\dfrac{4}{5},\dfrac{5}{6},\cdots\right\}$ ដូចរូបទី១។

ពីព្រោះ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$ គេអាចសន្និដ្ឋានថា $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k(k+1)}=1$



រូបទី៦.១

ឧទាហរណ៍២៖ ក. ស៊េរីធរណីមាត្រ $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}q^n=1+q+q^2+\ldots+q^n+\ldots,q\neq1$

មាន $S_n=1+q+\ldots+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

តែ $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-q} & \text{បើ } |q|<1\\ +\infty & \text{បើ } q>1\end{cases}$

ដូចនេះមានពីរករណីគឺ៖

⊕ $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}q^n=\dfrac{1}{1-q}$ រួមបើ $|q|<1$

⊕ $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}q^n$ រីកបើ $q>1$។

ខ. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n=1-1+1-1+\ldots+(-1)^n+\ldots$ ជាស៊េរីរីកព្រោះ៖

$$\begin{cases} S_{2n} = 1 \\ S_{2n+1} = 0 \end{cases} \Rightarrow (S_n)$$ ជាស្វ៊ីតរីក។

គ.សិក្សាស៊េរីមិនរាប់អស់ខាងក្រោម

$(i).\ S_n = \dfrac{n^2 - n}{2n^2 + n}$

$(ii).\ S_n = 2 + (-1)^n$

$(iii).\ \left\{\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3^2}, \dfrac{3}{3^3}, -\dfrac{4}{3^4}, \ldots\right\}$

ដំណោះស្រាយ

$(i).\ S_n = \dfrac{n^2 - n}{2n^2 + n}$

$$= \frac{n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{n^2\left(2 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ ស្វ៊ីតនេះជាស៊េរីរួម ហើយរួមទៅរក $\dfrac{1}{2}$ ។

$(ii).\ S_n = 2 + (-1)^n$

$$= \begin{cases} 2 + 1 = 3 & \text{បើ } n \text{ គូ} \\ 2 - 1 = 1 & \text{បើ } n \text{ សេស} \end{cases}$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} 3 = 3$ បើ n គូ

និង $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$ បើ n សេស

ដោយលីមីតមិនមានតែមួយ ស្វ៊ីតមិនរួម ប៉ុន្តែវាប្រែប្រួលនៅចន្លោះ 1 ទៅ 3 ។

ដូចនេះ ស្វ៊ីតនេះគឺជាស្វ៊ីតប្រែប្រួល។

$(iii).\ \left\{\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3^2}, \dfrac{3}{3^3}, -\dfrac{4}{3^4}, \ldots\right\}$

គេបានតួទីnគឺ $S_n = (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{n}{3^n}$

$$= \begin{cases} \dfrac{n}{3^n} & \text{បើ} n \text{សេស} \\ -\dfrac{n}{3^n} & \text{បើ} n \text{គូ} \end{cases}$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n \dfrac{n}{3^n}$

$= 0$ តាមឡូពីតាល់

ដូចនេះ ស្វ៊ីតនេះជាស្វ៊ីតរួម ហើយរួមទៅរកសូន្យ។

អនុវត្តន៍៖ សិក្សាស៊េរីខាងក្រោម៖

$a).\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{3^k}-\dfrac{1}{3^{k+1}}\right)$ $\qquad b).\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k(k+1)}$

$c).\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k+2}\right)$ $\qquad d).\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{k+2}-\dfrac{1}{k+3}\right)$

$e).\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(k+6)(k+7)}$ $\qquad f).\ \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(3k+1)(3k+4)}$

$g).\ \sum\limits_{k=3}^{\infty}\dfrac{4}{(4k-3)(4k+1)}$ $\qquad h).\ \sum\limits_{k=3}^{\infty}\dfrac{2}{(2k-1)(2k+1)}$

$i).\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right)$ $\qquad j).\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$

$k).\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(k+p)(k+p+1)}$, p ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

$l).\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{k+3}}\right)$ $\qquad m).\ \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left[\sin\left(\dfrac{(k+1)\pi}{2k+1}\right)-\sin\left(\dfrac{k\pi}{2k-1}\right)\right]$

$n).\ \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{16k^2+8k-3}$ $\qquad o).\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\arctan(k+1)-\arctan k\right)$

$p).\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(ak+1)(ak+a+1)}$, a ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

ខ. ស៊េរីពីរដែលខុសគ្នាតែមួយចំនួនរាប់អស់នៃតួដំបូងមានប្រភេទដូចគ្នា។

សម្រាយបញ្ជាក់៖ គេបានស៊េរី $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n \ \&\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty}u'_n$ ដែល $\forall n>p,\ u_n=u'_n$

គេបាន៖ $\forall n>p, \begin{cases} S_n = u_0+u_1+\cdots+u_p+u_{p+1}+\cdots+u_n \\ S'_n = u'_0+u'_1+\cdots+u'_p+u'_{p+1}+\cdots+u'_n \end{cases}$

$\Rightarrow S_n - S'_n = (u_0-u'_0)+(u_1-u'_1)+\cdots+(u_p-u'_p)$ ជាចំនួនថេរ

៦.២. វិធានគូស៊ីភាពរួមជាច់ខាត

ក. ទ្រឹស្តីបទ៖

$$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n \text{ រួម} \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}, \forall m>n\ge n_0, |S_m-S_n| = \left|\sum_{i=n+1}^{m}u_i\right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}, \forall n\geq n_0, \forall p\in\mathbb{N}\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}u_i\right|<\varepsilon$$

សម្រាយបញ្ជាក់

$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ រួម $\Leftrightarrow (S_n)$ ស្វ៊ីតកូស៊ី។

ខ.តាមលក្ខណៈខាងលើគេបាន៖

បើ $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ រួម $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}|u_n|=0$ ដោយ $p=1$

បើ $\lim_{n\to+\infty}|u_n|\neq 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ រីក។

ឧទាហរណ៍៣៖ គេសិក្សាស៊េរីខាងក្រោម៖

$(i)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ ជាស៊េរីអាម៉ូនិករីកទោះបី $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ ក៏ដោយព្រោះ៖

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow (S_n)$ មិនមែនជាស្វ៊ីតកូស៊ី។

$(ii)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ ជាស៊េរីរួមព្រោះ៖

$$\forall n,p\geq 1,\ S_{n+p}-S_n=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+p)^2}$$

$$\Rightarrow S_{n+p}-S_n\leq\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

$$\leq\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)$$

$$\Rightarrow S_{n+p}-S_n\leq\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}\leq\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(S_{n+p}-S_n\right)=0\ ,\forall p\in\mathbb{N}$$

គ.និយមន័យ៖ គេថាស៊េរី $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ រួមដាច់ខាតកាលណា $\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|$ ជាស៊េរីរួម។

លក្ខណៈ៖ គ្រប់ស៊េរីរួមដាច់ខាតជាស៊េរីរួម។

សម្រាយបញ្ជាក់

គេបាន $\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|$ រួម៖

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall m>n\geq n_0,\ |u_{n+1}|+\ldots+|u_m|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |u_{n+1}+\ldots+u_m|\leq|u_{n+1}|+\ldots+|u_m|<\varepsilon$$

នោះគេបាន $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ រួមតាមកូស៊ី។

ឧទាហរណ៍៤៖ បង្ហាញថាចំពោះតម្លៃមិនប្រែប្រួលនៃ x ស៊េរី $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ រួម។

ដំណោះស្រាយ

តាង $u_n=\frac{\sin nx}{n^2}\Rightarrow |u_n|=\frac{|\sin nx|}{n^2}$

នោះ $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2},\forall n$ និង $\sum\frac{1}{n^2}$ រួម

ដូច្នេះ ដោយប្រៀបធៀបនោះស៊េរី $\sum\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|$ រួម។

ដោយគ្រប់ស៊េរីតម្លៃដាច់ខាតរួមជាស៊េរីរួម ដូចនេះ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ ជាស៊េរីរួម។

ឧទាហរណ៍៥៖ បង្ហាញថាស៊េរី $x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...$ រួមដាច់ខាតចំពោះគ្រប់តម្លៃ x ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $u_n=\frac{x^n}{n!}\Rightarrow u_{n+1}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

នោះគេបាន $\lim_{n\to\infty}\frac{|u_n|}{|u_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{n!}\times\frac{(n+1)!}{x^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{|x|}=\infty$ លើកលែងចំពោះ $x=0$

