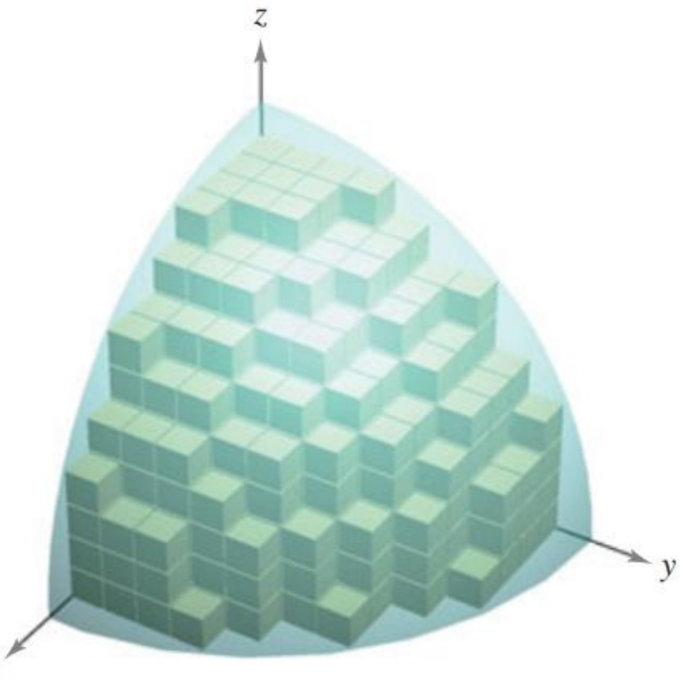
គណិតគណនា ៤



$$\iiint\limits_{Q} f(x, y, z)\, dV = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta V_i$$

គាំទ្រថវិកាលើការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អដោយ៖

“មូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍”

២០២២

និពន្ធដោយៈ លោក ឈាន ហាង

គណៈកម្មការរចនាទំព័រៈ លោកស្រី សំបាត់ អ៊ាត លោកស្រី ឈុំ ពៅ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យៈ

១. លោក ហ៊ុន រ៉ាវី	ព្រឹទ្ធបុរសរង	ប្រធាន
២. លោក សាង ធិតា	គ្រូឧទ្ទេស	សមាជិក

បុព្វកថា

ដំណើរអភិវឌ្ឍនៃព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជានៅក្នុងយុគសម័យទំនើបនេះ ជាមេរៀនដ៏ជោគជ័យបំផុតមួយដែលចាក់ឫសគល់ចេញពីការបញ្ចប់របបប្រល័យពូជសាសន៍ ការបញ្ចប់សង្គ្រាម ការផ្សះផ្សារជាតិ ការកសាងមូលដ្ឋានរឹងមាំនៃសន្តិភាពនិងស្ថេរភាព និងការអភិវឌ្ឍសេដ្ឋកិច្ច។ នៅក្រោយពេលដែលសន្តិភាពត្រូវបានកើតឡើងដោយបរិបូណ៌នៅឆ្នាំ១៩៩៨ កម្ពុជាទទួលកំណើនសេដ្ឋកិច្ចខ្ពស់ គឺប្រមាណ៨%ក្នុងមួយឆ្នាំ។ លើសពីនេះទៀតអត្រានៃភាពក្រីក្រត្រូវបានកាត់បន្ថយពីប្រមាណ៥៣% នៅឆ្នាំ២០០៤មកនៅទាបជាង១០% នៅឆ្នាំ២០១៩។ ដំណើរនៃការអភិវឌ្ឍជាតិជាសកម្មភាពដែលបន្តទៅមុខជាប់ជានិច្ច ហើយគោលនយោបាយថ្មីៗដែលមានលក្ខណៈអន្តរវិស័យគ្របដណ្តប់ ក៏កំពុងលេចរូបរាងឡើងដើម្បីតម្រង់ទិសកម្ពុជាឆ្ពោះទៅកាន់ប្រទេសមានប្រាក់ចំណូលមធ្យមកម្រិតខ្ពស់នៅឆ្នាំ ២០៣០ និងឈានឡើងជាប្រទេសមានប្រាក់ចំណូលខ្ពស់ នៅឆ្នាំ២០៥០។ ការប្រែប្រួលឆាប់រហ័សនៃនិម្មាបនកម្មពិភពលោក និងតំបន់រួមទាំងទំនាក់ទំនងភូមិសាស្ត្រនយោបាយ បានផ្តល់កាលានុវត្តភាពសម្រាប់ការអភិវឌ្ឍឧស្សាហកម្មនៅកម្ពុជា ដែលត្រូវបានរាជរដ្ឋាភិបាលចាត់ទុកជាមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃកំណើនសេដ្ឋកិច្ចកម្ពុជា។ រាជរដ្ឋាភិបាលកម្ពុជាបានកំពុងបន្តពង្រឹង និងអភិវឌ្ឍវិស័យអប់រំឆ្ពោះទៅរកការស្រាវជ្រាវ និងនវានុវត្តន៍ដើម្បីពង្រឹងសមត្ថភាពនិងជំនាញរបស់ធនធានមនុស្សនៅកម្ពុជាឱ្យស្របទៅនឹងបរិបទថ្មីនៃការអភិវឌ្ឍ ជាពិសេសការពង្រឹងសហគ្រិនភាពក្នុងការរៀបចំម៉ូដែលធុរកិច្ចថ្មីៗ។ ដើម្បីចាប់យកកាលានុវត្តភាពពីបដិវត្តន៍ឧស្សាហកម្មទី៤ និងសេដ្ឋកិច្ចឌីជីថលដែលកំពុងផុសផុលឡើង ប្រព័ន្ធអេកូឡូហ្ស៊ីដែលបង្កលក្ខណៈអំណោយផលដល់ការបង្កើតថ្មី នវានុវត្តន៍ ការស្រាវជ្រាវ និងអភិវឌ្ឍន៍ ត្រូវតែមានការកែលម្អ។

បណ្តាប្រទេសនៅទ្វីបអាស៊ីកំពុងនាំមុខក្នុងការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍ ដោយមានភាគហ៊ុនប្រមាណ៤៤% នៃការវិនិយោគទាំងមូលរបស់ពិភពលោក។ ប្រទេសចិនកំពុងបន្តកសាងហេដ្ឋារចនាសម្ព័ន្ធនៃការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍ ក៏ដូចជាសមត្ថភាពមនុស្ស។ ផ្ទុយទៅវិញ ប្រទេសនៅទ្វីបអាមេរិកខាងត្បូង និងអាហ្វ្រិក កំពុងស្ថិតនៅឆ្ងាយពីការវិនិយោគនេះ ហើយជាលទ្ធផល ប្រទេសទាំងនោះក៏ពុំមានកំណើនសេដ្ឋកិច្ចគួរឱ្យកត់សម្គាល់ដែរ។ ទុនវិនិយោគសរុបលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍរបស់ប្រទេសនៅទ្វីបអាមេរិកខាងត្បូងនិងអាហ្វ្រិក មានប្រមាណ៥%នៃការវិនិយោគទាំងមូលរបស់ពិភពលោក ក្នុងពេលដែលតំបន់ទាំង២នេះមានប្រជាជនប្រមាណ២០%នៃប្រជាជនពិភពលោក។ ប្រទេសចំនួន៦ដែលមានលំដាប់ខ្ពស់ជាងគេនៅក្នុងការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍ រួមមានសហរដ្ឋអាមេរិក ចិន ជប៉ុន អាល្លឺម៉ង់ ឥណ្ឌា និងកូរ៉េខាងត្បូង ដែលស្មើនឹងប្រមាណ ៧០%នៃទុនវិនិយោគសរុបរបស់ពិភពលោក។

តើចំណេះដឹង ផលិតផល និងសេវាកម្មថ្មីទាំងនេះកើតឡើងពីអ្វី? ហើយកើតឡើងដោយរបៀបណា? ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជាកំពុងតែកសាងមូលដ្ឋានសម្រាប់ការត្រៀមខ្លួនទទួល និងប្រកួត

ប្រជែងក្នុងយុគសម័យបដិវត្តឧស្សាហកម្មទី៤ នៅក្នុងសេដ្ឋកិច្ចដែលផ្អែកលើពុទ្ធិ ហើយដែលប្រការនេះចាំបាច់តម្រូវឱ្យពលរដ្ឋកម្ពុជា ត្រូវក្លាយខ្លួនជាពលរដ្ឋឌីជីថល ពលរដ្ឋសកល និងពលរដ្ឋដែលប្រកបដោយការទទួលខុសត្រូវ ដែលមានសមត្ថភាពក្នុងការផលិត ចែកចាយ និងប្រើប្រាស់ពុទ្ធិដើម្បីទទួលមនុញ្ញផល និងរួមចំណែកក្នុងកំណើន។ ធនាគារពិភពលោកបានធ្វើការកត់សម្គាល់តាំងពីឆ្នាំ២០០២ នូវបម្លាស់ប្តូរនៃមូលដ្ឋានសេដ្ឋកិច្ច ពីសេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើកម្លាំងពលកម្ម និងធនធានអតិកម្ម (Labour and Resource Based Economy) ទៅកាន់សេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើពុទ្ធិ (Knowledge Based-Economy) ដែលក្នុងន័យនេះ ពុទ្ធិគឺជាគន្លឹះនៃការអភិវឌ្ឍន៍។ អាស្រ័យហេតុនេះ នៅលើគន្លងដែលកម្ពុជាកំពុងធ្វើដំណើរឆ្ពោះទៅកាន់សេដ្ឋកិច្ចឌីជីថល សង្គមកម្ពុជាត្រូវតែមានសមត្ថភាពក្នុងការផលិត ជ្រើសរើស បន្សាំ បង្កើតមុខរបរ និងប្រើប្រាស់ពុទ្ធិ ដើម្បីរក្សានិរន្តរភាពនៃកំណើន និងកែលម្អជីវភាពរស់នៅ។ សមត្ថភាពទាំងនេះ អាចកើតឡើងនៅពេលពលរដ្ឋកម្ពុជាមានឱកាសក្នុងការទទួលបានបទពិសោធន៍ពីការស្រាវជ្រាវ ការបណ្តុះគំនិតច្នៃប្រឌិត និងការស្វែងរកនវានុវត្តន៍។

កំណែទម្រង់វិស័យអប់រំ គឺជាការត្រួសត្រាយមាគ៌ាសម្រាប់ដំណើរឆ្ពោះទៅកាន់សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិ និងប្រជាពលរដ្ឋប្រកបដោយភាពរស់រវើក។ តាមរយៈមូលដ្ឋានអប់រំ សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិនឹងប្រមូលផ្តុំ បង្កើត និងចែករំលែក ទៅកាន់សមាជិកក្នុងសង្គមនូវសម្បទាអប់រំ ពិសេសគឺពុទ្ធិសម្បទាក្នុងបុព្វហេតុនៃមនុស្សជាតិនិងឧត្តមប្រយោជន៍នៃប្រទេស។ សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិ គឺពុំគ្រាន់តែជាសង្គមដែលសម្បូរព័ត៌មានប៉ុណ្ណោះទេ តែជាសង្គមដែលប្រជាពលរដ្ឋអាចធ្វើបរិវត្តកម្មពីព័ត៌មានទៅជាមូលធនប្រកបដោយប្រសិទ្ធភាព។ ការរីកចម្រើនទៅមុខជាលំដាប់នៃបច្ចេកវិទ្យានិងតំណភ្ជាប់ បានពង្រីកព្រំដែននៃការចូលទៅកាន់ និងការទទួលបានព័ត៌មានជាសកល ហើយដែលក្នុងន័យនេះ ការអប់រំនឹងបន្តវិវត្តទៅមុខនិងមានការផ្លាស់ប្តូរ។ សង្គមមួយដែលមានអំណាន និងរបាប់ជាបុរេលក្ខខណ្ឌនៃជីវភាពប្រចាំថ្ងៃនៃប្រជាពលរដ្ឋ ពេលនោះបំណិននៃអំណាន និពន្ធ និងការគណនាលេខនព្វន្ត គឺជាចលករនៃការរៀនរបស់សិស្ស។ ជាតុដ៏ចម្បងមួយដែលស្ថិតនៅក្នុងការកសាងសង្គមដែលប្រកបដោយពុទ្ធិគឺសៀវភៅសិក្សា ហើយការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សាជាប្រចាំ គឺជានវានុវត្តន៍នៃវិស័យអប់រំដែលនាំទៅរកការសិក្សាពេញមួយជីវិត ការអភិវឌ្ឍន៍សម្បទាអប់រំ និងការចែករំលែកចំណេះដឹង។ មូលដ្ឋានអប់រំ ជាពិសេសគឺគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សាត្រូវមានតួនាទីដែលប្រកបដោយការឆ្លើយតប ចំពោះតម្រូវការខាងលើនេះ។ សាស្ត្រាចារ្យ អ្នកស្រាវជ្រាវ និងបុគ្គលិកអប់រំត្រូវបន្តសិក្សាជាប់ជានិច្ច តាមរយៈការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ហើយដែលសៀវភៅសិក្សាទាំងនេះនឹងក្លាយជា ស្ពាននៃទំនាក់ទំនងរវាងនវានុវត្តន៍នៃបច្ចេកវិទ្យា និងការរៀននិងបង្រៀននៅក្នុងថ្នាក់រៀន។

សង្គមដែលប្រកបដោយពុទ្ធិ ក៏ជាសង្គមដែលបណ្តុះឱ្យមានរចនាសម្ព័ន្ធទន់នៃសេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើពុទ្ធិដែរ។ ឧទាហរណ៍ជាក់ស្តែងនៃបែបផែននេះរួមមាន Silicon Valley នៃសហរដ្ឋអាមេរិក សួនឧស្សាហកម្មវិស្វកម្មអាកាសយានយន្តនិងយានយន្តនៅទីក្រុង Munich ប្រទេសអាល្លឺម៉ង់ តំបន់ជីវ

បច្ចេកវិទ្យានៅក្រុង Hyderabad ប្រទេសឥណ្ឌា តំបន់ផលិតគ្រឿងអេឡិចត្រូនិក និងសារ-គមនាគមន៍ឌីជីថលនៅទីក្រុង Seoul ប្រទេសកូរ៉េខាងត្បូង ក៏ដូចជាសួនឧស្សាហកម្មថាមពល និងឥន្ធនគីមីសាស្ត្រនៃប្រទេសប្រេស៊ីល ហើយក៏នៅមានទីក្រុងនៃប្រទេសជាច្រើនទៀតនៅលើពិភពលោក លក្ខណៈសម្បត្តិនៃទីក្រុងទាំងនេះគឺការប្រើប្រាស់និន្នាការនៃការអភិវឌ្ឍដែលជំរុញ និងតម្រង់ទិសដោយចំណេះដឹង ហើយដែលចំណេះដឹងទាំងនោះកើតចេញជាដំបូងពីការវិនិយោគទៅលើគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា ស្ថាប័នស្រាវជ្រាវ មជ្ឈមណ្ឌលឧត្តមភាពនៃជំនាញជាន់ខ្ពស់ ការប្រកួតប្រជែងដោយ គុណាធិបតេយ្យ និង ជាពិសេសគឺការបណ្ដុះវប្បធម៌អំណាននិងនិពន្ធសៀវភៅ។ ល្បឿននៃការរីកចម្រើនផ្នែកពុទ្ធិ និងបច្ចេកវិទ្យាកំពុងមានសន្ទុះលឿនជាងអ្វីដែលសិស្ស និងនិស្សិតអាចទទួលបានពីគ្រូនៅគ្រឹះស្ថានសិក្សាដែលធ្វើឱ្យគោលដៅនៃការអប់រំនៅពេលបច្ចុប្បន្ននេះ មានការប្រឈមខ្លាំងជាងពេលណាទាំងអស់។ ឧទាហរណ៍ ក្នុងមួយឆ្នាំ មានសៀវភៅជាង២,២លានចំណងជើង ត្រូវបានសរសេរ និងបោះពុម្ព ដែលក្នុងនោះប្រទេសចិនមាន៤៤០ពាន់ ចំណែកឯសហរដ្ឋអាមេរិកមាន ៣០៥ពាន់ និងប្រទេសរុស្ស៊ីមាន ១២០ពាន់ចំណងជើង។

ខណៈពេលដែលបច្ចេកវិទ្យាកំពុងរីកចម្រើនជារៀងរាល់ថ្ងៃ មធ្យោបាយសម្រាប់អំណានក៏មានច្រើនជម្រើសសម្រាប់សិស្ស និស្សិត និងសាធារណៈជនរួមមានការអានសៀវភៅ ការអានលើឧបករណ៍អេឡិចត្រូនិក ការអានដោយប្រើទូរសព្ទវៃឆ្លាត និងការអានលើកុំព្យូទ័រ ដែលសុទ្ធសឹងជាមធ្យោបាយ សំខាន់ៗដែលនាំអ្នកអានទាំងឡាយឱ្យសម្រេចគោលបំណងអានរបស់ខ្លួន។ ម្យ៉ាងវិញទៀត អំណានដោយប្រើមធ្យោបាយបច្ចេកវិទ្យាទំនើប ចំណាយពេលតិច ងាយស្រួលអាន និងជួយដល់បរិស្ថានមួយកម្រិតទៀត។ នាពេលបច្ចុប្បន្ន សិស្ស និស្សិត និងសាធារណៈជនកម្ពុជាដែលស្រឡាញ់អំណានកំពុងតែប្រើប្រាស់មធ្យោបាយអំណានទាំងនេះ។ បើយើងក្រឡេកមើលទៅប្រទេសជឿនលឿន ទោះបីជា បច្ចេកវិទ្យារីកចម្រើនខ្លាំងយ៉ាងណា អំណានតាមរយៈសៀវភៅនៅតែមានសន្ទុះដដែល។ ម្យ៉ាងវិញទៀត បច្ចេកវិទ្យាអានបែបទំនើបតាមរយៈឧបករណ៍ទំនើប អាស្រ័យលើលទ្ធភាពនៃធនធានអប់រំ ឌីជីថល និងមាតិកាឌីជីថលគ្រប់គ្រាន់ដែលបានផលិត និងបង្ហោះចែកចាយសម្រាប់អំណាន។

ក្នុងបរិបទកម្ពុជា ជាពិសេសក្នុងបរិការណ៍នៃការផ្ទុះរីករាលដាលនៃជំងឺកូវីដ-១៩ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានជំរុញឱ្យមានបរិវត្តកម្មឌីជីថលនៅក្នុងអេកូស៊ីស្តែមនៃការអប់រំ ជាពិសេសការអប់រំតាមប្រព័ន្ធអេឡិចត្រូនិកនិងការអប់រំពីចម្ងាយដើម្បីលើកកម្ពស់អំណានតាមរយៈការផលិតមាតិកាឌីជីថលដែលមានភាពចម្រុះ ការកសាងសមត្ថភាពផ្នែកតំណភ្ជាប់និងវេទិកាឌីជីថល ការពង្រីកវិសាលភាពនៃមជ្ឈមណ្ឌលទិន្នន័យ និងការលើកកម្ពស់គុណភាពនៃការផលិតធនធានអប់រំឌីជីថល គួបផ្សំជាមួយការចែកសន្លឹកកិច្ចការឱ្យសិស្សយកទៅរៀននៅផ្ទះ និងការចុះទៅជួបជាមួយសិស្សជាបណ្ដុំនៅតាមសហគមន៍។ ក្នុងន័យលើកកម្ពស់អំណាន និងភាពសម្បូរបែបនៃធនធានសៀវភៅសិក្សាឱ្យកាន់តែមានប្រសិទ្ធភាពនិងភាពស័ក្តិសិទ្ធិ និងផ្តល់ឱកាសអំណានកាន់តែច្រើនថែមទៀតដល់សិស្សានុសិស្ស

និស្សិត និងសាធារណៈជន ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាលើកទឹកចិត្តនូវចំណុចមួយចំនួនដូចខាងក្រោម៖

1. សាស្ត្រាចារ្យ អ្នកស្រាវជ្រាវ និងបុគ្គលិកអប់រំ សូមបន្តនិងបង្កើនការបោះពុម្ពស្នាដៃបន្ថែមទៀត ដើម្បីធ្វើឱ្យធនធានសម្រាប់អំណានកាន់តែសម្បូរបែប ជាពិសេសធនធានអំណានជាខេមរភាសា
2. គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា សូមផ្តល់លទ្ធភាពគ្រប់បែបយ៉ាង ដើម្បីឱ្យបុគ្គលិកអប់រំគ្រប់លំដាប់ថ្នាក់ និង និស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សាអាចចូលរួមអាន និងសិក្សាស្រាវជ្រាវតាមគ្រប់លទ្ធភាពជាមួយធនធានអំណាន ជាពិសេសការរៀបចំឱ្យមានពេលវេលាសម្រាប់សហសិក្សា និងអំណានក្នុងបណ្ណាល័យ
3. សាស្ត្រាចារ្យតាមមុខវិជ្ជា និងអ្នកស្រាវជ្រាវតាមជំនាញឬវិស័យ ត្រូវរៀបចំដំណើរការរៀនបង្រៀន និងស្រាវជ្រាវដែលមានដាក់បញ្ចូលកិច្ចការស្វ័យសិក្សា សហសិក្សា ឬការស្រាវជ្រាវបណ្ណាល័យដែលតម្រូវឱ្យនិស្សិត ត្រូវអាននិងស្រាវជ្រាវជាមួយធនធានអំណាន
4. គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងមជ្ឈមណ្ឌលស្រាវជ្រាវ ត្រូវខិតខំឱ្យអស់លទ្ធភាពក្នុងការបង្កើតបណ្ណាល័យ មជ្ឈមណ្ឌលរក្សាឯកសារ ឬមជ្ឈមណ្ឌលអប់រំឌីជីថល ជាដើម ដើម្បីឱ្យបុគ្គលិកអប់រំគ្រប់លំដាប់ថ្នាក់និងនិស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សា អាចទទួលបាន និងស្វែងរកប្រភពសម្រាប់អំណាន កាន់តែសម្បូរបែប និងមានភាពបត់បែន ឆ្លើយតបតាមតម្រូវការអ្នកអាន
5. និស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សា ត្រូវខិតខំនិងចំណាយពេលអាន និងចាត់ទុកវប្បធម៌ និងអាកប្បកិរិយាអំណានជាផ្នែកមួយ នៃពេលវេលានិងភាពស៊ីវិល័យនៃជីវិតប្រចាំថ្ងៃ
6. បងប្អូនជនរួមជាតិ ដែលជាមាតាបិតា ឬអ្នកអាណាព្យាបាល សូមជួយជំរុញនិងបង្កលក្ខណៈកាន់តែ ច្រើនថែមទៀត ជាពិសេសការលៃលកចំណាយនៅក្នុងគ្រួសារសម្រាប់ការទិញសម្ភារៈសិក្សា សៀវភៅអាន និងឧបករណ៍សម្រាប់អំណានដល់កូនៗ ដែលចាត់ទុកជាការវិនិយោគមួយដ៏សំខាន់ សម្រាប់ បង្កើនចំណេះដឹង និងអនាគតរបស់ពួកគេ។

ដោយមានការគាំទ្រពីក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ នៅឆ្នាំ២០២០ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានបង្កើតមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ដែលហៅកាត់ថា“មូលនិធិ ស.គ.ន” និងហៅជាភាសាអង់គ្លេសថា The Research Creativity and Innovation Fund ដែលហៅកាត់ជាភាសាអង់គ្លេសថា “RCI Fund”។ គោលដៅចម្បងនៃមូលនិធិនេះ គឺរួមចំណែកលើកកម្ពស់វប្បធម៌នៃការស្រាវជ្រាវ បំផុសគំនិតច្នៃប្រឌិត និងជំរុញការធ្វើនវានុវត្តន៍ ដើម្បីជាប្រយោជន៍ដល់វិស័យអប់រំដែលឆ្លើយតបទៅនឹងទីផ្សារពលកម្ម និងសាកលភាវូបនីយកម្ម។ មូលនិធិ ស.គ.ន បានសម្រេចកំណត់ប្រធានបទ ជាអាទិភាពសម្រាប់ការគាំទ្រដោយមូលនិធិចំនួន៣ រួមមាន ឌីជីថលនីយកម្មសម្រាប់បដិវត្តឧស្សាហកម្ម៤.០ (Digitalization for IR.4.0) ការស្រាវជ្រាវអនុវត្តលើវិស័យកសិកម្ម (Applied

Agricultural Research) និងការស្រាវជ្រាវគរុកោសល្យសតវត្សទី២១ (21st Century Pedagogy Research)។

ដោយមានការធ្វើអត្ថិភាពវូបនីយកម្មទៅលើទិសដៅនៃការប្រើប្រាស់ថវិកាមូលនិធិសម្រាប់ឆ្នាំ ២០២០ ក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ និងក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានផ្តល់ការគាំទ្រដល់ការ **រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អ សៀវភៅសិក្សា(Text book) ដែលនឹងត្រូវប្រើប្រាស់នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា**។ គោលបំណងនៃការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អ សៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សាគឺដើម្បីបង្កើនបរិមាណ លើកកម្ពស់គុណភាព និងពង្រីកសមធម៌នៃធនធានសិក្សាជាខេមរភាសាជូនដល់និស្សិតដែលកំពុងបន្តការសិក្សា និងត្រៀមខ្លួនធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។ លើសពីនេះទៀតការរៀបរៀងនិពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សាមានគោលដៅដូចខាងក្រោម ៖

- ឆ្លើយតបជាបន្ទាន់ចំពោះការខ្វះខាតធនធានសិក្សា ដែលជាតម្រូវការសិក្សារបស់និស្សិត នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា
- លើកកម្ពស់ទំនើបភាវូបនីយកម្ម និងឧត្តមានុវត្តន៍នៃការរៀននិងបង្រៀន និងការស្រាវជ្រាវនៅលើមុខវិជ្ជា កម្មវិធីសិក្សា ឬមុខជំនាញជាក់លាក់
- បង្កើនភាពស៊ីជម្រៅក្នុងការកសាងវិជ្ជាជីវៈនិងបទពិសោធន៍សម្រាប់ឋានៈសាស្ត្រាចារ្យ និងអ្នកស្រាវជ្រាវ
- រួមចំណែកដល់ការកសាងភាពជាសហគមន៍វិជ្ជាជីវៈ ការចែករំលែកបទពិសោធន៍ និងវប្បធម៌នៃការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានវាយតម្លៃខ្ពស់ចំពោះការបោះជំហានប្រកបដោយមនសិការវិជ្ជាជីវៈនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងបុគ្គលិកអប់រំទាំងអស់ ក្នុងការរៀបចំ រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ដើម្បីបង្កើនបរិមាណ លើកកម្ពស់គុណភាព និងពង្រឹងសមធម៌នៃធនធានសិក្សាជាខេមរភាសា ជូននិស្សិតដែលកំពុងបន្តការសិក្សា និងត្រៀមខ្លួនធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។ សៀវភៅសិក្សាជាផ្នែកមួយនៃការទទួលស្គាល់គុណភាពអប់រំនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងជាធនធានសិក្សាដែលជាមូលដ្ឋានមួយដ៏សំខាន់ ក្នុងការគាំទ្រដល់ការបង្រៀន និងរៀន ហើយត្រូវមានបរិមាណគ្រប់គ្រាន់ ឆ្លើយតបទៅនឹងកម្មវិធីអប់រំ និងតម្រូវការសិក្សាស្រាវជ្រាវ។ ជាគោលការណ៍ គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សាទាំងអស់ ត្រូវមានសៀវភៅសិក្សាដែលប្រើជាគោលសម្រាប់មុខវិជ្ជានីមួយៗ។ ចំនួនសៀវភៅសិក្សាដែលគ្រប់គ្រាន់សម្រាប់ការស្រាវជ្រាវ និងការសិក្សារបស់និស្សិត ត្រូវមានយ៉ាងតិចមួយចំណងជើងក្នុងមួយមុខវិជ្ជា ហើយត្រូវតម្កល់យ៉ាងតិច២ច្បាប់ នៅក្នុងបណ្ណាល័យ ឬអាចរកបានតាមប្រព័ន្ធអេឡិចត្រូនិច។ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា លើកទឹកចិត្តបន្ថែមទៀតជូនដល់គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សារដ្ឋ និងឯកជនដែលបានស្នើសុំថវិកាមូលនិធិរួច សូមចូលរួមបន្ថែមទៀតដើម្បីបង្កើនចំនួនចំណងជើង

សៀវភៅ។ ចំណែកគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សារដ្ឋនិងឯកជនដែលពុំទាន់បានដាក់ពាក្យស្នើសុំ សូមចូលរួមដើម្បីជាគុណប្រយោជន៍ដល់តម្រូវការដ៏ទទូច និងថ្លៃថ្លានៃនិស្សិតកម្ពុជាក្នុងការសិក្សា និងស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។

សេចក្ដីបញ្ជាក់
នៃមូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍

សៀវភៅសិក្សានេះជាលទ្ធផលនៃការស្នើសុំអនុវត្តថវិកាមូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ក្នុងគម្រោង**រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ដែលនឹងត្រូវប្រើប្រាស់នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។** សៀវភៅសិក្សានេះ ត្រូវបានរៀបរៀង និពន្ធ ឬកែលម្អដោយមានការធានាអះអាងថាជាស្នាដៃរបស់អ្នកនិពន្ធផ្ទាល់ និងបានឆ្លងកាត់ត្រួតពិនិត្យ ផ្ដល់យោបល់ និងវាយតម្លៃដោយក្រុមប្រឹក្សាអប់រំ ក្រុមប្រឹក្សាស្រាវជ្រាវ ឬក្រុមប្រឹក្សាដែលមានតម្លៃស្មើនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងតាមរយៈកិច្ចសន្យាដែលបានធ្វើឡើង និងដែលបានតម្កល់ទុកនៅមូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍។ រាល់ខ្លឹមសារ ការបកស្រាយ និងរូបភាព គឺជាជំហរនិងទស្សនៈផ្ទាល់របស់អ្នកនិពន្ធ ហើយ ពុំឆ្លុះបញ្ចាំង ឬជាតំណាងដល់មូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ នៃក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ឡើយ។

មាតិកា

បុព្វកថា i

សេចក្តីបញ្ជាក់ vii

អារម្ភកថា x

សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ xi

ការបរិយាយលើមុខវិជ្ជា xii

មូលន័យសង្ខេប xiii

មេរៀនទី១៖ ស៊េរីតែលរ័ 1

១.១. និយមន័យ 1

១.២. វិបាក 7

១.៣. ស៊េរីហ្វួរីយេ (Fourier Serie) 13

មេរៀនទី២៖ អនុគមន៍ច្រើនអថេរ 36

២.១. អនុគមន៍ទូទៅ 36

២.២. ដេរីវេដោយផ្នែកនៃអនុគមន៍ច្រើនអថេរ $z = f\left(x, y\right)$ 43

២.៣. **Gradient** នៃអនុគមន៍ច្រើនអថេរ $Z=f\,(x,y)$ 52

២.៤. ដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់ដោយផ្នែកនៃអនុគមន៍ច្រើនអថេរ$Z=f\,(x,y)$ 55

២.៥. បរមាធៀបនៃអនុគមន៍ $Z=f\,(x,y)$ 57

មេរៀនទី៣៖ ពហុអាំងតេក្រាល 75

៣.១. អាំងតេក្រាលឌុប 75

៣.២. អាំងតេក្រាលឌុបអ៊ីមប្រូភើ **(Double integrals improper)** 97

៣.៣ ម៉ាស ម៉ូម៉ង់និចលភាព និងទីប្រជុំទម្ងន់ 98

៣.៤. អាំងតេក្រាលទ្រីប 106

៣.៥.ការអនុវត្តន៍អាំងតេក្រាលទ្វីប 123

ឯកសារពិគ្រោះ 141

សន្ទានុក្រម 141

អារម្ភកថា

សៀវភៅ គណិតគណនា ៤ នេះត្រូវបានចងក្រងឡើងសម្រាប់គរុនិស្សិតផ្នែកគណិតវិទ្យា និងសាស្ត្រាចារ្យ។សៀវភៅនេះអាចជួយឱ្យអ្នកអានទទួលបានចំណេះដឹងខាងទ្រឹស្តី និងការគណនាដែលជាមូលដ្ឋាននៃគណិតវិទ្យាគណនា។

ឯកសារគណិតវិទ្យានេះត្រូវបានចងក្រងពីឯកសារលោកគ្រូ សួន សុវណ្ណ និងឯកសារផ្សេងៗពីបរទេសបន្ថែមទៀត ដើម្បីបានជាឯកសារប្រើប្រាស់ និងជាឯកសារពិគ្រោះ។ យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថាក្រោពីអាន និងពិចារណាដោយយកចិត្តទុកដាក់គរុនិស្សិតពិតជាទទួលបានចំណេះដឹងគណិតវិទ្យាផ្នែកគណនាបានទូលំទូលាយ។

យើងខ្ញុំក៏ទទួលការរិះគន់គ្រប់បែបយ៉ាងពិសំណាក់គរុនិស្សិត និងអ្នកអានគ្រប់មជ្ឈដ្ឋានដើម្បីកែលម្អសៀវភៅនេះនៅពេលបោះពុម្ពផ្សាយលើក្រោយ។

សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ

ជាការពិតសៀវភៅ «គណិតគណនា ៤ » ដែលលេចចេញជារូបរាងនៅពេលនេះគឺបានកើតឡើងពីការខិតខំ និងយកចិត្តទុកដាក់ចូលរួមពីភាគី និងស្ថាប័នពាក់ព័ន្ធជាច្រើន។ ខ្ញុំបាទសូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅបំផុតដល់ភាគី និងស្ថាប័នពាក់ព័ន្ធទាំងអស់ដូចជា ៖

- ក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ ដែលបានគាំទ្រយ៉ាងពេញទំហឹងដល់ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាឱ្យបង្កើតមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ហៅកាត់ថា «មូលនិធិ ស.គ.ន»។
- ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាដែលបានបង្កើតមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ដែលហៅកាត់ថា «មូលនិធិ ស.គ.ន» ដើម្បីរួមចំណែកលើកកម្ពស់វប្បធម៌នៃការស្រាវជ្រាវ បំផុសគំនិតច្នៃប្រឌិត និងជំរុញការធ្វើនវានុវត្ត ដើម្បីជាប្រយោជន៍ដល់វិស័យអប់រំ យុវជន និងកីឡា ដែលឆ្លើយតបទៅនឹងទីផ្សារពលកម្ម និងសាកលភាវូបនីយកម្ម។
- មូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ដែលបានគាំទ្រដល់ការរៀបរៀង និពន្ធ និង កែលម្អសៀវភៅសិក្សា (Text book) ដែលនឹងត្រូវប្រើប្រាស់នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា ដើម្បីបង្កើនបរិមាណលើកកម្ពស់គុណភាព និងពង្រីកសមធម៌នៃធនធានសិក្សាជាខេមរភាសាជូនដល់និស្សិតដែលកំពុងបន្តការសិក្សា និងត្រៀមខ្លួនធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។
- ឯកឧត្តមវិទ្យាស្ថានគរុកោសល្យបាត់ដំបងដែលបានចាត់តាំងជាគណៈកម្មការនិពន្ធចូលរួមការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សានេះ។
- នាយកដ្ឋានបណ្តុះបណ្តាលដែលបានចាត់តាំងជាគណៈកម្មការនិពន្ធ និងគណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យលើស្នាដៃនៃការចូលរួមការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សានេះ។
- លោកប្រធាន នាយកដ្ឋានបណ្តុះបណ្តាលដែលព្រមព្រៀងទទួលសិទ្ធិជាតំណាងអ្នករៀបរៀងក្នុងការចាត់ចែង និងសម្របសម្រួលជាមួយក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ចុះហត្ថលេខាលើកិច្ចព្រមព្រៀង និងកិច្ចដំណើការទូទាត់ថវិកាតាមរយៈការស្នើសុំ និងទទួលថវិកា បោះពុម្ព និងផ្សព្វផ្សាយបន្តនូវស្នាដៃរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អរបស់អ្នករៀបរៀងក្នុងការរៀន និងបង្រៀនក្នុងគ្រឹះស្ថានសិក្សា និងប្រគល់សិទ្ធិស្របតាមការកំណត់នៃកិច្ចព្រមព្រៀង ស្តីពីការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា ក្រោមការគាំទ្រនៃមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍។
- គ្រូឧទ្ទេសមុខវិជ្ជាគណិតគណនា ៤ នៃវិទ្យាស្ថានគរុកោសល្យបាត់ដំបងដែលបានផ្តល់មតិកែលម្អលើខ្លឹមសារ នៃមេរៀននីមួយៗឱ្យកាន់តែមានភាពសុក្រឹត និងមានលក្ខណៈវិទ្យាសាស្ត្រ។

ខ្ញុំបាទសង្ឃឹមថា សៀវភៅនេះនឹងឆ្លើយតបជាបន្ទាន់ចំពោះការខ្វះខាតធនធានសិក្សា ដែលជាតម្រូវការសិក្សារបស់សិស្ស និស្សិត នៅកម្រិតវិទ្យាល័យ និងឧត្តមសិក្សា។

ការបរិយាយលើមុខវិជ្ជា

ការសិក្សាលម្អិតលើកម្មវិធីដែលអាចឱ្យអ្នកសិក្សាចេះប្រើប្រាស់បានដូចជា៖ មេរៀន ឧទាហរណ៍ លំហាត់អនុវត្តន៍ និងលំហាត់ស្រាវជ្រាវរួមមានវិធីផ្សេងក្នុងការដោះស្រាយដោយវិភាគ ការគិតត្រិះរិះពិចារណា ជាដើម។ មុខវិជ្ជាគណិតវិភាគទូទៅ៤ផ្តោតសំខាន់ទៅលើមូលដ្ឋានគ្រឹះសំខាន់ៗបន្ថែមទៀតនៃវិភាគទូទៅដែលមានមាតិកាសំខាន់ៗរួមមាន៖ ស៊េរីអនុគមន៍ អនុគមន៍ច្រើនអថេរ និងពហុអាំងតេក្រាល។

ខ្លឹមសារមេរៀនដែលបានលើកឡើងក្នុងសៀវភៅនេះអាចជួយដោះស្រាយបញ្ហាក្នុងការបង្រៀន និងរៀនណិតវិទ្យាដែលបង្កលក្ខណៈងាយស្រួលដល់គ្រូឧទ្ទេស គ្រូបង្រៀន គរុនិស្សិត គរុសិស្ស សិស្សានុសិស្សអាចអនុវត្តន៍ និងស្រាវជ្រាវសម្រាប់សាធារណៈជនទូទៅ។ ជាមូលដ្ឋានគ្រឹះសម្រាប់ហ្វឹកហាត់គរុនិស្សិត សិស្សសិក្សានូវរាល់ខ្លឹមសារស្របតាមកម្មវិធីដែលធ្វើឱ្យមេរៀននីមួយៗមានទំនាក់ទំនងគ្នាពីមួយចំណុចទៅមួយចំណុច។

មូលន័យសង្ខេប

សៀវភៅនេះផ្តោតសំខាន់ទៅការគណនាដែលមានមេរៀនសង្ខេប និយមន័យ ទ្រឹស្តីបទ ឧទាហរណ៍ លំហាត់អនុវត្តន៍ជាដើមព្រមទាំងមានទំនាក់ទំនងនៃមេរៀននីមួយៗ។ នៅក្នុងមេរៀនស៊េរីតៃល័រក្នុងគោលបំណងដើម្បីឱ្យសិស្សចេះ និយមន័យ វិបាក ការគណនានូវការពន្លាតអនុគមន៍ផ្សេងៗ និងរកស៊េរីហ្វូរីយ៉េផងដែរ។ ចំពោះមេរៀនអនុគមន៍ច្រើនអថេរដើម្បីរកអនុគមន៍ផ្សេងៗចាប់ពីមួយអញ្ញាត្ត ពីរអញ្ញាតឡើងទៅដូចជាអនុគមន៍ទូទៅ ដេរីវេដោយផ្នែកនៃអនុគមន៍ច្រើនអថេរក្នុងការរកដេរីវេដោយតាមកំណើន តាមទិសដៅ បណ្តាក់នៃអនុគមន៍ ដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់ បរមាធៀបជាដើម។ នៅផ្នែកនៃមេរៀនពហុអាំងតេក្រាលគឺដើម្បីឱ្យគរុនិស្សិតរកមាឌ ដែនកំណត់ ទីប្រជុំទម្ងន់ ដើម្បីផ្សាភ្ជាប់ទៅនឹងការអនុវត្តន៍នៅក្នុងផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រជាដើម។

មេរៀនទី១៖ ស៊េរីតៃល័រ

TAYLOR SERIE

១.១. និយមន័យ

ក.ករណីពហុធា

ទ្រឹស្តីបទ៖ គេឱ្យពហុធា $P(x)$ មានដឺក្រេ n គឺ៖ $P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$, $a_n\neq 0$ ត្រង់ $\forall a\in\mathbb{R}$ គេបាន៖

$$P(x)=P(a)+\frac{P'(a)}{1!}(x-a)+\frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

ដែល $P^{(0)}(a)=P(a)$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

គេបាន $\{1,(x-a),(x-a)^2,\ldots,(x-a)^n\}$ ជាគោលនៃ $\mathbb{R}_n[x]$

ដូចនេះ $P(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots+a_n(x-a)^n$

វិបាក៖

- $P(a)=a_0$
- $P'(x)=a_1+2a_2(x-a)+3a_3(x-a)^2+\ldots+na_n(x-a)^{n-1}$

$\Rightarrow P'(a)=a_1\Rightarrow a_1=\dfrac{P'(a)}{1!}$

- $P''(x)=1\cdot 2a_2+2\cdot 3(x-a)+\ldots+(n-1)\cdot na_n(x-a)^{n-2}$

  $P''(x)=1\cdot 2a_2+2\cdot 3(x-a)+\ldots+(n-1)\cdot na_n(x-a)^{n-2}$

$\Rightarrow P''(a)=2!a_2\Rightarrow a_2=\dfrac{P''(a)}{2!}$

....