ដោយធ្វើការប្រៀបធៀបស៊េរីរួមដាច់ខាតគ្រប់តម្លៃ x លើកលែងត្រង់សូន្យ។

ប៉ុន្តែចំពោះ $x=0$ ជាក់ស្តែងស៊េរីរួមដាច់ខាត។

ដូចនេះ ស៊េរីរួមដាច់ខាតចំពោះគ្រប់តម្លៃ x ។

៦.៣. ប្រៀបធៀបស៊េរី និងអាំងតេក្រាល

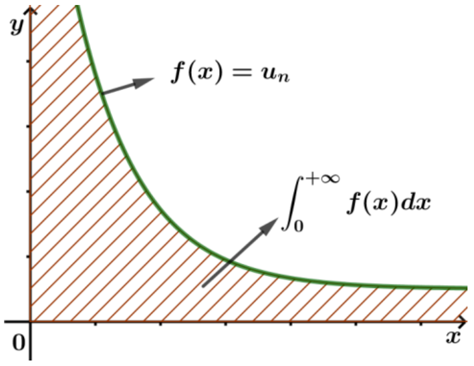
គេឱ្យ $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n,\ u_n\ge 0,\ u_n$ គឺជាតម្លៃនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់ និងម៉ូណូតូនលើ $[0,+\infty[$

$\Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ អាស្រ័យលើអាំងតេក្រាលImproper

$\int_0^{+\infty}f(x)dx$ កំណត់ដូចខាងក្រោម៖

(i) បើ $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ រួម នោះគេបាន $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ រួមដែរ

(ii) បើ $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ រីក នោះគេបាន $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ រីកដែរ



រូបទី៦.២

សម្រាយបញ្ជាក់

$x=n+1$ ពិនិត្យផ្ទៃខាងក្រោមខ្សែកោង $y=f(x)$ ដែលកំណត់ពី $x=1$ ទៅតាងដោយ

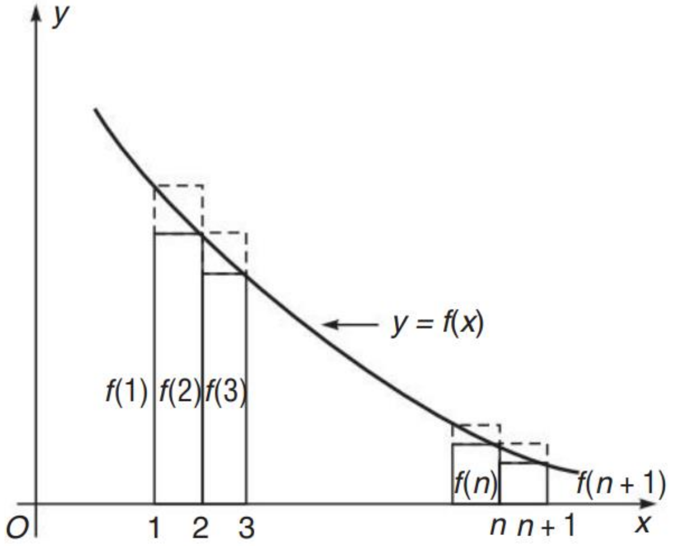
$\int_1^{n+1} f(x)dx$ ។ សង់ខ្សែកោងនៃ $f(1), f(2), f(3),..., f(n), f(n+1)$ ។

ផ្ទៃក្រឡា $\int_1^{n+1} f(x)dx$ ជាផលបូកនៃផ្ទៃក្រឡាចតុកោណកែងតូចៗជាច្រើន និងផលបូកផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណកែងធំ។

$$f(2)+f(3)+...+f(n+1)\le\int_1^{n+1} f(x)dx$$

$$\le f(1)+f(2)+f(3)+...+f(n)$$

$$S_{n+1}-f(1)\le\int_1^{n+1} f(x)dx\le S_n$$



រូបទី៦.៣

- បើ $n\to\infty$ ចំពោះវិសមភាពទី១ នោះគេបាន $\lim_{n\to\infty} S_{n+1}\le\int_1^{\infty} f(x)dx+f(1)$

  ការបង្ហាញនេះ បើ $\int_1^{\infty} f(x)dx$ កំណត់នោះ $\sum f(n)=\sum u_n$ រួម

- បើ $n\to\infty$ ចំពោះវិសមភាពទី២

  នោះគេបាន $\int_1^{\infty} f(x)dx\le\lim_{n\to\infty} S_n$

  ឬ $\lim_{n\to\infty} S_n\ge\int_1^{\infty} f(x)dx$

  ការបង្ហាញនេះ បើ $\int_1^{\infty} f(x)dx$ មិនកំណត់

  នោះ $\sum f(n)=\sum u_n$ រីក

ឧទាហរណ៍៤៖១. សិក្សាស៊េរី $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)$ ២.សិក្សាស៊េរី $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3}{(n+1)^2}$

៣.សិក្សាស៊េរី $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$ ៤. ស៊េរី $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^p}, p>0$ រួមចំពោះ $p>1$ និងរីកចំពោះ $p\le 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $u_n = \frac{1}{n+1} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x+1}$

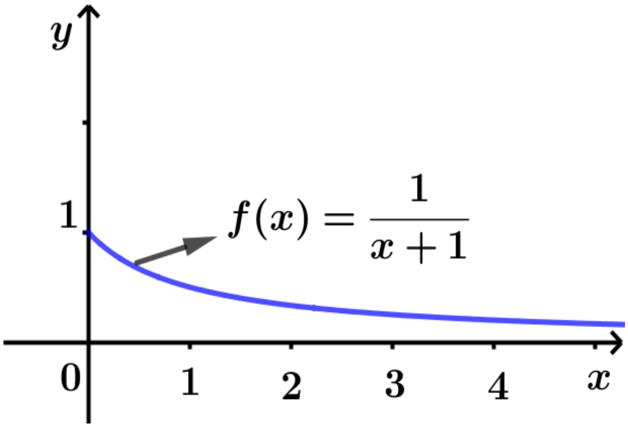
វាជាអនុគមន៍ជាប់ និងម៉ូណូតូនលើ $[0,+\infty[$ ។

$$\Rightarrow \exists b > 0, \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x+1} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{x+1}$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left[\ln|x+1|\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(\ln|b+1|-1\right) = +\infty$$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x+1}$ រីកនោះគេបាន $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$ រីក



រូបទី៦.៣

២.សិក្សាស៊េរី $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{(n+1)^2}$

យើងមាន៖ $u_n = \frac{3}{(n+1)^2}$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$$

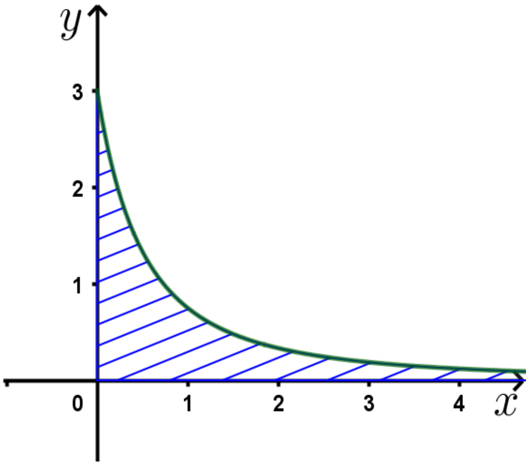
វាជាប់ហើយម៉ូណូតូននៅលើ $[0,+\infty)$

$$\Rightarrow \exists b \geq 0, \int_0^{+\infty} \frac{3}{(x+1)^2} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{3}{(x+1)^2} dx$$

$$= 3 \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^b$$

$$= 3 \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{1}{b+1} + 1\right] = 3$$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{3}{(x+1)^2} dx$ រួម $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{(x+1)^2}$ រួម



រូបទី៦.៤

៣.សិក្សាស៊េរី $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$

យើងមាន៖ $u_n=\frac{1}{n\log n}=f(n)$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x\log x}$$

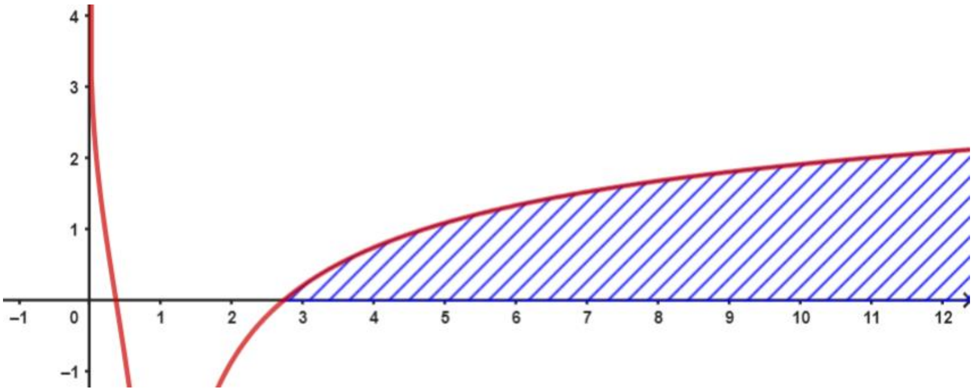
$$\Rightarrow \int_2^{\infty} f(x)dx=\int_2^{\infty}\frac{1}{x\log x}dx$$

$$=\lim_{m\to\infty}\int_2^{m}\frac{1}{x\log x}dx$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left|\log\log x\right|_2^m$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left(\log\log m-\log\log 2\right)=\infty$$

ដូចនេះ ស៊េរី $\int_2^{\infty}\frac{1}{x\log x}dx$ រីក នោះគេបានស៊េរី $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$ រីកដែរ។



រូបទី៦.៥

៤. ស៊េរី $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^p}, p>0$ រួមចំពោះ $p>1$ និងរីកចំពោះ $p\le 1$។

តាង $u(x)=\frac{1}{x(\log x)^p}$ ដូច្នេះចំពោះ $x\ge 2$ អនុគមន៍ u ជាចំនួនមិនអវិជ្ជមាននៃស្ទីតម៉ូណូតូនកើនអនុគមន៍ដែលមានអាំងតេក្រាល នោះគេបាន៖

$$u_n=u(n)=\frac{1}{n(\log n)^p},\forall p>0,n\in\mathbb{N}$$

ដោយការគណនាអាំងតេក្រាល $\sum_{n=2}^{\infty}u_n$ និង $\int_2^{\infty}u(x)dx$ រួម ឬរីកជាមួយគ្នា

តាងភាពរួមនៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

$$\because \quad \int_2^X u(x)dx=\int_2^X\frac{1}{x(\log x)^p}dx, p>0$$

$$=\begin{cases}\frac{(\log X)^{1-p}-(\log 2)^{1-p}}{1-P}, & \text{បើ } p\ne 1\\ \log\log X-\log\log 2, & \text{បើ } p=1\end{cases}$$

$$\therefore \quad \int_2^X u(x)dx=\lim_{X\to\infty}\int_2^X u(x)dx=\begin{cases}\frac{(\log 2)^{1-p}}{p-1}, & p>1\\ \infty, & 0<p\le 1\end{cases}$$

ដូចនេះ $\int_2^{\infty}u(x)dx$ រួមបើ $p>1$ និងរីកបើ $p\le 1$។

អនុវត្តន៍៖ សិក្សាស៊េរីខាងក្រោម

1). $\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-n^3}$

2). $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\log n\sqrt{\log^2 n-1}}$

3). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\arctan n}{1+n^2}$

4). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

5). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$

6). $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-n^2}$

7). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^2}$

៦.៤. ស៊េរីមានតួវិជ្ជមាន

ក. និយមន័យ៖ ស៊េរីមានតួវិជ្ជមានគឺជាស៊េរីដែលគ្រប់តួនីមួយៗមានចំនួនវិជ្ជមាន។

ដែលកំណត់ដោយ៖ $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=u_o+u_1+u_2+...+u_n$, $u_n\ge 0$ ។

ជាឧទាហរណ៍៖ $\sum_{n=0}^{+\infty}n^2, \sum_{n=0}^{+\infty}|an\pm b|, \sum_{n=0}^{+\infty}3^n,...$ ។

ខ. ទ្រឹស្តីបទ១៖ គេនិយាយថា $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n, u_n \geq 0$ ជាស៊េរីរួមប្រសិនបើ $\left\{ S_n \mid S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k, n \in \mathbb{N} \right\}$ ជាសំណុំទាល់លើ។

រំឮក៖

១. ស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ទ័លលើលុះត្រាតែ $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}: u_n \leq M$ ។

២. ស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ទ័លក្រោមលុះត្រាតែ $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}: m \leq u_n$ ។

៣. ស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ទ័លលុះត្រាតែ $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}: m \leq u_n \leq M$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងមានផលបូកដោយផ្នែកនៃស៊េរី $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, $u_n \geq 0$

គឺ $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

$\Rightarrow S_{n+1} = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n + u_{n+1} = s_n + u_{n+1}$

តែ $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lambda$, ព្រោះ $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ស៊េរីរួម។

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} S_{n+1} = \left(\underbrace{\lambda + \varepsilon}_{M} \right) = M$

$\Rightarrow S_n \leq M$ គឺទ័លលើត្រង់ M

ឧទាហរណ៍៥៖ សិក្សាស៊េរី $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3^{n+1}} \right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមានផលបូកដោយផ្នែកនៃស៊េរី៖

$$S_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{3^{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^n}$$

$$\leq \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} \leq \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

ពីព្រោះ $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$ នោះគេបាន S_n ទ័លលើត្រង់ $\frac{3}{2}$

ដូចនេះ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+1}}$ ជាស៊េរីរួម។

គ. ប្រៀបធៀបស៊េរីមានតួវិជ្ជមាន៖

គេឱ្យស៊េរីវិជ្ជមាន $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ និង $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$, $u_n \geq 0, v_n \geq 0$ និង $u_n \leq v_n$ ។

(i). បើ $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ រួម នោះគេបាន $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ រួម។

(ii) បើ $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ រីក នោះគេបាន $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ រីក។

សម្រាយបញ្ជាក់

(i) បើ $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ រួម $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = \lambda$

តែ $u_n \le v_n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S'_n = \lambda', S'_n$ ផលបូកដោយផ្នែកនៃ $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ និង $\lambda' \le \lambda$

ដូចនេះ $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ រួម។

ចំពោះ (ii) $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ រីក $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S'_n = \pm\infty$

តែ $u_n \le v_n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = \pm\infty$

ដូចនេះ $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ រីក។

ឧទាហរណ៍៦៖ ១. សិក្សាស៊េរី $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}3^n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន៖ $\forall n \ge 1, u_n = \frac{1}{\sqrt{n}3^n} \le \frac{1}{3^n} = v_n$

តែ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$ រួម (ព្រោះពីខាងលើ)

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}3^n} \text{ រួម។}$$

២.សិក្សាស៊េរី $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3}{\sqrt{n}-1}$

យើងមាន៖ $\forall n \ge 2, \frac{3}{\sqrt{n}-1} \ge \frac{3}{\sqrt{n}}$

តែ $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3}{\sqrt{n}}$ រីក(ស៊េរី*Harmonic*)

ដូចនេះ $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3}{\sqrt{n}-1}$ រីក។

៦.៥. ប្រៀបធៀប និងស៊េរីធរណីមាត្រ

ក. វិធាន Cauchy

គេឱ្យ $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n, u_n > 0$ និង $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = k$ គេបាន៖

(i) បើ $k<1$ នោះ $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ជាស៊េរីរួម។

(ii) បើ $k>1$ នោះ $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ជាស៊េរីរីក។

(iii) បើ $k=1$ នោះគេមិនអាចសន្និដ្ឋានបាន។

សម្រាយបញ្ជាក់

(i) បើ $k<1 \Rightarrow \exists \varepsilon>0, k+\varepsilon<1$

$\Rightarrow \sqrt[n]{u_n}<(k+\varepsilon)$ ឬ $u_n<(k+\varepsilon)^n$

តែ $\sum_{n=0}^{+\infty}(k+\varepsilon)^n$ រួមនោះគេបាន $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ រួមដែរ។

(ii) បើ $k>1 \Rightarrow \sqrt[n]{u_n}>1$ ឬ $u_n>1$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ រីក។

(iii) បើ $k=1 \Rightarrow \forall \varepsilon>0$

$\Rightarrow \sqrt[n]{u_n}<(1+\varepsilon)$ ឬ $u_n<(1+\varepsilon)^n$

តែ $\sum_{n=0}^{+\infty}(1+\varepsilon)^n$ រីក $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ មិនអាចសន្និដ្ឋានបាន។

ឧទាហរណ៍៧៖ ១.សិក្សាស៊េរី $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3n+1}{2n+3}\right)^{\frac{n}{4}}$

យើងមាន៖

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{2n+3}\right)^{\frac{n}{4}}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[4]{\frac{3+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}}}=\sqrt[4]{\frac{3}{2}}>1$$

ដូចនេះ $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3n+1}{2n+3}\right)^{\frac{n}{4}}$ រីក។

២.សិក្សាស៊េរី $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ និង $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$

គេបាន $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}=1$

តែ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ រីកហើយស៊េរី $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ រួម។