....

- បើ $k<n: P^{(k)}(x)=1\cdot 2\ldots ka_k+2\cdot 3\ldots(k+1)(x-a)+\ldots$

  $\ldots+(n-k+1)\ldots na_n(x-a)^{n-k}$

$k<n: P^{(k)}(x)=1\cdot 2\ldots ka_k+2\cdot 3\ldots(k+1)(x-a)+\ldots+(n-k+1)\ldots na_n(x-a)^{n-k}$

$\Rightarrow P^{(k)}(a)=k!a_k\Rightarrow a_k=\dfrac{P^{(k)}(a)}{k!}$

....

- $P^{(n)}(a)=n!a_n \Rightarrow a_n=\dfrac{P^{(n)}(a)}{n!}$ ដូចនេះ

$$P(x)=P(a)+\frac{P'(a)}{1!}(x-a)+\frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$ ។

ឧទាហរណ៍ ១ ៖ ក. សរសេររូបមន្តស៊េរីតៃល័រនៃ $P(x)=x^3+3x^2-5x-4$ ត្រង់ $a=2$ ។

ខ. កំណត់ពហុធាដឺក្រេទីបួននៃ $P(x)$ ដោយដឹងថា៖

$$P(1)=1,\ P'(1)=-2,\ P''(1)=4, P'''(1)=-12, P^{(4)}(1)=48$$

ដំណោះស្រាយ

ក. សរសេររូបមន្តស៊េរីតៃល័រ

គេបាន៖

- $P(2)=8+12-10-4=6$
- $P'(x)=3x^2+6x-5 \Rightarrow P'(2)=19$
- $P''(x)=6x+6 \Rightarrow P''(2)=18$
- $P'''(x)=5 \Rightarrow P'''(2)=6$

ដូចនេះ តាមរូបមន្តស៊េរីតៃល័រនៃ P ត្រង់ $a=2$ គឺ៖

$$P(x)=P(2)+P'(2)(x-2)+\frac{P''(2)}{2!}(x-2)^2+\frac{P'''(2)}{3!}(x-2)^3$$

$$P(x)=6+19(x-2)+9(x-2)^2+(x-2)^3$$

ខ.កំណត់ពហុធាដឺក្រេទី៤

តាមរូបមន្តស៊េរីតៃល័រនៃ $P(x)$ ត្រង់ $a=1$ គេបាន៖

$$P(x)=P(1)+P'(1)(x-1)+\frac{P''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{P'''(1)}{3!}(x-1)^3+\frac{P^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4$$

$$=1-2(x-1)+2(x-1)^2-2(x-1)^3+2(x-1)^4$$

$$=1-2x+2+2x^2-4x+2-2x^3+6x^2-6x+2+2x^4-8x^3+12x^2-8x+2$$

$$=2x^4-10x^3+20x^2-20x+9$$

ដូចនេះ: $P(x)=2x^4-10x^3+20x^2-20x+9$ ។

ខ. ករណីអនុគមន៍ទូទៅ

ទ្រឹស្តីបទ៖ គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់និងមានដេរីវេលំដាប់ n លើ $[a,b]$ ហើយ $f^{(n)}$ មានដេរីវេ $f^{(n+1)}$ លើ $]a,b[$ ។ សន្និដ្ឋាន៖ $\exists c\in(a,b)$ កំណត់ដោយ៖

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n$$
$$+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c) \quad (1)$$

(1) ហៅថារូបមន្តស៊េរីតៃល័រលំដាប់ $n+1$ នៃ f ត្រង់ a ។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង $P_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ ដែល $a\le x\le b$ ហៅថាផ្នែកទៀងទាត់នៃ f ត្រង់វ៉ស៊ីណានៃ a តាមការសិក្សាដូចករណីទី១គេបាន៖

$P_n(a)=f(a), P'_n(a)=f'(a), P_n''(a)=f''(a),...,P_n^{(n)}(a)=f^{(n)}(a)$

$\Rightarrow (f-P_n)(a)=(f-P_n)'(a)=(f-P_n)''(a)=...=(f-P_n)^{(n)}(a)=0$

$((f-P_n)(x)=f(x)-P_n(x))$

តាង $\varphi(x)=f(x)-P_n(x)+c(x-a)^{n+1}$ ចំនួនថេរ c យកយ៉ាងណាឱ្យបាន $\varphi(b)=0$ គឺ៖

$f(b)-P_n(b)+c(b-a)^{n+1}=0$

$\Leftrightarrow c=\frac{P_n(b)-f(b)}{(b-a)^{n+1}}$

គេបាន៖ φ ជាប់ និងមានដេរីវេលំដាប់ n ដែល $\varphi(a)=\varphi'(a)=\varphi''(a)=...=\varphi^{(n)}(a)=0$

ហើយ $\varphi^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)+c(n+1)!$

តាមទ្រឹស្តីបទរ៉ូលគេបាន៖

$\varphi(a)=\varphi(b)=0\Rightarrow \exists c_0\in(a,b), \varphi'(c_0)=0$

$\varphi'(a)=\varphi'(c_0)=0\Rightarrow \exists c_1\in(a,b), \varphi'(c_1)=0$

....

....

បើគេបន្តវិធីនេះ n ដងគេបាន៖

$\exists c_n\in(a,b), \varphi^{(n)}(c_n)=0=\varphi^{(n)}(a)$

$\Rightarrow \exists c\in(a,b), \varphi^{(n+1)}(c)=0$

$\Rightarrow f^{(n+1)}(c)+c(n+1)!=0$

$$f^{(n+1)}(c)+\frac{P_n(b)-f(b)}{(b-a)}(n+1)!=0$$

$$\Rightarrow f(b)-P_n(b)=\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

នោះតាម (1) ពិត

បើគេតាង $b=a+x \Leftrightarrow x=b-a$ នោះ (1) ទៅជា

$$f(x+a)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}x+\frac{f''(a)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta x)$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}x^k+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta x),\ 0<\theta<1 \quad (2)$$

ដែល $R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta x)$ ហៅថា សំណល់នៃ $f(a+x)$

ហើយ $\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{(n+1)!}x^k$ ហៅថា ផ្នែកទៀងទាត់នៃ $f(a+x)$ ។

+ នៅក្នុងករណីនេះ៖ $a=0$ នោះ (2) គេបានស៊េរីតៃល័រនឹងទៅជាស៊េរីម៉ាកឡូរ៉ាំង(MacLaurin Serie) កំណត់ដោយ៖

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x),0<\theta<1 \quad (3)$$

ឧទាហរណ៍២៖ ចូរសរសេរស៊េរីតៃល័រនៃអនុគមន៍ $f(x)=e^x$ ត្រង់វ៉ស៊ីណានៃ 1 និងសរសេរស៊េរីម៉ាកឡូរ៉ាំង(MacLaurin Serie) ។

ដំណោះស្រាយ

+ ស៊េរីតៃល័រ

យើងមាន $f(x)=e^x$

$$\Rightarrow f'(x)=e^x \Rightarrow f'(1)=e$$

$$f''(x)=e^x \Rightarrow f''(1)=e$$

....

....

$$f^{(n)}(x)=e^x \Rightarrow f^{(n)}(1)=e$$

ដូចនេះស៊េរីតៃល័រគឺ $f(x)=e+\frac{e}{1!}(x-1)+\frac{e^2}{2!}(x-1)^2+...+\frac{e}{n!}(x-1)^n+R_n(x)$

ឬ $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e}{n!}(x-1)^n$

ឧទាហរណ៍៣៖ ចូររកតម្លៃប្រហែលនៃ $\sin\left(30^0 30'\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $f(x)=\sin x$

គេបាន $\sin\left(30^0 30'\right)=\sin\left(30^0+30'\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{30}{60}\cdot\frac{\pi}{180}\right)$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{6}+0.0087\right)$$

ដោយប្រើស៊េរីតៃល័រនោះគេបាន៖

$$f(x+a)=f(x)+a f'(x)+\frac{a^2}{2!}f''(x)+\cdots$$

$$\sin(x+a)=\sin x+a\cos x+\frac{a^2}{2!}(-\sin x)+\cdots$$

យក $x=\frac{\pi}{6}, a=0.0087$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+0.0087\right)=\sin\frac{\pi}{6}+(0.0087)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\frac{(0.0087)^2}{2!}\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

យើងសិក្សាតែ 3 តួដំបូង

ដូច្នេះ $\sin 30^0 30'=0.50752$ ។

+ ចំពោះស៊េរីម៉ាកឡូរ៉ាំងគេបាន៖ $$\boxed{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}}$$

ឧទាហរណ៍៤៖ ចូរសរសេរស៊េរីតៃល័រនៃអនុគមន៍ $f(x)=\sin x$ ត្រង់វ៉ស៊ីណាំនៃ $\frac{\pi}{3}$ និងស៊េរីម៉ាកឡូរ៉ាំង ។

ដំណោះស្រាយ

+ ចំពោះស៊េរីតៃល័រ

យើងមាន $f(x)=\sin x$

$$\Rightarrow f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f''(x)=-\sin x=\sin(x+\pi)==\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)\Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow f'''(x)=-\cos x=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)\Rightarrow f'''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$$

....

....

$$\Rightarrow f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\Rightarrow f^{(n)}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{n\pi}{2}\right)$$

ដូចនេះស៊េរីតៃល័រគឺ $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^n$

+ ចំពោះស៊េរីម៉ាកឡូរ៉ាំង

យើងមាន $f(x)=\sin x\Rightarrow f(0)=0$

$f'(x)=\cos x\Rightarrow f'(0)=1$

$f''(x)=-\sin x\Rightarrow f''(0)=0$

$f'''(x)=-\cos x\Rightarrow f'''(0)=-1$

....

....

$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\Rightarrow f^{(n)}(0)=\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)=\pm1$ ឬ 0

ដូចនេះគេបានស៊េរីម៉ាកឡូរ៉ាំង $f(x)=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+R_n(x)$

ឬ $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ។

ឧទាហរណ៍៤៖ ចូរសរសេរស៊េរីម៉ាកឡូរ៉ាំងនៃអនុគមន៍ $f(x)=\cos x$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងប្រើដេរីវេនៃស៊េរីនោះគេបាន៖

$$f(x)=\cos x=(\sin x)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)'$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

ឧទាហរណ៍៥៖ ចូរសរសេរស៊េរីម៉ាកឡូរ៉ាំង(McLaurin Serie)នៃអនុគមន៍ $f(x)=e^{ix}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមឧទាហរណ៍២ខាងលើគេបាន៖

$$f(x)=e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\Rightarrow f(x)=e^{ix}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^n}{n!}$$

$$=1+\frac{ix}{1!}+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+...+\frac{(ix)^n}{n!}+R_n(x)$$

$$=1+ix-\frac{x^2}{2!}-\frac{ix^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{ix^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}-\frac{ix^7}{7!}+...+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$$

$$=\underbrace{\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)}_{\cos x}+i\underbrace{\left(x-\frac{x}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)}_{\sin x}+R_n(x)$$

$$=\cos x+i\sin x$$

ដូចនេះ $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ ហៅថារូបមន្តអឺលែរ(Euler) ។

១.២. វិបាក

$$\boxed{e^{-ix}=\cos x-i\sin x}$$

$$\Rightarrow e^{-ix}+e^{ix}=2\cos x$$ ឬ $\cos x=\frac{e^{-ix}+e^{ix}}{2}$

+ បើគេយក $i=1$ គេបាន៖

$$\boxed{\cos x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh x}$$ ហៅថាកូស៊ីនូសអ៊ីពែប៉ូលិក

+ ចំពោះ $e^{ix}-e^{-ix}=2i\sin x$

$$\Rightarrow \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

+ បើគេយក $i=1$ គេបាន៖

$$\boxed{\sin x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sinh x}$$ ហៅថាស៊ីនូសអ៊ីពែប៉ូលិក

$$\Rightarrow \frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\times\frac{2}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\tanh x$$

ដូចនេះ $\boxed{\tanh x=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}$ ហៅតង់សង់អ៊ីពែប៉ូលិក។

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\cosh x}{\sinh x}=\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}=\coth x}$$ ហៅថាកូសតង់សង់អ៊ីពែប៉ូលិក។

$$\Rightarrow \cosh^2 x-\sinh^2 x=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}-\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)$$

$$=e^x\times e^{-x}=1$$

ដូចនេះ $\boxed{\cosh^2 x-\sinh^2 x=1}$ ។

+ ការបង្ហាញអនុគមន៍ដោយស៊េរីម៉ាកឡូរ៉ាំង

ក. $f(x)=(1+x)^m \text{ , } m\in\mathbb{R}$

$f(0)=1$

$f'(x)=m(1+x)^{m-1} \Rightarrow f'(0)=m$

$f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2} \Rightarrow f''(0)=m(m-1)$

....

....

$f^{(k)}(x)=m(m-1)...(m-k+1)(1+x)^{m-k} \Rightarrow f^{(k)}(0)=m(m-1)...(m-k+1)$

ដូចនេះគបាន៖

$$f(x)=(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}\cdot x^2+...+\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}\cdot x^n+R_n(x)$$

ឬ $$(1+x)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{n!}x^n$$

⊕ បើយក $m=-1$ គេបាន៖

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-...+(-1)^n\cdot x^n+R_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

⊕ បើយក $x=-x$ គេបាន៖

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^n+R_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

⊕ បើយក $x=x^2$ គេបាន៖

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+...+(-1)^n x^{2n}+R_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

⊕ បើយក $x=-x^2$ គេបាន៖

$$\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+x^6+...+x^{2n}+R_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}$$

⊕ ម្យ៉ាងវិញទៀត

$$\frac{1}{1+x}=\left[\ln(x+1)\right]' \Rightarrow \ln(1+x)=\int\frac{dx}{1+x}=\int\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$$

$$\frac{1}{1-x}=-\left[\ln(1-x)\right]' \Rightarrow \ln(1-x)=-\int\frac{dx}{1-x}=-\int\sum_{n=0}^{\infty}x^n dx$$

$$=c-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\frac{1}{1+x^2}=\left[\text{Arctan}\,x\right]' \Rightarrow \text{Arctan}\,x=\int\frac{dx}{1+x^2}=\int\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+c$$

ប៉ុន្តែ $\text{Arctan}\,x+\text{Arccot}\,x=\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \text{Arccot}\,x=\frac{\pi}{2}-\text{Arctan}\,x=\frac{\pi}{2}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+c$$

+ ចំពោះ $\frac{1}{1-x^2}=(\text{Arctanh}\,x)'$

$$\Rightarrow \text{Arctanh}\,x=\int\frac{dx}{1-x^2}=\int\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+c$$

⊕ ករណី $m=-\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{x}{2\cdot 1!}+\frac{3\cdot x^2}{2^2\cdot 2!}-\frac{3\cdot 5\cdot x^3}{2^3\cdot 3!}+\dots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)x^n}{2^n\cdot n!}+R_n(x)$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^n$$

⊕ ប្តូរពី x ដោយ $-x$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\frac{x}{2\cdot 1!}+\frac{3\cdot x^2}{2^2\cdot 2!}+\frac{3\cdot 5\cdot x^3}{2^3\cdot 3!}+\dots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)x^n}{2^n\cdot n!}+R_n(x)$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^n$$

⊕ ប្តូរពី x ដោយ x^2

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1-\frac{x^2}{2\cdot 1!}+\frac{3\cdot x^4}{2^2\cdot 2!}-\frac{3\cdot 5\cdot x^6}{2^3\cdot 3!}+\dots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n}+R_n(x)$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n}$$

⊕ ប្តូរពី x ដោយ x^2

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{x^2}{2\cdot 1!}+\frac{3\cdot x^4}{2^2\cdot 2!}+\frac{3\cdot 5\cdot x^6}{2^3\cdot 3!}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n}+R_n(x)$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n}$$

\+ ចំពោះ: $\frac{1}{\sqrt{1+x}}=2\left(\sqrt{1+x}\right)'$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1+x}}=\frac{1}{2}\int\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^n\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot(n+1)!}x^{n+1}\right]+c$$

\+ ចំពោះ: $\frac{1}{\sqrt{1-x}}=-2\left(\sqrt{1-x}\right)'$

$$\Rightarrow \sqrt{1-x}=-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=-\frac{1}{2}\int\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^n\right)dx$$
$$=-\frac{1}{2}\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot(n+)!}x^{n+1}\right]+c$$

\+ ចំពោះ: $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\left[\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\right]'=(\operatorname{arcsinh}x)'$

$$\Rightarrow \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|=\sinh^{-1}x$$
$$=\int\frac{1}{1+x^2}dx$$
$$=\int\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n}\right)dx$$
$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot(2n+1)n!}x^{2n+1}+c$$

\+ ចំពោះ: $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(\operatorname{Arcsin}x)'$

$$\Rightarrow \operatorname{Arcsin}x=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n}\right)dx$$
$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot(2n+1)n!}x^{2n+1}+c$$

ប៉ុន្តែ $\operatorname{Arcsin}x+\operatorname{Arccos}x=\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \text{Arccos}\, x = \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}\, x = \frac{\pi}{2} - \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot (2n+1) n!} x^{2n+1} + c \right]$$

សម្រាយ៖ $\text{Arcsin}\, x + \text{Arccos}\, x = \frac{\pi}{2}$

តាង $y_1 = \text{Arcsin}\, x \Rightarrow x = \sin y_1$

$y_2 = \text{Arccos}\, x \Rightarrow x = \cos y_2$

$\Rightarrow y_1 + y_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin y_1 = \cos y_2 \ (\text{Arcsin} \sin y_1 = y_1)$

$\Rightarrow y_1$ ជាមុំបំពេញនៃ y_2

$\Rightarrow y_1 + y_2 = \frac{\pi}{2}$ ពិត

ឬ $\text{Arcsin}\, x + \text{Arccos}\, x = \frac{\pi}{2}$

⊕ ករណី $m = -\frac{1}{3}$ (ស្រាវជ្រាវដោយខ្លួនឯង)

ឧទាហរណ៍៦៖ ចូរសរសេរស៊េរីនៃអនុគមន៍ $f(x) = \sin^2 x$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

ឥឡូវយើងប្រើស៊េរីនៃ $\cos x$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots.$$

$$\cos 2x = 1 - \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{2^4}{4!}x^4 - \frac{2^6}{6!}x^6 + \frac{2^8}{8!}x^8 - \ldots$$

$$-\frac{1}{2}\cos 2x = -\frac{1}{2} + \frac{2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 - \frac{2^7}{8!}x^8 + \ldots$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 - \frac{2^7}{8!}x^8 + \ldots$$

ដូចនេះស៊េរីនៃអនុគមន៍ $f(x) = \sin^2 x$ គឺ $\sin^2 x = \frac{2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 - \frac{2^7}{8!}x^8 + \ldots$

ស៊េរីនេះរួមចំពោះ $-\infty < x < \infty$ ។

ឧទាហរណ៍៧៖ ចូររកស៊េរីស្វ័យគុណនៃអនុគមន៍ $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ ។

ដំណោះស្រាយ

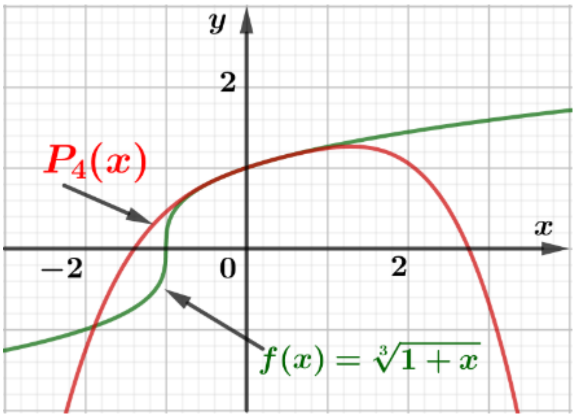
ដោយប្រើស៊េរីពហុធាគេបាន៖

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)x^2}{2!} + \frac{k(k-1)(k-2)x^3}{3!} + \ldots$$

តាង $k=\frac{1}{3}$ គេសរសេរទៅជា៖ $(1+x)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{x}{3}-\frac{2x^2}{3^2 2!}+\frac{2\cdot5x^3}{3^3 3!}-\frac{2\cdot5\cdot8x^4}{3^4 4!}+\ldots$

ប្រើបច្ចេកវិទ្យា(GeoGebra)៖ ប្រើក្រាហ្វដើម្បីទទួលបានលទ្ធផលនៅក្នុងឧទាហរណ៍ទី២ខាងលើ

ចំពោះក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$ និង $P_4(x)=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}$



រូបទី១.១

ឧទាហរណ៍៨៖ ចូររកបីតួដំបូងនៃស៊េរីម៉ាកឡូរ៉ាំងនៃអនុគមន៍ $e^x \arctan x$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយប្រើស៊េរីម៉ាកឡូរ៉ាំងចំពោះ e^x និង $\arctan x$ យើងបាន៖

$$e^x \arctan x=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\right)\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots\right)$$

ធ្វើផលគុណកន្សោមនេះនិងជ្រើសរើសតួដូចគ្នាដើម្បីគុណតាមតួពហុធា

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$$

$$x\qquad -\frac{x^3}{3}\qquad +\frac{x^5}{5}+\ldots$$

$$x+x^2+\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{6}+\frac{x^5}{24}+\ldots$$

$$-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{3}-\frac{x^5}{6}-\ldots$$

$$+\frac{x^5}{5}+\ldots$$

$$x+x^2+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{6}+\frac{3x^5}{40}+\ldots$$

ដូចនេះ $e^x \arctan x=x+x^2+\frac{x^3}{6}$ ។

ឧទាហរណ៍៩៖ ដោយប្រើស៊េរីស្វ័យគុណដើម្បីរកតម្លៃប្រហែលនៃ $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ ជាមួយលម្អៀង 0.01។

ដំណោះស្រាយ

ជំនួស x ដោយ $-x^2$ នៅក្នុងស៊េរី e^x គេបាន៖

$$e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-...$$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=\int_0^1\left(1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-...\right)dx$$

$$=\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\frac{x^9}{9\cdot 4!}-...\right]_0^1$$

$$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}-...$$

ដោយបូកបួនតួដំបូងយើងបាន៖

$\int_0^1 e^{-x^2}dx\approx 0.79$ ដោយវាជាស៊េរីឆ្លាស់ហើយមានលម្អៀងតិចជាង $\frac{1}{216}\approx 0.005$ ។

១.៣. ស៊េរីហ្វួរីយេ (Fourier Serie)

ក.អាំងតេក្រាលអនុគមន៍ខួប

មុនពេលយើងសិក្សាគេត្រូវពិចារណាអាំងតេក្រាលកំណត់ដែលទាក់ទងទៅនឹងចំនួនគត់ m និង n ។ ទាំងនេះគឺជាអាំងតេក្រាលក្នុងខួបតែមួយនៃអាំងតេក្រាលខួប។ យើងនឹងដឹងពីរបៀបដែលអាចដោះស្រាយបានដោយងាយ។ អាំងតេក្រាលដែលយើងយកចិត្តទុកដាក់គឺជាអាំងតេក្រាលជាប់អនុគមន៍ស៊ីនុស កូស៊ីនុស និងអនុគមន៍លាយគ្នារវាង ស៊ីនូស និងកូស៊ីនូស ដែលមានខួបពី $-\pi$ និង π ។

ឧទាហរណ៍១០៖ គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

1. $\int_{-\pi}^{\pi}dx$	2. $\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx$	3. $\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx$
4. $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx$	5. $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx\ (n\neq 0)$	6. $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx, (m\neq n)$
7. $\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx$	8. $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx\,dx$	9. $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin mx\,dx (m\neq 0)$

ដំណោះស្រាយ

$$1.\int_{-\pi}^{\pi}dx=[x]_{-\pi}^{\pi}=2\pi$$

$$2.\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx=\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}\quad (n\neq 0)$$

$$=\frac{\sin n\pi}{n}-\frac{\sin(-n\pi)}{n}$$

$=0$ ពីព្រោះ $\sin n\pi=0$

$3.\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx = ...(n\neq 0)$ ពីព្រោះ៖

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx = \left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}\quad (n\neq 0)$$

$$= -\frac{\cos n\pi}{n} + \frac{\cos(-n\pi)}{n}$$

$= 0$ ពីព្រោះ $\cos(-x) = \cos x$

$4.\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos 2nx + 1}{2}dx$ ពីព្រោះ $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$

$$= \left[\frac{\sin 2nx}{4n} + \frac{x}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}\quad (n\neq 0)$$

$$= \frac{\sin 2n\pi}{4n} + \frac{\pi}{2} - \frac{\sin(-2n\pi)}{4n} - \frac{(-\pi)}{2}$$

$$= \pi$$

$5.\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2nx}{2}dx$ ពីព្រោះ $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$

$$= \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2nx}{4n}\right]_{-\pi}^{\pi}\quad (n\neq 0)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2n\pi}{4n} - \frac{(-\pi)}{2} + \frac{\sin(-2n\pi)}{4n} = \pi$$

$$6.\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]dx$$

ពីព្រោះ $2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$

$$= \left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_{-\pi}^{\pi}\quad (m\neq n)$$

$$= \frac{\sin(m+n)\pi}{m+n} + \frac{\sin(m-n)\pi}{m-n} - \frac{\sin(m+n)(-\pi)}{m+n} - \frac{\sin(m-n)(-\pi)}{m-n}$$

$$= 0$$

$$7.\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right]dx$$

ពីព្រោះ $2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

$$= \left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_{-\pi}^{\pi},(m\neq n)$$

$$= \frac{\sin(m-n)\pi}{m-n} - \frac{\sin(m+n)\pi}{m+n} - \frac{\sin(m-n)(-\pi)}{m-n} + \frac{\sin(m+n)(-\pi)}{m+n}$$

$$= 0$$

$8.\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sin(m+n)x-\sin(m-n)x\right]dx\,(m\neq n)$

ពីព្រោះ $2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(m+n)x}{m+n}+\frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right]_{-\pi}^{\pi}\quad(m\neq n)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(m+n)\pi}{m+n}+\frac{\cos(m-n)\pi}{m-n}+\frac{\cos(m+n)(-\pi)}{m+n}-\frac{\cos(m-n)(-\pi)}{m-n}\right)$$

$=0$ ពីព្រោះ $\cos(-x)=\cos x$

$9.\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin mx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2mx\,dx\quad(\sin 2A=2\sin A\cos A)$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 2mx}{2m}\right]_{-\pi}^{\pi}\quad(m\neq 0)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 2m\pi}{2m}+\frac{\cos 2m(-\pi)}{2m}\right)$$

$=0$ ពីព្រោះ $\cos(-x)=\cos x$

ខ.និយមន័យ៖ គេឱ្យលក្ខខណ្ឌចាំបាច់បើ $f(x)$ កំណត់នៅលើចន្លោះ $-\pi\le x\le\pi$ ដែល $f(x+2n\pi)=f(x)$ នោះគេបាន៖

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ នេះជាស៊េរីហ្វួរីយេនៃកន្សោម $f(x)$ ដែល a_n និង b_n ជាចំនួនថេរហៅថា មេគុណហ្វួរីយេដែល៖ $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$ និង

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$, $n=0,1,2,...$ ។

ចំពោះអនុគមន៍ថេរ $f(x)=c$ យើងត្រូវពិនិត្យមើលអនុគមន៍ខួបជាមួយខួបផ្សេងៗដែលយើងជ្រើសរើសនូវខួប 2π នោះគេបាន៖

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}c\cos nx\,dx=\frac{c}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx=2c\delta_{n,0}$ ចំពោះ $a_0=2c\Rightarrow c=\frac{a_0}{2}$

ដូចគ្នាដែរគេបាន

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}c\sin nx\,dx=\frac{c}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx=0$

យើងឃើញថាមានពីររបៀបសម្រាប់បង្ហាញថាស៊េរីហ្វួរីយេយើងកំណត់សរសេរដោយ៖

របៀបទី១៖

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos nx+b_n\sin nx\}$$

ដែល $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$, $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$ និង $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$

របៀបទី២៖

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\{a_n\cos nx+b_n\sin nx\}$$

ដែល $a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx, a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\ (n\neq 0)$ និង

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

យើងជ្រើសរើសទម្រង់ហើយត្រូវជៀសវាងចំពោះការរកអាំងតេក្រាលនៃ a_0 ។

ឧទាហរណ៍១១៖ ដើម្បីរក a_{10} យើងធ្វើផលគុណ $f(x)$ ដោយ $\cos 10x$ ហើយធ្វើអាំងតេក្រាលលើខួប។

ដំណោះស្រាយ

យើងគេបាន៖

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos 10x\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right)\cos 10x\,dx$$

$$=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 10x\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos 10x\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos 10x\,dx$$

$$=\frac{a_0}{2}\times 0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\pi\delta_{n,10}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\times 0$$

$$=a_0\pi\times 0+a_1\pi\times 0+\ldots+a_9\pi\times 0+a_{10}\pi\times 1+a_{11}\pi\times 0+\ldots$$

$$=a_{10}\pi$$

ដូចនេះ $a_{10}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos 10xdx$ ។

ឧទាហរណ៍១២៖ បង្ហាញថា $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx=a_m\pi$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងគេបាន

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right)\cos mx\,dx$$

$$=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx$$

$$=\frac{a_0}{2}\times 0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\pi\delta_{n,m}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\times 0\ =a_m\pi$$

ដូចនេះ $a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx$ ។

ឧទាហរណ៍១៣៖ បង្ហាញថា $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx = b_m\pi$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ គេបាន៖

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\right\}\sin mx\,dx$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin mx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\,dx$$

$$= \frac{a_0}{2}\times 0 + \sum_{n=1}^{\infty}a_n\times 0 + \sum_{n=1}^{\infty}b_n\pi\delta_{n,m}$$

$$= b_m\pi$$

ដូចនេះ $b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx$ ។

ឧទាហរណ៍១៤៖ ចូររកស៊េរីហ្វួរីយ៉េនៃអនុគមន៍ $f(x) = x,\ 0 < x < 2\pi$ និងសង់ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ពី $x = -4\pi$ ទៅ $x = 4\pi$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \qquad (1)$

គេបាន $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\pi$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x\frac{\sin nx}{n} - 1\left(-\frac{\cos nx}{n^2}\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos 2n\pi}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right] = \frac{1}{n^2\pi}(1-1) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx\,dx$$

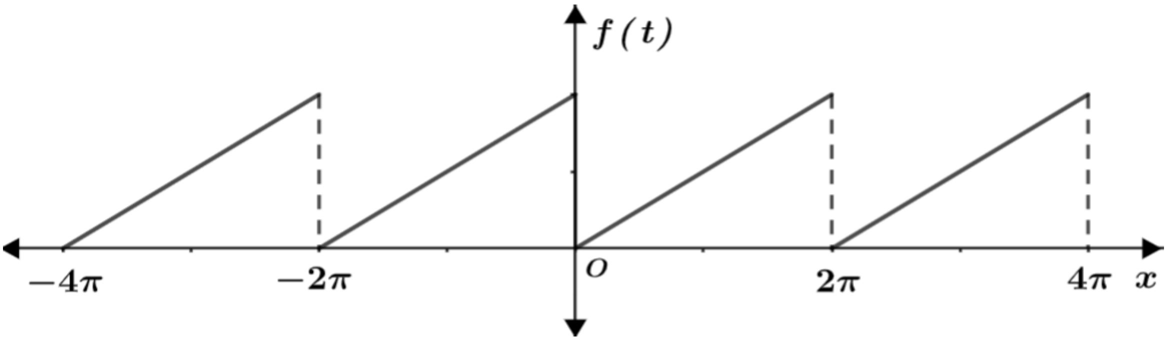
$$= \frac{1}{\pi}\left[x\frac{\cos nx}{n} - 1\left(-\frac{\sin nx}{n^2}\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-2\pi\cos 2n\pi}{n^2}\right] = -\frac{2}{n}$$

យកតម្លៃ a_0, a_n និង b_n ជំនួសក្នុង (1) គេបាន៖

$$f(x)=\pi-2\left[\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\dots\right]$$

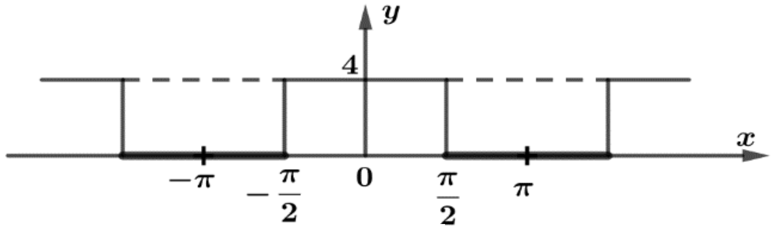
ដូចនេះ $x=\pi-2\left[\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\dots\right]$ ។



រូបទី១.២

ឧទាហរណ៍១៥៖ ចូររកស៊េរីហ្វួរីយេនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ដែលកំណត់ដូចរូបដោយសិក្សាមួយខួបនៅចន្លោះ $x=-\pi$ និង $x=\pi$ ។

ដំណោះស្រាយ



រូបទី១.៣

គេបាន អនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases}0 & ,-\pi<x<-\frac{\pi}{2}\\ 4 & ,-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ 0 & ,\ \frac{\pi}{2}<x<\pi\end{cases}$, $f(x+2\pi)=f(x)$ ។

តាមរូបមន្ត៖ $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos nx+b_n\sin nx\}$

ក.រក a_0

គេបាន $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}0dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}0dx\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}[4x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=4$$

ដូចនេះ $a_0 = 4$ ។

ខ.រក a_n

គេបាន $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}(0)\cos nx\,dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos nx\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(0)\cos nx\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\times\frac{4}{n}\sin nx\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

ដូចនេះ $a_n = \frac{8}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$ ។

យើងត្រូវសិក្សាទៅតាមតម្លៃនៃចំនួនគត់ n នោះគេបាន៖

⊕ បើ n គូ នោះគេបាន $a_n = 0$

⊕ បើ $n = 1,5,9,...$ នោះគេបាន $a_n = \frac{8}{n\pi}$

⊕ បើ $n = 3,7,11,...$ នោះគេបាន $a_n = -\frac{8}{n\pi}$

គ.រក b_n

គេបាន៖ $b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}(0)\sin nx\,dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\sin nx\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(0)\sin nx\,dx\right\}$$