៣.សិក្សាស៊េរី $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}, x>0$

គេបាន $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{x^n}{n}}=x$

ដូចនេះ ស៊េរីរួមបើ $0<x<1$ ហើយវារីកបើ $x\geq 1$។

៤. សិក្សាស៊េរី $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^n}$

តាង $u_n=\frac{1}{(\log n)^n}$

$$(u_n)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{\log n}$$

$$\lim_{n\to\infty}(u_n)^{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\log n}$$

$$=0<1\quad[\because \log\infty\to\infty]$$

ដូចនេះ ស៊េរី $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^n}$ រួមតាមកូស៊ី។

៥.សិក្សាស៊េរី $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\cdots+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+\cdots$

តាង $u_n=\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty}(u_n)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{1}{2}<1$$

ដូចនេះ ស៊េរី $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\cdots+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+\cdots$ រួមតាមកូស៊ី។

អនុវត្តន៍៖ សិក្សាស៊េរីខាងក្រោម

1. $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$

2. $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n^{\frac{3}{2}}}$

3. $\left(\frac{2^2}{1^2}-\frac{2}{1}\right)^{-1}+\left(\frac{3^2}{2^3}-\frac{3}{2}\right)^{-2}+\left(\frac{4^2}{3^4}-\frac{4}{3}\right)^{-3}+\cdots$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n x^n}{n^{n+1}}$

5. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2x^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3x^3+\cdots\infty,\quad x>0$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^n}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n+1}}{n^n}$	8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-\log n)^n}{2^n\cdot n^n}$
9. $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\cdots+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+\cdots$	10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^nx^n}{(n+1)^n},\ x>0$
11. $\frac{1^3}{3}+\frac{2^3}{3^2}+\frac{3^3}{3^3}+\frac{4^3}{3^4}+\cdots$	

ខ. វិធាន ***Alembert***

គេឱ្យ $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n, u_n>0$ និង $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=k$ គេបាន៖

(i) បើ $0\le k<1$ នោះ $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ ជាស៊េរីរួម។

(ii) បើ $k>1$ នោះ $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ ជាស៊េរីរីក។

(iii) បើ $k=1$ នោះគេមិនអាចសន្និដ្ឋានបាន។

សម្រាយបញ្ជាក់

គេបាន $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=k:\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\ge n_0,\ k-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}<k+\varepsilon$ ។

(i) បើ $k<1$ គេយក $\varepsilon>0$ ដែល $k+\varepsilon<1\Rightarrow\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$

$\Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ រួម (ប្រៀបធៀបជាមួយស៊េរី $\sum_{n=0}^{+\infty}(k+\varepsilon)^n$)

(ii) បើ $k>1$ គេយក $\varepsilon>0$ ដែល $k+\varepsilon>1\Rightarrow\frac{u_{n+1}}{u_n}>1\Rightarrow u_n>u_{n_0}\ \Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ រីក។

(iii) បើ $k=1$ គេយក $\forall\varepsilon>0$ ដែល $k+\varepsilon=1\Rightarrow\frac{u_{n+1}}{u_n}<1+\varepsilon\Rightarrow u_{n+1}<(1+\varepsilon)u_n$

នៅក្នុងករណីនេះ $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ មិនអាចសន្និដ្ឋាន។

ចំណាំ៖ ក្នុងករណី $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}=k$

(i) បើ $k>1$ នោះ $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ ជាស៊េរីរួម។

(ii) បើ $k<1$ នោះ $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ ជាស៊េរីរីក។

(iii) បើ $k=1$ នោះគេមិនអាចសន្និដ្ឋានបាន។

ឧទាហរណ៍៨៖ ១. សិក្សាស៊េរី $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n+3}{4^{n+1}}$

យើងមាន៖ $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{2n+5}{4^{n+2}}}{\frac{2n+3}{4^{n+1}}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+5}{4^{n+2}}\times\frac{4^{n+1}}{2n+3}$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\left(2+\frac{5}{n}\right)}{4n\left(2+\frac{3}{n}\right)}=\frac{1}{4}<1$$

តាមវិធាន *Alembert* គេបាន $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2n+3}{4^{n+1}}\right)$ ជាស៊េរីរួម។

២.សិក្សាស៊េរី $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!}$ ។

យើងមាន $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{3^{\frac{n+1}{2}}}{(n+2)!}}{\frac{3^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!}}$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{\frac{n+1}{2}}}{(n+2)!}\times\frac{(n+1)!}{3^{\frac{n}{2}}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{3}}{n+2}=0$$

នោះគេបានស៊េរី $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!}$ រួម។

៣.សិក្សាភាពរួមនៃស៊េរី $\sum_{n\le 0}^{\infty}\frac{3^{2n}}{2^{2n}}$ ។

តាង $u_n=\frac{3^{2n}}{2^{2n}}$

$\Rightarrow u_{n+1}=\frac{3^{2(n+1)}}{2^{3(n+1)}}=\frac{3^{2n+2}}{2^{3n+3}}$

$\Rightarrow \frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{3^{2n}}{2^{3n}}\times\frac{3^{2n+2}}{2^{3n+3}}$

$=\frac{2^3}{3^2}=\frac{8}{9}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{9}=\frac{8}{9}<1$

តាមវិធានអាឡាំប៊ឺត(*Alembert*) គេបាន $\sum_{n\le 0}^{\infty}\frac{3^{2n}}{2^{2n}}$ ជាស៊េរីរីក។

៤. សិក្សាស៊េរីខាងក្រោម៖

ក. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{10^k}{k!}$

ខ. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^k}{k!}$

ដំណោះស្រាយ

ក.នៅក្នុងករណីនីមួយៗ លីមីតនៃផលធៀបចំពោះតួតគ្នាគឺកំណត់

$$r=\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{10^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{10^k}{k!}}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{10^{k+1}}{10^k}\times\frac{k!}{(k+1)k!}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{10}{k+1}$$

$$=0$$

ដោយ $r=0$ នោះស៊េរីរួមតាមAlembert

ខ. $$r=\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{k^k}{k!}}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$$

$$=e$$

ដោយ $r=e>1$ នោះស៊េរីរីកតាមAlembert

អនុវត្តន៍៖ សិក្សាស៊េរីខាងក្រោម

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!2^n}{n^n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{2^n+1}$
3. $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\cdots\infty,\ x>0$
4. $\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{x^2}{3\sqrt{2}}+\frac{x^4}{4\sqrt{3}}+\frac{x^6}{6\sqrt{5}}+\cdots\infty$

5. $\frac{1}{1^p}+\frac{x}{3^p}+\frac{x^2}{5^p}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(2n-1)^p}+\cdots\infty,\ p>0, x>0$

6. $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{1+2x^2}+\frac{1}{1+3x^3}+\frac{1}{1+4x^4}+\cdots\infty,\ x>0$

7. $\frac{1}{3}+\frac{2^2}{3^2}+\frac{3^2}{3^3}+\frac{4^2}{3^4}+\frac{5^2}{3^5}+\cdots$

8. $\frac{x}{1\cdot2}+\frac{x^2}{3\cdot4}+\frac{x^3}{5\cdot6}+\cdots,\quad x>0$ និង $x\neq1$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

10. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{x}{4\cdot5\cdot6}+\frac{x^2}{7\cdot8\cdot9}+\cdots$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^4+1}x^n,\ x>0$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2+1},\ x>0$

៦.៦. ប្រៀបធៀបជាមួយ និងស៊េរីរីម៉ាន់

គេដឹងថាស៊េរីរីម៉ាន់ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ រួមពេល $\alpha>1$ និងរីកពេល $\alpha\leq1$។

ដូចនេះ (i) បើ $\exists n_0\in\mathbb{N},\exists A>0,\forall n\geq n_0,u_n\leq\frac{A}{n^{\alpha}}\ (\alpha>1)$ នោះគេបានស៊េរី $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ រួម។

(ii) បើ $\exists n_0\in\mathbb{N},\exists A>0,\forall n\geq n_0,u_n\geq\frac{A}{n^{\alpha}}\ (\alpha\leq1)$ នោះគេបានស៊េរី $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ រីក។

ឧទាហរណ៍៩៖ សិក្សាស៊េរីខាងក្រោម៖

$(i)\ u_n=\frac{1}{n^2-n+1},n\geq0$

គេបាន $u_n=\frac{1}{n^2-n+1}\leq\frac{1}{n^2-n}\leq\frac{2}{n^2},\forall n\geq2$

តែ $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2}{n^2}$ រួម $\Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ រួម

$(ii)\ u_n=\left(\sqrt{\frac{n-1}{n^2+1}}\right)^3\sim\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ រួម

$(iii)\ u_n=\ln\frac{2+n^p}{1+n^p}=\ln\left(1+\frac{1}{1+n^p}\right)\sim\frac{1}{n^p}\Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ រួមពេល $p>1$។

$(iv)\ u_n=e^{-\sqrt[3]{n}}n^p,p\in\mathbb{R}$

$(v)\ u_n = \dfrac{1}{\ln^p n}, p > 0, n \geq 2$

៦.៧. ស៊េរីឆ្លាស់

ក. និយមន័យ៖ ស៊េរីឆ្លាស់គឺជាស៊េរីគ្រប់តួនីមួយៗមានសញ្ញាឆ្លាស់ដែលកំណត់ដោយ៖

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1}u_n + \ldots$$

ឬ $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots + (-1)^n u_n + \ldots$

ឧទាហរណ៍១០៖ $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \ldots$$

ខ.ទ្រឹស្តីបទ*Leibniz*

គេឱ្យ $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}u_n$, $(u_{n+1}) \leq (u_n)$ និង $\lim_{n\to\infty}u_n = 0$ នោះ $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}u_n$ ជាស៊េរីរួម។

សម្រាយបញ្ជាក់

គេឱ្យ $u_n > 0$, $\forall n$ និង $(i)\ u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq u_4 \geq \cdots \geq u_n \geq u_{n+1} \geq \cdots$

និង $(ii) \lim_{n\to\infty}u_n = 0$

ពិនិត្យលើផលបូកដោយផ្នែកគូនៃ S_{2n}

$\therefore\ S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n})$

$= S_{2n-2} + (u_{2n-1} - u_{2n})$

ដោយ $u_{2n-1} \geq u_{2n}, u_{2n-1} - u_{2n} \geq 0$, $\forall n$

$\therefore S_{2n} \geq S_{2n-2}$, $\forall n$

ចំពោះ $0 \leq S_2 \leq S_4 \leq S_6 \leq \cdots \leq S_{2n} \leq \cdots$

គេអាចសរសេរជារាង $S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}$

គ្រប់តួនៅក្នុងវង់ក្រចកដែលខុសៗគ្នាជាចំនួនមិនអវិជ្ជមាន និង $u_{2n} > 0$

$\therefore S_{2n} \leq u_1$, $\forall n$

ដូច្នេះ ស្វ៊ីតនៃផ្នែក $\{S_{2n}\}$ គឺកើន និងទាល់លើ នោះគេបាន វាជាស្វ៊ីតរួម។

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n} = l$

ឥឡូវ គណនាលីមីតនៃផលបូកដោយផ្នែកសេស $S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} + u_{2n+1})$

ដោយ $\lim_{n\to\infty}u_n = 0$ និង $\lim_{n\to\infty}S_{2n} = l, \lim_{n\to\infty}S_n = l$ គេមាន $\lim_{n\to\infty}S_{2n+1} = l + 0 = l$ ។

ដោយផលបូកទាំងពីរផ្នែកគូ និងសេសសុទ្ធតែរួមទៅរក l គេមាន $\lim_{n\to\infty}S_n = l$ ហើយស៊េរីនេះគឺរួម។

បើ $\lim_{n\to\infty}u_n \neq \lim_{n\to\infty}S_{2n} \neq \lim_{n\to\infty}S_{2n+1}$

មានន័យថាស៊េរីដែលឱ្យគឺជាខួប។

ដូចនេះ នៅក្នុងស៊េរីឆ្លាស់បើតួរបស់វាកើនដែលមានលីមីត $\lim_{n\to\infty}u_n = 0$ នោះវាជាស៊េរីរួម។

ឧទាហរណ៍១១៖ សិក្សាស៊េរីខាងក្រោម

១. សិក្សាស៊េរី $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{3}{4n+5}$

ដំណោះស្រាយ

តាង $u_n = \frac{3}{4n+5} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{3}{4n+9}$

$\forall n \geq 1 \Rightarrow u_{n+1} \leq u_n$ តែ $\lim_{n\to+\infty}u_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{3}{4n+5} = 0$

ដូចនេះ $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{3}{4n+5}$ រួម។

២.សិក្សាស៊េរី $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+3}{3n+4}\right)$។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $u_n = \frac{2n+3}{3n+4} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{2n+5}{3n+7}$

$\Rightarrow u_n - u_{n+1} = \frac{2n+3}{3n+4} - \frac{2n+5}{3n+7} = \frac{1}{(3n+4)(3n+7)} > 0$

$\Rightarrow u_n - u_{n+1} > 0$

$\Rightarrow u_{n+1} < u_n$

តែ $\lim_{n\to+\infty}u_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{2n+3}{3n+4} = \frac{2}{3} \neq 0$

ដូចនេះ $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+3}{3n+4}\right)$ រីក។

៣.សិក្សាស៊េរី $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{2n-1}\right)$

ដំណោះស្រាយ

គេបាន $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{2n-1}\right) = 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{5} - \frac{4}{7} + \cdots$ វាជាស៊េរីឆ្លាស់

ដែលមានតួ $u_n = \frac{n}{2n-1} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1)-1} = \frac{n+1}{2n+1}$

$$\therefore u_{n+1}-u_n=\frac{n+1}{2n+1}-\frac{n}{2n-1}=\frac{(n+1)(2n-1)-n(2n+1)}{4n^2-1}$$

$$=\frac{2n^2+n-1-(2n^2+n)}{4n^2-1}=-\frac{1}{4n^2-1}<0$$

$\therefore u_{n-1}<u_n\,,\ \forall n\in\mathbb{N}$

$\therefore u_{n+1}<u_n\,,\ \forall n\in\mathbb{N}$

យើងឃើញថាតួរបស់វាគឺកើនឡើង នោះគេបាន៖

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(2-\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{2}\neq 0$$

ដូចនេះ ស៊េរីនេះមិនរួមទេ តែវាប្រែប្រួល។

៤. ចូរពិភាក្សានៃស៊េរី $\frac{x}{1+x}-\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^3}{1+x^3}-\frac{x^4}{1+x^4}+\cdots\infty, 0<x<1$

ដំណោះស្រាយ

ស៊េរី $\frac{x}{1+x}-\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^3}{1+x^3}-\frac{x^4}{1+x^4}+\cdots$

ជាស៊េរីឆ្លាស់ដែល $u_n=\frac{x^n}{1+x^n}$ និង $u_{n+1}=\frac{x^{n+1}}{1+x^{n+1}}$

$$\therefore\ u_{n+1}-u_n=\frac{x^{n+1}}{1+x^{n+1}}-\frac{x^n}{1+x^n}$$

$$=\frac{x^{n+1}\left(1+x^n\right)-x^n\left(1+n^{n+1}\right)}{\left(1+x^{n+1}\right)\left(1+x^n\right)}$$

$$=\frac{x^{n+1}+x^{n+1}\cdot x^n-x^n-x^n\cdot x^{n+1}}{\left(1+x^{n+1}\right)\left(1+x^n\right)}$$

$$=\frac{x^{n+1}-x^n}{\left(1+x^{n+1}\right)\left(1+x^n\right)}=\frac{x^n(x-1)}{\left(1+x^{n+1}\right)\left(1+x^n\right)}<0$$

ដោយ $0<x<1\Rightarrow x-1<0$

$\therefore\ u_{n+1}<u_n,\forall n\in\mathbb{N}$

តួរបស់វាគឺកើន និង $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}=0\left[\therefore\ 0<x<1,x^n\to 0,n\to\infty\right]$

ដូចនេះ តាមទ្រឹស្តីបទឡិបណេតវាជាស៊េរីរួម។

អនុវត្តន៍៖ សិក្សាស៊េរីខាងក្រោម

1). $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$	2). $1-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{4\sqrt{4}}+\cdots$
3). $\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots$	4). $\frac{1}{1^p}-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\cdots$
5). $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\cdots$	6). $\frac{1}{2}-\frac{2}{5}+\frac{3}{10}-\frac{4}{17}+\cdots$
7). $\sum_{n\le 1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\log(n+1)}$	8). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2(n+1)}$
9). $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots,\ x<1$	10). $\log\left(\frac{1}{2}\right)-\log\left(\frac{2}{3}\right)+\log\left(\frac{4}{5}\right)+\cdots$
11). $\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}-\frac{1}{7\cdot 8}+\cdots$	12). $\frac{x}{1+x}-\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^3}{1+x^3}-\frac{x^4}{1+x^4}+\cdots,0<x<1$
13). $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^n\frac{(1+n^2)}{(1+n^3)}\right\}$	