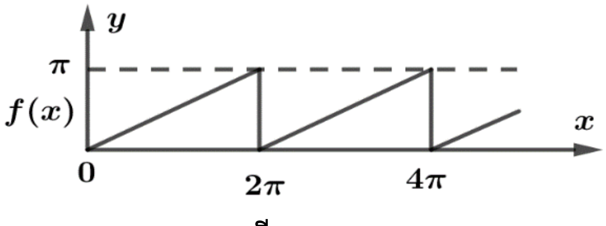
$$= \frac{4}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin nx\,dx = \frac{4}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{n\pi}\left\{\cos\frac{n\pi}{2} - \cos\left(-\frac{n\pi}{2}\right)\right\} = 0$$

ដូចនេះ $b_n = 0$ ។

ដោយ $a_0 = 4, a_n$ ដូចខាងលើនិង $b_n = 0$ នោះគេបាន៖

$$f(x) = 2 + \frac{8}{\pi}\left\{\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x + ...\right\}$$

ឧទាហរណ៍១៦៖ ចូរកំណត់ស៊េរីហ្វួរីយេអនុគមន៍ខួបដែលបង្ហាញដូចរូប។

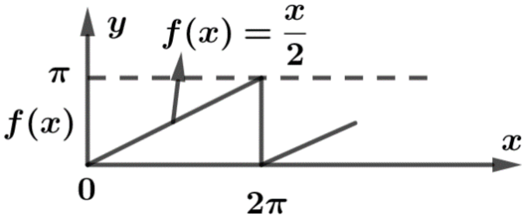


រូបទី១.៤

ដំណោះស្រាយ

វាមានភាពងាយស្រួលជាងនេះដើម្បីកំនត់ខួបវាពី 0 ទៅ 2π ។

អនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{x}{2}, 0<x<2\pi$ ដែល $f(x+2\pi)=f(x)$ នោះខួបរបស់វាស្មើ 2π ។



រូបទី១.៥

តាមរូបមន្តគេបាន $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos nx+b_n\sin nx\}$

ឥឡូវយើងនឹងរកមេគុណរបស់វា៖

ក.រក a_0

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{x}{2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{4\pi}\left[x^2\right]_0^{2\pi}$$
$$=\frac{1}{4\pi}\times(2\pi)^2$$
$$=\pi$$

ដូចនេះ $a_0=\pi$ ។

ខ.រក a_n

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{x}{2}\right)\cos nx\,dx$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x\cos nx\,dx$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left\{\left[\frac{x\sin nx}{n}\right]_0^{2\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx\right\}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left\{(0-0)-\frac{1}{n}(0)\right\}=0$$

ដូចនេះ $a_n=0$ ។

គ. រក b_n

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{x}{2}\right)\sin nx\,dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx\,dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\left[-\frac{x\cos nx}{n}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx\right\}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left\{-\frac{2\pi}{n} + \left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{2\pi}\right\}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\times\left(-\frac{2\pi}{n}+0\right) = -\frac{1}{n}$$

ដោយ $a_0 = \pi, a_n = 0, b_n = -\frac{1}{n}$ នោះគេបានកន្សោមទូទៅនៃស៊េរីហ្វួរីយេកំណត់ដោយៈ

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos nx + b_n\sin nx\}$$

ក្នុងករណីនេះគេបានៈ

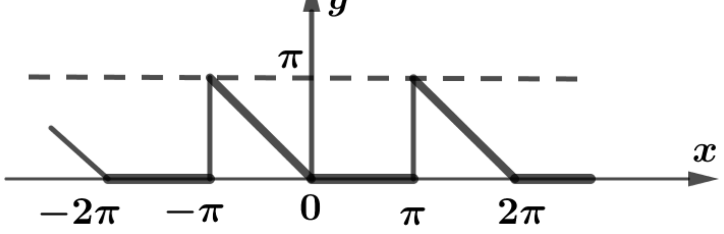
$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\{b_n\sin nx\}\ ,\ (a_n = 0)$$
$$= \frac{\pi}{2} + \left\{-\frac{1}{1}\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{3}\sin 3x - ...\right\}$$
$$= \frac{\pi}{2} - \left\{\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + ...\right\}$$

ដូចនេះ $f(x) = \frac{\pi}{2} - \left\{\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + ...\right\}$ ។

ចំណាំៈ នៅក្នុងឧទាហរណ៍នេះស៊េរីថេរមានតែតួថេរ និងស៊ីនុសថេរ។

អនុវត្តន៍ៈ ១.ចូររកស៊េរីហ្វួរីយេនៃអនុគមន៍កំណត់ដោយៈ

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{បើ } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{បើ } 0 < x < \pi \end{cases},\ f(x+2\pi) = f(x)$$



រូបទី១.៦

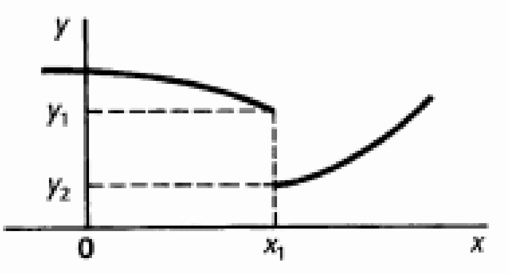
២.ចូររកស៊េរីហ្វួរីយេនៃអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases}-1 \text{ បើ } -\pi<x<-\dfrac{\pi}{2}\\ 0 \text{ បើ } -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\\ +1 \text{ បើ } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi\end{cases}$ ។

គ. ផលបូកស៊េរីហ្វួរីយេនៅត្រង់ចំណុចដាច់

គេមាន $f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n+\cos nx+b_n\sin nx\}$

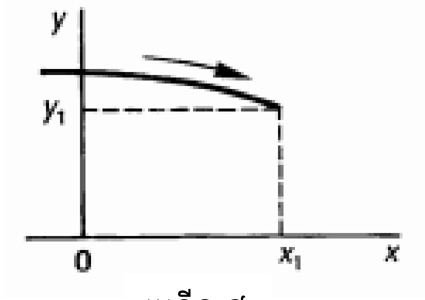
បើ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=x_1$ នោះស៊េរីរួមទៅរកតម្លៃ $f(x_1)$ ដូចទៅនឹងចំនួនតួនៃកំណើនកំណត់។ ចំណុចពិសេសនៃការកើតមានឡើងនៅត្រង់ចំណុចដាច់នៃអនុគមន៍ $y=f(x)$។

- នៅពេលដែល $x\to x_1$ កន្សោម $f(x)$ ខិតជិត y_1 ឬ y_2 អាស្រ័យលើក្រាហ្វមានទិសដៅ។



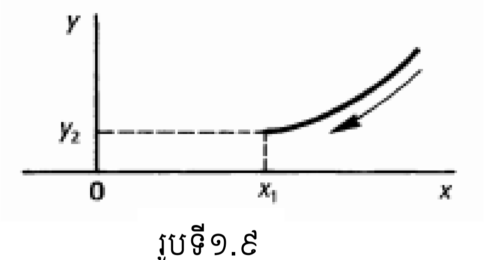
រូបទី១.៧

- បើវាខិតទៅជិត $x=x_1$ ពីតម្លៃខាងក្រោមតម្លៃនោះ ការកំណត់នៃតម្លៃ $f(x)$ គឺ y_1។



រូបទី១.៨

- បើវាខិតទៅជិត $x=x_1$ ពីតម្លៃខាងលើតម្លៃនោះ ការកំណត់នៃតម្លៃ $f(x)$ គឺ y_2 ។



រូបទី១.៩

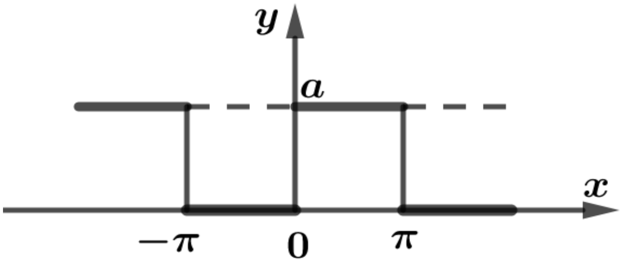
ដើម្បីដឹងពីលក្ខណៈខុសគ្នារវាងតម្លៃទាំងពីរគេកំណត់សរសេរដោយៈ

- $y_1=f(x_1-0)$ ជាដំបូងតាង $x=x_1$

- $y_2 = f(x_1+0)$ បន្ទាប់មកតាង $x = x_1$

បើគេជំនួស $x = x_1$ នៅក្នុងស៊េរីហ្វួរីយេចំពោះ $f(x)$ បង្ហាញឱ្យឃើញថាវាជាស៊េរីរួមទៅរកតម្លៃ $\frac{1}{2}\{f(x_1-0)+f(x_1+0)\}$ មានន័យថា $\frac{1}{2}(y_1+y_2)$ ជាមធ្យមនៃ y_1 និង y_2 ។

ឧទាហរណ៍១៧៖ ចូរពិនិត្យអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases} 0 \text{ បើ } -\pi < x < \pi \\ a \text{ បើ } \pi < x < 2\pi \end{cases}$, $f(x+2\pi)=f(x)$ ។



រូបទី១.១០

ចូរកំណត់ស៊េរីហ្វួរីយេដើម្បីបង្ហាញជាអនុគមន៍ជាច់។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos nx + b_n \sin nx\}$ គេបាន

$$(a).\ a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} a dx=\frac{1}{\pi}[ax]_0^{\pi}=a$$

$$(b).\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} a\cos nx\,dx$$

$$=\frac{a}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi}=0$$

$$(c).b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} a\sin nx\,dx$$

$$=\frac{a}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}=\frac{a}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

$$=\frac{a}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$$

យើងសិក្សាលើតម្លៃ n ៖

+បើ n គូនោះគេបាន $\cos n\pi = 1$

+បើ n សេសនោះគេបាន $\cos n\pi = -1$

$\Rightarrow b_n = 0$ បើ n គូ

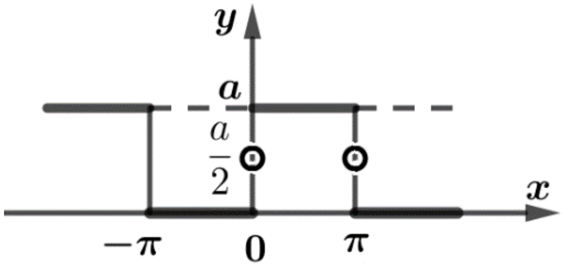
$\Rightarrow b_n = \frac{2a}{n\pi}$ បើ n សេស

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$

ដូចនេះ $f(x)=\frac{1}{2}a+\frac{2a}{\pi}\left\{\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+...\right\}$ ។

ភាពដាច់កើតឡើងត្រង់ $x=0$ ។ បើយើងជំនួស $x=0$ នៅក្នុងស៊េរីយើងបានគ្រប់តួជាស៊ីនូសនោះគេបាន $f(x)=\frac{a}{2}$ ជាការពិតវាជាតម្លៃមធ្យមនៃពីរអនុគមន៍នៅត្រង់ $x=0$ ។

សូមកត់សម្គាល់ផងដែរថានៅត្រង់ $x=\pi$ ភាពដាច់បានកើតឡើងនៅពេលយើងជំនួស $x=\pi$ ក្នុងស៊េរីឱ្យលទ្ធផលដូចគ្នា។

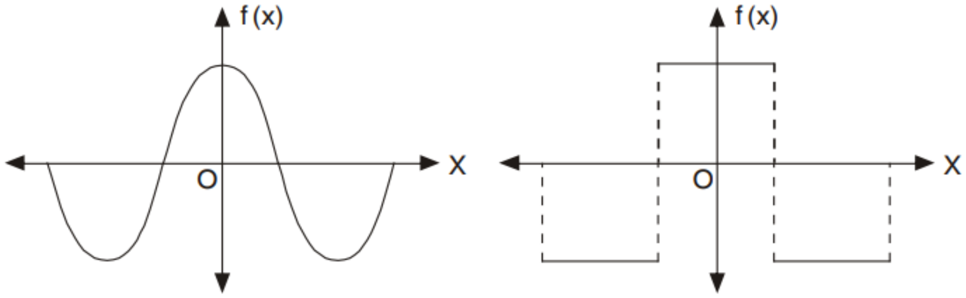


រូបទី១.១១

ឃ. អនុគមន៍គូ និងអនុគមន៍សេស

⊕ អនុគមន៍គូ

អនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍គូបើ $f(-x)=f(x)$ ។ ក្រាហ្វអនុគមន៍គូគឺឆ្លុះគ្នាធៀបទៅនឹងអ័ក្សអរដោនេនោះគេបានអ័ក្សអរដោនេជាអ័ក្សឆ្លុះនៃខ្សែកោង។



រូបទី១.១២

ផ្ទៃក្រឡានៅក្រោមខ្សែកោងពី $-\pi$ ទៅ π ស្មើពីរដងនៃផ្ទៃក្រឡាពី 0 ទៅ π ។

គេបាន $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=2\int_{0}^{\pi}f(x)dx$

ការពន្លាតនៃអនុគមន៍គូ៖

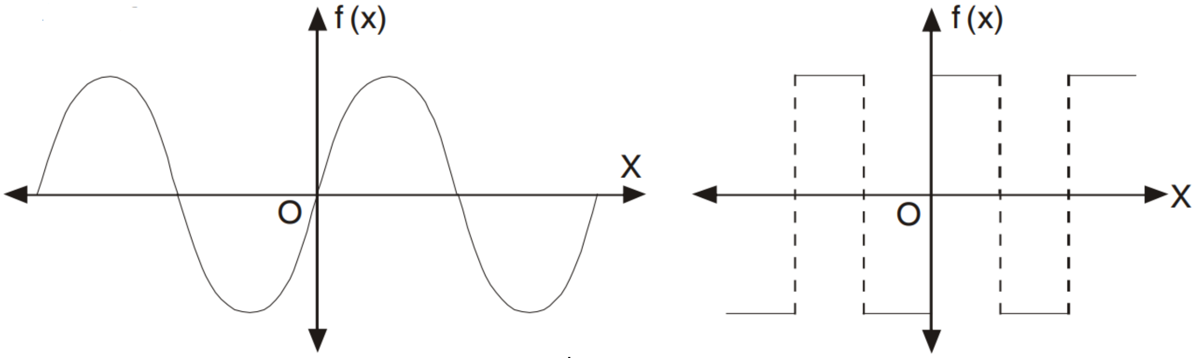
$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)dx$$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$ ព្រោះ៖ $f(x)\cdot\cos nx$ ជាអនុគមន៍គូ

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=0$ ព្រោះ៖ $f(x)\cdot\sin nx$ ជាអនុគមន៍សេស

⊕ **អនុគមន៍សេស**

អនុគមន៍ $f(x)$ ត្រូវបានគេហៅអនុគមន៍សេសបើ $f(-x)=-f(x)$ ។ ក្រាហ្វអនុគមន៍សេសគឺឆ្លុះគ្នាធៀបទៅនឹងគល់តម្រុយត្រង់ផ្ចិត O ត្រូវបានគេហៅថាជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោង។



រូបទី១.១៣

ផ្ទៃក្រឡានៅក្រោមខ្សែកោងពី $-\pi$ ទៅ π គឺស្មើសូន្យ គេបាន $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=0$

ការពន្លាតនៃអនុគមន៍សេស៖

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=0$$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=0$ ព្រោះ $f(x)\cdot\cos nx$ ជាអនុគមន៍សេស

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

ព្រោះ $f(x)\cdot\sin nx$ ជាអនុគមន៍គូ

ឧទាហរណ៍១៨៖ ចូររកការពន្លាតស៊េរីហ្វួរីយេនៃអនុគមន៍ខួប 2π បើ $f(x)=x^2, -\pi\le x\le\pi$ រួចរកផលបូកនៃស៊េរី $\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $f(x)=x^2, -\pi\le x\le\pi$

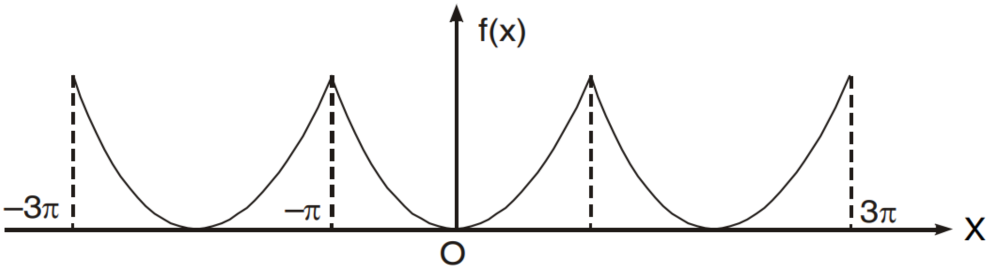
ដោយអនុគមន៍នេះជាអនុគមន៍គូគេបាន៖

$$b_n=0$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\cos nxdx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[x^2\left(\frac{\sin nx}{n}\right)-(2x)\left(-\frac{\cos nx}{n^2}\right)+(2)\left(-\frac{\sin nx}{n^3}\right)\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi^2\sin n\pi}{n}+\frac{2\pi\cos n\pi}{n^2}-\frac{2\sin n\pi}{n^3}\right]=\frac{4(-1)^n}{n^2}$$



រូបទី១.១៤

គេបានស៊េរី $f\left(x\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos nx+b_n\sin nx\right\}$

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\left[\frac{\cos x}{1^2}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\frac{\cos 4x}{4^2}+\ldots\right]$$

យក $x=0$ យើងបាន៖

$$0=\frac{\pi^2}{3}-4\left[\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots\right]$$

$$\Rightarrow\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}$$

ឧទាហរណ៍១៩៖ ចូររកការពន្លាតស៊េរីហ្វួរីយេនៃអនុគមន៍ $f\left(x\right)=x^3$ បើ $-\pi<x<\pi$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $f\left(x\right)=x^3$ ជាអនុគមន៍សេស នោះគេបាន៖

$a_0=0$ និង $a_n=0$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f\left(x\right)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^3\sin nx dx$$

$$\left[\int uv=uv_1-u'v_2+u''v_3-u'''v_4+\ldots\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[x^3\left(\frac{\cos nx}{n}\right)-3x^2\left(-\frac{\sin nx}{n^2}\right)+6x\left(\frac{\cos nx}{n^3}\right)-6\left(\frac{\sin nx}{n^4}\right)\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi^3\cos n\pi}{n}+\frac{6\pi\cos n\pi}{n^3}\right]$$

$$=2\left(-1\right)^n\left(-\frac{\pi^2}{n}+\frac{6}{n^3}\right)$$

ដូចនេះ $x^3=2\left[-\left(\frac{\pi^2}{1}+\frac{6}{1^3}\right)\sin x+\left(\frac{\pi^2}{2}+\frac{6}{2^3}\right)\sin 2x-\left(\frac{\pi^2}{3}+\frac{6}{3^3}\right)\sin 3x+\ldots\right]$ ។

ង.អនុគមន៍ខួប T ៖ បើ f ជាអនុគមន៍ពិតមានអាំងតេក្រាល និងមានខួប $T=\frac{2\pi}{\omega}$ នោះដែល

ហៅថា ស៊េរីហ្វួរីយេនៃ f គឺស៊េរីត្រីកោនមាត្រ $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t)$

ដែល a_0, a_n, b_n ផ្ទៀងផ្ទាត់៖

$$\begin{cases} a_0=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t)dt \\ a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t\,dt=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t)\cos n\omega t\,dt \\ b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t\,dt=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t)\sin n\omega t\,dt \end{cases}$$

ប្រវែង $\frac{2\pi}{\omega}$ ឬស៊េរី $\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n e^{in\omega x},\ \lambda_n=\frac{\omega}{2\pi}\int_{\Delta} f(x)e^{-in\omega x}dx$ ។

គេថាអនុគមន៍ f មានភាពដាច់ប្រភេទទីមួយត្រង់ x_0 កាលណាវាមានលីមីតឆ្វេង $f(x_0^-)$ និងលីមីតស្តាំ $f(x_0^+)$ ហើយគេថាវាមានដេរីវេឆ្វេង និងដេរីវេស្តាំត្រង់ x_0 កាលណា៖

$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0^-)}{h}$ និង $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0^+)}{h}$ មាន។

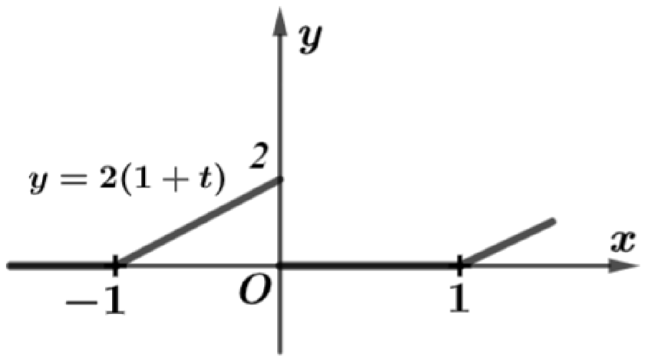
ចំណាំ៖ $f=\frac{1}{T},\ \omega=\frac{2\pi}{T}$ ឬ $T=\frac{2\pi}{\omega}$ ហើយ $x=\omega t$ ។

ឧទាហរណ៍១៩៖ ចូរកំណត់ស៊េរីហ្វួរីយេនៃអនុគមន៍ខួបដែលកំណត់ដោយ៖

$$f(t)=\begin{cases} 2(1+t) & \text{បើ } -1<t<0 \\ 0 & \text{បើ } 0<t<1 \end{cases},\ f(t+2)=f(t)\text{ ។}$$

ដំណោះស្រាយ

យើងត្រូវសង់ក្រាហ្វ



រូបទី១.១៥

តាមរូបមន្ត $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi t}{T}+b_n\sin\frac{2n\pi t}{T}\right)$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos n\pi t+b_n\sin n\pi t\},\ T=2$$

នោះគេបាន

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt=\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$$

$$=\int_{-1}^{0}2(1+t)\,dt+\int_{0}^{1}(0)\,dt$$

$$=\left[2t+t^2\right]_{-1}^{0}=1$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\pi t\,dt$$

$$=\int_{-1}^{1} f(t)\cos n\pi t\,dt$$

$$=\int_{-1}^{0}2(1+t)\cos n\pi t\,dt$$

$$=2\left\{\left[(1+t)\frac{\sin n\pi t}{n\pi}\right]_{-1}^{0}-\frac{1}{n\pi}\int_{-1}^{0}\sin n\pi t\,dt\right\}$$

$$=2\left\{(0-0)-\frac{1}{n\pi}\left[-\frac{\cos n\pi t}{n\pi}\right]_{-1}^{0}\right\}=\frac{2}{n^2\pi^2}(1-\cos n\pi)$$

$$=\frac{2}{n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)$$

ក្នុងករណីនេះ៖

⊕ បើ n គូ នោះ $a_n=0$

⊕ បើ n សេសនោះ $a_n=\frac{4}{n^2\pi^2}$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\frac{2n\pi t}{T}\,dt$$

$$=\int_{-1}^{0}2(1+t)\sin n\pi t\,dt$$

$$=2\left\{\left[(1+t)\frac{-\cos n\pi t}{n\pi}\right]_{-1}^{0}+\frac{1}{n\pi}\int_{-1}^{0}\cos n\pi t dt\right\}$$

$$=2\left\{-\frac{1}{n\pi}+\left[\frac{\sin n\pi t}{n\pi}\right]_{-1}^{0}\right\}$$

$$=-\frac{2}{n\pi}+\frac{2}{n^2\pi^2}(\sin n\pi)$$

$$=-\frac{2}{n\pi}$$

$$f(t)=\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\left\{\cos\pi t+\frac{1}{9}\cos 3\pi t+\frac{1}{25}\cos 5\pi t+...\right\}$$
$$-\frac{2}{\pi}\left\{\sin\pi t+\frac{1}{2}\sin 2\pi t+\frac{1}{3}\sin 3\pi t+\frac{1}{4}\sin 4\pi t+...\right\}$$

ឧទាហរណ៍២០៖ ចូរកំណត់ស៊េរីហ្វួរីយេចំពោះអនុគមន៍ $f(x)=1-x^2$ នៅលើ $I=[-1,1]$ ហើយមាន $T=2$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយ f ជាអនុគមន៍គូនោះ $b_n=0$

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=\int_0^1(1-x^2)dx=\frac{2}{3}$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)\cos n\pi x dx$$
$$=2\int_0^1(1-x^2)\cos n\pi x dx$$
$$=\frac{4}{k^2\pi^2}(-1)^{k+1},\forall n\geq 1$$

ដូចនេះ $f(x)=\frac{2}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos n\pi x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ ។

ស៊េរីហ្វួរីយេ $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t\}$ អាចសរសេរជាទម្រង់៖

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin(n\omega t+\phi_n)$$

យើងឃើញថា $A_0=a_0, B_n\sin\phi_n=a_n$ និង $B_n\cos\phi_n=b_n$

ហើយ $B_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$, $\phi_n=\arctan\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$

ដែល $b_1\sin(\omega t+\phi_1)$ ជាហាម៉ូនិកទី1

$b_2\sin(2\omega t+\phi_2)$ ជាហាម៉ូនិកទី2

$b_n\sin(n\omega t+\phi_n)$ ជាហាម៉ូនិកទី n

ទ្រឹស្តីបទ៖បើ f ជាអនុគមន៍ខួបពិតផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌDirichletដូចតទៅ៖

D_1 :ភាពជាប់នៃ f ត្រង់គ្រប់ចន្លោះកំណត់សុទ្ធតែប្រភេទទីមួយហើយរាប់អស់។

D_2 : f មានដេរីវេឆ្វេងស្តាំត្រង់គ្រប់ចំណុច។

សន្និដ្ឋាន៖ ស៊េរីហ្វួរីយេនៃ f រួមត្រង់ $\forall X$ ហើយមានផលបូកស្មើ $f(X)$ បើ f ជាប់ត្រង់ X និងស្មើ $\frac{1}{2}\left(f(x^-)+f(x^+)\right)$ បើ f ដាច់ត្រង់ X ។

ឧទាហរណ៍២០៖ អនុគមន៍ f មានខួប $T=2\pi$ ហើយ $f(x)=\frac{x}{2}, \forall x\in(-\pi,\pi)$។ ចូររកស៊េរីហ្វួរីយេនៃអនុគមន៍ $f(x)$។

ដំណោះស្រាយ

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x}{2}dx=0\ ,\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x}{2}\cos nxdx=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x}{2}\sin nxdx=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

ដូចនេះ $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$ ។

ឧទាហរណ៍២១៖ អនុគមន៍ f មានខួប $T=2\pi$ ហើយ $f(x)=\frac{|x|}{2}, \forall x\in(-\pi,\pi)$។ ចូររកស៊េរីហ្វួរីយេនៃអនុគមន៍ $f(x)$។

ដំណោះស្រាយ

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|x|}{2}dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{x}{2}dx=\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{x}{2}\cos nxdx=\begin{cases}\frac{-2}{\pi n^2}\text{ បើ } n \text{ សេស}\\ 0 \text{ បើ } n \text{ គូ}\end{cases}$$

$$b_n=0$$

ដូចនេះ $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$ ។

ឧទាហរណ៍២២៖ ចូររកស៊េរីហ្វួរីយេនៃអនុគមន៍ $f(x)=x-x^2$ ដែលនៅចន្លោះពី $x=-\pi, x=\pi$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $x-x^2=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos nx+\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin nx$

នោះ $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x-x^2)dx=\frac{1}{\pi}\left|\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right|_{-\pi}^{\pi}=-\frac{2\pi^2}{3}$

- រក a_n

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x-x^2)\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[(x-x^2)\frac{\sin nx}{n}-(1-2x)\times\left(-\frac{\cos nx}{n^2}\right)+(-2)\left(\frac{\sin nx}{n^3}\right)\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{-4(-1)^n}{n^2}$$

មានន័យថា $a_1=\frac{4}{1^2}$, $a_2=-\frac{4}{2^2}$, $a_3=\frac{4}{3^2}$, $a_4=-\frac{4}{4^2}$...

- រក b_n

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x-x^2\right)\sin nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\left(x-x^2\right)\frac{\cos nx}{n}-(1-2x)\times\left(-\frac{\sin nx}{n^2}\right)+(-2)\left(\frac{\cos nx}{n^3}\right)\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{-2(-1)^n}{n}$$

មានន័យថា $b_1=\frac{2}{1}, b_2=\frac{-2}{2}, b_3=\frac{2}{3}, b_4=-\frac{2}{4}...$

ដូចនេះ $f(x)=-\frac{2\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx-\frac{2(-1)^n}{n}\sin nx\right)$ ។

ឧទាហរណ៍២៣៖ ចូររកស៊េរីហ្វួរីយេនៃអនុគមន៍ $f(x)=e^{-x}$ ដែលនៅចន្លោះពី $0<x<2\pi$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $e^{-x}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos nx+\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin nx$

នោះ $a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}e^{-x}dx=\frac{1}{\pi}\left|e^{-x}\right|_0^{2\pi}=\frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-x}\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi\left(n^2+1\right)}\left|e^{-x}(-\cos nx+n\sin nx)\right|_0^{2\pi}=\left(\frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}\right)\times\frac{1}{n^2+1}$$

មានន័យថា $a_1=\left(\frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}\right)\times\frac{1}{2}, a_2=\left(\frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}\right)\times\frac{1}{5}$

ជាចុងក្រោយគេបាន $b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}e^{-x}\sin nxdx$

$$=\frac{1}{\pi\left(n^2+1\right)}\left|e^{-x}(-\sin nx-\cos nx)\right|_0^{2\pi}=\left(\frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}\right)\times\frac{n}{n^2+1}$$

មានន័យថា $b_1=\left(\frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}\right)\times\frac{1}{2}, b_1=\left(\frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}\right)\times\frac{2}{5}$

ដូចនេះ $f(x)=\left(\frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}\right)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n^2+1}\cos nx+\frac{n}{n^2+1}\sin nx\right\}\right)$ ។

លំហាត់ស៊េរី

១.ដោយប្រើស៊េរីតៃល័រគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

$(1).\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$ $(2).\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{x^3}$ $(3).\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x-\ln(1-x)}{x^2}$

$(4).\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$ $(5).\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$ $(6).\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x-e^x}{4x^2}$

$(7).\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos 2x-2+4x^2}{2x^4}$ $(8).\lim\limits_{x\to \infty}x\sin\dfrac{1}{x}$ $(9).\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\tan x-3x-x^3}{x^5}$

$(10).\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{\ln(x-3)}$ $(11).\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1-\dfrac{x}{2}}{4x^2}$ $(12).\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{3x^3\cos x}$

$(13).\lim\limits_{x\to \infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$ $(14).\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}-e^x}{8x^2}$ $(16).\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(1+x)^{-2}-4\cos\sqrt{x}+3}{8x^2}$

២.ចូរសរសេរបីតួដំបូងនៃស៊េរីតៃល័រនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ត្រង់ចំណុច a ខាងក្រោម៖

$(1).\ f(x)=e^{3x}\ ,a=0$ $(2).\ f(x)=\dfrac{1}{x},a=1$

$(3).\ f(x)=\cos x,a=\dfrac{\pi}{2}$ $(4).\ f(x)=-\ln(1-x),\ a=0$

$(5).\ f(x)=\arctan x,a=0$ $(6).\ f(x)=\sin 2x,a=-\dfrac{\pi}{2}$

$(7).\ f(x)=\cosh 3x\ ,a=0$ $(8).\ f(x)=\dfrac{1}{4+x^2},a=0$

៣. ចូរសរសេរបីតួដំបូងនៃស៊េរីម៉ាកឡូរាំងនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

$(1).\ f(x)=\sqrt[3]{1+x}$ $(2).\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$

$(3).\ f(x)=\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{-3}$ $(4).\ f(x)=(1+2x)^{-5}$

៤. ដោយប្រើស៊េរីតៃល័រគណនាតម្លៃប្រហែលនៃអាំងតេក្រាលដោយយកលម្អៀងក្រោយក្បៀស 10^{-4} ដូចខាងក្រោម៖

$(1).\int_0^{0.25}e^{-x^2}dx$ $(2).\int_0^{0.2}\sin x^2\,dx$ $(3).\int_{-0.35}^{0.35}\cos 2x^2dx$

$(4).\int_0^{0.2}\sqrt{1+x^4}dx$ $(5).\int_0^{0.35}\arctan x dx$ $(6).\int_0^{0.4}\ln\left(1+x^2\right)dx$

$(7).\int_0^{0.25}\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^6}}$ $(8).\int_0^{0.2}\dfrac{\ln(1+t)}{t}dt$

៥. ដោយប្រើស៊េរីតៃល័រគណនាតម្លៃប្រហែលនៃអាំងតេក្រាលដោយយកលម្អៀងក្រោយក្បៀស 10^{-3} ដូចខាងក្រោម៖

$(1).\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}dx$ $\qquad$ $(2).\int_0^{\frac{1}{2}} \tan^{-1}x\,dx$

$(3).\int_0^{1} x\cos x\,dx$ $\qquad$ $(4).\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\tan^{-1}x\,dx$

៦. ចូរបង្ហាញស៊េរីខាងក្រោម៖

$$(1).\ \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}=x-\frac{4}{3}x^3+\frac{22}{15}x^5-\cdots$$

$$(2).\ \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)=2\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots\right)$$

$$(3).\ \tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)=3\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots\right)$$

$$(4).\ \cot^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)=\frac{\pi}{2}-3\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots\right)$$

$$(5).\ \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\left(x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\cdots\right)$$

$$(6).\ \tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{\pi}{4}-\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots\right)$$

$$(7).\ \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\cdots\right)$$

$$(8).\ \cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots\right)$$

$$(9).\ \cos^{-1}\left(4x^3-3x\right)=3\left[\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{x^3}{6}+\frac{3}{40}x^5+\cdots\right)\right]$$

$$(10).\ \sec^{-1}\left(\sqrt{1+x^2}\right)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots$$

៧. ចូរកំណត់ស៊េរីហ្វួរីយេនៃអនុគមន៍ $f(x)=2x, 0<x<2\pi$ ដែល $f(x+2\pi)=f(x)$ ។

៨.អនុគមន៍ $f(t)$ កំណត់ដោយ $f(t)=\begin{cases}0\ ,-2<t<0\\ t\ ,\ \ 0<t<2\end{cases}$, $f(t+4)=f(t)$ ។

ចូរកំណត់ស៊េរីហ្វួរីយេនៃអនុគមន៍ $f(t)$ ។

៩. អនុគមន៍ $f\left(x\right)$ កំណត់នៅលើចន្លោះ $0<x<\pi$ ដែល $f\left(x\right)=\begin{cases} x & \text{បើ } 0<x<\dfrac{\pi}{2} \\ \pi-x & \text{បើ } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases}$ ចំពោះរ៉ង់ $x=0$ ទៅ $x=\pi$ ។ ចូរកំណត់ស៊េរីហ្វួរីយេនៃអនុគមន៍ $f\left(x\right)$ ។

១០. អនុគមន៍ $f\left(x\right)$ កំណត់ដោយ៖ $f\left(x\right)=\begin{cases} a & \text{បើ } 0<x<\dfrac{\pi}{3} \\ 0 & \text{បើ } \dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{2\pi}{3} \\ -a & \text{បើ } \dfrac{2\pi}{3}<x<\pi \end{cases}$, $f\left(x+\pi\right)=f\left(x\right)$ ។ កំណត់ស៊េរីហ្វួរីយេនៃអនុគមន៍ $f\left(x\right)$ ។

១១. បើ $f\left(x\right)=x^2,\ -\pi<x<\pi$ និង $f\left(x+2\pi\right)=f\left(x\right)$ ចូរកំណត់ស៊េរីហ្វួរីយេនៃអនុគមន៍ $f\left(x\right)$ ។

១២. អនុគមន៍ $f\left(t\right)$ កំណត់ដោយ $f\left(t\right)=1-t^2,-1<t<1$ និង $f\left(t+2\right)=f\left(t\right)$ ។ កំណត់ស៊េរីហ្វួរីយេនៃ $f\left(t\right)$ ។

១៣. អនុគមន៍ $f\left(x\right)$ កំណត់ដោ $f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{x+\pi}{2} & \text{បើ } -\pi<x<0 \\ \dfrac{x-\pi}{2} & \text{បើ } 0<x<\pi \end{cases}$ និង $f\left(x+2\pi\right)=f\left(x\right)$ ។ កំណត់ស៊េរីហ្វួរីយេ។

១៤.ចូរកំណត់ស៊េរីហ្វួរីយេនៃអនុគមន៍ខួបកំនត់ដោយ $f\left(t\right)=\begin{cases} 1 & \text{បើ } -2<t<-1 \\ 0 & \text{បើ } -1<t<1 \\ -1 & \text{បើ } 1<t<2 \end{cases}$ និង $f\left(t+4\right)=f\left(t\right)$ ។

១៥. គេមានអនុគមន៍ $f\left(x\right)=x^2$, $0<x<2\pi$ និង $f\left(x+2\pi\right)=f\left(x\right)$ ។ ចូរកំណត់ស៊េរីហ្វួរីយេនៃអនុគមន៍ $f\left(x\right)$ ។

១៦. ចូរកំណត់ស៊េរីហ្វួរីយេនៃអនុគមន៍ $f\left(t\right)$ ដែលកំណត់ដោយ $f\left(t\right)=\begin{cases} 0 & \text{បើ } -2<t<0 \\ \dfrac{3t}{4} & \text{បើ } 0<t<4 \end{cases}$ និង $f\left(t+6\right)=f\left(t\right)$ ។

១៧. ចូរពន្លាត e^x ជាស្វ័យគុណនៃ $x-1$ ។

១៨. ចូរពន្លាត $\sqrt{x}$ នៅត្រង់ $x-a$ ។

១៩. ចូរពន្លាត $\sqrt{1+x+2x^2}$ នៅត្រង់ $x-1$ ។

២០. ចូរពន្លាតអនុគមន៍ក្រោម៖

ក. $\cos x$ នៅត្រង់ $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

ខ. $\tan x$ នៅត្រង់ $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

គ. $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$ នៅត្រង់ x ទៅ x^4

ឃ. $\log x$ នៅត្រង់ $\left(x-2\right)$

ង. $\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$ នៅត្រង់ x

ច. x^3-2x^2+3x-5 នៅត្រង់ $\left(x-2\right)$

២១. ចូររកតម្លៃប្រហែលនៃ $\cos 64^0$ ។

២២. ចូរពន្លាត $\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$ នៅត្រង់ x ទៅ x^4 និងរកតម្លៃនៃ $\tan\left(46^0 36'\right)$ ។

២៣. ចូររកស៊េរីនៃអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases}-1 & \text{បើ } -\pi<x<0\\ 1 & \text{បើ } 0<x<\pi\end{cases}$ ដែល $f(x+2\pi)=f(x)$ ។

២៤. ចូររកស៊េរីនៃអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases}-\frac{\pi}{4} & \text{បើ } -\pi<x<0\\ \frac{\pi}{4} & \text{បើ } 0<x<\pi\end{cases}$ និង $f(-\pi)=f(0)=f(\pi)=0$

ហើយ $f(x)=f(x+2\pi),\forall x$ រួចបង្ហាញថា $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots$ ។

២៥. ចូររកស៊េរីនៃស៊ីនុសនៃផលគុណ x ជាមួយអនុគមន៍ $f(x)$ នៅក្នុងចន្លោះ $(0,\pi)$ ដែល

$f(x)=\begin{cases}0 & \text{បើ } 0<x<\frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{2} & \text{បើ } \frac{\pi}{2}<x<\pi\end{cases}$ រួចបង្ហាញថា $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots=\frac{\pi}{4}$ ។

២៦. បើ $f(x)=\begin{cases}0 & \text{បើ } 0<x<\frac{\pi}{2}\\ \pi-x & \text{បើ } \frac{\pi}{2}<x<\pi\end{cases}$ ។ បង្ហាញថា៖

(i) $f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\sin x-\frac{1}{3^2}\sin 3x+\frac{1}{5^2}\sin 5x-\dots\right)$

(ii) $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}\cos 2x+\frac{1}{3^2}\cos 6x+\frac{1}{5^2}\cos 10x+\dots\right)$

មេរៀនទី២៖ អនុគមន៍ច្រើនអថេរ

២.១. អនុគមន៍ទូទៅ

ក.និយមន័យ៖ គេឱ្យដែនកំណត់ $D \subset \mathbb{R}^n$ ។ អនុគមន៍ច្រើនអថេរជាអនុវត្តន៍ f ពី D ទៅ $\mathbb{R}$ ដែលកំណត់ដោយ៖

$$D \subset \mathbb{R}^n$$

$$f : D \to \mathbb{R}$$

$$(x, y, z, ..., t) \mapsto Z = f(x, y, z, ..., t)$$

⊕ ក្នុងករណី $n = 2$ គេបាន $D \subset \mathbb{R}^2$

$$f : D \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto z = f(x, y)$$

ហៅថា **អនុគមន៍ពីរអថេរ**។

⊕ ក្នុងករណី $n = 3$ គេបាន $D \subset \mathbb{R}^3$

$$f : D \to \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \mapsto z = f(x, y, z)$$

ហៅថា **អនុគមន៍បីអថេរ**។

ខ. ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍

ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $z = f(x, y, z, ..., t)$ គឺជាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកនៅក្នុងប្លង់ដែលគ្រប់ចំណុច $(x, y, ..., t)$ នោះគេបានដែនកំនត់នៃ z កំណត់សរសេរដោយ $\boxed{D = \{\forall (x, y, ..., t) \in \mathbb{R}^n\}}$ z ត្រូវបានកំណត់។

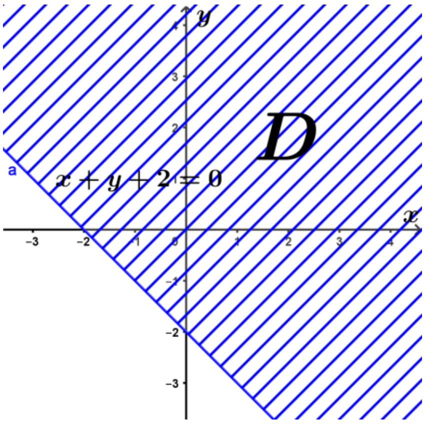
ឧទាហរណ៍១៖ ចូររកដែនកំណត់នៃ $z = \ln(x + y + 2)$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន៖ z មានន័យ នោះគេបាន $x + y + 2 > 0$

ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍ $x + y + 2 = 0$

x	0	-2
y	-2	0



រូបទី២.១

ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃ $z=\ln(x+y+2)$ គឺជាផ្នែកធូតនៃប្លង់ដែលមាន(នៅលើបន្ទាត់ $x+y+2=0$)។

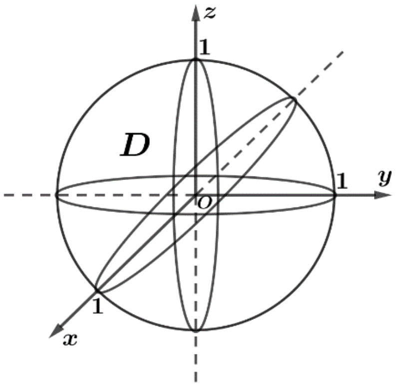
ឧទាហរណ៍២៖ ចូររកដែនកំណត់នៃ $z=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន៖ z មានន័យលុះត្រាតែ $1-x^2-y^2-z^2\geq 0$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\leq 1$$

តែ $x^2+y^2+z^2=1$ ដែលមានក្រាហ្វជាស្វ៊ែរហើយមានផ្ចិត O កាំ R ស្មើ1។



រូបទី២.២

ដូចនេះដែនកំណត់នៃ $z=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$

គឺជាផ្ទៃក្រឡានៅក្នុងស្វ៊ែរដែលមានផ្ចិត O និងកាំ $R=1$។

គ.លីមីតនៃអនុគមន៍តាមនិយមន័យ

១. និយមន័យ៖ បើ $z=f(x,y)$ មានលីមីត L នៅពេលដែលចំណុច $M(x,y)$ ខិតទៅរក $M_0(x_0,y_0)$ កំណត់ដោយ៖

(i)

$$\lim_{M(x,y)\to M_0(x_0,y_0)} f(x,y)=L \text{ ឬ } \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=L \ (\text{រក}\,\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0,\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\begin{cases}0<|x-x_0|<\alpha\\ 0<|y-y_0|<\alpha\end{cases}\Rightarrow|f(x,y)-L|<\varepsilon$$

(ii). ករណី $L=\pm\infty$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=+\infty \Leftrightarrow \forall A>0,\exists\alpha>0,\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\begin{cases}0<|x-x_0|<\alpha\\ 0<|y-y_0|<\alpha\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x,y)>A$$

(រក α ជាអនុគមន៍ A)

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=-\infty \Leftrightarrow \forall A>0,\exists \alpha>0,\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\begin{cases}0<|x-x_0|<\alpha\\ 0<|y-y_0|<\alpha\end{cases} \Rightarrow f(x,y)<-A$$

(រក α ជាអនុគមន៍ A)

(iii).ករណីត្រង់វ៉ែស៊ីណានៃ $\pm\infty$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} f(x,y)=L \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0,\exists B>0,\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\begin{cases}x>B\\ y>B\end{cases} \Rightarrow |f(x,y)-L|<\varepsilon$$

(រក B ជាអនុគមន៍ ε)

$$\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}} f(x,y)=L \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0,\exists B>0,\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\begin{cases}x<-B\\ y<-B\end{cases} \Rightarrow |f(x,y)-L|<\varepsilon$$

(រក B ជាអនុគមន៍ ε)

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} f(x,y)=+\infty \Leftrightarrow \forall A>0,\exists B>0,\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\begin{cases}x>B\\ y>B\end{cases} \Rightarrow f(x,y)>A$$

(រក B ជាអនុគមន៍ A)

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} f(x,y)=-\infty \Leftrightarrow \forall A>0,\exists B>0,\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\begin{cases}x>B\\ y>B\end{cases} \Rightarrow f(x,y)<-A$$

(រក B ជាអនុគមន៍ A)

$$\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}} f(x,y)=+\infty \Leftrightarrow \forall A>0,\exists B>0,\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\begin{cases}x<-B\\ y<-B\end{cases} \Rightarrow f(x,y)>A$$

(រក B ជាអនុគមន៍ A)

$$\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}} f(x,y)=-\infty \Leftrightarrow \forall A>0,\exists B>0,\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\begin{cases}x<-B\\ y<-B\end{cases} \Rightarrow f(x,y)<-A$$

(រក B ជាអនុគមន៍ A)

ឧទាហរណ៍៣៖ ដោយប្រើនិយមន័យបង្ហាញថា $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ y\to2}} \frac{3x-4y+2}{5}=-\frac{3}{5}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បើ $\varepsilon>0$ យើងរក $\alpha>0,\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\begin{cases}0<|x-1|<\alpha\\ 0<|y-2|<\alpha\end{cases}$

$$\Rightarrow \left|\frac{3x-4y+2}{5}+\frac{3}{5}\right|<\varepsilon \ (1)$$

តែ $\left|\frac{3x-4y+2}{5}+\frac{3}{5}\right|=\left|\frac{3x-4y+5}{5}\right|$

$$=\left|\frac{3(x-1)+(y-2)(-4)}{5}\right|\le\left|\frac{3(x-1)}{5}\right|+\left|-\frac{4}{5}(y-2)\right|$$

$$\le\frac{3}{5}|x-1|+\frac{4}{5}|y-2|$$

ដើម្បីឱ្យលក្ខខណ្ឌ (1) ខាងលើយើងគ្រាន់តែយក $\frac{3}{5}|x-1|+\frac{4}{5}|y-2|<\varepsilon$

ឬ $\begin{cases}\frac{3}{5}|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}\\ \frac{4}{5}|y-2|<\frac{\varepsilon}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x-1|<\frac{5\varepsilon}{6}\\ |y-2|<\frac{5\varepsilon}{8}<\frac{5\varepsilon}{6}\end{cases}$

នៅក្នុងករណីនេះយើងយក $\alpha=\frac{5\varepsilon}{6}\Rightarrow\lim\limits_{\substack{x\to1\\ y\to2}}\frac{3x-5y+2}{5}=-\frac{3}{5}$ ។

ឧទាហរណ៍៤៖ បង្ហាញថា $\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}}\sqrt[3]{\frac{3}{2x+3y-4}}=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

បើ $\varepsilon>0$ យើងរក $B>0,\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\begin{cases}x<-B\\ y<-B\end{cases}$

$$\Rightarrow\left|\sqrt[3]{\frac{3}{2x+3y-4}}\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow\left|\sqrt[3]{\frac{3}{2x+3y-4}}\right|^3<\varepsilon^3$$

$$\Rightarrow\frac{3}{|2x+3y-4|}<\varepsilon^3$$

$$\Rightarrow-(2x+3y-4)>\frac{3}{\varepsilon^3}$$

$$\Rightarrow 2x+3y<4-\frac{3}{\varepsilon^3}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x<\frac{1}{2}\left(4-\frac{3}{\varepsilon^3}\right)\\ 3y<\frac{1}{2}\left(4-\frac{3}{\varepsilon^3}\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{4}\left(\frac{3}{\varepsilon^3}-4\right) < \frac{-1}{6}\left(\frac{3}{\varepsilon^3}-4\right) \\ y < -\frac{1}{6}\left(\frac{3}{\varepsilon^3}-4\right) \end{cases}$$

នៅក្នុងករណីយើងគ្រាន់តែយក $B=\frac{1}{6}\left(\frac{3}{\varepsilon^3}-4\right) \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to-\infty \\ y\to-\infty}} \sqrt[3]{\frac{3}{2x+3y-4}}=0$ ។

ឧទាហរណ៍៥៖ បង្ហាញថា $\lim\limits_{\substack{x\to-\infty \\ y\to-\infty}} \sqrt[5]{5-4x-3y}=+\infty$ ។

ដំណោះស្រាយ

បើ $A>0$ យើងរក $B>0$,$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, \begin{cases} x<-B \\ y<-B \end{cases}$

$$\Rightarrow f(x,y)>A$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[5]{5-4x-3y}>A$$

$$\Leftrightarrow 5-4x-3y>A^5$$

$$\Leftrightarrow 4x+3y<5-A^5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x<\frac{1}{2}\left(5-A^5\right) \\ 3y<\frac{1}{2}\left(5-A^5\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<\frac{1}{8}\left(5-A^5\right) \\ y<\frac{1}{6}\left(5-A^5\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<-\frac{1}{8}\left(A^5-5\right) \\ y<-\frac{1}{6}\left(A^5-5\right)<-\frac{1}{8}\left(A^5-5\right) \end{cases}$$

នៅក្នុងករណីនេះយើងគ្រាន់តែយក $B=\frac{1}{8}\left(A^5-5\right) \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to-\infty \\ y\to-\infty}} \sqrt[5]{5-4x-3y}=+\infty$ ។

២.លីមីតរាងមិនកំណត់

ចំពោះទម្រង់នេះយើងគណនាវាដូចនឹងអនុគមន៍មួយអថេរដែរ។

ឧទាហរណ៍៦៖ គណនាលីមីត $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{\cos(2x-y)-1}{y^2-4xy+4x^2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងបាន៖

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{\cos(2x-y)-1}{y^2-4xy+4x^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{-2\sin^2\left(\frac{2x-y}{2}\right)}{(y-2x)^2}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} -2\left[\frac{\sin\left(\frac{2x-y}{2}\right)}{\left(\frac{2x-y}{2}\right)}\times\frac{1}{2}\right]^2 = -2\times\frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\cos(2x-y)-1}{y^2-4xy+4x^2} = -\frac{1}{2}$ ។

ឧទាហរណ៍៧៖ គណនាលីមីត $\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to 3}} \left(\frac{x-2y}{x+3y}\right)^{\frac{x^2y}{3x-2y}}$ ទម្រង់ 1^∞ ។

ដំណោះស្រាយ

$$\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to 3}} \left(\frac{x-2y}{x+3y}\right)^{\frac{x^2y}{3x-2y}} = \lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to 3}} \left(1+\frac{x-2y}{x+3y}-1\right)^{\frac{x^2y}{3x-2y}}$$

$$= \lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to 3}} \left(1+\frac{x-2y-x-3y}{x+3y}\right)^{\frac{x^2y}{3x-2y}}$$

$$= \lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to 3}} \left(1+\frac{-5y}{x+3y}\right)^{\frac{x^2y}{3x-2y}}$$

$$= \lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to 3}} \left[\left(1+\frac{1}{\left(-\frac{x+3y}{5y}\right)}\right)^{-\frac{x+3y}{5y}}\right]^{\frac{-5y}{x+3y}\times\frac{x^2y}{3x-2y}}$$

$$= \lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to 3}} e^{-\frac{5x^2y^2}{x^2\left(1+\frac{3y}{x}\right)\left(3-\frac{3y}{x}\right)}} = e^{-\frac{45}{3}} = e^{-15}$$

ដូចនេះ $\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to 3}} \left(\frac{x-2y}{x+3y}\right)^{\frac{x^2y}{3x-2y}} = e^{-15}$ ។

ឧទាហរណ៍៨៖ គណនាលីមីត $\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}} (\cos xy)^{\frac{x}{\sin^2 y}}$ ទម្រង់ 1^∞ ។

ដំណោះស្រាយ

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}} (\cos xy)^{\frac{x}{\sin^2 y}} = \lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}} (1-1+\cos xy)^{\frac{x}{\sin^2 y}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to3\\y\to0}}\left(\left[1+\left(-2\sin^2\frac{xy}{2}\right)\right]^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{xy}{2}}}\right)^{-2\sin^2\frac{xy}{2}\times\frac{x}{\sin^2 y}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to3\\y\to0}} e^{-2\frac{\sin^2\frac{xy}{2}}{\left(\frac{xy}{2}\right)^2}\times\left(\frac{xy}{2}\right)^2\times\frac{y^2}{\sin^2 y}\times\frac{x}{y^2}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to3\\y\to0}} e^{-2\times\frac{x^2y^2}{4}\times\frac{x}{y^2}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to3\\y\to0}} e^{-\frac{x^3}{2}}=e^{-\frac{27}{2}}$$

ដូចនេះ $\lim_{\substack{x\to3\\y\to0}}(\cos xy)^{\frac{x}{\sin^2 y}}=e^{-\frac{27}{2}}$ ។

ឃ. ភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $z=f(x,y)$

បើ $Z=f(x,y)$ ជាប់ត្រង់ចំណុច $M_0(x_0,y_0)$ បើ $Z=f(x,y)$ មានលីមីតត្រង់ (x_0,y_0) កំណត់សរសេរដោយ៖

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

ឧទាហរណ៍៩៖ សិក្សាភាពជាប់ Z ត្រង់ $(0,0)$ ចំពោះ $Z=f(x,y)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{y} & \text{បើ } y\neq0\\ 0 & \text{បើ } y=0\end{cases}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន៖ $-1\le\sin\frac{1}{y}\le1,\forall y\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow\sin\frac{1}{y}$ ទំលលើចន្លោះ -1 និង 1

$\Rightarrow\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} x\sin\frac{1}{y}=0=f(0,0)$

ដូចនេះ $f(x,y)=x\sin\frac{1}{y}$ ជាប់នៅត្រង់ចំណុច $(0,0)$ ។

ឧទាហរណ៍១០៖ សិក្សាភាពជាប់ត្រង់ $(0,0)$ នៃអនុគមន៍ $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & \text{បើ } x^2+y^2\neq0\\ 0 & \text{បើ } x^2+y^2=0\end{cases}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$ មានទម្រង់ $\frac{0}{0}$

តាង $y=kx\,,x\to 0\Leftrightarrow y\to 0$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x(kx)}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

+ ករណីទី១៖ បើ $k=0\ \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$

$\Rightarrow f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ ជាប់នៅត្រង់ $(0,0)$

+ ករណីទី២៖ បើ $k\neq 0\neq f(0,0)\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}\neq 0\neq f(0,0)$

ដូចនេះ $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ មិនជាប់នៅត្រង់ $(0,0)$ ទេ។

២.២. ដេរីវេដោយផ្នែកនៃអនុគមន៍ច្រើនអថេរ $z=f(x,y)$

ក. និយមន័យ៖ ដេរីវេដោយផ្នែកនៃអនុគមន៍ $z=f(x,y)$ ត្រង់ចំណុច (x_0,y_0) ធៀបនឹង x កំណត់ដោយ៖

$$z'_x=f'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

ហើយដេរីវេដោយផ្នែកនៃអនុគមន៍ $z=f(x,y)$ ធៀបនឹង y កំណត់ដោយ៖

$$z'_y=f'_y=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

ឧទាហរណ៍១១៖ ដោយប្រើនិយមន័យចូររកដេរីវេដោយផ្នែកនៃ $z=5x^2-3y^2+2xy$ ត្រង់ចំណុច $(2,3)$។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន៖

$$z'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x,3)-f(2,3)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[5(2+\Delta x)^2-3\cdot 3^2+2(2+\Delta x)\cdot 3\right]-\left[5\cdot 2^2-3\cdot 3^2+2\cdot 2\cdot 3\right]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{5+26\Delta x+5(\Delta x)^2-5}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(26+5\Delta x)}{\Delta x}=26$$

ដូចនេះ $z'_x = 26$ ។

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(2,3+\Delta y) - f(2,3)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\left[5(2)^2 - 3\cdot(3+\Delta y)^2 + 2\cdot 2(3+\Delta y)\right] - \left[5\cdot 2^2 - 3\cdot 3^2 + 2\cdot 2\cdot 3\ \right]}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{20 - 27 - 18\Delta y - 3(\Delta y)^2 + 12 + 4\Delta y - 5}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{5 - 14\Delta y - 3(\Delta y)^2 - 5}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} -\frac{\Delta y(14 + 3\Delta y)}{\Delta y} - 14$$

ដូចនេះ $z'_y = -14$ ។

ឧទាហរណ៍១២៖ ចូររកដេរីវេដោយផ្នែកនៃ $z = \sqrt{3x^2 + 4y^2 + 5}$ នៅត្រង់ចំណុច $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន៖

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(\Delta x - 1, \frac{1}{2}\right) - f\left(-1, \frac{1}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{3(\Delta x - 1)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5} - \sqrt{3(-1)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{3(\Delta x)^2 - 6\Delta x + 3 + 6} - \sqrt{9}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{3(\Delta x)^2 - 6\Delta x + 9} - 3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(\Delta x)^2 - 6\Delta x + 9 - 9}{\Delta x\left(\sqrt{3(\Delta x)^2 - 6\Delta x + 9} + 3\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x - 6}{\sqrt{3(\Delta x)^2 - 6\Delta x + 9} + 3} = -\frac{6}{6} = -1$$

ដូចនេះ $z'_x = -1$ ។

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f\left(-1, \frac{1}{2} + \Delta y\right) - f\left(-1, \frac{1}{2}\right)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\sqrt{3(-1)^2 + 4\left(\frac{1}{2} + \Delta y\right)^2 + 5} - \sqrt{3(-1)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\sqrt{9 + 4\Delta y + 4(\Delta y)^2} - 3}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{4\Delta y + 4(\Delta y)^2}{\Delta y\left(\sqrt{9 + 4\Delta y + 4(\Delta y)^2} + 3\right)}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{4 + 4\Delta y}{\sqrt{9 + 4\Delta y + 4(\Delta y)^2} + 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

ដូចនេះ $z'_y = \frac{2}{3}$ ។

ខ. ការគណនាដេរីវេដោយផ្នែកនៃអនុគមន៍ច្រើនអថេរ $Z = f(x, y, z, \cdots, t)$

គេកំណត់ដេរីវេដោយផ្នែកនៃអនុគមន៍ z កំណត់ដោយ៖

⊕ ធៀបនឹង x ៖ $Z'_x = f'_x = \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$ (យក x ជាអញ្ញាត និងផ្សេងទៀតជាចំនួនថេរ)

⊕ ធៀបនឹង y ៖ $Z'_y = f'_y = \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$ (យក y ជាអញ្ញាត និងផ្សេងទៀតជាចំនួនថេរ)

⊕ ធៀបនឹង z ៖ $Z'_z = f'_z = \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}$ (យក z ជាអញ្ញាត និងផ្សេងទៀតជាចំនួនថេរ)

....

....

⊕ ធៀបនឹង t ៖ $Z'_t = f'_t = \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t}$ (យក t ជាអញ្ញាត និងផ្សេងទៀតជាចំនួនថេរ)

ឧទាហរណ៍១៣៖ គណនាដេរីវេដោយផ្នែកនៃអនុគមន៍ $Z = \log(xy^2z^3)$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមានដេរីវេដោយផ្នែក៖

⊕ ធៀបនឹង x

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\log\left(xy^2z^3\right)\right]$$

$$=\frac{y^2z^3}{xy^2z^3\ln 10}=\frac{1}{x\ln 10}$$

⊕ ធៀបនឹង y

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\log xy^2z^3\right)$$

$$=\frac{2xyz^3}{xy^2z^3\ln 10}=\frac{2}{y\ln 10}$$

⊕ ធៀបនឹង z

$$\frac{\partial Z}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\log xy^2z^3\right)$$

$$=\frac{3xy^2z^2}{xy^2z^3\ln 10}=\frac{3}{z\ln 10}$$

ឧទាហរណ៍១៤៖ គណនាដេរីវេដោយផ្នែកនៃអនុគមន៍ $Z=\sqrt{3x^2+4y^2+5}$ ត្រង់ចំណុច $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងបាន៖

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{6x}{2\sqrt{3x^2+4y^2+5}}=\frac{3x}{\sqrt{3x^2+4y^2+5}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Z}{\partial x}\left(-1,\frac{1}{2}\right)=\frac{3(-1)}{\sqrt{3(-1)^2+4\left(\frac{1}{2}\right)^2+5}}=-1$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=\frac{8y}{2\sqrt{3x^2+4y^2+5}}=\frac{4y}{\sqrt{3x^2+4y^2+5}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Z}{\partial y}\left(-1,\frac{1}{2}\right)=\frac{4\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3(-1)^2+4\left(\frac{1}{2}\right)^2+5}}=\frac{2}{3}$$

គ.កំណើនដោយផ្នែក និងកំណើនសរុបនៃអនុគមន៍ច្រើនអថេរ $Z=f(x,y)$

កំណើនដោយផ្នែកនៃអនុគមន៍ $Z=f(x,y)$ កំណត់ដោយ៖

⊕ ធៀបនឹង x ៖ $\boxed{\Delta x\cdot Z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}$

⊕ ធៀបនឹង y ៖ $\boxed{\Delta y\cdot Z=f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}$

$\oplus$ កំណើនសរុបនៃអនុគមន៍ z ធៀបនឹង x និង y ៖

$$\boxed{\Delta Z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)}$$

ឧទាហរណ៍១៥៖ ចូរកំណត់កំណើនអនុគមន៍ដោយផ្នែក និងសរុបនៃ $Z = 3xy - 4$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមានកំណើនដោយផ្នែកធៀបនឹង x នៃអនុគមន៍ z គឺ៖

$$\begin{aligned}\Delta x \cdot Z &= f(x+\Delta x, y) - f(x,y)\\ &= 3(x+\Delta x)\cdot y - 4 - 3xy + 4\\ &= 3y\Delta x\end{aligned}$$

ធៀបនឹង y នៃអនុគមន៍ z គឺ៖

$$\begin{aligned}\Delta y \cdot Z &= f(x, y+\Delta y) - f(x,y)\\ &= 3x(y+\Delta y) - 4 - 3xy + 4\\ &= 3x\Delta y\end{aligned}$$

កំណើនសរុបនៃអនុគមន៍ z គឺ៖

$$\begin{aligned}\Delta Z &= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)\\ &= 3(x+\Delta x)(y+\Delta y) - 4 - 3xy + 4\\ &= 3y\Delta x + 3\Delta x\Delta y + 3x\Delta y\end{aligned}$$

នៅក្នុងករណីនេះបើ $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$

$$\Rightarrow \Delta x \cdot Z \to 0,\ \Delta y \cdot Z \to 0, \Delta Z \to 0$$

ឃ. ឌីផេរ៉ង់ស្យែលសរុបនៃអនុគមន៍ច្រើនអថេរ $Z = f(x,y)$

យើងមានកំណើនសរុបនៃអនុគមន៍ z គឺ៖

$$\begin{aligned}\Delta Z &= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)\\ &= \left[f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)\right] + \left[f(x, y+\Delta y) - f(x,y)\right]\end{aligned}$$

តែ $f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = \Delta y \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \bar{y})\ (1)$ (ទ្រឹស្តីបទឡាហ្គ្រង់ (Lagrange Theorem))

ដែល y ជាអញ្ញាត និង x ជាចំនួនថេរ $\bar{y} \in (y, y+\Delta y)$

ហើយ $f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = \Delta x \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y)\ (2)$

ដែល x ជាអញ្ញាត y ជាចំនួនថេរ $\bar{x} \in (x, x+\Delta x)$

តាម (1) និង (2) គេបាន៖

$$\Delta Z = \Delta x \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y) + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y}(x, \bar{y})$$

តែ $\Delta x \approx dx, \Delta y \approx dy$ និង $\Delta Z \approx dz$

ដូចនេះឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃ z គឺ $dZ = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$

ជាទូទៅ៖ ឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃអនុគមន៍ $Z = f(x, y, z, ..., t)$ កំណត់ដោយ

$$dZ = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + ... + \frac{\partial f}{\partial t}dt$$

ឧទាហរណ៍១៦៖ គណនាឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃអនុគមន៍ $Z = e^{xy^2}\sin^2 z$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន៖ $dZ = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$

ប៉ុន្តែ $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 e^{xy^2}\sin^2 z$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xye^{xy^2}\sin^2 z$

$\frac{\partial f}{\partial z} = 2e^{xy^2}\sin z\cos z$

$$\Rightarrow dZ = y^2e^{xy^2}\sin^2 zdx + 2xye^{xy^2}\sin^2 zdy + 2e^{xy^2}\sin z\cos zdz$$

$$= e^{xy^2}\sin z\left(y^2\sin zdx + 2xy\sin zdy + 2\cos zdz\right)$$

ង. ដេរីវេតាមទិសនៃអនុគមន៍ $Z = f(x, y)$

យើងយក $P\big|_y^x$ នៅក្នុងប្លង់ (xOy) និង $P'\big|_{y+\Delta y}^{x+\Delta x}$ នៅក្នុងប្លង់ (xOy)

$\Delta \perp PP'H$ មាន៖

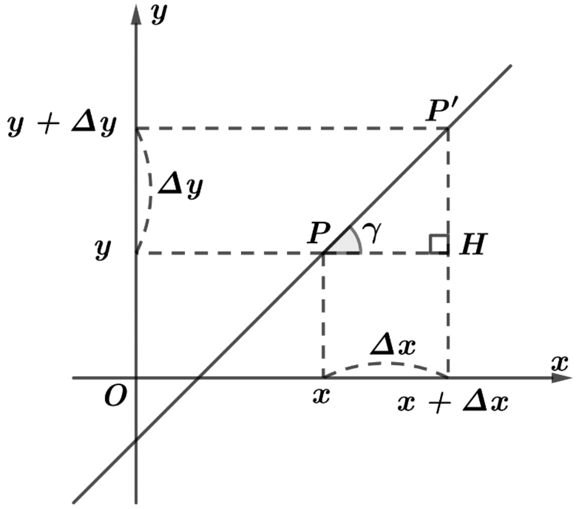
$\overline{PH} = \overline{PP'}\cos\gamma$ ឬ $\Delta x = \Delta\rho\cos\gamma$

$\overline{P'H} = \overline{PP'}\sin\gamma$ ឬ $\Delta y = \Delta\rho\sin\gamma$

ប៉ុន្តែកំណើនសរុបនៃអនុគមន៍ Z គឺ

$$\Delta Z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\Delta\rho\cos\gamma + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta\rho\sin\gamma$$



រូបទី២.៣

$$\Rightarrow \frac{\Delta Z}{\Delta\rho} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\gamma + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\gamma$$

ម្យ៉ាងទៀត $\lim_{\Delta\rho\to 0}\frac{\Delta Z}{\Delta\rho} = \frac{\partial Z}{\partial\rho}$ ហៅថាដេរីវេតាមទិស។

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ z កំណត់ដោយ៖ Z'_ρ ឬ $D_\gamma = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\gamma + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\gamma$

ឧទាហរណ៍១៧៖ ចូររកដេរីវេតាមទិសនៃអនុគមន៍ $Z=\ln\left(x^2-y\right)$ ត្រង់ចំណុច $(4,3)$ នៅក្នុងទិសដៅនៃមុំ 60^0 ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន៖

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x}{x^2-y}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(4,3)=\frac{8}{16-3}=\frac{8}{13}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-1}{x^2-y}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(4,3)=\frac{-1}{16-3}=\frac{-1}{13}$$

នោះគេបាន ដេរីវេតាមទិសនៃអនុគមន៍ Z នៅក្នុងទិសដៅមុំ 60^0 គឺ៖

$$D_{60^0}=\frac{8}{13}\cos 60^0-\frac{1}{13}\sin 60^0$$

$$=\frac{8}{13}\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{13}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{8-\sqrt{3}}{26}$$

ដូចនេះ $D_{60^0}=\dfrac{8-\sqrt{3}}{26}$ ។

ច. ដេរីវេតាមផ្នែកនៃអនុគមន៍បណ្តាក់

ប្រសិនបើ $Z=f(u,v), u=\varphi(x,y)$ និង $v=\psi(x,y)$ នោះអនុគមន៍បណ្តាក់នៃអនុគមន៍ Z ធៀបនឹង u,v កំណត់ដោយ $Z=f\left(\left[\varphi(x,y),\psi(x,y)\right]\right)$ ។

ប៉ុន្តែកំណើនតាមផ្នែកនៃ u និង v ធៀបទៅនឹង x គឺ $\Delta x\cdot u$ និង $\Delta x\cdot v$

កំណើនសរុប Z ធៀបនឹង u,v គឺ $\Delta Z=\dfrac{\partial f}{\partial x}\Delta x\cdot u+\dfrac{\partial f}{\partial y}\Delta y\cdot v$

$$\Rightarrow\frac{\Delta Z}{\Delta x}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x\cdot u}{\Delta x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta x\cdot v}{\Delta x}$$

តែ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta Z}{\Delta x}=\dfrac{\partial Z}{\partial x}$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x.u}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x.v}{\Delta x}=\frac{\partial v}{\partial x}$$

នោះយើងមានដេរីវេតាមផ្នែកនៃអនុគមន៍ Z កំណត់ដោយ៖

⊕ ធៀបទៅនឹង x គឺ $\boxed{\dfrac{\partial Z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}}$

⊕ ធៀបទៅនឹង y គឺ $\boxed{\dfrac{\partial Z}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}}$

ឧទាហរណ៍១៨៖ គណនា $\dfrac{\partial Z}{\partial x}$ និង $\dfrac{\partial Z}{\partial y}$ ចំពោះ $Z=\sqrt[3]{u}-\dfrac{3}{v^3}$ បើ $u=e^{xy^2}\sin y$ និង $v=\log\dfrac{x}{y}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន៖ $\dfrac{\partial Z}{\partial u}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}$, $\dfrac{\partial Z}{\partial v}=\dfrac{9}{v^4}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2e^{xy^2}\sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2xye^{xy^2}\sin y+e^{xy^2}\cos y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{x\ln 10}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{y\ln 10}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}y^2e^{xy^2}\sin y+\frac{9}{v^4}\cdot\frac{1}{x\ln 10}$$

$$=\frac{y^2e^{xy^2}\sin y}{3\sqrt[3]{\left(e^{xy^2}\sin y\right)^2}}-\frac{9}{y\ln 10\log^4\dfrac{x}{y}}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial Z}{\partial y}=\frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}\left(2xye^{xy^2}\sin y+e^{xy^2}\cos y\right)+\frac{9}{v^4}\cdot\frac{-1}{y\ln 10}$$

$$=\frac{e^{xy^2}\left(2xy\sin y+\cos y\right)}{3\sqrt[3]{\left(e^{xy^2}\sin y\right)^2}}-\frac{9}{y\ln 10\log^4\dfrac{x}{y}}$$

ជាទូទៅ៖ បើ $Z=f\left(U,V,\ldots,T\right)$ ដែល $U=\varphi(x,y,\ldots,t),V=\psi(x,y,\ldots,t),\ldots,T=\beta(x,y,\ldots,t)$ នោះគេបានដេរីវេតាមផ្នែកនៃ Z កំណត់ដោយ៖

⊕ ធៀបទៅនឹង x គឺ $\dfrac{\partial Z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial U}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial V}\cdot\dfrac{\partial V}{\partial x}+\ldots+\dfrac{\partial f}{\partial T}\cdot\dfrac{\partial T}{\partial x}$

⊕ ធៀបទៅនឹង y គឺ $\dfrac{\partial Z}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial U}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial V}\cdot\dfrac{\partial V}{\partial y}+\ldots+\dfrac{\partial f}{\partial T}\cdot\dfrac{\partial T}{\partial y}$

....

....