៦.៨. ស៊េរីនៃអនុគមន៍

ក.និយមន័យ៖ ស៊េរីអនុគមន៍គឺជាស៊េរីដែលតួនីមួយៗជាអនុគមន៍នៃ x ដែលកំណត់ដោយ៖

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)=u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots}$$

- នៅក្នុងករណីនេះ $x=x_0\Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ នឹងជាស៊េរីចំនួន $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x_0)}$
- បើ $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ រួម នោះគេបាន $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x_0)$ រួម
- បើ $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ រីក នោះគេបាន $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x_0)$ រីក

ឧទាហរណ៍១២៖ សិក្សាស៊េរី $\sum_{n=0}^{+\infty}(3x+1)^n$

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\sum_{n=0}^{+\infty}(3x+1)^n$ រួមបើ $|3x+1|<1$

$$\Leftrightarrow -1<3x+1<1$$

$$\Leftrightarrow -2<3x<0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}<x<0$$

- ចំពោះ $x=-\frac{1}{2}\Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{3}{2}+1\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ រួម
- ចំពោះ $|3x+1|\geq 1\Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}(3x+1)^n$ រីក

ឧទាហរណ៍៖ $x=\frac{1}{2}\Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^n$ រីក។

៦.៩. ស៊េរីចំនួនគត់

ក. និយមន័យ៖ គេហៅស៊េរីគត់គ្រប់ស៊េរីអនុគមន៍មានរាង $f_n(z)=a_nz^n$ ដែល $a_n\in\mathbb{R}$ ឬ $\mathbb{C}$ អញ្ញាតិ $z\in\mathbb{R}$ ឬ $\mathbb{C}$ ។ ស៊េរីនេះតាងដោយ $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ ។

ចំណោទគឺការរកសំណុំ $z\in\mathbb{C}$ ដែលធ្វើឱ្យស៊េរីរួមគឺក្នុងប្លង់កុំផ្លិច រកសំណុំចំណុច $M(z)$ ដែលស៊េរីគត់រួមត្រង់ z សំណុំនេះហៅថាស៊េរីរួម។

ខ. ទ្រឹស្តីបទ៖ គេឱ្យស៊េរីគត់ $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ មានបីករណីកើតឡើង៖

(i) ឬស៊េរីរួមដាច់ខាត និងស្មើត្រង់ $\forall z\in\mathbb{C}$

(ii) ឬស៊េរីរួមតែត្រង់ $z=0$

(iii) ឬ $\exists R>0, R=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ ដែលស៊េរីរួមដាច់ខាតត្រង់ $\forall z,|z|<R$ រួមដាច់ខាត និងរួមស្មើលើគ្រប់ថាសបិទ $\{z/|z|<R'<R\}$ ហើយរីកត្រង់ $\forall z,|z|>R$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

គេពិនិត្យស៊េរីតម្លៃដាច់ខាត $\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n||z^n|$ គេគណនា $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=L$

ក. បើ $L=0$ នោះគេបាន $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n||z^n|}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\cdot|z|=0$

ដូចនេះ តាមវិធានកូស៊ីស៊េរីរួមត្រង់ $\forall z\in\mathbb{C}$ ។

ខ.បើ $L=+\infty$ នោះគេបាន $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n||z^n|}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\cdot|z|=+\infty, \forall z\neq 0$

ដូចនេះ ស៊េរីរួមតែត្រង់ $z=0$ ។

គ.បើ $0<L<+\infty$

- ចំពោះ $\forall z,|z|<\frac{1}{L}=R$ តាមវិធានកូស៊ីគេបាន៖

  $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n||z^n|}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\cdot|z|=L|z|<1$
- នោះគេបាន ស៊េរីរួមដាច់ខាតហើយភាពរួមនេះស្មើលើថាសបិត $\{z/|z|\leq R'<R\}$ ។
- ចំពោះ $\forall z,|z|<\frac{1}{L}=R$ គេបាន $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n||z^n|}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\cdot|z|=L|z|>1$

ដូចនេះ ស៊េរីរីកតាមវិធានកូស៊ី។

- បើ $L|z|=1\Leftrightarrow|z|=\frac{1}{L}=R$ នោះគេមិនអាចសន្និដ្ឋានបានគឺស៊េរីអនុគមន៍អាចរីកតាមការសិក្សាផ្ទាល់។

ឧទាហរណ៍១៣៖ សិក្សាស៊េរីខាងក្រោម

$(i)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$ គេបាន $a_n=\frac{1}{n!}\geq 0$

$$R=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to+\infty}(n+1)=+\infty$$ នោះគេបាន ស៊េរីរួមត្រង់ $\forall z\in\mathbb{C}$។

$(ii)\ \sum_{n=0}^{+\infty}n!z^n$ គេបាន $a_n=n!>0$

$$R=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$$ នោះគេបាន ស៊េរីរួមត្រង់ $z=0$។

$(iii)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n^2}$ គេបាន $a_n=\frac{1}{n^2}$

$$R=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=1$$

នោះគេបាន

- ស៊េរីរួមត្រង់ $\forall z$ ក្នុងថាសបើ $(0,1)$
- ស៊េរីរួមត្រង់ $\forall z$ ក្នុងថាសបិទ $(0,1)$
- លើរង្វង់ $(0,1)$ គេបាន $\left|\frac{z^2}{n^2}\right|=\frac{1}{n^2}$ រួម នោះគេបានស៊េរីរួម

ដូចនេះ ស៊េរីរួមលើថាសបិទ $(0,1)$។

គ. ប្រមាណវិធីលើស៊េរីគត់

*(i).*បើស៊េរីគត់ $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ និង $\sum_{n=0}^{+\infty}b_nz^n$ ជាស៊េរីគត់មានកាំរួមរៀងគ្នា R, R' ដែល $R\neq R'$។

⊕ បើឧបមាថា R<R' នោះស៊េរី $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)z^n$ មានកាំរួម R។

ព្រោះ៖

- $\forall z,|z|<R,\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ និង $\sum_{n=0}^{+\infty}b_nz^n$ រួមដាច់ខាត នោះស៊េរី $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)z^n$ រួមដាច់ខាត។
- $\forall z,R<|z|<R',\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ រីក និង $\sum_{n=0}^{+\infty}b_nz^n$ រីក នោះស៊េរី $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)z^n$ រីក។

ដូចគ្នាដែរ $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)z^n$ រីក $\forall z,|z|\geq R'$ រីក

⊕ បើ R=R' នោះស៊េរី $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)z^n$ មានកាំរួមធំជាងឬស្មើ R ។

ឧទាហរណ៍១៤៖ ស៊េរី $\sum_{n=0}^{+\infty}z^n$ និង $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)z^n$ មានកាំរួម R=1 ហើយស៊េរីផលបូកមានតួស្មើសូន្យគ្រប់ n នោះគេបាន វារួមត្រង់ $\forall z\in\mathbb{C}$ ។

(ii). ឧបមាថា R<R' នោះស៊េរី $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ និង $\sum_{n=0}^{+\infty}b_nz^n$ ជាស៊េរីរួមដាច់ខាតក្នុងថាសបើក (O,R) ។ នោះគេអាចកំណត់ស៊េរីអនុគមន៍រីក ផលគុណ $\sum_{p=0}^{n}(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_1)z^n$ ដែលរួមដាច់ខាតដែរក្នុងថាសបើក (O,R) ។

ដូច្នេះ វាមានកាំរួមធំជាងឬស្មើ R ហើយគេបាន៖ $\forall z,\ |z|<R$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}b_nz^n\right)=\sum_{p=0}^{n}(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_1)z^n=f(z)\cdot g(z)$$

ដែល $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ និង $g(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_nz^n$ ។

ឧទាហរណ៍១៥៖ ចូររកផ្នែករួមនៃស៊េរីខាងក្រោម

ក. $x-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}-\frac{x^4}{4^2}+\frac{x^5}{5^2}-\cdots\infty$ ខ. $x+\frac{x^2}{\sqrt{2}}+\frac{x^3}{\sqrt{3}}+\frac{x^4}{\sqrt{4}}+\cdots\infty$

ដំណោះស្រាយ

ក. តាងស៊េរីដែរត្រូវរកដោយស៊េរីស្វ័យគុណ $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$

គេបាន $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=\frac{x}{1^2}-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}-\frac{x^4}{4^2}+\frac{x^5}{5^2}-\cdots\infty$

ដែល $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ និង $a_{n+1}=\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$

$$\Rightarrow\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\times\frac{(n+1)^2}{(-1)^n}$$

$$=-\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$$

$$\Rightarrow\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\left|-\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\right|$$

$$=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$

នោះគេបានកាំនៃភាពរួមគឺ $R=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=1$

តែស៊េរីនេះរួមនៅក្នុងចន្លោះ $-1<x<1$

ឥឡូវយើងសិក្សាភាពរួមនៅត្រង់ចុងដែន

- បើ $x=1$ នោះគេបានស៊េរីរបស់វាគឺ $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots$ ដោយវាជាស៊េរីឆ្លាស់ហើយ $u_n=\frac{1}{n^2}$ និងតួរបស់វាកើន $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ តាមទ្រឹស្តីបទLeibnitzនោះគេបានស៊េរីនេះរួម។
- បើ $x=-1$ នោះគេបានស៊េរីរបស់វាគឺ $-1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}-\cdots=-\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\right)$

ស៊េរីនេះវារួមតាមស៊េរី p ដោយ $p=2>1$

ដូចនេះ ស៊េរីស្វ័យគុណមានភាពរួមនៅចន្លោះ $-1\le x\le 1$។

ខ. $x+\frac{x^2}{\sqrt{2}}+\frac{x^3}{\sqrt{3}}+\frac{x^4}{\sqrt{4}}+\cdots\infty$

គេបាន $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=x+\frac{x^2}{\sqrt{2}}+\frac{x^3}{\sqrt{3}}+\frac{x^4}{\sqrt{4}}+\cdots\infty$

ដែល $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ និង $a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\times\sqrt{n+1}=\sqrt{\frac{n+1}{n}}$$

$$=\sqrt{1+\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\left|\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right|=\sqrt{1+\frac{1}{n}}$$

នោះគេបានកាំនៃភាពរួមគឺ $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1$

តែស៊េរីនេះរួមនៅក្នុងចន្លោះ $-1<x<1$

ឥឡូវយើងសិក្សាភាពរួមនៅត្រង់ចុងដែន

- បើ $x=1$ នោះគេបានស៊េរីរបស់វាគឺ $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$ ស៊េរីនេះវារីកតាមស៊េរី p ដោយ $p=\frac{1}{2}<1$ នោះគេបានស៊េរីនេះរីកបើ $x=1$។
- បើ $x=-1$ នោះគេបានស៊េរីរបស់វាគឺ $-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\cdots\infty$

ដោយវាជាស៊េរីឆ្លាស់ហើយ $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ និងតួរបស់វាកើន

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$$

តាមទ្រឹស្តីបទLeibnitzនោះគេបានស៊េរីនេះរួមបើ $x=-1$។

ដូចនេះ ស៊េរីស្វ័យគុណមានភាពរួមនៅចន្លោះ $-1\le x\le 1$។

ឧទាហរណ៍១៦៖ ចូររកតម្លៃ x បើស៊េរី $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2(1-x)^2}+\frac{1}{3(1-x)^3}+\frac{1}{4(1-x)^4}+\cdots$ រួម។

ដំណោះស្រាយ

គេមានស៊េរី $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2(1-x)^2}+\frac{1}{3(1-x)^3}+\frac{1}{4(1-x)^4}+\cdots$

កំណត់ដោយបើ $x\ne 1$ តាង $y=\frac{1}{1-x}$ នោះគេបាន $y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+\frac{y^4}{4}+\cdots$ ស៊េរីនេះជាស៊េរីស្វ័យគុណ។

នោះគេបាន $a_n=\frac{1}{n}\Rightarrow a_{n+1}=\frac{1}{n+1}$

$\therefore\ \frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}$

$\therefore \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\left|\frac{n+1}{n}\right|=1+\frac{1}{n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}1+\frac{1}{n}=1$

នោះគេបានកាំនៃភាពរួមគឺ $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$

នោះស៊េរីស្វ័យគុណនៃ y រួមនៅក្នុងចន្លោះ $-1<y<1$។

យើងនឹងសិក្សាភាពរួមនៅត្រង់ចុងដែន៖

- បើ $y=1$ នោះគេបានស៊េរីរបស់វាគឺ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$ ស៊េរីនេះវារីក
- បើ $y=-1$ នោះគេបានស៊េរីរបស់វាគឺ

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots=-\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\right]=-\log_e 2$$

នោះគេបានស៊េរីនេះរួមបើ $y=-1$។

នោះស៊េរីស្វ័យគុណមានភាពរួមនៅចន្លោះ $-1\le y<1$

$$\Rightarrow -1\le\frac{1}{1-x}<1 \qquad (1)$$

បើ $x<1$ នោះ $1-x>0$

$\therefore (1) \quad \Rightarrow (-1)(1-x)\le 1<-x$

$\Rightarrow \quad x-1\le 1<1-x$

$\Rightarrow \quad x-1\le 1$ និង $1<1-x$

$\Rightarrow \quad x\le 2$ និង $x<0\Rightarrow x<0$

បើ $x>1$ នោះ $1-x<0$

$\therefore (1) \quad \Rightarrow (-1)(1-x)\geq 1>1-x$

$\Rightarrow \quad x-1\geq 1\geq 1-x$

$\Rightarrow \quad x-1\geq 1$ និង $1>1-x$

$\Rightarrow \quad x\geq 2$ និង $x>0$

$\Rightarrow \quad x\geq 2$

ដូចនេះ តម្លៃ x ចំពោះស៊េរីរួមគឺ $x<0$ ឬ $x\geq 2$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍៖

ក.ចូររកកាំ និងចន្លោះនៃភាពរួមចំពោះស៊េរី $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$

ខ.ចូររកកាំ ចន្លោះនៃភាពរួម និងចន្លោះចុងដែននៃភាពរួមចំពោះស៊េរីស្វ័យគុណ

$1-\frac{x}{a}+\frac{x^2}{2a^2}-\frac{x^3}{3a^3}+\frac{x^4}{4a^4}-\cdots,\ a>0$ ។

គ. ចូររកកាំ និងចន្លោះនៃភាពរួមចំពោះស៊េរី $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{8^n}x^{3n}\right)$ ។

ឃ. ចូររកកាំ និងចន្លោះនៃភាពរួមចំពោះស៊េរី $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n}}{3^n}$ ។

ង. ចូររកកាំ និងចន្លោះនៃភាពរួមចំពោះស៊េរី $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

ច. ចូររកចន្លោះនៃភាពរួមចំពោះស៊េរី $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{(x^2-1)^n}{8^n}\right)\right]$ ដោយប្តូរជាស៊េរីស្វ័យគុណ។

ឆ. ចូររកដែននៃភាពរួមចំពោះស៊េរី $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 3^n}$ ។

ជ.ចូរបំលែងស៊េរី $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-2)^n(2x+1)^n}{n^n}\right\}$ ទៅជាស៊េរីស្វ័យគុណហើយរកកាំ និងចន្លោះនៃភាពរួមរបស់វា។

លំហាត់ស៊េរីចំនួនពិត

១.ដោយដឹងថា $e=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}$ បង្ហាញថា $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{n!}$ និង $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^3}{n!}$ ជាស៊េរីរួមហើយគណនាផលបូករបស់វា។

២.បង្ហាញថាស៊េរីខាងក្រោមរួមហើយគណនាផលបូករបស់វា៖

$a.\ \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{2n-1}{n\left(n^2-4\right)}$ $\qquad b.\ \sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

៣.សិក្សាស៊េរីខាងក្រោម៖

$a.\ \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\ln^p n}$ $\qquad b.\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n\ln n}$

$c.\ \sum_{n=1}^{+\infty}\ln^2\left(\frac{1+\sin\frac{1}{n}}{1-\sin\frac{1}{n}}\right)$ $\qquad d.\ \sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{n^4+2n+1}-\sqrt{n^4+an}\,,a>0$

$e.\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1}$ $\qquad f.\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$

$g.\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^p}{a^n}\ ,a>0$

៤. សិក្សាស៊េរី $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left|x(x-1)\ldots(x-n+1)\right|a^n}{n!},\ 0<a<1,\ x\in\mathbb{R}$ ។

៥. សិក្សាស៊េរីខាងក្រោម៖

$a.\ \sum_{n=1}^{+\infty}n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$ $\qquad b.\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$

$c.\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$ $\qquad d.\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^n n!}{n^n}$

៦. សិក្សាស៊េរីខាងក្រោម៖

$a.\ \sum_{n=1}^{+\infty}a^n\sin^2 nx\ ,\ 0<a<1$ $\qquad b.\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$