⊕ ធៀបទៅនឹង t គឺ $\dfrac{\partial Z}{\partial t}=\dfrac{\partial f}{\partial U}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial V}\cdot\dfrac{\partial V}{\partial t}+\ldots+\dfrac{\partial f}{\partial T}\cdot\dfrac{\partial T}{\partial t}$

ឧទាហរណ៍១៩៖ គេឱ្យ $Z=V^3-\dfrac{1}{\sqrt[3]{U}}+\sqrt[3]{W}$ ដែល $U=e^{xy^2z^3},V=\sqrt{x^3y^2z}$ និង

$W=\ln x^2y^3z$ ។ គណនា $\frac{\partial Z}{\partial x},\frac{\partial Z}{\partial y}$ និង $\frac{\partial Z}{\partial z}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងបាន៖

$$\frac{\partial Z}{\partial U}=-\frac{1}{3U\sqrt[3]{U}}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial V}=3V^2$$

$$\frac{\partial Z}{\partial W}=\frac{1}{3\sqrt[3]{W^2}}$$

ម្យ៉ាងទៀត

$$\frac{\partial U}{\partial x}=y^2z^3e^{xy^2z^3},\ \frac{\partial U}{\partial y}=2xyz^3e^{xy^2z^3},\frac{\partial U}{\partial z}=3xy^2z^2e^{xy^2z^3}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{3x^2y^2z}{2\sqrt{x^3y^2z}},\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{yx^3z}{\sqrt{x^3y^2z}},\frac{\partial V}{\partial z}=\frac{x^3y^2}{2\sqrt{x^3y^2z}}$$

$$\frac{\partial W}{\partial x}=\frac{2xy^3z}{x^2y^3z}=\frac{2}{x},\frac{\partial W}{\partial y}=\frac{3x^2y^2z}{x^2y^3z}=\frac{3}{y},\frac{\partial V}{\partial z}=\frac{x^2y^3}{x^2y^3z}=\frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial Z}{\partial x}=-\frac{1}{3U\sqrt[3]{U}}\times y^2z^3e^{xy^2z^3}+3V^2\times\frac{3x^2y^2z}{2\sqrt{x^3y^2z}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{W^2}}\times\frac{2}{x}$$

$$=-\frac{1}{3e^{xy^2z^3}}\times y^2z^3e^{xy^2z^3}+3x^3y^2z\times\frac{3x^2y^2z}{2\sqrt{x^3y^2z}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(\ln x^2y^3z\right)^2}}\times\frac{2}{x}$$

$$=-\frac{1}{3}y^2z^3+\frac{9}{2}x^2y^2z\sqrt{x^3y^2z}+\frac{2}{3x\sqrt[3]{\left(\ln x^2y^3z\right)^2}}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial Z}{\partial y}=-\frac{1}{3U\sqrt[3]{U}}\times 2xyz^3e^{xy^2z^3}+3V^2\times\frac{x^3yz}{\sqrt{x^3y^2z}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{W^2}}\times\frac{3}{y}$$

$$=-\frac{1}{3e^{xy^2z^3}\sqrt[3]{e^{xy^2z^3}}}\times 2xyz^3e^{xy^2z^3}+3x^3y^2z\times\frac{x^3yz}{\sqrt{x^3y^2z}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(\ln x^2y^3z\right)^2}}\times\frac{3}{y}$$

$$=-\frac{2xyz^3}{3\sqrt[3]{e^{xy^2z^3}}}+3x^3yz\sqrt{x^3y^2z}+\frac{1}{y\sqrt[3]{\left(\ln x^2y^3z\right)^2}}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial Z}{\partial W}=-\frac{1}{3U\sqrt[3]{U}}\times 3xy^2z^2e^{xy^2z^3}+3V^2\times\frac{x^3y^2}{2\sqrt{x^3y^2z}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{W^2}}\times\frac{1}{z}$$

$$= -\frac{1}{e^{xy^2z^3}\sqrt[3]{e^{xy^2z^3}}} \times xy^2z^2e^{xy^2z^3} + 3x^3y^2z \times \frac{x^3y^2}{\sqrt{x^3y^2z}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{\left(\ln x^2y^3z\right)^2}} \times \frac{1}{z}$$

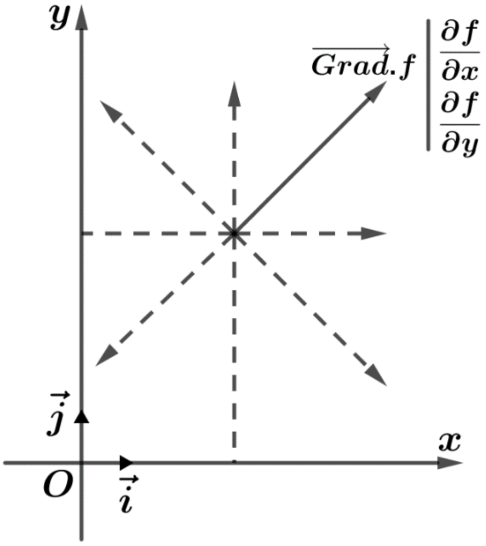
$$= -\frac{xy^2z^2}{\sqrt[3]{e^{xy^2z^3}}} + 3x^3y^2\sqrt{x^3y^2z} + \frac{1}{3z\sqrt[3]{\left(\ln x^2y^3z\right)^2}}$$

២.៣. Gradient នៃអនុគមន៍ច្រើនអថេរ $Z=f(x,y)$

ក. និយមន័យ៖ វ៉ិចទ័រGradientនៃ $z = f(x,y)$ នៅត្រង់ចំណុច $M(x_0, y_0)$ ធៀបនឹងប្លង់ (xOy) កំណត់ដោយ៖

$$\overrightarrow{Grad}\, f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\vec{j}$$

ឬ $\nabla f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\vec{j}$



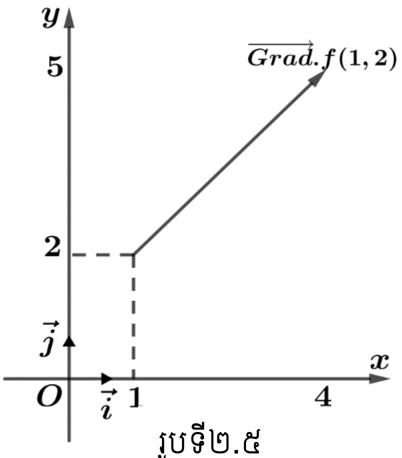
រូបទី២.៤

ឧទាហរណ៍២០៖ ចូររកវ៉ិចGradientទ័រនៃអនុគមន៍ $Z = x^2 + y^2 + xy$ ត្រង់កូអរដោនេ $(1,2)$ ហើយគូសវ៉ិចទ័រនេះនៅក្នុងប្លង់ (xOy) ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន៖ $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2 + 2 = 4$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 2(2) + 1 = 5$



រូបទី២.៥

$$\Rightarrow \overrightarrow{Grad} f\left(1,2\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$$

$$= 4\vec{i} + 5\vec{j}$$

ដូចនេះ $\overrightarrow{Grad} f\left(1,2\right) = 4\vec{i} + 5\vec{j}$ ។

ខ. ទ្រឹស្តីបទ៖

ដេរីវេតាមទិសដៅនៃអនុគមន៍ $Z = f\left(x,y\right)$ គឺជាផលគុណស្កាលែរវាងវ៉ិចទ័រGradients និងវ៉ិចទ័រឯកតាក្នុងទិសដៅ។

សម្រាយបញ្ជាក់

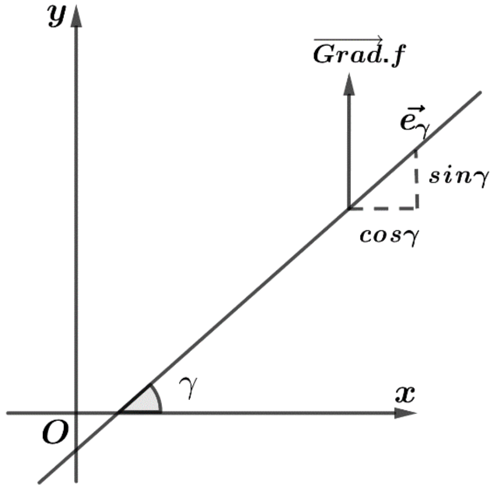
តាង $\overrightarrow{e_\gamma}$ គឺជាវ៉ិចទ័រឯកតា

យើងមាន $\left|\overrightarrow{e_\gamma}\right| = 1$

យក $\overrightarrow{e_\gamma}\Big|_{\sin\gamma}^{\cos\gamma}$ ដែល $\left|\overrightarrow{e_\gamma}\right| = \sqrt{\cos^2\gamma + \sin^2\gamma} = 1$

តែវ៉ិចទ័រGradientsនៃអនុគមន៍ $Z = f\left(x,y\right)$ គឺ

$$\overrightarrow{Grad}.Z \left| \begin{matrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{matrix} \right.$$



$$\Rightarrow \overrightarrow{Grad}.Z = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\gamma + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\gamma = D_\gamma$$ ពិត

រូបទី២.៦

សម្គាល់៖ បើ $\vec{U}\left|\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right., \vec{V}\left|\begin{matrix} c \\ d \end{matrix}\right. \Rightarrow \vec{U}\cdot\vec{V} = ac + bd$ ឬ $\vec{U}\left(a,b\right), \vec{V}\left(c,d\right) \Rightarrow \vec{U}\cdot\vec{V} = ac + bd$ ។

ឧទាហរណ៍២១៖ ចូររកដេរីវេតាមទិសដៅនៃអនុគមន៍ $Z = \sqrt{x^2 + y^2}$ នៅត្រង់ចំណុច $\left(1,\sqrt{3}\right)$ នៅក្នុងវ៉ិចទ័រតាមទិសដៅ $\vec{U} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន៖

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}\left(1,\sqrt{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}\left(1,\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{Grad} f\left(1,\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$$

តែ $\overrightarrow{U}=4\vec{i}-3\vec{j}$ នោះគេបានវ៉ិចទ័រឯកតានៃ z គឺ៖ $\vec{e}=\dfrac{\overrightarrow{U}}{\left|\overrightarrow{U}\right|}=\dfrac{4\vec{i}-3\vec{j}}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{4}{5}\vec{i}-\dfrac{3}{5}\vec{j}$

ដូច្នេះ ដេរីវេតាមទិសដៅនៃអនុគមន៍ z គឺ $D_\gamma=\overrightarrow{Grad}\,f\cdot\overrightarrow{e_\gamma}=\left(\dfrac{1}{2}\vec{i}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right)\left(\dfrac{4}{5}\vec{i}-\dfrac{3}{5}\vec{j}\right)$

$$=\frac{2}{5}-\frac{3\sqrt{3}}{10}=\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$$

ដូចនេះ $D_\gamma=\dfrac{4-3\sqrt{3}}{10}$ ។

ចំណាំ៖ ចំពោះអនុគមន៍បីអថេរ $Z=f(x,y,z)$

$$\begin{aligned}D_\gamma(x_0,y_0,z_0)&=\overrightarrow{Grad}\,f(x_0,y_0,z_0)\cdot\overrightarrow{e_\gamma}\\&=\nabla f(x_0,y_0,z_0)\cdot\overrightarrow{e_\gamma}\end{aligned}$$

(∇ អានថា *Nabla*)

ឧទាហរណ៍២២៖ ចូររកដេរីវេតាមទិសដៅនៃអនុគមន៍ $Z=xy+yz+zx$ ត្រង់ចំណុច $(1,2,3)$ នៅក្នុងវ៉ិចទ័រទិសដៅ $\vec{u}=3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន៖

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y+z\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(1,2,3)=2+3=5$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x+z\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(1,2,3)=1+3=4$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=y+x\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial z}(1,2,3)=1+2=3$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{Grad}\,f(1,2,3)=5\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$$

តែ $\vec{u}=3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$ នោះវ៉ិចទ័រឯកតានៃ $\vec{u}$ គឺ

$$\overrightarrow{e_\gamma}=\frac{\vec{u}}{\left|\vec{u}\right|}=\frac{3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}}{\sqrt{3^2+(-2)^2+4^2}}=\frac{3}{\sqrt{29}}\vec{i}-\frac{2}{\sqrt{29}}\vec{j}+\frac{4}{\sqrt{29}}\vec{k}$$

នោះគេបានដេរីវេតាមទិសដៅនៃ z គឺ៖

$$D_\gamma=\overrightarrow{Grad}\,f\cdot\overrightarrow{e_\gamma}=\left(5\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}\right)\left(\frac{3}{\sqrt{29}}\vec{i}-\frac{2}{\sqrt{29}}\vec{j}+\frac{4}{\sqrt{29}}\vec{k}\right)$$

$$=\frac{15}{\sqrt{29}}-\frac{8}{\sqrt{29}}+\frac{12}{\sqrt{29}}=\frac{19}{\sqrt{29}}$$

ដូចនេះ $D_\gamma=\dfrac{19}{\sqrt{29}}$ ។

២.៤. ដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់ដោយផ្នែកនៃអនុគមន៍ច្រើនអថេរ $Z=f(x,y)$

ដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់ដោយផ្នែកនៃអនុគមន៍ច្រើនអថេរ $Z=f\left(x,y\right)$ កំណត់ដូចខាងក្រោម៖

$$\begin{cases} Z'_x = f'_x = \dfrac{\partial Z}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ Z'_y = f'_y = \dfrac{\partial Z}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$ ហៅថាដេរីវេលំដាប់មួយនៃអនុគមន៍ $Z=f\left(x,y\right)$

\+ ចំពោះដេរីវេលំដាប់ 2 នៃ $Z=f\left(x,y\right)$

$$\begin{cases} f''_{xx} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ f''_{xy} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ f''_{yx} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ f''_{yy} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{cases} \quad 2^2$$

\+ ចំពោះដេរីវេលំដាប់3 នៃ $Z=f\left(x,y\right)$

$$f'''_{xxx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$$

$$f'''_{xxy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$$

$$f'''_{xyx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$$

$$f'''_{yxx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$$

$$f'''_{xyy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$$

$$f'''_{yxy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$$

$$f'''_{yyx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$$

$$f'''_{yyy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

\+ ជាទូទៅដេរីវេលំដាប់ n នៃ $Z=f\left(x,y\right)$ មាន 2^n កំណត់ដោយ៖

$$f^{(n)}_{\underbrace{x\cdot x\ldots x}_{n}}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{(n-1)}f}{\partial x^{(n-1)}}\right)=\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$$

$$f^{(n)}_{\underbrace{x\cdot x\ldots x}_{n-1}y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{(n-1)}f}{\partial x^{(n-1)}}\right)=\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}$$

....

....

$$f^{(n)}_{x\cdot\underbrace{y\cdot y\ldots y}_{n-2}}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{(n-1)}f}{\partial x\partial y^{(n-2)}}\right)=\frac{\partial^n f}{\partial x\partial y^{(n-1)}}$$

$$f^{(n)}_{\underbrace{y\cdot y\cdot y\ldots y}_{n-k}}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{(n-1)}f}{\partial y^{(n-1)}}\right)=\frac{\partial^n f}{\partial y^n}$$

ដែល $\boxed{\dfrac{\partial^n f}{\partial x^k\partial y^{n-k}}=\dfrac{\partial^n f}{\partial y^{n-k}\partial x^k}}$

ឧទាហរណ៍២៣៖ គណនាដេរីវេលំដាប់ 2 នៃអនុគមន៍ $Z=ye^x-3x^3y^2+x^4-y^4$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=ye^x-9x^2y^2+4x^3\Rightarrow\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}=ye^x-18xy^2+12x^2$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}=e^x-18x^2y$$

ម្យ៉ាងវិញទៀត

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=e^x-6x^3y-4y^3\Rightarrow\frac{\partial^2 Z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial Z}{\partial x}\left(e^x-6x^3y-4y^3\right)=e^x-18x^2y$$

និង $\dfrac{\partial^2 Z}{\partial y^2}=-6x^3-12y^2$

ឧទាហរណ៍២៤៖ គេឱ្យ $Z=e^{xy^2z^3}\sin xyz$ ។ ចូររក $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3},\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y},\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x},\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial z^2},\dfrac{\partial^3 f}{\partial z^2\partial y},\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}$ និង $\dfrac{\partial^3 f}{\partial z^3}$ ។

ដំណោះស្រាយ

\+ រក $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}$

យើងបាន

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2z^3e^{xy^2z^3}\sin xyz + yze^{xy^2z^3}\cos xyz$$
$$= yze^{xy^2z^3}\left(yz^2\sin xyz + \cos xyz\right)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^3z^4e^{xy^2z^3}\left(yz^2\sin xyz + \cos xyz\right) + yze^{xy^2z^3}\left(y^2z^3\cos xyz - yz\sin xyz\right)$$
$$= yze^{xy^2z^3}\left(y^3z^5\sin xyz + y^2z^3\cos xyz + y^2z^3\cos xyz - yz\sin xyz\right)$$
$$= y^2z^2e^{xy^2z^3}\left(y^2z^4\sin xyz + 2yz^2\cos xyz - \sin xyz\right)$$
$$\Rightarrow \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = y^3z^3e^{xy^2z^3}\left(y^2z^4\sin xyz + 2yz^2\cos xyz - \sin xyz\right)$$
$$+y^2z^2e^{xy^2z^3}\left(y^3z^5\cos xyz - 2y^2z^3\sin xyz - yz\cos xyz\right)$$
$$= y^3z^3e^{xy^2z^3}\left(y^2z^4\sin xyz + 2yz^2\cos xyz - \sin xyz + y^2z^4\cos xyz - 2yz^2\sin xyz - \cos xyz\right)$$
$$= y^3z^3e^{xy^2z^3}\left[y^2z^4\left(\sin xyz + \cos xyz\right) + 2yz^2\left(\cos xyz - \sin xyz\right) - \sin xyz - \cos xyz\right]$$

២.៥. បរមាធៀបនៃអនុគមន៍ $Z=f(x,y)$

ក. និយមន័យ៖ គេឱ្យ $Z=f(x,y)$ មានវ៉ស៊ីណាត្រង់ (x_0, y_0) គេបាន៖

$(i)\ \forall(x,y)\in V(x_0,y_0),\ f(x,y)\le f(x_0,y_0)$

$\Rightarrow Z = f(x,y)$ មានតម្លៃធំបំផុតត្រង់ (x_0,y_0)

$(ii)\ \forall(x,y)\in V(x_0,y_0),\ f(x,y)\ge f(x_0,y_0)$

$\Rightarrow Z = f(x,y)$ មានតម្លៃតូចបំផុតត្រង់ (x_0,y_0) ឬ (x_0,y_0) ជាចំណុចតូចបំផុតនៃ Z ។

គេកំណត់សរសេរ៖

$Z = f(x,y)$ មានតម្លៃធំបំផុតត្រង់ (x_0,y_0) លុះត្រាតែ

$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)\le 0$

$Z = f(x,y)$ មានតម្លៃតូចបំផុតត្រង់ (x_0,y_0) លុះត្រាតែ

$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)\ge 0$

ឧទាហរណ៍២៥៖ សិក្សាបរិមាធៀបនៃ $Z = x^2 + y^2 + xy + 3$ ត្រង់ $(0,0)$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន៖

$$\Delta f = f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0)$$
$$= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + \Delta x\Delta y + 3 - 3$$
$$= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + \Delta x\Delta y \ge 0$$

ដូចនេះ Z មានតម្លៃតូចបំផុតត្រង់ $(0,0)$ ។

ខ.ទ្រឹស្តីបទ៖គេឱ្យ $Z = f(x,y)$ មានដេរីវេត្រង់ (x_0,y_0) ហើយ $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0$ និង $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$ ។

នោះគេបាន៖

$$(i)\begin{cases}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\right]^2>0\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)<0\end{cases}$$

នោះគេបាន Z មានតម្លៃធំបំផុតត្រង់ (x_0,y_0) ។

$$(ii)\begin{cases}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\right]^2>0\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)>0\end{cases}$$

នោះគេបាន Z មានតម្លៃតូចបំផុតត្រង់ (x_0,y_0) ។

(iii) បើ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\right]^2\le 0$

នោះគេបាន Z មិនអាចសន្និដ្ឋានបាន។

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងមានរូបមន្តស៊េរីតៃល័រលំដាប់ពីរ $Z = f(x,y)$ ត្រង់វ៉ស៊ីណានៃ (x_0,y_0)

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\Delta x f'_x(x_0,y_0)+\Delta y f'_y(x_0,y_0)$$

$$+\frac{1}{2}\left[(\Delta x)^2 f''_{xx}(x_0,y_0)+2\Delta x\Delta y f''_{yx}(x_0,y_0)+(\Delta y)^2 f''_{yy}(x_0,y_0)\right]+\alpha_0(\Delta\rho)^3$$

តែ $\frac{\partial Z}{\partial x}(x_0,y_0)=0$ & $\frac{\partial Z}{\partial y}(x_0,y_0)=0$

$$\Rightarrow \Delta f=\frac{1}{2}\left[(\Delta x)^2 f''_{xx}(x_0,y_0)+2\Delta x\Delta y f''_{xy}(x_0,y_0)+(\Delta y)^2 f''_{yy}(x_0,y_0)\right]+\alpha_0(\Delta\rho)^3$$

+ បើ γ ជាមុំនៅចន្លោះរវាង Δf និង (Ox)

$$\Rightarrow \Delta x=\Delta\rho\cos\gamma,\ \Delta y=\Delta\rho\sin\gamma \text{ និង } \Delta\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

$$\Rightarrow \Delta f=\frac{1}{2}\left[(\Delta\rho)^2\cos^2\gamma\cdot A+2(\Delta\rho)^2\cos\gamma\sin\gamma\cdot B+(\Delta\rho)^2\sin^2\gamma\right]+\alpha_0(\Delta\rho)^3$$

ដែល $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$, $B=f''_{xy}(x_0,y_0)$, $C=f''_{yy}(x_0,y_0)$

$$\Rightarrow \Delta f=\frac{(\Delta\rho)^2}{2A}\left[\cos^2\gamma\cdot A^2+2AB\cos\gamma\sin\gamma+AC\sin^2\gamma+2A\alpha_0\cdot\Delta\rho\right]$$

$$=\frac{(\Delta\rho)^2}{2A}\left[(A\cos\gamma+B\sin\gamma)^2-B^2\sin^2\gamma+AC\sin^2\gamma+2A\alpha_0\cdot\Delta\rho\right]$$

$$=\frac{(\Delta\rho)^2}{2A}\left[(A\cos\gamma+B\sin\gamma)^2+\left(AC-B^2\right)\sin^2\gamma+2A\alpha_0\cdot\Delta\rho\right]$$

+ ករណីទី១៖ ចំពោះ $AC-B^2>0$

(i) បើ $A>0,$ នោះ $\Delta f>0\Rightarrow Z=f(x,y)$ មានតម្លៃតូចបំផុតត្រង់ (x_0,y_0)

(ii) បើ $A<0,$ នោះ $\Delta f<0\Rightarrow Z=f(x,y)$ មានតម្លៃធំបំផុតត្រង់ (x_0,y_0)

+ ករណីទី២៖ ចំពោះ $AC-B^2\le 0$

នោះ Z មិនអាចសន្និដ្ឋានបាន (ពិតចំពោះទ្រឹស្តីបទ (iii))

គ. វិធីសាស្រ្តដើម្បីរកបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ $Z=f(x,y)$

(i) យើងត្រូវតែរក $\frac{\partial f}{\partial x}$ និង $\frac{\partial f}{\partial y}$

(ii) ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}$ (រកឫសនៃ x_0,y_0)

(iii) គណនា $A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0),\ B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0),\ C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$

⊕ បើ $\begin{cases}\Delta>0\\ A<0\end{cases}$ នោះ $Z=f(x,y)$ មានតម្លៃធំបំផុតត្រង់ (x_0,y_0)

⊕ បើ $\begin{cases}\Delta>0\\ A>0\end{cases}$ នោះ $Z=f(x,y)$ មានតម្លៃតូចបំផុតត្រង់ (x_0,y_0)

⊕ បើ $\Delta\le 0$ នោះ $Z=f(x,y)$ មិនអាចសន្និដ្ឋានបាន

ឧទាហរណ៍២៦៖ សិក្សាបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ $Z=x^2+y^2+xy+3$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន៖

+ $\frac{\partial f}{\partial x}=2x+y$, $\frac{\partial f}{\partial y}=2y+x$

+ ដោះស្រាយ $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+y=0\ (1)\\ 2y+x=0\ (2)\end{cases}$

តាម $(1)\Rightarrow y=-2x$

តាម $(2)\Rightarrow -4x+x=0\Rightarrow x=0\Rightarrow y=0$

+ គណនា $A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2, B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=1, C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$

$\Rightarrow \Delta = AC-B^2=4-1^2=3>0$

តែ $A=2>0$

ដូចនេះ Z មានតម្លៃតូចបំផុតត្រង់ $(0,0)$ ។

ឧទាហរណ៍២៧៖ សិក្សាបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ $Z=x^2+y^2+3xy-2x+3y+5$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន៖

+ $\frac{\partial f}{\partial x}=2x+3y-2$, $\frac{\partial f}{\partial y}=2y+3x+3$

+ ដោះស្រាយ $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x+3y-2=0\ (1)\\ 2y+3x+3=0\ (2)\end{cases}$

តាម $(1)\Rightarrow x=1-\frac{3}{2}y$

តាម $(2)\Rightarrow 3-\frac{9}{2}y+2y+3=0$

$\Rightarrow 12-5y=0 \Rightarrow y=\frac{12}{5}$

$\Rightarrow x=1-\frac{18}{5}=\frac{-13}{5}$

+ គណនា $A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2, B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=3, C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$

$\Rightarrow \Delta = AC-B^2=4-3^2=-5<0$ តែ $A=2>0$

ដូចនេះ Z មិនអាចសន្និដ្ឋានបានត្រង់ $\left(-\frac{13}{5},\frac{12}{5}\right)$ ។

ឧទាហរណ៍២៨៖ សិក្សាបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ $Z=x^3+y^3-3xy+2$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន៖

+ $\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3y$, $\frac{\partial f}{\partial y}=3y^2-3x$

+ ដោះស្រាយ $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3x^2-3y=0\\ 3y^2-3x=0\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}x^2-y=0\ (1)\\ y^2-x=0\ (2)\end{cases}$

តាម $(1) \Rightarrow y = x^2$

តាម $(2) \Rightarrow x^4 - x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^3 - 1\right) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ ឬ $x = 1$

$\Rightarrow y = 0, y = 1$

ចំពោះ $(x_0, y_0) = (0,0)$

\+ គណនា

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0,\ B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3,\ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$$

$\Rightarrow \Delta = AC - B^2 = -(-3)^2 = -9 < 0$

ដូចនេះ Z មិនអាចសន្និដ្ឋានបានត្រង់ $(0,0)$ ។

ចំពោះ $(x_0, y_0) = (1,1)$

\+ គណនា $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 6,\ B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = -3,\ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = 6$

$\Rightarrow \Delta = AC - B^2 = 36 - (-3)^2 = 27 > 0$

តែ $A = 6 > 0$

ដូចនេះ Z មានតម្លៃតូចបំផុតត្រង់ $(1,1)$ ។

ឃ. វិធីសាស្ត្រដើម្បីរកបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ $Z = f(x, y, z)$

(i) យើងត្រូវតែរក $\frac{\partial Z}{\partial x}$, $\frac{\partial Z}{\partial y}$ និង $\frac{\partial Z}{\partial z}$

(ii) ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \end{cases}$ (រកឫសនៃ x_0, y_0, z_0)

(iii) គណនា *HESSE (Hessian)* ដេទែមីណង់ត្រង់ (x_0, y_0, z_0) ដូចខាងក្រោម៖

\+ $D_1 = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0)$

\+ $$D_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix}$$

$$+ \quad D_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial z}(x_0,y_0,z_0) \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial y\partial x}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial^2 Z}{\partial y\partial z}(x_0,y_0,z_0) \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial z\partial x}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial^2 Z}{\partial z\partial y}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}(x_0,y_0,z_0) \end{vmatrix}$$

បំពេញលក្ខខណ្ឌដូចខាងក្រោម៖

(1) បើ $D_1 > 0, D_2 > 0, D_3 > 0$ នោះគេបាន Z មានតម្លៃតូចបំផុតត្រង់ (x_0,y_0,z_0)

(2) បើ $D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 < 0$ នោះគេបាន Z មានតម្លៃធំបំផុតត្រង់ (x_0,y_0,z_0) និងករណីផ្សេងទៀត Z មិនអាចសន្និដ្ឋានបាន។

ឧទាហរណ៍២៩៖ សិក្សាបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ $Z = x^2 + 2y^2 - 2xy + 4z^2 + 2xz - 2z$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន៖

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 2x - 2y + 2z$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = 4y - 2x$$

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = 8z + 2x - 2$$

$+$ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 \\ 4y - 2x = 0 \\ 8z + 2x - 2 = 0 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2y - x = 0 \\ 4z + x - 1 = 0 \end{cases}$

តាមដេទែមីណង់គេបាន៖

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 0 + 0 - 2 - 0 - 4 = 2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 2 = -2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0+0-1-0-0=-1$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2+0+0-0-1=1$$

$$\Rightarrow x = \frac{D_x}{D} = \frac{-2}{2} = -1,\ y = \frac{D_y}{D} = -\frac{1}{2}, z = \frac{D_z}{D} = \frac{1}{2}$$

\+ គណនាតាមដេទែមីណង់ *HESSE* (*Hessian*)

$$D_1 = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = 2 \Rightarrow \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\left(-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 8-4=4$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 64-16-32=16$$

ដោយ $D_1 = 2 > 0,\ D_2 = 4 > 0\ , D_3 = 16 > 0$

ដូចនេះ Z មានតម្លៃតូចបំផុតត្រង់ $\left(-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ។

ឧទាហរណ៍៣០៖ សិក្សាបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ $f(x,y,z) = 3x^2 - 4xy + y^2 - yz + 5y^2 - 2xz$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 6x - 4y - 2z$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = 2y - 4x - z$$

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = 10z - y - 2x$$

\+ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 4y - 2z = 0 \\ 2y - 4x - z = 0 \\ 10z - y - 2x = 0 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} -3x + 2y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 2x + y - 10z = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow x = 0, y = 0, z = 0$$

+ គណនាតាមដេទែមីណង់ *HESSE* (*Hessian*)

$$D_1=\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}=6\Rightarrow\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}(0,0,0)=6$$

$$D_2=\begin{vmatrix}6 & -4\\ -4 & 2\end{vmatrix}=12-16=-4$$

$$D_3=\begin{vmatrix}6 & -4 & -2\\ -4 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 10\end{vmatrix}=120-8-8-8-6-160=-70$$

ដោយ $D_1=6>0,\ D_2=-4<0\ ,D_3=-70<0$

ដូចនេះ Z មិនអាចសន្និដ្ឋានបានត្រង់ $(0,0,0)$ ។

ង.វិធីឡាហ្រ្កង់(Lagrange) នៃពហុគុណមិនកំណត់

⊕ ចំពោះអនុគមន៍នៃពីរអថេរ $z=f(x,y)$

តាង $z=f(x,y)$ ជាអនុគមន៍នៃពីរអថេរ x,y និងអថេរត្រូវបានភ្ជាប់ដោយទំនាក់ទំនង $\phi(x,y)=0 \quad (1)$ ។

ដោយផ្អែកលើការរកបរមាមានលក្ខខណ្ឌទៅជាការរកបរមាធម្មតានៃ $z=f(x,y)+\lambda\phi(x,y)$

លក្ខខណ្ឌចាំបាច់នៃបរមាគឺ៖

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial \phi}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial \phi}{\partial y}=0\\ \phi(x,y)=0\end{cases}$$

យើងអាចរក x,y,λ ពីប្រព័ន្ធសមីការនេះ។

ឧទាហរណ៍ទី៣១៖ រកបរមានៃ $f(x,y)=xy$ ដែល x,y ភ្ជាប់ដោយលក្ខខណ្ឌ $2x+3y-5=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $z=xy+\lambda(2x+3y-5)$

លក្ខខណ្ឌចាំបាច់គឺ

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial \phi}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial \phi}{\partial y}=0\\ \phi(x,y)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y+2\lambda=0\\ x+3\lambda=0\\ 2x+3y-5=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{4}\\ y=\dfrac{5}{6}\\ \lambda=-\dfrac{5}{12}\end{cases}$$

ដូចនេះយើងឃើញថា f មានអតិបរមា $f\left(\frac{5}{4},\frac{5}{6}\right)=\frac{25}{24}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៣២៖ រកតម្លៃតូចបំផុត និងធំបំផុតនៃ $z=xy$ លើដែនបិទ $x^2+y^2\le 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកចំណុចក្នុងដែន

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x=0$$

នោះគេបានចំណុចត្រង់ $(0,0)\Rightarrow f(0,0)=0$

ខ. រកតម្លៃតូចបំផុត និងធំបំផុតលើដែន $Z=xy+\lambda\left(x^2+y^2-1\right)$

លក្ខខណ្ឌចាំបាច់៖

$$\begin{cases}\frac{\partial Z}{\partial x}=y+2x\lambda=0\\ \frac{\partial Z}{\partial y}=x+2y\lambda=0\\ x^2+y^2-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=-\frac{1}{2},x=y=\frac{\sqrt{2}}{2},x=y=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \lambda=\frac{1}{2},x=-y=\frac{\sqrt{2}}{2},x=-y=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow Z_{\min}=-\frac{1}{2},\ Z_{\max}=\frac{1}{2}$$

⊕ ចំពោះអនុគមន៍នៃបីអថេរ $z=f(x,y,z)$

តាង $f(x,y,z)$ ជាអនុគមន៍នៃបីអថេរ x,y,z និងអថេរត្រូវបានភ្ជាប់ដោយទំនាក់ទំនងដោយ $\phi(x,y,z)=0\quad(1)$

ឬ $f(x,y,z)$ មានតម្លៃថេរ

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0,\frac{\partial f}{\partial y}=0,\frac{\partial f}{\partial z}=0\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0\ (2)$$

តាមផលសងសរុបនៃ (1) ដែល $\frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\phi}{\partial z}dz=0\qquad(3)$

គុណ (3) ដោយ λ និងបូក (2) យើងបាន៖

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\lambda\frac{\partial\phi}{\partial x}dx\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}dy+\lambda\frac{\partial\phi}{\partial y}dy\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial z}dz+\lambda\frac{\partial\phi}{\partial z}dz\right)=0\ (3)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial\phi}{\partial x}=0 & (4)\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial\phi}{\partial y}=0 & (5)\\ \dfrac{\partial f}{\partial z}+\lambda\dfrac{\partial\phi}{\partial z}=0 & (6)\end{cases}$$

ដើម្បីបំបាត់ λ ពីសមីការ $(4),(5),(6)$ យើងអាចរកតម្លៃនៃ x,y និង z ដែល $f(x,y,z)$ មានតម្លៃថេរ។ វិធីសាស្ត្រដើម្បីឱ្យបានតម្លៃថេរនៃ $f(x,y,z)$ គឺ ហៅថាវិធីសាស្ត្ររបស់ឡាហ្រ្កង់ នៃមេគុណដែលមិនអាចកំណត់បាន និងសមីការ (3), (4) និង(5)ត្រូវបានគេហៅថាសមីការរបស់ ឡាហ្រ្កង់ ។

ឧទាហរណ៍ទី៣៣៖ រកចំណុចនៅលើប្លង់ $ax+by+cz=p$ ត្រង់អនុគមន៍ $f=x^2+y^2+z^2$ មានតម្លៃអតិបរមា និងរកអប្បបរមានៃ f ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $f=x^2+y^2+z^2 \quad (1)$

$ax+by+cz=p$ ឬ $\phi=ax+by+cz-p \qquad (2)$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial\phi}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial\phi}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial z}+\lambda\dfrac{\partial\phi}{\partial z}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+\lambda a=0\\ 2y+\lambda b=0\\ 2z+\lambda c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{\lambda a}{2}\\ y=-\dfrac{\lambda b}{2}\\ z=-\dfrac{\lambda c}{2}\end{cases}$$

យកតម្លៃ x,y,z ជំនួសក្នុង (2)

$$a\left(-\frac{\lambda a}{2}\right)+b\left(-\frac{\lambda a}{2}\right)+c\left(-\frac{\lambda a}{2}\right)=p$$

$$\Leftrightarrow\lambda\left(a^2+b^2+c^2\right)=-2p\Rightarrow\lambda=\frac{2p}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{ap}{a^2+b^2+c^2}\\ y==\dfrac{bp}{a^2+b^2+c^2}\\ z==\dfrac{cp}{a^2+b^2+c^2}\end{cases}$$

ដូច្នេះ តម្លៃអប្បបរមានៃ $\min f(x,y,z)=\dfrac{a^2p^2}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}+\dfrac{b^2p^2}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}+\dfrac{c^2p^2}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}$

$$=\frac{p^2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}=\frac{p^2}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}$$

ឧទាហរណ៍ទី៣៤៖ រកតម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមានៃ $f(x,y,z)=xy+2z$ នៅលើរង្វង់ជាចំណុចប្រសព្វនៃប្លង់ $x+y+z=0$ និងស្វ៊ែរ $x^2+y^2+z^2=24$ ។

ដំណោះស្រាយ

អនុគមន៍ f ជាប់ និងរង្វង់ជាសំណុំនៃដែនបិទជិតនៅក្នុងវិមាត្របី។ នោះគេបានតម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមាគឺកំណត់។ យើងពិនិត្យមើលចំពោះចំណុចនៃឡាក្រង់

$$L=xy+2z+\lambda(x+y+z)+\mu\left(x^2+y^2+z^2-24\right)$$

ដោយធ្វើដេរីវេដោយផ្នែកទីមួយនៃ L ស្មើទៅនឹងសូន្យ នោះគេបាន៖

$$y+\lambda+2\mu x=0 \qquad (A)$$
$$x+\lambda+2\mu y=0 \qquad (B)$$
$$2+\lambda+2\mu z=0 \qquad (C)$$
$$x+y+z=0 \qquad (D)$$
$$x^2+y^2+z^2-24=0 \qquad (E)$$

យក $(A)-(B)$ គេបាន $(x-y)(1-2\mu)=0$ នោះគេបាន $\mu=\frac{1}{2}, x=y$ ។ យើងធ្វើការវិភាគដូចតទៅ៖

- ករណីទី១៖ បើ $\mu=\frac{1}{2}$ តាម (B) និង (C)

  $x+\lambda+y=0$ និង $2+\lambda+z=0$

  នោះគេបាន $x+y=2+z$ ជំនួសក្នុង (D) គេបាន $z=-1$ និង $x+y=1$

  តាម (E) គេបាន $x^2+y^2=24-z^2=23$

  ដោយ $x^2+y^2+2xy=(x+y)^2=1$

  យើងមាន $2xy=1-23=-22$ និង $xy=-11$

  នោះគេបាន $(x-y)^2=x^2+y^2-2xy$
  $=23+22$
  $=45$

  ដូច្នេះ $x-y=\pm 3\sqrt{5}$ ដោយផ្ទឹមនឹង $x+y=1$

  នោះគេបានពីរចំណុចចំពោះ $\mu=\frac{1}{2}$ គឺ $\left(\frac{(1+3\sqrt{5})}{2},\frac{(1-3\sqrt{5})}{2},-1\right)$ និង $\left(\frac{(1-3\sqrt{5})}{2},\frac{(1+3\sqrt{5})}{2},-1\right)$

  ត្រង់ចំណុចទាំងពីរយើងរក $f(x,y,z)=xy+2z=-11-2=-13$ ។

- ករណីទី២៖ បើ $x=y$ តាម (D) គេបាន $z=-2x$

  តាម (E) គេបាន $6x^2=24\Rightarrow x=\pm 2$

នោះគេបានចំណុច $(2,2,-4)$ និង $(-2,-2,4)$

យើងមាន $f(2,2,-4)=4-8=-4$ និង $f(-2,-2,4)=4+8=12$

ដូចនេះ តម្លៃអតិបរមានៃ f នៅលើរង្វង់គឺ 12

តម្លៃអប្បបរមានៃ f នៅលើរង្វង់គឺ -13 ។

លំហាត់អនុវត្តន៍៖ រកចម្ងាយអតិបរមា និងអប្បបរមានៃចំណុច $(3,4,12)$ ពីស្វ៊ែរ $x^2+y^2+z^2=1$ ។

លំហាត់អនុគមន៍ច្រើនអថេរ

១. ចូររកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

$a.\ f(x,y)=2xy-3x+4y$ $\quad b.\ f(x,y)=\cos\left(x^2-y^2\right)$

$c.\ f(x,y)=\sqrt{25-x^2-y^2}$ $\quad d.\ f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-25}}$

$e.\ f(x,y)=\sin\dfrac{x}{y}$ $\quad f.\ f(x,y)=\dfrac{12}{y^2-x^2}$

$g.\ g(x,y)=\ln\left(x^2-y\right)$ $\quad h.\ g(x,y)=\arcsin\left(y-x^2\right)$

$i.\ g(x,y)=\sqrt{\dfrac{xy}{x^2+y^2}}$ $\quad j.\ g(x,y)=\sqrt{x-2y+4}$

២. ចូររកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម។

$a.\ f(x,y,z)=2xyz-3xz+4yz$

$b.\ g(x,y,z)=\dfrac{1}{x-z}$

$c.\ p(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2-9}$

$d.\ q(x,y,z)=\sqrt{y-z}$

$e.\ F(x,y,z)=\dfrac{10}{1+x^2+y^2+4z^2}$

$f.\ f(x,y,z)=\sqrt{y-x^2}$

$g.\ f(w,x,y,z)=\sqrt{1-w^2-x^2-y^2-z^2}$

៣.លីមីតនៃអនុគមន៍៖ គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 9}} 2020$ $\quad$ 2. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -3}}\left(3x+4y-2\right)$ $\quad$ 3. $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ y\to 3}}\left(4x^2-y^2\right)$

4. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to -1}}\left(xy^8-3x^2y^3\right)$ $\quad$ 5. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to \pi}}\dfrac{\cos xy+\sin xy}{2y}$ $\quad$ 6. $\lim\limits_{\substack{x\to e^2\\ y\to 4}}\ln\sqrt{xy}$

7. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-3xy^2}{x+y}$ $\quad$ 8. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}}\dfrac{10xy-2y^2}{x^2+y^2}$ $\quad$ 9. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\dfrac{xy-1}{1+xy}$

10. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ $\quad$ 11. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}\dfrac{x-y-1}{\sqrt{x-y}-1}$ $\quad$ 12. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\dfrac{3x^2y}{x^2+y^2+5}$

13. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\dfrac{2x^2+y^2}{2xy}$ $\quad$ 14. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}}\dfrac{x^3+y^2}{x^2-y}$ $\quad$ 15. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to 3}}\dfrac{2xy-3}{x^3+4y^3}$

$16.\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{y-x^2}, x\neq 0, y\neq 0$ $17.\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x-y}{x^2+y^2}$ $18.\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\frac{xy-2x}{xy-2y}, x\neq 0, y\neq 0$

$19.\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3+2y^3}{x^2+4y^2}, x\neq 0, y\neq 0$ $20.\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\frac{x^2y^3}{x^2+y^2}$ $21.\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to 2}}\frac{xy+4}{x^2+2y^2}$

$22.\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x+y}{x+2y}$ $23.\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}e^{\frac{-1}{x^2(y-1)^2}}$ $24.\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2x-y}{x^2+y^2}$

៤.លីមីតត្រង់ចំណុចទ័លៈ គណនាលីមីតខាងក្រោមៈ

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 6\\ y\to 2}}\frac{x^2-3xy}{x-3y}$ 2. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -2}}\frac{y^2+2xy}{y+2x}$ 3. $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 1}}\frac{x^2-7xy+12y^2}{x-3y}$

4. $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ y\to 1}}\frac{2x^2-xy-3y^2}{x+y}$ 5. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}}\frac{y^2-4}{xy-2x}$ 6. $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ y\to 5}}\frac{\sqrt{x+y}-3}{x+y-9}$

7. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\frac{\sqrt{y}-\sqrt{x+1}}{y-x-1}$ 8. $\lim\limits_{\substack{x\to 8\\ y\to 8}}\frac{x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}}$

៥. រកសំណុំចំណុចដែលធ្វើឱ្យអនុគមន៍ខាងក្រោមជាប់នៅក្នុង $\mathbb{R}^2$

1. $f(x,y)=x^2+2xy-y^3$ 2. $f(x,y)=\frac{xy}{x^2y^2+1}$

3. $p(x,y)=\frac{4x^2y^2}{x^4+y^2}$ 4. $s(x,y)=\frac{4x^2y^2}{x^2+y^2}$

5. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{y^4-2x^2}{x^2+y^4} & \text{បើ } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{បើ } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 6. $f(x,y)=\frac{2}{x(y^2+1)}$

7. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & \text{បើ } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{បើ } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 8. $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x(y^2-1)}$

៦. លីមីតនៃអនុគមន៍បីអថេរៈ គណនាលីមីតខាងក្រោមៈ

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to \ln 2\\ z\to 3}} ze^{xy}$ 2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1\\ z\to 0}}\ln e^{xz}(1+y)$ 3. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1\\ z\to 1}}\frac{yz-xy-xz-x^2}{yz+xy+xz-y^2}$

4. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1\\ z\to 1}}\frac{x^2+xy-xz-yz}{x-z}$ 5. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1\\ z\to 1}}\frac{xz+5x+yz+5y}{x+y}$ 6. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1\\ z\to 1}}\frac{x-\sqrt{xz}-\sqrt{xy}+\sqrt{yz}}{x-\sqrt{xz}+\sqrt{xy}-\sqrt{yz}}$

៧. ដេរីវេដោយផ្នែកៈ ចូររកដេរីវេទីមួយដោយផ្នែកនៃអនុគមន៍ខាងក្រោមៈ

1. $f(x,y)=3x^2+5y^3$ 2. $f(x,y)=x^2y$ 3. $f(x,y)=3x^2y+2$

4. $f(x,y)=y^8+2x^6+2xy$ 5. $f(x,y)=xe^y$ 6. $f(x,y)=\ln\left(\frac{x}{y}\right)$

7. $f(x,y)=\cos 2xy$ 8. $f(s,t)=\frac{s-t}{s+t}$ 9. $f(w,z)=\frac{w}{w^2+z^2}$

10. $g(x,z)=x\ln(z^2+x^2)$ 11. $s(y,z)=z^2\tan yz$ 12. $F(p,q)=\sqrt{p^2+pq+q^2}$

13. $G(s,t)=\frac{\sqrt{st}}{s+t}$ 14. $h(u,v)=\sqrt{\frac{uv}{u-v}}$ 15. $f(x,y)=x^{2y}$

16. $f(x,y)=\sqrt{x^2y^3}$ 17. $z=\tan(2x-y)$ 18. $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$

៨. ដេរីវេទីពីរដោយផ្នែក៖ គណនាដេរីវេទី២ដោយផ្នែកនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

1. $h(x,y)=x^3+xy^2+1$ 2. $f(x,y)=2x^5y^2+x^2y$ 3. $f(x,y)=x^2y^3$

4. $f(x,y)=(x+3y)^2$ 5. $f(x,y)=y^3\sin 4x$ 6. $f(x,y)=\cos xy$

7. $p(u,v)=\ln(u^2+v^2+4)$ 8. $Q(r,s)=\frac{r}{s}$ 9. $F(r,s)=re^x$

10. $H(x,y)=\sqrt{4+x^2+y^2}$

៩.ដេរីវេដោយផ្នែកដែលមានអញ្ញាតច្រើនជាងពីរចូរគណនាដេរីវេទី១ដោយផ្នែកនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

1. $f(x,y,z)=xy+xz+yz$ 2. $g(x,y,z)=2x^2y-3xz^4+10y^2z^2$

3. $h(x,y,z)=\cos(x+y+z)$ 4. $Q(x,y,z)=\tan xyz$

5. $F(u,v,w)=\frac{u}{v+w}$ 6. $G(r,s,t)=\sqrt{rs+rt+st}$

7. $f(w,x,y,x)=w^2xy^2+xy^3z^2$ 8. $g(w,x,y,z)=\cos(w+x)\sin(y-z)$

9. $h(w,x,y,z)=\frac{wz}{xy}$ 10. $F(w,x,y,z)=w\sqrt{x+2y+3z}$

១០. ចូរគណនាGradientsនៃអនុគមន៍ និងត្រង់ចំណុច P នីមួយៗខាងក្រោម៖

1. $f(x,y)=2+3x^2-5y^2,\quad P(2,-1)$

2. $f(x,y)=4x^2-2xy+y^2,\quad P(-1,-5)$

3. $g(x,y)=x^2-4x^2y-8xy^2,\ P(-1,2)$

4. $p(x,y)=\sqrt{12-4x^2-y^2},\quad P(-1,-1)$

5. $f(x,y)=xe^{2xy},\ P(1,0)$

6. $f(x,y)=\sin(3x+2y),\ P\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$

7. $F(x,y)=e^{-x^2-2y^2},\ P(-1,2)$

8. $h(x,y)=\ln(1+x^2+2y^2),\ P(2,-3)$

១១. ការគណនាដេរីវេតាមទិសដៅជាមួយGradients៖ គណនាដេរីវេតាមទិសដៅនៃអនុគមន៍ត្រង់ចំណុច P ដោយវ៉ិចទ័រតាមទិសដូចខាងក្រោម។ ប្រើវ៉ិចទ័រឯកតាចំពោះវ៉ិចទ័រតាមទិស។

1. $f(x,y)=x^2-y^2\ ,\ P(-1,-3)\ ,\left\langle \frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right\rangle$

2. $f(x,y)=3x^2+y^3\ ,\ P(3,2),\ \left\langle \frac{5}{13},\frac{12}{13}\right\rangle$

3. $f(x,y)=10-3x^2+\frac{y^4}{4},P(2,-3),\ \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$

4. $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-2y},\ P(2,-2)\ ,\left\langle \frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right\rangle$

5. $f(x,y)=13e^{xy}\ ,P(1,0)\ ,\ \langle 5,12\rangle$

6. $f(x,y)=3x^2+2y+5,P(1,2),\langle -3,4\rangle$

7. $h(x,y)=e^{-x-y},P(\ln 2,\ln 3)\ ,\langle 1,1\rangle$

8. $P(x,y)=\ln(4+x^2+y^2),P(-1,2),\langle 2,1\rangle$

9. $f(x,y)=\frac{x}{(x-y)}\ ,P(4,1)\ ,\langle -1,2\rangle$

10. $g(x,y)=\sin\pi(2x-y),\ P(-1,-1),\left\langle \frac{5}{13},-\frac{12}{13}\right\rangle$

១២. *Gradients*នៅក្នុងវិមាត្របី៖ចូរពិចារណានូវអនុគមន៍ f ចំណុច P និងវ៉ិចទ័រឯកតា u ខាងក្រោម៖

ក. គណនា*Gradients*នៃអនុគមន៍ f និងត្រង់ចំណុច P ។

ខ. ចូររកវ៉ិចទ័រឯកតានៅក្នុងកំណើនធំបំផុតតាមទិសនៃ f ត្រង់ចំណុច P ។

គ. ចូររកអត្រាបំប្រែបម្រួលនៃអនុគមន៍នៅក្នុងកំណើនតាមទិសធំបំផុតត្រង់ចំណុច P ។

ឃ. ចូររកដេរីវេតាមទិសនៅត្រង់ចំណុច P នៅក្នុងវ៉ិចទ័រតាមទិសដែលគេឱ្យ។

1. $f(x,y,z)=x^2+2y^2+4z^2+10\ ,P(1,0,4),\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle$

2. $f(x,y,z)=4-x^2+3y^2+\frac{z^2}{2},P(0,2,-1),\left\langle 0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right\rangle$

3. $f(x,y,z)=1+4xyz\ ,P(1,-1,-1),\left\langle \frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right\rangle$

4. $f(x,y,z)=xy+yz+xz+4\ ,\ P(2,-2,1),\left\langle 0,-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle$

5. $f(x,y,z)=1+\sin(x+2y-z),P\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},-\frac{\pi}{6}\right),\left\langle\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right\rangle$

6. $f(x,y,z)=e^{xyz-1},P(0,1,-1),\left\langle-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right\rangle$

7. $f(x,y,z)=\ln\left(1+x^2+y^2+z^2\right),P(1,1,-1),\left\langle\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right\rangle$

8. $f(x,y,z)=\frac{x-z}{y-z},P(3,2,-1),\left\langle\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right\rangle$

១៣. ចូររកចំណុចបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

1. $f(x,y)=1+x^2+y^2$ 2. $f(x,y)=x^2-6x+y^2+8y$

3. $f(x,y)=(3x-2)^2+(y-4)^2$ 4. $f(x,y)=3x^2-4y^2$

5. $f(x,y)=x^4+y^4-16xy$ 6. $f(x,y)=\frac{x^3}{3}-\frac{y^3}{3}+3xy$

7. $f(x,y)=x^4-2x^2+y^2-4y+5$ 8. $f(x,y)=x^2+xy-2x-y+1$

9. $f(x,y)=x^2+6x+y^2+8$ 10. $f(x,y)=e^{x^2y^2-2xy^2+y^2}$

១៤. ចូររកចំណុចបរមាធៀបដោយប្រើដេរីវេទី 2 ខាងក្រោម៖

1. $f(x,y)=4+2x^2+3y^2$ 2. $f(x,y)=(4x-1)^2+(2y+4)^2+1$

2. $f(x,y)=-4x^2+8y^2-3$ 4. $f(x,y)=x^4+y^4-4x-32y+10$

5. $f(x,y)=x^4+2y^2-4xy$ 6. $f(x,y)=xye^{-x-y}$

7. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4x+5}$ 8. $f(x,y)=\arctan xy$

9. $f(x,y)=2xye^{-x^2-y^2}$ 10. $f(x,y)=x^2+xy^2-2x+1$

11. $f(x,y)=\frac{x}{1+x^2+y^2}$ 12. $f(x,y)=\frac{x-1}{x^2+y^2}$

13. $f(x,y)=x^4+4x^2(y-2)+8(y-1)^2$

១៥. ចូររកគ្រប់តម្លៃបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ច្រើនអថេរខាងក្រោម៖

1. $f(x,y)=xe^{-\left(x^2+y^2\right)}$ 2. $f(x,y)=x^2e^{-\left(x^2+y^2\right)}$

3. $f(x,y)=\frac{1}{1+x^2+y^2}$ 4. $f(x,y)=4xy-2x^2-y^4$

5. $f(x,y)=2x^4+y^4-x^2-2y^2$ 6. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

7. $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$

១៦. ចូររកតម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមានៃអនុគន៍ $f(x,y,z)=xyz$ នៅលើស្វ៊ែរ $x^2+y^2+z^2=12$ ។

១៧. ចូររកតម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមានៃអនុគន៍ $x+2y-3z$ នៅផ្នែកខាងលើអេលីបសូអ៊ីត

$x^2+4y^2+9z^2 \le 108$ ។

១៨. ចូររកតម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមានៃអនុគន៍ $f(x,y,z)=x$ ផ្នែកខាងលើខ្សែកោងដែលប្រសព្វនៃប្លង់ $z=x+y$ និងអេលីបសូអ៊ីត $x^2+2y^2+2z^2=8$ ។

១៩.ចូររកតម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមានៃអនុគន៍ $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ នៅលើអេលីបដោយប្រសព្វនៃកោន $z^2=x^2+y^2$ និងប្លង់ $x-2z=3$ ។

២០.ចូររកតម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមានៃអនុគន៍ $f(x,y,z)=4-z$ នៅលើអេលីបដោយប្រសព្វនៃស៊ីឡាំង $x^2+y^2=8$ និងប្លង់ $x+y+z=1$ ។

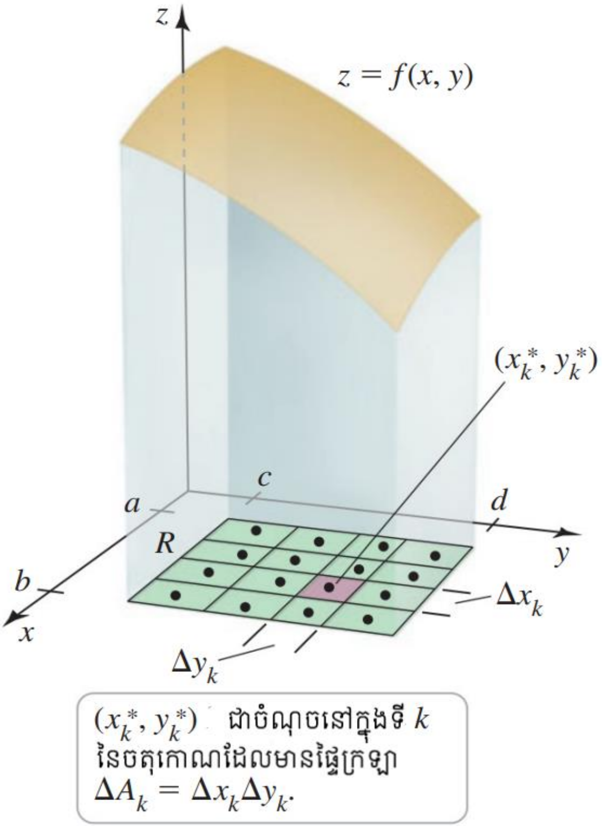
២១.ចូររកតម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមានៃអនុគន៍ $f(x,y,z)=x+y^2z$ ដោយប្រសព្វនៃ $y^2+z^2=2$ និងប្លង់ $z=x$ ។

មេរៀនទី៣៖ ពហុអាំងតេក្រាល

៣.១. អាំងតេក្រាលឌុប

ក. និយមន័យ៖ គេឱ្យអនុគមន៍ច្រើនអថេរ $z = f(x,y)$ មានដែនកំណត់ $R = \{(x,y): a \le x \le b, c \le y \le d\}$ ។

+ គេចែក $R = [a,b] \times [c,d]$ ជា n ចំណែកដោយផ្ទៃក្រឡា $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$ ដែល Δx_k និង Δy_k ជាប្រវែងនៃជ្រុងចតុកោន ។



រូបទី៣.១

+ តាង (x_k^*, y_k^*) ជាដែនរងទៅ k ដែល $1 \le k \le n$ ដូចរូបខាងក្រោម៖

នោះគេបានមាឌនៃប្រអប់ទី k គឺ៖

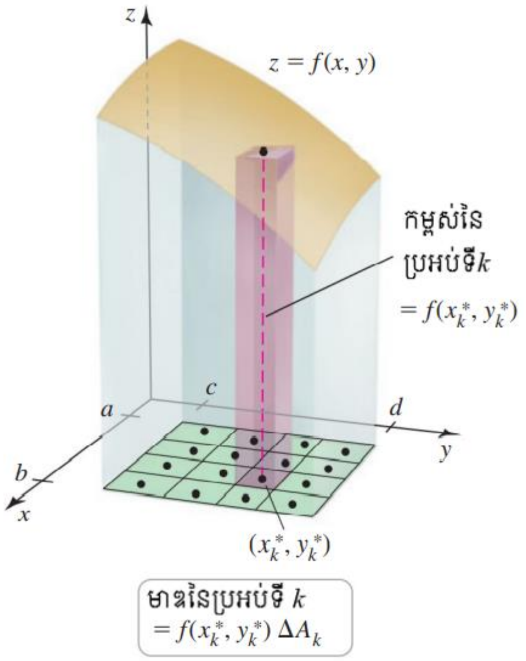
$$f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k = f(x_k^*, y_k^*)\Delta x_k \Delta y_k$$

ផលបូកមាឌនៃ n ប្រអប់កំណត់ដោយតម្លៃប្រហែលមាឌនៃសូលីត

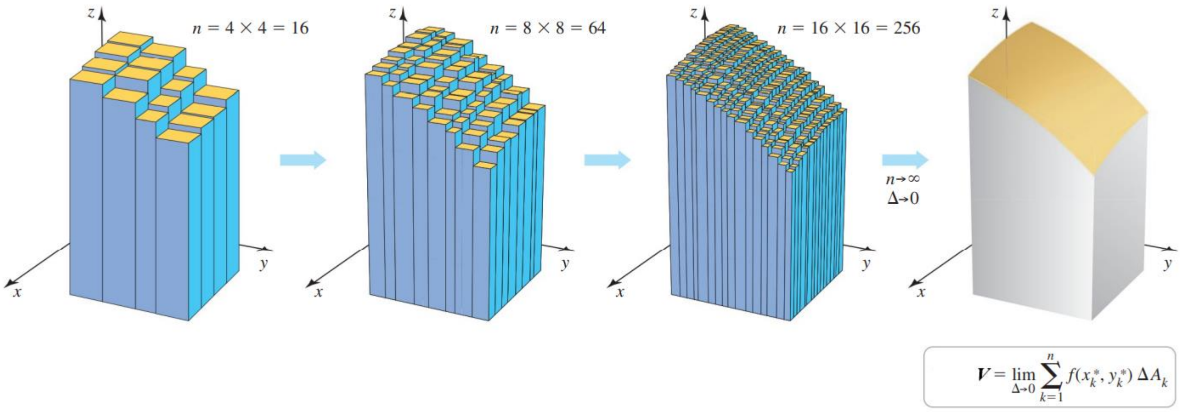
$$V \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$$

តាង Δ ជាប្រវែងធំបំផុតនៃដែនរងរបស់អង្កត់ទ្រូងចតុកោននៅក្នុងបំណែកនីមួយៗ។

បើ $\Delta \to 0$ នោះ $\Delta x_k \to 0$ និងចំនួននៃដែនរងកាន់តែកើនឡើង $(n \to \infty)$ ។ បើយើងធ្វើការប៉ាន់ស្មានដោយផលបូករីម៉ាន់(Remman)មានលីមីត $\Delta \to 0$ នោះគេកំណត់មាឌនៃសូលីតដោយ៖



រូបទី៣.២



រូបទី៣.៣

មាឌ និងអាំងតេក្រាលឌុប

បើ f ជាអនុគមន៍មួយកំណត់នៅលើដែនចតុកោន R នៅក្នុងប្លង់ (xOy) ដែលមានអាំងតេក្រាលនៅលើ R បើ $\lim\limits_{\Delta\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(x_k^*, y_k^*\right)\Delta A_k$ មានគ្រប់ផ្នែកនៃ R និងចំពោះគ្រប់ $\left(x_k^*, y_k^*\right)$ បំណែកទាំងអស់។ ដូចនេះ លីមីតគឺជាអាំងតេក្រាលឌុបនៃ f នៅលើ R កំណត់សរសេរដោយ៖

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*, y_k^*\right)\Delta A_k$$

បើ f មិនអវិជ្ជមាននៅលើ R នោះអាំងតេក្រាលឌុបស្មើនឹងមាឌនៃសូលីតដែលខ័ណ្ឌដោយសូលីត $z = f(x, y)$ និងប្លង់ (xOy) នៅលើ R ។

ខ. លក្ខណៈ

តាង f និង g ជាអនុគមន៍ជាប់នៅលើចន្លោះបិទនៃប្លង់ដែលខ័ណ្ឌដោយដែន R ហើយតាង λ

ជាចំនួនថេរ។

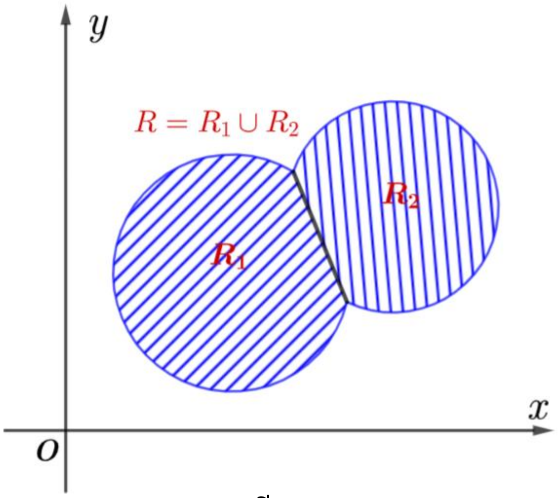
1. $\forall \lambda \in \mathbb{R}: \iint\limits_R \lambda f(x,y)dA = \lambda \iint\limits_R f(x,y)dA$

2. $\iint\limits_R \left[f(x,y) \pm g(x,y) \right] dA = \iint\limits_R f(x,y)dA \pm \iint\limits_D g(x,y)dA$

3. $\iint\limits_R f(x,y)dA \geq 0$ បើ $f(x,y) \geq 0$

4. $\iint\limits_R f(x,y)dA \geq \iint\limits_R g(x,y)dA$ បើ $f(x,y) \geq g(x,y)$

5. នៅក្នុងករណីនេះបើ R_1, R_2 ជាដែនកំណត់ពីរនៃ R ដែលគេចែកជាពីរផ្នែកនោះគេបាន



រូបទី៣.៤

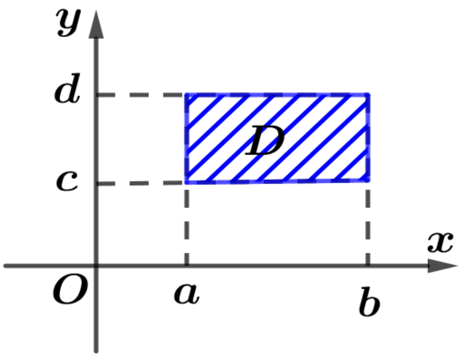
$$\iint\limits_R f(x,y)dA = \iint\limits_{R_1} f(x,y)dA + \iint\limits_{R_2} f(x,y)dA$$

គ. ការគណនាអាំងតេក្រាលឌុបក្នុងកូអរដោនេដេកាត

⊕ ករណីដែន D ជាចតុកោនកែង

ប្រសិនបើ $z = f(x,y)$ មានដែនកំណត់ $D \subset \mathbb{R}^2$ ដែល $D = \begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$

នោះគេបាន $$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$



របទី៣.៥

មានន័យថា ដំបូងយើងរកអាំងតេក្រាលនៃ z ដែលតាងដោយ y រួចបន្ទាប់មករកអាំងតេក្រាលដែលតាងដោយ x ។

ឬ $$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx$$

យើងរកអាំងតេក្រាលនៃ z ដែលតាងដោយ x រួចបន្ទាប់មករកអាំងតេក្រាលដែលតាងដោយ y ។

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy$$

ករណីពិសេស៖ បើ $z = f(x,y) = g(x)h(y)$ នោះគេបាន៖

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b\left(\int_c^d g(x)h(y)dy\right)dx = \left(\int_a^b g(x)dx\right)\left(\int_c^d h(y)dy\right)$$

ឧទាហរណ៍១៖ គណនា $\iint_D x^2ydD$ ដែល $D = \begin{cases}1\le x\le 3\\ 1\le y\le 2\end{cases}$ ។

ដំណោះស្រាយ

របៀបទី១៖

យើងមាន $$\iint_D x^2ydD = \int_1^3\int_1^2 x^2ydydx$$

$$= \int_1^3 \frac{1}{2}x^2y^2\Big|_1^2 dx = \int_1^3\left(2x^2 - \frac{x^2}{2}\right)dx$$

$$= \int_1^3 \frac{3}{2}x^2dx = \frac{1}{2}x^3\Big|_1^3 = \frac{27}{2} - \frac{1}{2} = 13$$

របៀបទី២៖

$$\iint_D x^2ydD = \int_1^2\int_1^3 x^2ydxdy = \int_1^2 dy\int_1^3 x^2ydx$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^2 x^3y\Big|_1^3 dy$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^2(27y - y)dy$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{27}{2}y^2 - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{27\times 4}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= 13$$

របៀបទី៣៖

$$\iint_D x^2 y dD = \int_1^3\left(\int_1^2 x^2 y dy\right)dx$$

$$= \int_1^3 \frac{1}{2}x^2y^2\Big|_1^2 dx$$

$$= \frac{3}{2}\int_1^3 x^2 dx$$

$$= \frac{3}{2}\times\frac{1}{3}x^3\Big|_1^3$$

$$= \frac{1}{2}(27-1) = 13$$

ឧទាហរណ៍២៖ គណនា $\iint_D -\frac{x^2}{(y-2)^3}dD$ បើ $D = \begin{cases}\frac{1}{2}\le x\le 2\\ 1\le y\le\frac{3}{2}\end{cases}$ ។

ដំណោះស្រាយ

$$\iint_D -\frac{x^2}{(y-2)^3}dD = -\int_1^{\frac{3}{2}}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{x^2}{(y-2)^3}dxdy$$

$$= -\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{x^3}{3(y-2)^3}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2} dy$$

$$= -\frac{1}{3}\int_1^{\frac{3}{2}}\left[\frac{8}{(y-2)^3}-\frac{1}{8(y-2)^3}\right]dy$$

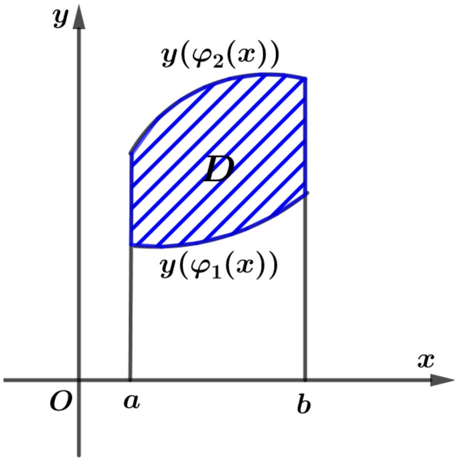
$$= -\frac{21}{8}\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{1}{(y-2)^2}dy = \frac{21}{8}\times\frac{1}{2(y-2)^2}\Bigg|_1^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{21}{16}(4-1) = \frac{63}{16}$$

⊕ ករណីដែន D ជាខ្សែកោង

បើ $z = f(x,y)$ មានដែនកំណត់ $D\subset\mathbb{R}^2, D$ កំណត់ដោយ $y=\varphi_1(x), y=\varphi_2(x)$ និង $a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$ នោះគេបាន៖

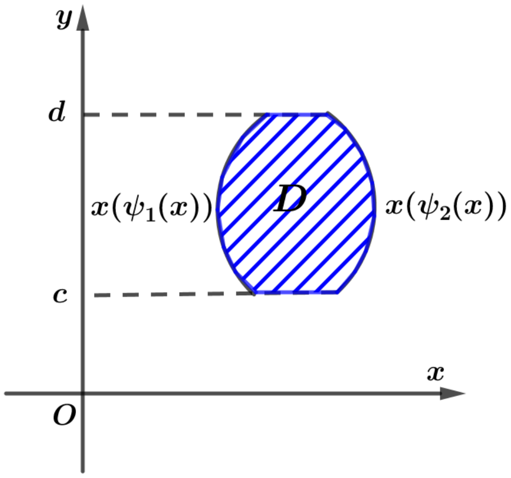
$$\iint_D f(x,y)\,dD=\int_a^b\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$



រូបទី៣.៦

ឬដែនកំណត់ D កំណត់ដោយ $x=\psi_1(y),x=\psi_2(y)$ និង $c\le y\le d,\psi_1(y)\le\psi_2(y)$

នោះគេបាន៖ $$\iint_D f(x,y)\,dD=\int_c^d\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)\,dx\,dy$$

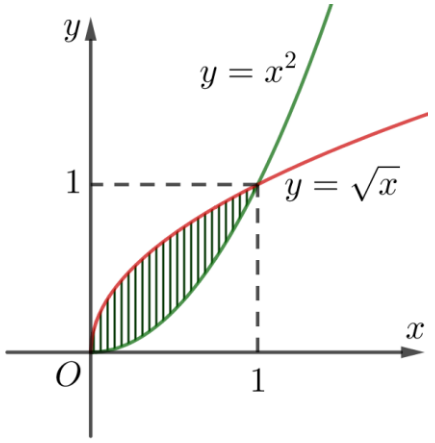


រូបទី៣.៧

ឧទាហរណ៍៣៖ គណនា $\iint_D\left(x-\sqrt{y}\right)^2 dD$ ចំពោះ D កំណត់ដោយខ្សែកោង $y=x^2, y^2=x$ និង $0\le x\le 1$។

ដំណោះស្រាយ

របៀបទី១៖ យើងមាន៖ $D=\begin{cases}0\le x\le 1\\ x^2\le y\le\sqrt{x}\end{cases}$



រូបទី៣.៨

$$\Rightarrow \iint_D \left(x-\sqrt{y}\right)^2 dD = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \left(x-\sqrt{y}\right)^2 dydx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 y + 2x\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}y^2 \right)\Bigg|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2\sqrt{x} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}x - x^4 - \frac{4}{3}x^4 - \frac{1}{2}x^4 \right) dx$$

$$= \left(\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + \frac{4}{3}\frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + \frac{1}{4}x^2 - 17\frac{x^5}{5} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{7} + \frac{16}{21} + \frac{1}{4} - \frac{17}{30} = \frac{307}{420}$$

របៀបទី២៖

យើងមាន៖ $D = \begin{cases} y^2 \le x \le \sqrt{y} \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \iint_D \left(x-\sqrt{y}\right)^2 dD = \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} \left(x-\sqrt{y}\right)^2 dxdy = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\sqrt{y} + xy \right)_{y^2}^{\sqrt{y}} dy$$

$$= \left(\frac{7y^{\frac{5}{2}}}{\frac{15}{2}} - \frac{1}{21}y^7 - \frac{2}{11}y^{\frac{11}{2}} - \frac{y^4}{4} \right)\Bigg|_0^1$$

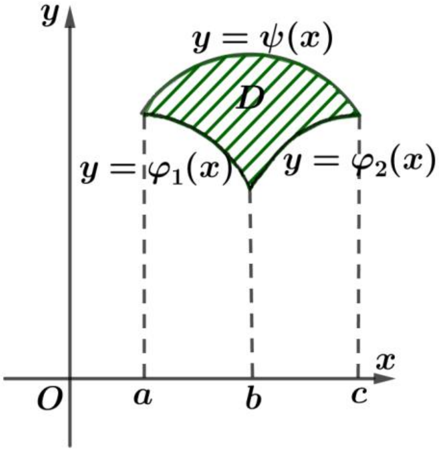
$$= \frac{14}{15} - \frac{1}{21} - \frac{2}{11} - \frac{1}{4} = \frac{307}{420}$$

ដូចនេះ៖ $\iint_D \left(x-\sqrt{y}\right)^2 dD = \frac{307}{420}$ ។

⊕ **ករណីពិសេស**

បើ $z=f\left(x,y\right)$ មានដែនកំណត់ $D\subset\mathbb{R}^2$ ដែលកំណត់ដោយ៖

$y=\varphi_1\left(x\right),y=\varphi_2\left(x\right),y=\psi\left(x\right)$ និង $\begin{cases}a\le x\le b\\ b\le x\le c\end{cases},\begin{cases}\varphi_1\left(x\right)\le\psi\left(x\right)\\ \varphi_2\left(x\right)\le\psi\left(x\right)\end{cases}$



រូបទី៣.៩

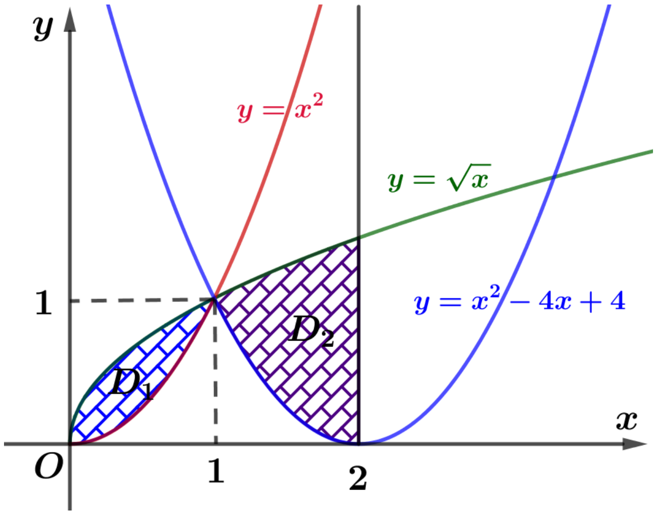
នោះគេបាន៖ $$\iint\limits_D f\left(x,y\right)dD=\int\limits_a^b\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\psi(x)}f\left(x,y\right)dydx+\int\limits_b^c\int\limits_{\varphi_2(x)}^{\psi(x)}f\left(x,y\right)dydx$$

ឧទាហរណ៍៤៖ គណនា $\iint\limits_D xy^3dD$ ចំពោះ D កំណត់ដោយ $y^2=x,y=x^2,y=x^2-4x+4$ និង $0\le x\le 2$។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន៖ $D=D_1\cup D_2$

$D_1=\begin{cases}0\le x\le 1\\ x^2\le y\le\sqrt{x}\end{cases}$ និង $D_2=\begin{cases}1\le x\le 2\\ x^2-4x+4\le y\le\sqrt{x}\end{cases}$



រូបទី៣.១០

$$\Rightarrow \iint_D xy^3 dD = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy^3 dydx + \int_1^2 \int_{x^2-4x+4}^{\sqrt{x}} xy^3 dydx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 \left(xy^4\right)\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx + \frac{1}{4}\int_1^2 \left(xy^4\right)\Big|_{x^2-4x+4}^{\sqrt{x}} dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 \left(x^3 - x^9\right)dx + \frac{1}{4}\int_1^2 \left(x^3 - x\left(x^2-4x+4\right)^4\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{10}x^{10}\right)\Big|_0^1 + \frac{1}{4}\int_1^2 \left(x^3 - x^9 + 16x^8 - 112x^7\right.$$

$$\left. + 448x^6 - 1120x^5 + 1792x^4 - 1792x^3 + 1024x^2 - 25x\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{10}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{x^{10}}{10} + \frac{16}{9}x^9 - \frac{112}{8}x^8 + \frac{448}{7}x^7 - \frac{1120}{6}x^6 + \frac{1792}{5}x^5\right.$$

$$\left. - \frac{1792}{4}x^4 + \frac{1024}{3}x^3 - \frac{25}{2}x^2\right)\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{10} + \frac{16}{4} - \frac{1024}{10} + \frac{16\times 512}{9} - \frac{112\times 256}{8} + \frac{448\times 128}{7}\right.\right.$$

$$\left. + \frac{1120\times 64}{6} + \frac{1792\times 32}{5} + \frac{1024\times 8}{3} - \frac{25\times 4}{2}\right)$$

$$\left.-\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{10} + \frac{16}{9} - \frac{112}{8} + \frac{448}{7} - \frac{1120}{6} + \frac{1792}{5} - \frac{1792}{4} + \frac{1024}{3} - \frac{25}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left(-750 + \frac{6784}{9}\right) = \frac{34}{36} = \frac{17}{18}$$

ដូចនេះ $\iint_D xy^3 dD = \dfrac{17}{18}$ ។

ង. វិធីប្តូរអថេរនៅក្នុងអាំងតេក្រាលឌុប

លោក ហ្សាកូប៊ីន(Jacobian) ត្រូវបានដាក់ឈ្មោះតាមជនជាតិអាឡឺម៉ង់គណិតវិទូKarl Gustav Jacobiយ៉ាកូប៊ី (1804-1851) ។ នៅក្នុងសៀវភៅមួយចំនួនហ្សាកូប៊ីជាម៉ាទ្រីសនៃដេរីវេដោយផ្នែក។ ម្យ៉ាងវិញទៀតហ្សាកូប៊ីជាដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីសនៃដេរីវេដោយផ្នែកផងដែរ។ ចំពោះ $J(u,v)$ និង $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ ត្រូវបានប្រើដើម្បីសម្គាល់លើហ្សាកូប៊ី។

⊕ **ករណីកូអរដោនេដេកាត**

គេឱ្យ $z = f(x,y)$ មានដែនកំណត់ $D \subset \mathbb{R}^2$ និង $D' \subset \mathbb{R}^2$ នៅក្នុងប្លង់ (xOy) រៀងគ្នា (uOv)។ បើ D' គឺជារូបភាពនៃ D នៅក្នុងប្លង់ (uOv) ជាអនុវត្តមួយទល់ φ មួយពី $D \to D'$