$c.\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n!)^n}{n^{n^2}}$ $\qquad d.\ \sum_{n=1}^{+\infty}n^2e^{-\sqrt{n}}$

៧. សិក្សាស៊េរីខាងក្រោម៖

$a).\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\tan\frac{1}{n}$ $\qquad b).\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n}$

$c).\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ $\qquad d).\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\sqrt[n]{n}\sin\frac{1}{n}$

$e).\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n\pi}{\ln n}$ $\qquad f).\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$

៨.សិក្សាភាពរួម ឬរីកចំពោះស៊េរីខាងក្រោម៖

1. $1+\frac{2^p}{2!}+\frac{3^p}{3!}+\frac{4^p}{4!}+...\infty, \quad p>0$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!3^n}{n^n}$

3. $\frac{1}{1+2}+\frac{2}{1+2^2}+\frac{3}{1+3^2}+\cdots$

4. $1+\frac{2x}{5}+\frac{6x^2}{9}+\frac{14x^3}{17}+\cdots+\frac{2^n-2}{2^n+1}x^{n+1}+\cdots\infty, \ x>0$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}x^n, \ x>0$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+1}}x^n, \ x>0$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}, \quad x>0$

8. $1+\frac{1^2\cdot 2^2}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\cdots$

9. $\frac{4}{18}+\frac{4\cdot 12}{18\cdot 27}+\frac{4\cdot 12\cdot 20}{18\cdot 27\cdot 36}+\cdots$

10. $\frac{1\cdot x}{1!}+\frac{2^2\cdot x^2}{2!}+\frac{3^2\cdot x^3}{3!}+\frac{4^4\cdot x^4}{4!}+\cdots, \ x>0$

11. $\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\cdots, \ x>0$

៩.ចូររកកាំនៃភាពរួម និងចន្លោះភាពរួមចំពោះស៊េរីខាងក្រោម៖

$a. \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$ $\qquad b. \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n x^{2n}$ $\qquad c. \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^n}x^n$

$d. \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}(x-1)^{2n}$ $\qquad e. \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n^2}$ $\qquad f. \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^2}{3^n}$

$g. \sum_{n=0}^{\infty}\left(x^2+1\right)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{2^n}{3^n+n^3}$

១០.សិក្សាភាពរួមនៃស៊េរីខាងក្រោម៖

1). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ $\qquad$ 2). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n^2}$ $\qquad$ 3). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n!}$

4). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$ $\qquad$ 5). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{2n-1}$ $\qquad$ 6). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n+1}$

7). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)}{n}$ $\qquad$ 8). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$ $\qquad$ 9). $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$

10). $\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n \frac{1}{n3^{n+1}}$ 11). $\frac{5}{2}-\frac{7}{4}+\frac{9}{6}-\frac{11}{8}+\frac{13}{10}+\cdots$

១១. សិក្សាស៊េរីខាងក្រោម៖

1). $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\cdots$ 2). $\sum\left(\frac{n+1}{3n}\right)^n$

3). $\sum\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n^{\frac{3}{2}}}$ 4). $1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3^2}+\frac{x^3}{4^3}+\cdots$

5). $\sum\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 6). $\sum\frac{(1+nx)^n}{n^n}$

7). $1+\frac{2^2}{2!}+\frac{3^2}{3!}+\frac{4^2}{4!}+\cdots$ 8). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot 7\cdot 10\cdots(3n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n}$

9). $\frac{1}{1+5}+\frac{2}{1+5^2}+\frac{3}{1+5^3}+\cdots$ 10). $1+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\frac{4!}{4^4}+\cdots$

11). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$ 12). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^n+1}$

១២. បង្ហាញថាស៊េរីខាងក្រោមរួម៖

(i). $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$

(ii). $\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots$

(iii). $1-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{4\sqrt{4}}+\cdots$

(iv). $\frac{\log 2}{2^2}-\frac{\log 3}{3^2}+\frac{\log 4}{4^2}-\cdots$

១៣. បង្ហាញថាស៊េរីខាងក្រោមរួមដាច់ខាត៖

(i). $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots$

(ii). $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$

(iii). $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$

១៤. បង្ហាញថា $\lim_{n\to\infty}\frac{n^r}{x^n}=0$ ។

១៥. បង្ហាញស៊េរី $\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ រួមដាច់ខាតចំពោះ $p>1$ ប៉ុន្តែវារួមមានលក្ខខណ្ឌចំពោះ $0<p\le 1$ ។

១៦. សិក្សាស៊េរីខាងក្រោម៖

$(i).\ \sum\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

$(ii).\sum\frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}$

១៧. បង្ហាញថាស៊េរីខាងក្រោមរួមដាច់ខាត៖

$(i).\ \sum(-1)^{n-1}\left\{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\right\}$

$(ii).\ \sum(-1)^{n-1}\left\{\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}+\frac{1}{(n+1)^{\frac{5}{2}}}\right\}$

$(iii).\ \sum(-1)^n\frac{n+2}{2^n+5}$

១៨.បង្ហាញថាស៊េរី$\sum\left\{\frac{1}{n}+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right\}$រីក។

១៩. បង្ហាញថាស៊េរី$1-\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{5\cdot4^2}-\frac{1}{7\cdot4^3}+\cdots$រួម។

២០. សិក្សាស៊េរីខាងក្រោម៖

$(1).\ \frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots$

$(2).\ \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2n^3+3}{5n^3+7}}$

$(3).\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+n)^p(2+n)^q}, p>0, q>0$

$(4).\frac{1}{1-3^{-1}}+\frac{2}{1+2^{-2}}+\frac{3}{1+2^{-3}}+\cdots$

$(5).\frac{1\cdot2}{3^2\cdot4^2}+\frac{3\cdot4}{5^2\cdot6^2}+\frac{5\cdot6}{7^2\cdot8^2}+\cdots$

$(6).1+\frac{2^2-1^2}{2^2+1}+\frac{3^2-2^2}{3^2+2^2}+\cdots+\frac{n^2-(n-1)^2}{n^2+(n-1)^2}\cdots\left[\text{យក } v_n=\frac{1}{n}\right]$

$(7).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

$(8).\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$

$$(9).\ 1+\frac{1}{2^2}+\frac{2^2}{3^3}+\frac{3^3}{4^4}+\cdots$$

$$(10).\ \frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+\cdots$$

២១. ចូរសិក្សាស៊េរីខាងក្រោម៖

$$(1).\ \sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}\right)$$

$$(2).1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\cdots$$

$$(3).1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots$$

$$(4).\frac{3+4}{4+5},\frac{3^2+4^2}{4^2+5^2},\frac{3^3+4^3}{4^3+5^3},\cdots$$

$$(5).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-n+1}{n!}$$

$$(6).\frac{1}{6}-\frac{2}{11}+\frac{3}{16}-\frac{4}{21}+\cdots$$

$$(7).\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

$$(8).\ \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{\ln k}{k^2}$$

$$(9).\ \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k^{10}+2k^5+1}{k\left(k^{10}+1\right)}$$

$$(10).\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\pi k}{k^2}$$

ឯកសារពិគ្រោះ

Attwood, G., Moran, B., Pateman, L., Pledger, K., Staley, G., & Wilkins, D. (2009). *Further pure mathematics 3*. Pearson.

BRIGGS, W., COCHRAN, L., & GILLETT, B. (2013). *calculus for scientists and engineers, early transcendentals*. Pearson.

Canuto, C., & Tabacco, A. (2015). *Mathematical analysis I second edition*. Springer International Publishing.

Das, P. S., & Runkamadachari, E. (2016). *Engineering Mathematics Volume I* Pearson.

Larson, R., & Edwards, B. H. (2010). *Calculus* (9 ed.). Cengage Learning.

Malik, S. C. (2013). *Principles of real analysis* (2 ed.). New Academic Science.

Roussos, I. (2014). *Improper riemann integrals*. CRC Press.

Singh, R. R. (2018). *Mathematics-1*. McGraw Hill Education.

Soun, S. (2004). *វិភាគចំនួនពិត ភាគ ២ (Real analysis 2)*. Royal University of Phnom Penh.

Soun, S. (2007). *វិភាគចំនួនពិត ភាគ ១ (Real analysis 1)*. Royal University of Phnom Penh.

Soun, S. (2008). *វិភាគចំនួនពិត ភាគ ៣ (Real analysis 3)*. Royal University of Phnom Penh.

សន្ទានុក្រម

[1] សន្ទានុក្រមគណិតវិទ្យាសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ

[2] សន្ទានុក្រមគណិតវិទ្យារាជបណ្ឌិតសភាកម្ពុជា