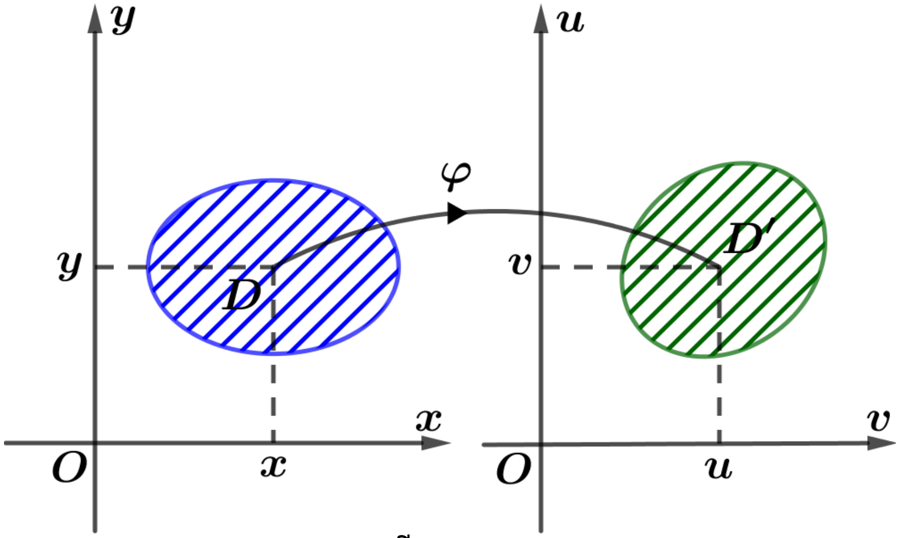
$D:(x,y)\mapsto \varphi(x,y)=(u,v)$

ដែល $\begin{cases} u=\varphi_1(x,y) \\ v=\varphi_2(x,y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\psi_1(u,v) \\ y=\psi_2(u,v) \end{cases}$

បើអនុគមន៍ $x=\psi_1(u,v)$ និង $y=\psi_2(u,v)$ មានដេរីវេដោយផ្នែកជាប់លើ D ហៅថា ហ្សាកូប៊ីន (Jacobian) នៃ D' គឺជាដេទែរមីណង់៖

$$|J(u,v)|=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$ នោះគេបាន

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D'} f\left[\psi_1(u,v),\psi_2(u,v)\right]|J(u,v)|dudv$$



រូបទី៣.១១

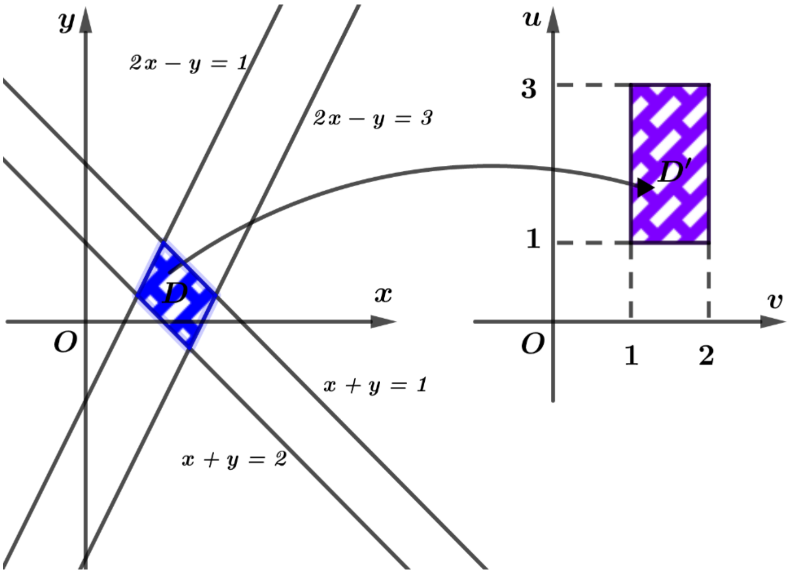
ឧទាហរណ៍៩៖ គណនា $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$ ដែល D កំណត់ដោយ៖

$D=\begin{cases} x+y=1 \quad ,x+y=2 \\ 2x-y=1,2x-y=3 \end{cases}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងតាង៖ $\begin{cases} u=x+y \\ v=2x-y \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{u+v}{3} \\ y=\frac{2u-v}{3} \end{cases}$$



រូបទី៣.១២

តែ $\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{3},\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{1}{3},\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{2}{3},\frac{\partial y}{\partial v}=-\frac{1}{3}$

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3}\end{vmatrix}=-\frac{1}{9}-\frac{2}{9}=-\frac{1}{3}$$

បំពោះ $D(x,y)\to D'(x,y)=(u,v)$, $D'=\begin{cases}1\le u\le 2\\ 1\le v\le 3\end{cases}$

$$\Rightarrow \iint_D \left(x^2-y^2\right)dxdy=\int_1^2\int_1^3\left[\left(\frac{u+v}{3}\right)^2-\left(\frac{2u-v}{3}\right)^2\right]\left|\frac{1}{3}\right|dvdu$$

$$=\frac{1}{27}\int_1^2\int_1^3\left(u^2+2uv+v^2-4u^2+4uv-v^2\right)dvdu$$

$$=\frac{1}{27}\int_1^2\int_1^3\left(-3u^2+6uv\right)dvdu$$

$$=\frac{1}{9}\int_1^2\left(-vu^2+v^2u\right)\Big|_1^3 du$$

$$=\frac{1}{9}\int_1^2\left(-3u^2+9u+u^2-u\right)du$$

$$=\frac{1}{9}\int_1^2\left(8u-2u^2\right)du$$

$$=\frac{2}{9}\left(2u^2-\frac{1}{3}u^3\right)\Big|_1^2$$

$$=\frac{2}{9}\left(8-\frac{8}{3}-2+\frac{1}{3}\right)=\frac{22}{27}$$

ដូចនេះ $\iint_D\left(x^2-y^2\right)dxdy=\frac{22}{27}$ ។

ឧទាហរណ៍៦៖ តាង R ជាដែននៅក្នុងកាដ្រង់ទីមួយដែលខ័ណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូល $x=y^2, x=y^2-4$ $x=9-y^2$ និង $x=16-y^2$ ។ ចូរគណនា $\iint_R y^2 dA$ ។

ដំណោះស្រាយ

ចំណាំថាដែនកំណត់នៃខ្សែកោងកំណត់សរសេរដោយ $x-y^2=0, x-y^2=-4, x+y^2=9$ និង $x+y^2=16$ ។ ប៉ារ៉ាបូលទីមួយមានទម្រង់ $x-y^2=C$ ដែល C ជាចំនួនថេរហើយយើងតាង $u=x-y^2$ ។ ប៉ារ៉ាបូលទីពីរមានទម្រង់ $x+y^2=C$ ហើយយើងតាង $v=x+y^2$ ។

នោះគេបានអថេរថ្មីគឺ៖ $u=x-y^2$ និង $v=x+y^2$ ។

ដែលកំណត់ខ្សែកោង S គឺ $u=-4, u=0, v=9$ និង $v=16$ ។ នោះគេបានដែនកំណត់ថ្មី $S=\left\{(u,v):-4\le u\le 0, 9\le v\le 16\right\}$ ដូចរូប។ ដើម្បីគណនាហ្សាកូប៊ីន យើងត្រូវធ្វើការបំប្លែង T ដោយសរសេរ x និង y ជាតួនៃ u និង v ។ ដោះស្រាយចំពោះ x និង y យើងឃើញថា $y\ge 0$ ចំពោះគ្រប់ចំណុចនៅក្នុង R យើងឃើញថា៖

$$T: x=\frac{u+v}{2}\ ,\ y=\sqrt{\frac{u-v}{2}}$$

ចំណុច S បំពេញលក្ខខណ្ឌដោយ $v>u$ ដូច្នេះ $\sqrt{v-u}$ គឺកំណត់។ ឥឡូវយើងគណនាតាមហ្សាកូប៊ីន

$$|J(u,v)|=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2\sqrt{2(v-u)}} & \frac{1}{2\sqrt{2(v-u)}}\end{vmatrix}=\frac{1}{2\sqrt{2(v-u)}}$$

ដោយប្តូរអថេរយើងបាន៖

$$\iint_R y^2 dA=\int_9^{16}\int_{-4}^{0}\underbrace{\frac{v-u}{2}}_{y^2}\cdot\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{2(v-u)}}}_{|J(u,v)|}du\,dv$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^{16}\int_{-4}^{0}\sqrt{v-u}\,du\,dv$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{3}\int_9^{16}\left(-(v-u)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{-4}^{0}dv$$

$$=\frac{1}{6\sqrt{2}}\int_9^{16}\left[(v+4)^{\frac{3}{2}}-v^{\frac{3}{2}}\right]dv$$

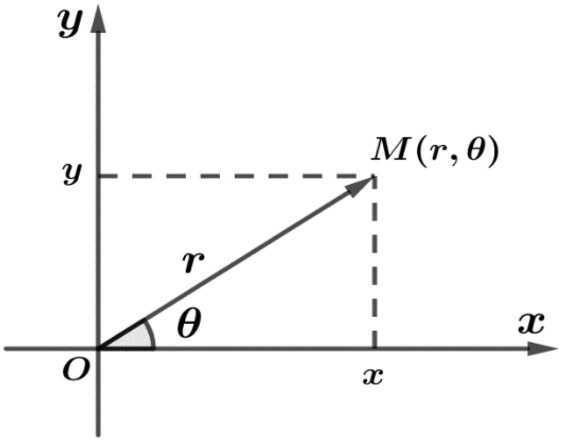
$$=\frac{1}{6\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{5}\left[(v+4)^{\frac{5}{2}}-v^{\frac{5}{2}}\right]_9^{16}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{30}\left(32\times5^{\frac{5}{2}}-3^{\frac{5}{2}}-781\right)\approx18.79$$

⊕ **ករណីកូអរដោនេប៉ូលែ**

នៅក្នុងប្លង់ (xOy) យើងមាន $M\Big|_{y}^{x}$ បើ θ គឺជាមុំនៅចន្លោះ (OM) និង (Ox) ដែល $r=|OM|$ ។

នោះគេបាន $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$, $r\geq0$, $\theta\in[0,2\pi]$



រូបទី៣.១៣

$$\Rightarrow J(r,\theta)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}$$

$$=r\cos^2\theta+r\sin^2\theta=r$$

$$\Rightarrow \boxed{\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D'} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta}$$

ឧទាហរណ៍៧៖ គណនា $\iint_D(1-xy^2)dxdy,\ D=\{(x,y):x^2+y^2\leq4\}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\theta$

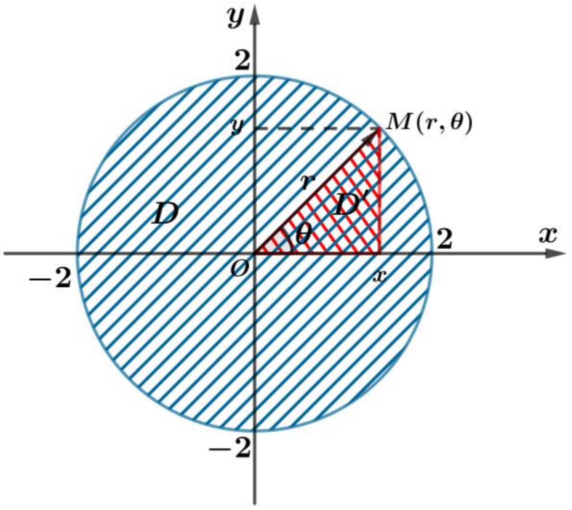
$$\frac{\partial x}{\partial\theta}=-r\sin\theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial r}=\sin\theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial\theta}=r\cos\theta$$

យើងមាន $D=\{(x,y):x^2+y^2\le 4\}$

$$\Rightarrow D'=\begin{cases}0\le r\le 2\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$$



រូបទី៣.១៤

$$\Rightarrow \iint_D (1-xy^2)dxdy = \int_0^2\int_0^{2\pi}\left[1-r\cos\theta\left(r^2\sin^2\theta\right)\right]rd\theta dr$$

$$=\int_0^2\int_0^{2\pi}\left(r-r^4\cos\theta\sin^2\theta\right)d\theta dr$$

$$=\int_0^2\left[r\theta\Big|_0^{2\pi}-r^4\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d(\sin\theta)\right]dr$$

$$=\int_0^2\left[2r\pi-\frac{r^4}{3}\sin^3\theta\Big|_0^{2\pi}\right]dr$$

$$=\int_0^{2\pi}2r\pi dr$$

$$=\pi r^2\Big|_0^{2\pi}-0=4\pi$$

ដូចនេះ $\iint_D (1-xy^2)dxdy=4\pi$ ។

ឧទាហរណ៍៨៖ ចូរគណនាអាំងតេក្រាលឌុបខាងក្រោម៖

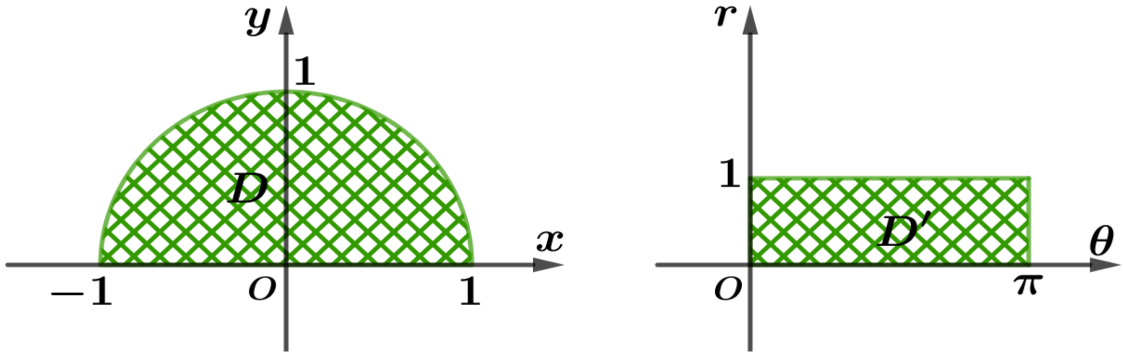
១. $I=\iint_D (x^2+y^2)dxdy,\ D=\{(x,y):x^2+y^2\le 1, y\ge 0\}$

២. $J=\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, D ផ្ទៃក្នុងរង្វង់ $x^2+y^2-x=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

១. $I=\iint_D (x^2+y^2)dxdy,\ D=\{(x,y): x^2+y^2\le 1, y\ge 0\}$

គេតាង $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$



រូបទី៣.១៥

គេបាន $D'=\{(r,\theta): 0\le r\le 1, 0\le\theta\le\pi\}$

$$\Rightarrow I=\iint_D r^2 r dr d\theta=\int_0^\pi d\theta\int_0^1 r^3 dr=\frac{\pi}{4}$$

២. $J=\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, D ផ្ទៃក្នុងរង្វង់ $x^2+y^2-x=0$ ។

ក្នុងប្រព័ន្ធប៉ូលែគេបានសមីការ $r^2-r\cos\theta=0 \Leftrightarrow r=0, r=\cos\theta$

$$\Rightarrow D'=\left\{(r,\theta): -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le r\le\cos\theta\right\}$$

$$\Rightarrow I=\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=\iint_{D'}\frac{rdrd\theta}{\sqrt{1-r^2}}$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\theta}\frac{rdr}{\sqrt{1-r^2}}d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\sqrt{1-r^2}\Big|_0^{\cos\theta} d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-|\sin\theta|)d\theta=\pi-2$$

ចំណាំ៖ គេអាចប្រើអាំងតេក្រាលឌុបដើម្បីគណនាផ្ទៃក្រឡានៃប្លង់នៅចន្លោះខ្សែកោងពីរ កំណត់ដោយ៖

ក. ការគណនាផ្ទៃក្រឡាដោយប្រើអាំងតេក្រាលឌុប

$$S(x)=\iint_D dA=\iint_D dxdy$$

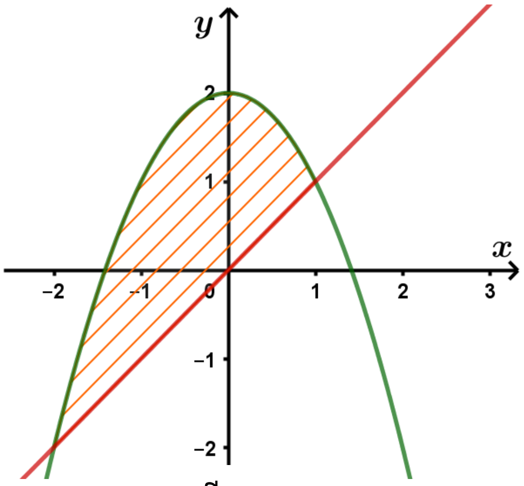
ឧទាហរណ៍៩៖ ចូររកផ្ទៃក្រឡានៃប្លង់ដែលខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង $y=2-x^2$ និងបន្ទាត់ $y=x$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមានអ័ក្សអាប់ស៊ីសនៅចន្លោះខ្សែកោង $y=2-x^2$ និងបន្ទាត់ $y=x$ គឺ

$$2-x^2=x \Leftrightarrow x^2+x-2=0$$

$$\Rightarrow x=1, x=-2$$



រូបទី៣.១៦

នោះគេបានផ្ទៃក្រឡានៅចន្លោះខ្សែកោងពីរគឺ

$$S(x)=\int_{-2}^{1}\int_{x}^{2-x^2}dydx=\int_{-2}^{1}y\Big|_{x}^{2-x^2}dx$$

$$=\int_{-2}^{1}\left(2-x^2-x\right)dx$$

$$=2x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\Big|_{-2}^{1}$$

$$=2-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+4-\frac{8}{3}+2=\frac{9}{2}$$

ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡានៃប្លង់ដែលខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង $y=2-x^2$ និងបន្ទាត់ $y=x$ គឺ $\frac{9}{2}$ ឯកតាផ្ទៃ។

ឧទាហរណ៍១០៖ ចូររកផ្ទៃក្រឡានៃប្លង់ដែលខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង $y=x^2, y=-x+12$ និង $y=4x+12$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមានចំណុចប្រសព្វរវាងអនុគមន៍ទាំងបីគឺ៖

$y=x^2$ និង $y=-x+12$

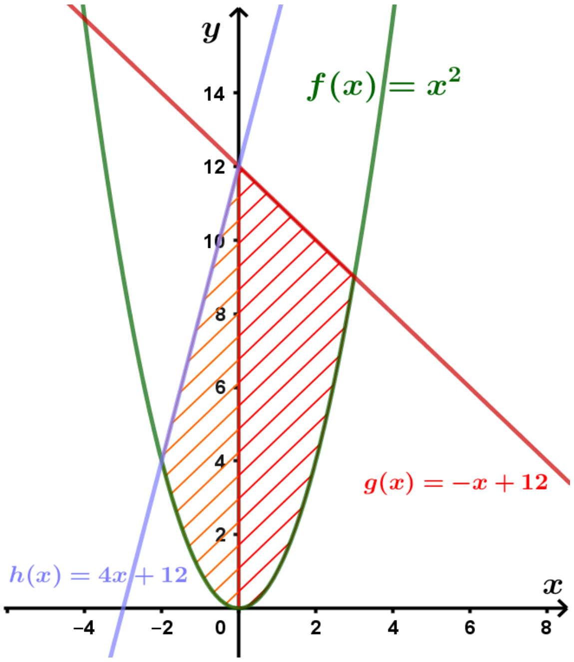
$$\Rightarrow x^2=-x+12$$

$$\Rightarrow x^2+x-12=0$$

$$\Rightarrow x=3, y=9$$

ចំពោះ $y=x^2$ និង $y=4x+12$ គេបាន៖

$x^2-4x-12=0\Rightarrow x=-2, y=4$



រូបទី៣.១៧

នោះគេបានផ្ទៃក្រឡាដែលខ័ណ្ឌដោយអនុគមន៍ទាំងបីគឺ៖

$$S(x)=\int_{-2}^{0}\int_{x^2}^{4x+12}dydx+\int_{0}^{3}\int_{x^2}^{-x+12}dydx$$

$$=\int_{-2}^{0}\left(4x+12-x^2\right)dx+\int_{0}^{3}\left(-x+12-x^2\right)dx$$

$$=\left(2x^2+12x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{0}+\left(-\frac{x^2}{2}+12x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{3}$$

$$=-8+24-\frac{8}{3}-\frac{27}{2}+36-9$$

$$=\frac{40}{3}+\frac{45}{2}$$

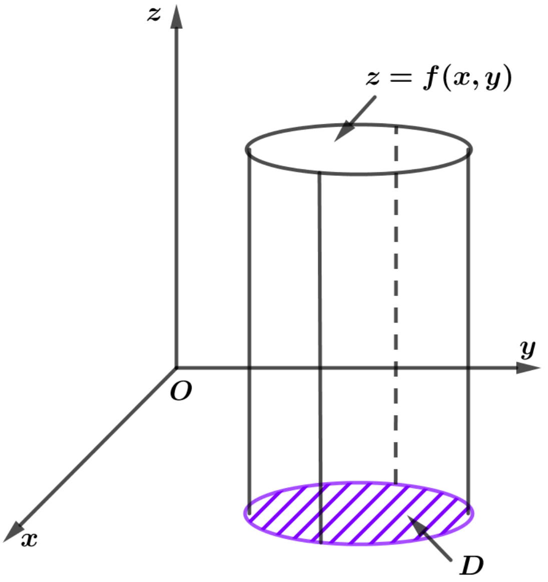
$$=\frac{215}{6}$$

ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡាដែលខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោងគឺ $\frac{215}{6}$ ឯកតាផ្ទៃ។

ខ.ការគណនាមាឌនៃសូលីតដោយប្រើអាំងតេក្រាលឌុប

មាឌនៃសូលីតដែលខ័ណ្ឌខាងលើដោយផ្ទៃ $z=f(x,y)$ ហើយខាងក្រោមដោយ $z=0$ ជុំវិញដោយផ្ទៃស៊ីឡាំងដែលកាត់ប្លង់ (xOy) បានដែន D មួយស្មើនឹង៖

$$\boxed{V=\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy}$$



រូបទី៣.១៨

ឧទាហរណ៍១១៖ រកមាឌនៃសូលីតដែលខ័ណ្ឌដោយផ្ទៃ $y=1+x^2$ និង $z=3x, y=5, z=0$។

ដំណោះស្រាយ

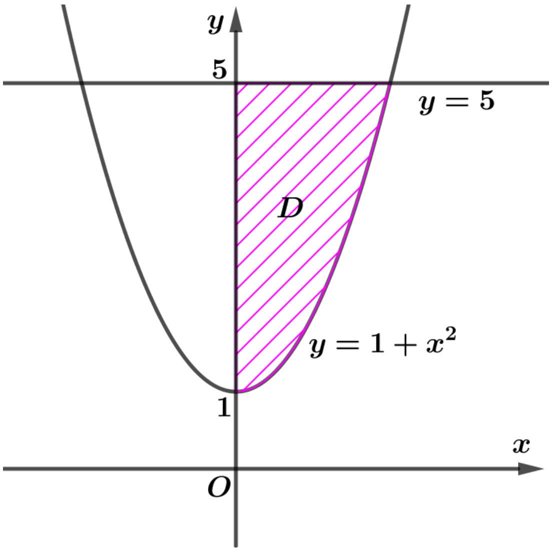
យើងមាន $y=1+x^2$ ដោយ $y=5$

$\Rightarrow x^2+1=5$

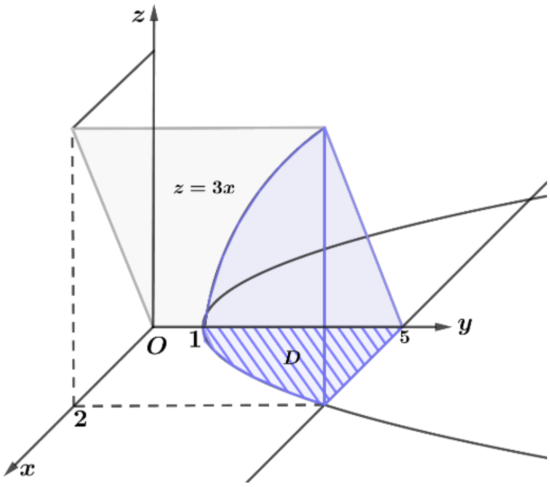
$\Rightarrow x^2=4$

$\Rightarrow x=\pm 2$

$$\Rightarrow D:\begin{cases}0\le x\le 2\\ 1+x^2\le y\le 5\end{cases}$$



រូបទី៣.១៩



រូបទី៣.២០

តាមរូបមន្តគេបាន៖

$$V=\iint\limits_D (3x)\,dxdy=\int_0^2\int_{1+x^2}^{5} 3x\,dydx$$

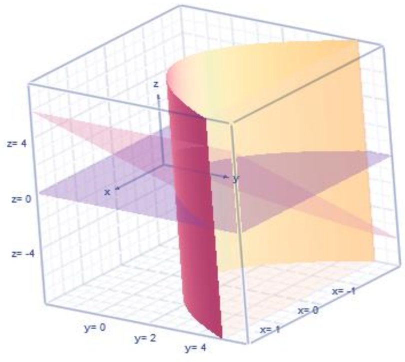
$$= \int_0^2 3x(y)\Big|_{1+x^2}^{5} dx$$

$$= \int_0^2 3x\left(5-1-x^2\right)dx$$

$$= \int_0^2 \left(12x-3x^3\right)dx$$

$$= 6x^2 - \frac{3}{4}x^4\Big|_0^2 = 24 - \frac{3}{4}\times 16 = 12$$

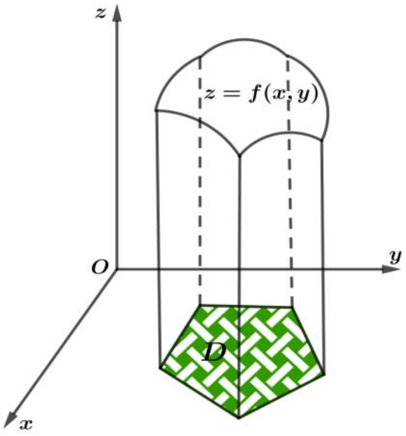
ដូចនេះ $V = 12$ ឯកតាមាឌ។



រូបទី៣.២១

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃផ្ទៃសូលីត

⊕ បើផ្ទៃក្រឡានៃផ្ទៃ $z = f(x,y)$ នោះគេបាន៖



រូបទី៣.២២

$$S = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$, D ជាចំណោលកែងនៃ (S) លើប្លង់ (xOy)

⊕ បើ $(S): y = f(x,z)$

$$S=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dxdz$$, D ជាចំណោលកែងនៃ (S) លើប្លង់ (xOz)

⊕ បើ $(S): x=f(y,z)$

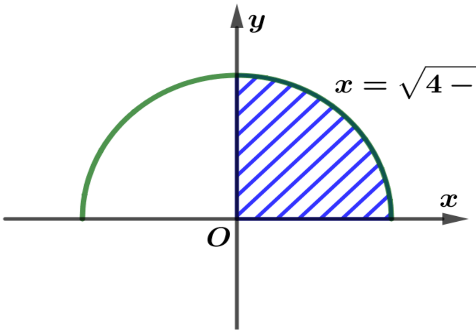
$$S=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dydz$$, D ជាចំណោលកែងនៃ (S) លើប្លង់ (yOz)

ឧទាហរណ៍១២៖ រកផ្ទៃក្រឡានៃផ្ទៃស្វ៊ែរ $x^2+y^2+z^2=4$ ត្រូវបានកាត់ដោយស៊ីឡាំង $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ ។

ដំណោះស្រាយ

$$S=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy \Rightarrow D=\begin{cases}0\le y\le\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\\ 0\le x\le 2\end{cases}$$

ដោយ $x^2+y^2+z^2=4$ នោះគេបាន $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$



រូបទី៣.២៣

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\ ,\ \frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

$$\Rightarrow 1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2=1+\frac{x^2}{4-x^2-y^2}+\frac{y^2}{4-x^2-y^2}=\frac{4}{4-x^2-y^2}$$

$$\Rightarrow S=4\iint_D \frac{2dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

$$=8\int_0^2 dx\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}}\frac{2dy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

$$=8\int_0^2 dx\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}}\frac{dy}{\sqrt{(4-x^2)-y^2}}$$

$$=8\int_0^2 \arcsin\frac{y}{\sqrt{4-x^2}}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}}dx$$

$$=8\int_0^2 \arcsin\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}}dx$$

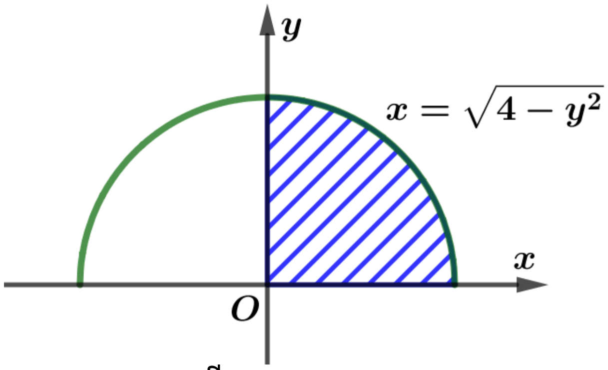
$$=8\int_0^2\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)dx=8\times 2\times\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{8}{3}\pi$$

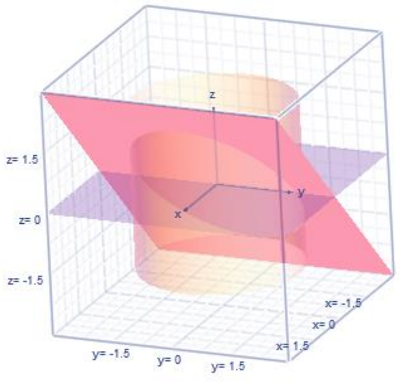
ឧទាហរណ៍១៣៖ ១. រកផ្ទៃក្រឡានៃផ្ទៃកប្លង់ $z=x$ ដែលស្ថិតនៅក្នុងស៊ីឡាំង $x^2+y^2=4$ និងស្ថិត នៅខាងលើប្លង់ $z=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

$$S=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy \Rightarrow D=\begin{cases}0\le x\le\sqrt{4-y^2}\\ 0\le y\le 2\end{cases}$$



រូបទី៣.២៤



រូបទី៣.២៥

ដោយ $z=x\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=1,\ \frac{\partial z}{\partial y}=0$

$$\Rightarrow 1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=1+1=2$$

$$\Rightarrow S=\iint_D\sqrt{2}dxdy=2\sqrt{2}\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}}dxdy$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^2\sqrt{4-y^2}dy$$

$$=2\sqrt{2}\left[\frac{y}{2}\sqrt{4-y^2}+2\arcsin\frac{y}{2}\right]_0^2$$

$$=4\sqrt{2}\arcsin 1=4\sqrt{2}\times\frac{\pi}{2}=2\pi\sqrt{2}$$

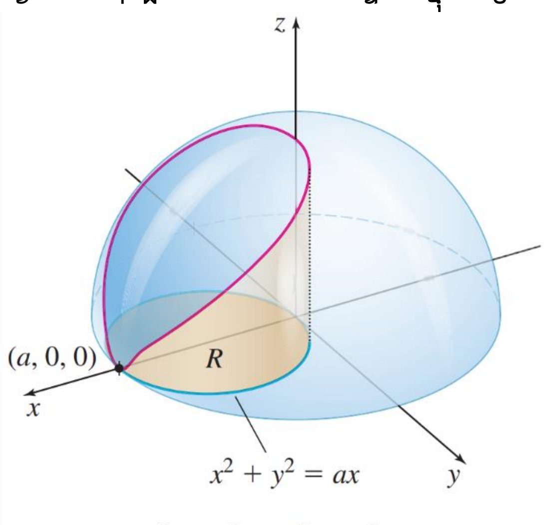
ដូចនេះ $S=2\pi\sqrt{2}$ ឯកតាផ្ទៃ។

២. ចូររកផ្ទៃក្រឡាផ្នែកនៃស្វ៊ែរ $x^2+y^2+z^2=a^2$ ដែលនៅលើប្លង់ (xOy) និងមាននៅក្នុងស៊ី

ឡាំង $x^2+y^2=ax, a>0$ ។

ដំណោះស្រាយ

រូបទី២៦ បង្ហាញពីស្វ៊ែរ និងស៊ីឡាំង។ សមីការនៃផ្ទៃនៅក្នុងទម្រង់អុីព្លីស៊ីត(Implicit)គឺ



$x^2+y^2+z^2=a^2, z\geq 0$

រូបទី៣.២៦

$z=f(x,y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

ដេរីវេដោយផ្នែកនៃ $z=f(x,y)$ គឺ

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

ចំណោលនៃស៊ីឡាំងនៅលើប្លង់ (xOy) គឺជាដែនបិទនៃ R ដោយរង្វង់ $x^2+y^2=ax, a>0$ ។

នោះផ្ទៃក្រឡានៃផ្ទៃ S គឺ

$$S=\iint_R \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}\,dA$$

$$=\iint_R \sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}}\,dA$$

ដោយកន្សោម x^2+y^2 ជាប់ទាក់ទង និងដែន R ជាមួយរង្វង់ $x^2+y^2=ax$ យើងត្រូវប្រើកូអរដោនេប៉ូលែ (r,θ) ។ យើងត្រូវរកដែននៃអាំងតេក្រាលដោយ

$$x^2+y^2=ax$$

$$r^2=ar\cos\theta$$

$$r=a\cos\theta$$

នោះគេបានតម្លៃ r គឺ $0\leq r\leq a\cos\theta$

ដោយពាក់កណ្ដាលផ្ទៃក្រឡាទៅប្លង់ខាងស្ដាំ xOz និងពាក់កណ្ដាលនៃប្លង់ខាងឆ្វេង

នោះគេបាន $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ មានផ្ទៃក្រឡាពីរដង។ ដូច្នេះ ផ្ទៃក្រឡានៃផ្ទៃ S គឺ

$$\Rightarrow S=\iint_R \sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}}\,dA=\iint_R \frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}\,r\,dr\,d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos\theta}\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}\,r\,dr\,d\theta$$

$$=-2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sqrt{a^2-r^2}\right]_0^{a\cos\theta}\theta$$

$$=-2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin\theta-a)\,d\theta$$

$$=-2a^2\left[-\cos\theta-\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=a^2(\pi-2)$$

ដូចនេះ៖ $S=a^2(\pi-2)$ ឯកតាផ្ទៃ។

៣.២. អាំងតេក្រាលឌុបអ៊ីមប្រូប្រេ (Double integrals improper)

ក្នុងសញ្ញាណអាំងតេក្រាលឌុបគេឧបមាថា f ជាប់លើ D ទ័ល។ គេបន្លាយសញ្ញាណអាំងតេក្រាលឌុបជាពីរករណីទៀតគឺ៖

- អនុគមន៍ f មិនជាប់លើ D
- ដែន D មិនទ័ល

ក្នុងករណីនេះគេយក $D'\subset D$ ទ័លហើយ f ជាប់លើ D' ហើយគេគណនាលីមីតនៃអាំងតេក្រាលឌុបលើ D' ពេល $D'\to D$។ បើលីមីតមានហើយជាចំនួនកំណត់នោះគេថាអាំងតេក្រាលរួមហើយគេតាង៖

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\lim_{D'\to D}\iint_{D} f(x,y)\,dx\,dy$$

ក្នុងករណីក្រៅពីនេះជាអាំងតេក្រាលរីក។

ឧទាហរណ៍១៤៖ ចូរសិក្សាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

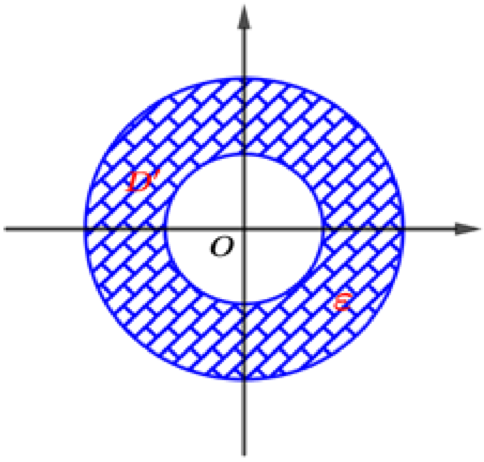
(i) គណនា $I=\iint_D \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha}$, D ជាថាសឯកតា។

បើ D' ជាផ្ទៃកធូតនៃរូបទី៣.២៧គេបាន៖

$$I(\varepsilon)=\iint_{D'}\frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha}=\iint_\Delta \frac{r\,dr\,d\theta}{r^{2\alpha}}$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_\varepsilon^1\frac{dr}{r^{2\alpha-1}}$$

$$=2\pi\times\frac{1}{2-2\alpha}\left(1-\frac{1}{\varepsilon^{2\alpha-2}}\right)$$



រូបទី៣.២៧

\+ បើ $2\alpha-2<0\Leftrightarrow\alpha<1\Rightarrow\lim_{\varepsilon\to0}I(\varepsilon)=\frac{\pi}{1-\alpha}\Rightarrow I$ រួម

\+ បើ $\alpha\ge1$, $\lim_{\varepsilon\to0}I(\varepsilon)=+\infty\Rightarrow I$ រីក

(ii) គណនា $I=\iint\limits_D e^{-\left(x^2+y^2\right)}dx\,dy$, $D=\mathbb{R}^2$ គេយក D' ជារង្វង់ផ្ចិត O កាំ R ។

ដោយប្រើកូអរដោនេប៉ូលែគេបាន៖

$$I=\iint\limits_D e^{-\left(x^2+y^2\right)}dx\,dy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R e^{-r^2}rdr=\pi\left(1-e^{R^2}\right)$$

តែ $\lim\limits_{R\to+\infty} I(R)=\pi$

ដូចនេះ $I=\pi$ ។

អនុវត្តន៍៖ $I=\iint\limits_{R^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dx\,dy=\iint\limits_{R^2} e^{-x^2}e^{-y^2}dx\,dy=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dy$

$$\Rightarrow I=4\left(\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\right)^2=\pi$$

ដូចនេះគេបានលទ្ធផលគ្រឹះសំខាន់គឺ $\boxed{\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$ ។

៣.៣ ម៉ាស ម៉ូម៉ង់និចលភាព និងទីប្រជុំទម្ងន់

D ជាដែននៅក្នុងប្លង់ (xOy) ដែលមានដង់ស៊ីតេ $\rho(x,y)$ ។

⊕ ម៉ាសនៃដែន D

$$\boxed{M=\lim_{k,l\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\sum_{k=1}^{l}\rho\left(x_{ij}^*,y_{ij}^*\right)\Delta A=\iint\limits_D\rho(x,y)dA}\ ,\rho(x,y)=\lim\frac{\Delta M}{\Delta A}$$

⊕ ម៉ូម៉ង់ស្តាទិច

+ ធៀបនឹងអ័ក្ស $\overrightarrow{Ox}$: $\boxed{M_x=\lim\limits_{m,n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}y_{ij}^*\rho\left(x_{ij}^*,y_{ij}^*\right)\Delta A=\iint\limits_D y\rho(x,y)dA}$

+ ធៀបនឹងអ័ក្ស $\overrightarrow{Oy}$: $\boxed{M_y=\lim\limits_{m,n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}^*\rho\left(x_{ij}^*,y_{ij}^*\right)\Delta A=\iint\limits_D x\rho(x,y)dA}$

+ ទីប្រជុំទម្ងន់ $G\left(\overline{x},\overline{y}\right)$

$$\boxed{\overline{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{1}{M}\iint\limits_D x\rho(x,y)dA\qquad \overline{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{1}{M}\iint\limits_D y\rho(x,y)dA}$$

ករណីពិសេសដែល $\rho(x,y)$ ថេរ

$$\boxed{\overline{x}=\frac{1}{S}\iint\limits_D x\,dA\qquad \overline{y}=\frac{1}{S}\iint\limits_D y\,dA}$$

⊕ ម៉ូម៉ង់និចលភាព

+ ធៀបនឹងអ័ក្ស$\overrightarrow{Ox}$: $I_x = \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}^*\right)^2 \rho\left(x_{ij}^*,y_{ij}^*\right)\Delta A = \iint_D y^2\rho(x,y)dA$

+ ធៀបនឹងអ័ក្ស$\overrightarrow{Oy}$: $I_y = \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{ij}^*\right)^2 \rho\left(x_{ij}^*,y_{ij}^*\right)\Delta A = \iint_D x^2\rho(x,y)dA$

+ ធៀបនឹងគល់O:

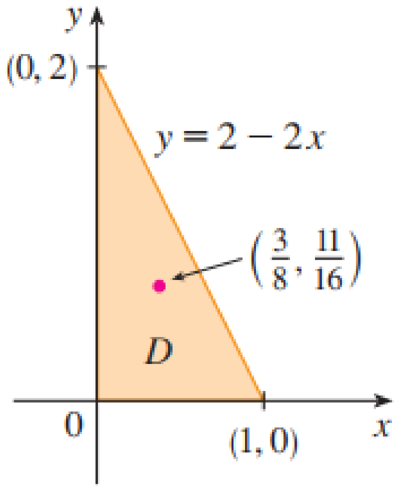
$$I_0 = \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{ij}^* + y_{ij}^*\right)^2 \rho\left(x_{ij}^*,y_{ij}^*\right)\Delta A = \iint_D (x+y)^2 \rho(x,y)dx\,dy$$

+ ចំណាំ៖ $I_0 = I_x + I_y$

ឧទាហរណ៍១៥៖ ចូររកម៉ាស និងផ្ចិតម៉ាសរបស់បន្ទះស្តើងរាងត្រីកោនមួយដែលមានកំពូលត្រង់ $(0,0),(1,0),(0,2)$ ហើយមានអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ $\rho(x,y)=1+3x+y$ ។

ដំណោះស្រាយ

បន្ទះស្តើងរាងត្រីកោនបង្ហាញដូចរូប។ នោះម៉ាសរបស់បន្ទះស្តើងរាងត្រីកោនគឺ៖



រូបទី៣.២៨

$$M = \iint_D \rho(x,y)dA = \int_0^1\int_0^{2-2x}(1+3x+y)dydx$$

$$= \int_0^1\left[y+3xy+\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=2-2x} dx$$

$$= 4\int_0^1\left(1-x^2\right)dx = 4\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{8}{3}$$

នោះតាមរូបមន្តគេបាន៖

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iint_D x\rho(x,y)dA = \frac{3}{8}\int_0^1\int_0^{2-2x}\left(x+3x^2+xy\right)dy\,dx$$

$$=\frac{3}{8}\int_0^1\left[xy+3x^2y+x\frac{y^2}{2}\right]_0^{2-2x}dx$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^1\left(x-x^3\right)dx$$

$$=\frac{3}{2}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{3}{8}$$

$$\overline{y}=\frac{1}{M}\iint_D y\rho(x,y)\,dA=\frac{3}{8}\int_0^1\int_0^{2-2x}\left(y+3xy+y^2\right)dy\,dx$$

$$=\frac{3}{8}\int_0^1\left[\frac{y^2}{2}+3x\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right]_0^{2-2x}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1\left(7-9x-3x^2+5x^3\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\left[7x-9\frac{x^2}{2}-x^3+\frac{5x^4}{4}\right]_0^1$$

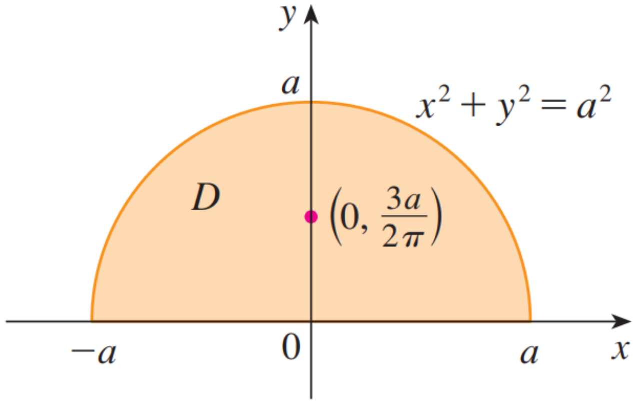
$$=\frac{11}{16}$$

ដូចនេះ ផ្ចិតនៃម៉ាសគឺត្រង់ចំណុច $\left(\frac{3}{8},\frac{11}{16}\right)$។

ឧទាហរណ៍១៦៖ ដង់ស៊ីតេនៅត្រង់ចំណុចមួយនៅលើបន្ទះស្តើងមួយរាងជាកន្លះរង្វង់សមាមាត្រទៅនឹងចម្ងាយពីផ្ចិតរង្វង់។ ចូររកផ្ចិតនៃម៉ាសរបស់បន្ទះស្តើងនេះ?

ដំណោះស្រាយ

តាងនៅលើបន្ទះស្តើងមួយរាងជាកន្លះរង្វង់ $x^2+y^2=a^2$ ដូចរូប។



រូបទី៣.២៩

ចម្ងាយពីចំណុច (x,y) ទៅផ្ចិតនៃរង្វង់គឺ $\sqrt{x^2+y^2}$ ។

នោះគេបានអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេគឺ $\rho(x,y)=K\sqrt{x^2+y^2}$

ដែល K ជាចំនួនថេរ។ ទាំងអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ និងផ្ទៃនៃបន្ទះស្តើងយើងបានបម្លែងទៅជាកូអរដោនេ

ប៉ុលែ។ នោះ $\sqrt{x^2+y^2}=r$ និងដែននៃ D កំណត់ដោយៈ $0\le r\le a\ ,0\le\theta\le\pi$ ។ នោះម៉ាសនៃបន្ទះស្តើងគឺៈ

$$\begin{aligned}M &= \iint_D \rho(x,y)\,dA = \iint_D K\sqrt{x^2+y^2}\,dA\\ &= \int_0^{\pi}\int_0^{a}(Kr)r\,dr\,d\theta\\ &= K\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{a}r^2dr\\ &= K\pi\left.\frac{r^3}{3}\right]_0^a\\ &= \frac{K\pi a^3}{3}\end{aligned}$$

ដោយបន្ទះស្តើង និងអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេគឺស៊ីមេទ្រីគ្នាធៀបនឹងអ័ក្សអរដោនេនោះផ្ចិតនៃម៉ាសគឺនៅលើអ័ក្សអរដោនេដែល $\bar{x}=0$ នោះកូអរដោនេ y កំណត់ដោយៈ

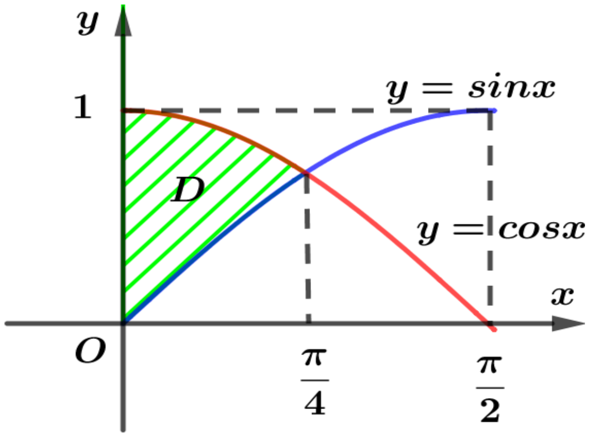
$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x,y)\,dA\\ &= \frac{3}{k\pi a^3}\int_0^{\pi}\int_0^{a}r\sin\theta(Kr)rdr\,d\theta\\ &= \frac{3}{\pi a^3}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{a}r^3dr\\ &= \frac{3}{\pi a^3}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a\\ &= \frac{3}{\pi a^3}\times\frac{2a^4}{4}\\ &= \frac{3a}{2\pi}\end{aligned}$$

ដូចនេះ ផ្ចិតនៃម៉ាសនៅត្រង់ចំណុច $\left(0,\frac{3a}{2\pi}\right)$ ។

ឧទាហរណ៍១៧៖ បន្ទះមួយជាផ្នែកនៃតំបន់ដែលស្ថិតនៅក្នុងកាដ្រង់ទីមួយខ័ណ្ឌដោយក្រាហ្វនៃ $y=\sin x$ និង $y=\cos x$ ក្នុងចន្លោះ $x=0$ និង $x=\frac{\pi}{4}$ ។ រកកូអរដោនេនៃទីប្រជុំទម្ងន់បើគេដឹងថាដង់ស៊ីតេរបស់វាស្មើ $\rho(x,y)=y$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមានៈ $\rho(x,y)=y \Rightarrow D=\begin{cases}0\le x\le\frac{\pi}{4}\\ \sin x\le y\le\cos x\end{cases}$



រូបទី៣.៣០

⊕ ម៉ាស

$$M=\iint_D y\,dx\,dy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_{\sin x}^{\cos x} y\,dydx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} y^2\Big|_{\sin x}^{\cos x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2xdx=\frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{4}$$

$$\overline{x}=4\iint_D xy\,dx\,dy$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}} xdx\int_{\sin x}^{\cos x} ydy$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\,dx$$

$$=2\left(\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}$$

$$=\frac{\pi-1}{4}$$

$$\overline{y}=4\iint_D y^2dx\,dy=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx\int_{\sin x}^{\cos x} y^2dy$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^3 x-\sin^3 x\right)dx$$

$$=\frac{4}{3}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-\sin^2 x\right)d\left(\sin x\right)+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-\cos^2 x\right)d\left(\cos x\right)\right]$$

$$=\frac{4}{3}\left(\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2\sqrt{2}}{24}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2\sqrt{2}}{24}-1+\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{4}{3}\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}\left(\frac{5\sqrt{2}}{6}-\frac{2}{3}\right)$$

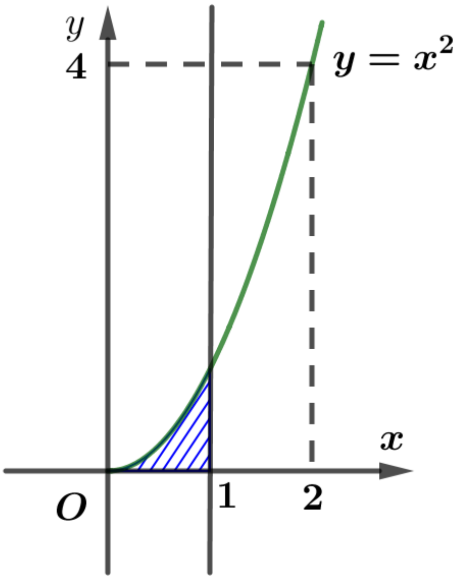
$$=\frac{10\sqrt{2}}{9}-\frac{8}{9}$$

ដូចនេះ $G\left(\frac{\pi-1}{4},\frac{10\sqrt{2}-8}{9}\right)$ ។

ឧទាហរណ៍១៨៖ បន្ទះមួយជាតំបន់ដែលខ័ណ្ឌដោយបន្ទាត់ $x=1, y=0$ និងប៉ារ៉ាបូល $y=x^2$ ។ រកកូអរដោនេនៃទីប្រជុំទម្ងន់ បើគេដឹងថាដង់ស៊ីតេវាស្មើ $\rho(x,y)=x+y$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមានដែនកំណត់៖ $D=\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le x^2\end{cases}$



រូបទី៣.៣១

⊕ ម៉ាស៖ $M=\iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}(x+y)\,dy$$

$$=\int_0^1 dx\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{x^2}$$

$$=\int_0^1\left(x^3+\frac{x^4}{2}\right)dx$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{10}\right)\Bigg|_0^1=\frac{7}{20}$$

$$\overline{x}=\frac{20}{7}\iint_D x(x+y)\,dx\,dy=\frac{20}{7}\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\left(x^2+xy\right)dy$$

$$=\frac{20}{7}\int_0^1\left(x^2y+\frac{xy^2}{2}\right)\Bigg|_0^{x^2}dx$$

$$=\frac{20}{7}\int_0^1\left(x^4+\frac{x^5}{2}\right)dx=\frac{20}{7}\left(\frac{x^6}{12}+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{20}{7}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{12}\right)=\frac{17}{21}$$

$$\overline{y}=\frac{20}{7}\iint_D y(x+y)\,dx\,dy=\frac{20}{7}\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\left(yx+y^2\right)dy$$

$$=\frac{20}{7}\int_0^1\left(\frac{xy^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{x^2}dx$$

$$=\frac{20}{7}\int_0^1\left(\frac{x^5}{2}+\frac{x^6}{3}\right)dx$$

$$=\frac{20}{7}\left(\frac{x^6}{12}+\frac{x^7}{21}\right)\Bigg|_0^1$$

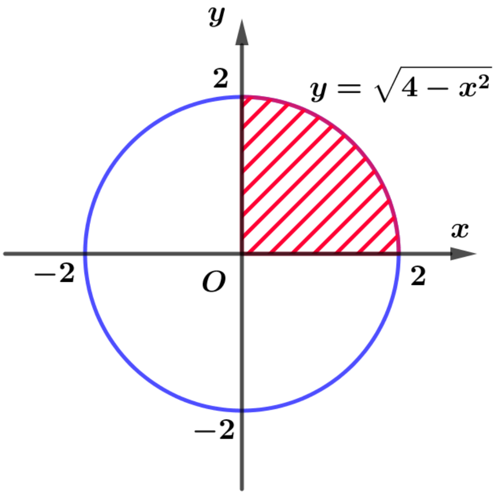
$$=\frac{20}{7}\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{21}\right)=\frac{55}{147}$$

ដូចនេះ $G\left(\frac{17}{21},\frac{55}{147}\right)$ ។

ឧទាហរណ៍១៩៖ រកម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបនឹងអ័ក្ស $\overrightarrow{Ox}$ នៃបន្ទះដែលខ័ណ្ឌដោយក្រាហ្វ $y=\sqrt{4-x^2}$, $x=0$ និង $y=0$ ហើយស្ថិតនៅក្នុងកាដ្រង់ទីមួយ បើគេដឹងថាដង់ស៊ីតេរបស់វាស្មើ $\rho(x,y)=y$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដែនកំណត់៖ $D=\begin{cases}0\le x\le 2\\ 0\le y\le\sqrt{4-x^2}\end{cases}$



រូបទី៣.៣២

គេបាន៖ $I_x = \iint_D y^2 \rho(x,y)\,dxdy$

$$= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} y^3 dx\,dy = \int_0^2 \left.\frac{y^4}{4}\right|_0^{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2 \left(4 - x^2\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2 \left(16 - 8x^2 + x^4\right)dx = \frac{1}{4}\left.\left(16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)\right|_0^2$$

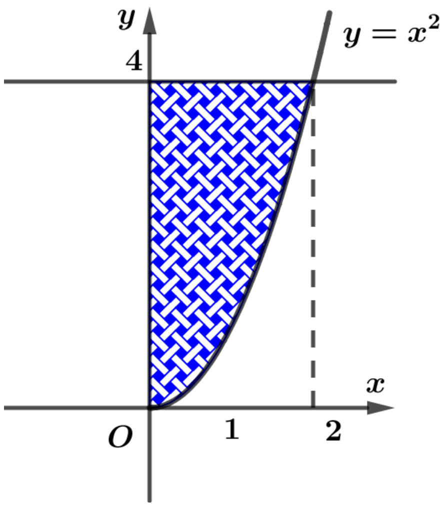
$$= \frac{1}{4}\left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}\right) = \frac{64}{15}$$

ដូចនេះ $I_x = \dfrac{64}{15}$ ។

ឧទាហរណ៍២០៖ រកម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបនឹងអ័ក្ស $\overrightarrow{Oy}$ នៃបន្ទះដែលខ័ណ្ឌដោយក្រាហ្វ $y = x^2$, $x = 0$ និង $y = 4$ ហើយស្ថិតនៅក្នុងកាជ្រង់ទីមួយ បើគេដឹងថាដង់ស៊ីតេរបស់វាស្មើ $\rho(x,y) = y$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដែនកំណត់៖ $D = \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ x^2 \le y \le 4 \end{cases}$



រូបទី

គេបាន៖ $I_y = \iint_D x^2 \rho(x,y)\,dxdy$

$$= \int_0^2 \int_{x^2}^4 x^2 y\,dy\,dx = \int_0^2 \left.\frac{x^2 y^2}{2}\right|_{x^2}^4 dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \left(16x^2 - x^6\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(16\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{7}\right)\Bigg|_0^2$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{16\times 8}{3}+\frac{128}{7}\right)=\frac{256}{21}$$

ដូចនេះ៖ $I_y=\frac{256}{21}$ ។

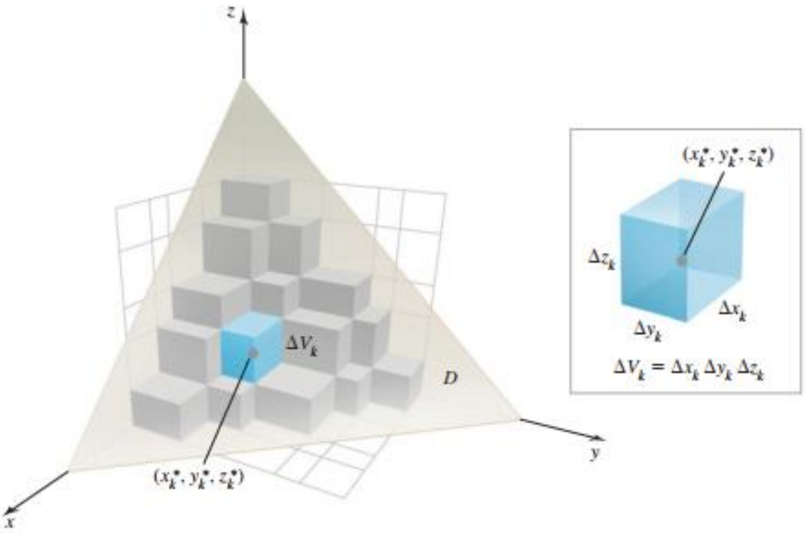
៣.៤. អាំងតេក្រាលទ្រីប

ក. និយមន័យ និងលក្ខណៈ

គេឱ្យអនុគមន៍ f នៃបីអថេរ x,y,z ជាប់លើដែន D ទូទៅនៃ $\mathbb{R}^3$ ។ ដូចករណីអាំងតេក្រាលឌុបដែរគេអាចធ្វើការបំបែក D ជាប្រលេពីប៉ែតកែងតូចៗដូចរូប។

$\left[x_i,x_{i+1}\right]\times\left[y_j,y_{j+1}\right]\times\left[z_k,z_{k+1}\right]$ហើយគេកំណត់ផលបូក

$$S=\sum_i\sum_j\sum_k\left(x_i,y_j,z_k\right)\left(x_{i+1}-x_i\right)\left(y_{j+1}-y_j\right)\left(z_{k+1}-z_k\right)$$



រូបទី៣.៣៤

បើគេតាង $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i,\Delta y_j=y_{j+1}-y_j,\Delta z_k=z_{k+1}-z_k$ គេបាន៖

$$S=\sum_i\sum_j\sum_k f\left(x_i,y_j,z_k\right)\Delta x_i\cdot\Delta y_j\cdot\Delta z_k$$

$$=\sum_i\sum_j\sum_k f\left(x_i,y_j,z_k\right)\Delta V_k\ ,\ \Delta V_k=\Delta x_i\cdot\Delta y_j\cdot\Delta z_k$$

គេបង្ហាញថាបើ f ជាប់លើ D នោះគេបានផលបូក S មានលីមីតជាចំនួនកំណត់កាលណាចំនួនប្រលេពីប៉ែតខិតជិត $+\infty$ ។

លីមីតនេះហៅថាអាំងតេក្រាលទ្រីបនៃ f លើ D តាងដោយ៖

$$I(f)=\iiint\limits_{D} f(x,y,z)\,dxdydz$$ ឬ $$\iiint\limits_{D} f(x,y,z)\,dV=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*,y_k^*,z_k^*\right)\Delta V_k$$

ចំណាំ៖ បើ $f(x,y,z)=1$លើ D នោះគេបាន$V=\iiint\limits_{D} dV$ ៖

លក្ខណៈនៃអាំងតេក្រាលទ្រីបដូចអាំងតេក្រាលឌុបដែរគឺ៖

$(i)\ \forall\lambda\in\mathbb{R}:\iiint\limits_{D}\lambda f(x,y,z)\,dxdydz=\lambda\iiint\limits_{D} f(x,y,z)\,dxdydz$

$(ii)\ \iiint\limits_{D}\left[f(x,y,z)\pm g(x,y,z)\right]dxdydz=\iiint\limits_{D} f(x,y,z)\,dxdydz\pm\iiint\limits_{D} g(x,y,z)\,dxdydz$

(iii)នៅក្នុងករណីនេះបើ D_1,D_2 ជាដែនកំណត់ពីរនៃ D ដែលគេចែកជាពីរផ្នែកនោះគេបាន

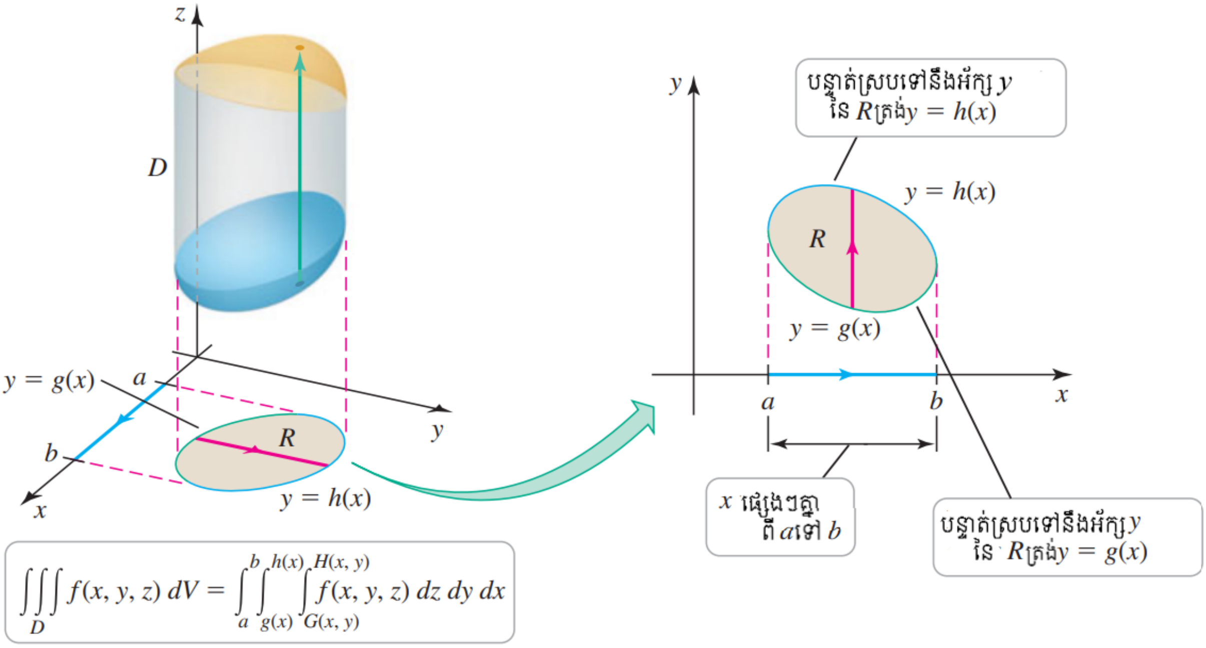
$$\iiint\limits_{D} f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_{D_1} f(x,y,z)\,dxdydz+\iiint\limits_{D_2} f(x,y,z)\,dxdydz$$

ខ. ការគណនាអាំងតេក្រាលទ្រីប

⊕ បើ $D:[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$

$$\Rightarrow \iiint\limits_{D} f(x,y,z)\,dxdydz=\int_a^b dx\int_c^d dy\int_e^f f(x,y,z)\,dz$$

⊕ បើ $D:\begin{cases} a\le x\le b\\ g(x)\le y\le h(x)\\ G(x,y)\le z\le H(x,y)\end{cases}$



រូបទី៣.៣៥

តាង f ជាអនុគមន៍ជាប់លើដែន

$$D=\{(x,y,z): a\le x\le b, g(x)\le y\le h(x), G(x,y)\le z\le H(x,y)\}$$

ដែល g,h,G និង H ជាអនុគមន៍ជាប់។ នោះ f គឺជាអាំងតេក្រាលលើ D និងជាអាំងតេក្រាលទ្រីបត្រូវបានគេវាយតម្លៃថាជាអាំងតេក្រាលដែលកំណត់ដោយៈ

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV=\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)}\int_{G(x,y)}^{H(x,y)} f(x,y,z)\,dzdydx$$

ឬ $$\iiint_D f(x,y,z)\,dV=\int_a^b dx\int_{g(x)}^{h(x)} dy\int_{G(x,y)}^{H(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

⊕ បើ $D:\begin{cases} c\le y\le d \\ g(y)\le x\le h(y) \\ G(x,y)\le z\le H(x,y)\end{cases}$

$$\Rightarrow \iiint_D f(x,y,z)\,dV=\int_c^d\int_{g(y)}^{h(y)}\int_{G(x,y)}^{H(x,y)} f(x,y,z)\,dzdxdy$$

ឬ $$\iiint_D f(x,y,z)\,dV=\int_c^d dy\int_{g(x)}^{h(x)} dx\int_{G(x,y)}^{H(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

ឧទាហរណ៍២១៖ ម៉ាសនៃប្រអប់៖ ប្រអប់សូលីត D មួយនៅចន្លោះប្លង់ $x=0, x=3,$ $y=0, y=2, z=0$ និង $z=1$ ។ ដង់ស៊ីតេនៃប្រអប់ថយចុះនៅក្នុងទិសដៅ z កំណត់ដោយ $f(x,y,z)=2-z$។ ចូររកម៉ាសនៃប្រអប់។

ដំណោះស្រាយ

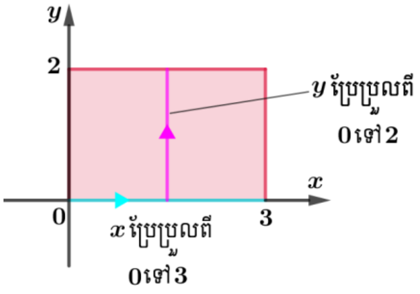
ម៉ាសនៃប្រអប់គឺ

$$M=\iiint_D (2-z)\,dV$$

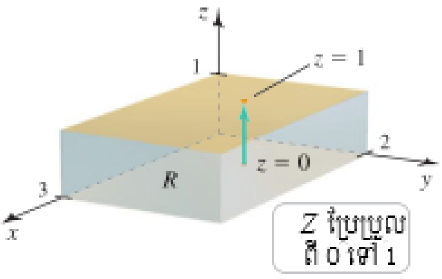
$$=\int_0^3\int_0^2\int_0^1 (2-z)\,dzdydx$$

$$=\int_0^3\int_0^2 \left(2z-\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 dydx$$

$$=\int_0^3\int_0^2 \frac{3}{2}\,dydx$$



រូបទី៣.៣៦



រូបទី៣.៣៧

$$=\int_0^3\left(\frac{3y}{2}\right)\Big|_0^2 dx$$

$$=\int_0^3 3dx=9$$

ឧទាហរណ៍២២៖ ចូររកមាឌនៃដែន D ដែលខ័ណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូលឡូអ៊ីត $y=x^2+z^2$ និង $y=16-3x^2-z^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកដែនកំណត់រវាងខ្សែកោង

+ អាំងតេក្រាលខាងក្នុងតាងដោយ y គឺ៖

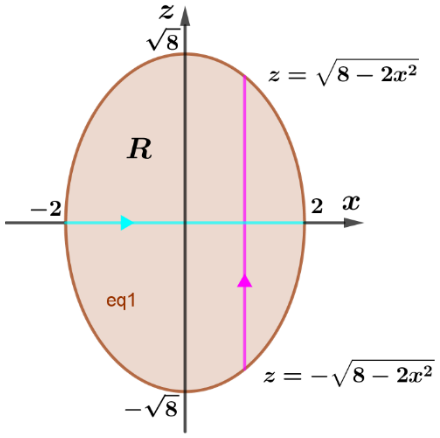
បើ $y=x^2+z^2$ និង $y=16-3x^2-z^2$ នោះគេបាន $x^2+z^2\le y\le 16-3x^2-z^2$

+ អាំងតេក្រាលចំណុចកណ្តាលតាងដោយ z គឺ៖

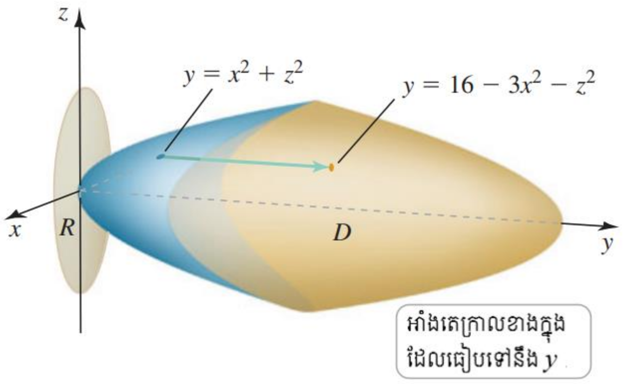
ឥឡូវយើងត្រូវគ្របតំបន់ R ដែលបន្ទាត់ស្របទៅនិងអ័ក្ស (Oz)

ចូលទៅ R ត្រង់ $z=-\sqrt{8-2x^2}$ និងចេញ R ត្រង់ $z=\sqrt{8-2x^2}$ ។

នោះគ្រប់តម្លៃប្រសព្វនៃ x យើងបានអាំងតេក្រាលលើចន្លោះ $-\sqrt{8-2x^2}\le z\le\sqrt{8-2x^2}$ ។



រូបទី៣.៣៨



រូបទី៣.៣៩

+ អាំងតេក្រាលខាងក្រៅតាងដោយ x គឺ៖

ដើម្បីគ្របដែនទាំងអស់នៃតំបន់ R នោះ x ត្រូវនៅចន្លោះពី $x=-2$ ទៅ $x=2$ ។ គេបាន៖

$$V=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{8-2x^2}}^{\sqrt{8-2x^2}}\int_{x^2+z^2}^{16-3x^2-z^2} dydzdx$$

$$=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{8-2x^2}}^{\sqrt{8-2x^2}}\left(16-4x^2-2z^2\right)dzdx$$

$$=\int_{-2}^{2}\left(16z-4x^2z-\frac{2z^3}{3}\right)\Bigg|_{-\sqrt{8-2x^2}}^{\sqrt{8-2x^2}} dx$$

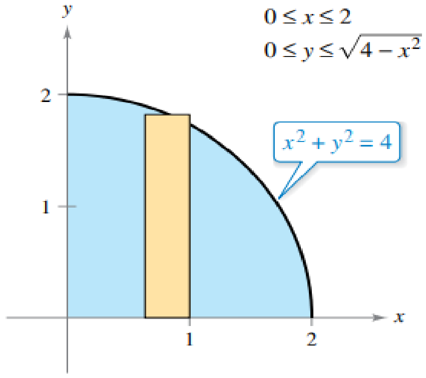
$$=\frac{16\sqrt{2}}{3}\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)^{\frac{3}{2}}dx$$
$$=32\pi\sqrt{2}$$

ដូចនេះ $V=32\pi\sqrt{2}$ ឯកតាមាឌ។

ឧទាហរណ៍២៣៖ ចូរមាឌអេលីបសូអ៊ីតកំណត់ដោយ $4x^2+4y^2+z^2=16$ ។

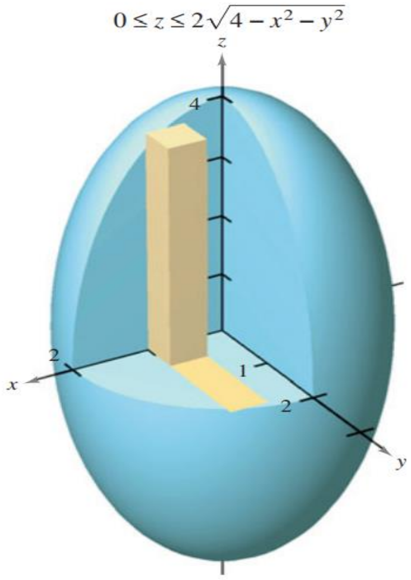
ដំណោះស្រាយ

ដែននៃ x និង y គឺ $0\le x\le 2,\ 0\le y\le\sqrt{4-x^2}$



រូបទី៣.៤០

គេបានដែននៃ z គឺ៖ $0\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}$



អេលីបសូអ៊ីត $4x^2+4y^2+z^2=16$

រូបទី៣.៤១

នោះគេបានមាឌនៃអេលីបសូអ៊ីតគឺ

$$V=\iiint_Q dV$$
$$=8\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{2\sqrt{4-x^2-y^2}}dz\,dy\,dx$$
$$=8\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} z\Big|_0^{2\sqrt{4-x^2-y^2}}dy\,dx$$

$$=16\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{4-x^2-y^2}\,dy\,dx$$

$$=8\int_0^2\left[y\sqrt{4-x^2-y^2}+\left(4-x^2\right)\arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{4-x^2}}\right)\right]_0^{\sqrt{4-x^2}}dx$$

$$=8\int_0^2\left[0+\left(4-x^2\right)\arcsin(1)-0-0\right]dx$$

$$=8\int_0^2\left(4-x^2\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)dx$$

$$=4\pi\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

$$=\frac{64\pi}{3}$$

ដូចនេះ មាឌអេលីបសូអ៊ីតគឺ $\frac{64\pi}{3}$ ឯកតាមាឌ។

ឧទាហរណ៍២៤៖ គណនា $\iiint_R\left(1-x^2-y^2-z^2\right)dV$ ចំពោះ $R=\begin{cases}1\le x\le 3\\1\le y\le 2\\2\le z\le 3\end{cases}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន៖

$$\iiint_R\left(1-x^2-y^2-z^2\right)dV=\int_1^3\int_1^2\int_2^3\left(1-x^2-y^2-z^2\right)dzdydx$$

$$=\int_1^3\int_1^2\left(z-zx^2-zy^2-\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_2^3 dydx$$

$$=\int_1^3\int_1^2\left(3-3x^2-3y^2-9-2+2x^2+2y^2+\frac{8}{3}\right)dydx$$

$$=\int_1^3\int_1^2\left(-\frac{16}{3}-x^2-y^2\right)dydx$$

$$=\int_1^3\left(-\frac{16y}{3}-yx^2-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 dx$$

$$=\int_1^3\left(-x^2-\frac{23}{3}\right)dx$$

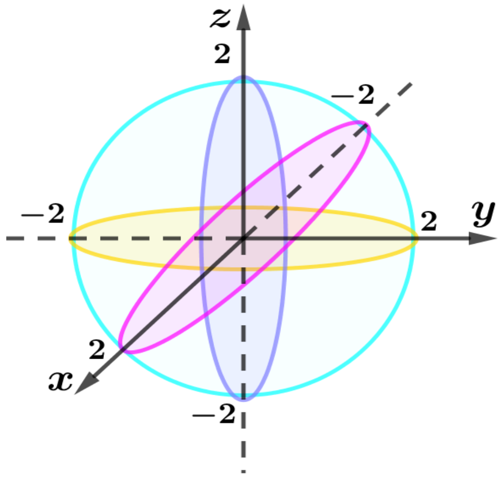
$$=\left(-\frac{x^3}{3}-\frac{23x}{3}\right)\Bigg|_1^3$$

$$= -9 - 23 + \frac{23}{3} + \frac{1}{3}$$

$$= -32 + \frac{24}{3} = -24$$

ឧទាហរណ៍២៥៖ គណនាមាឌនៃសូលីតនៅលើសមីការស្វ៊ែរ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ។

ដំណោះស្រាយ



រូបទី៣.៤២

យើងមាន៖

$$R = \begin{cases} -2 \le x \le 2 \\ -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2} \\ -\sqrt{4-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{4-x^2-y^2} \end{cases}$$

នោះគេបានមាឌនៃសូលីតកំណត់ដោយ៖

$$V = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dzdydx$$

$$= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 2\sqrt{4-x^2-y^2}\, dydx$$

តាង $y = \sqrt{4-x^2}\sin t \Rightarrow dy = \sqrt{4-x^2}\cos tdt$

$$\Rightarrow V = 2\int_{-2}^{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-x^2-\left(4-x^2\right)\sin^2 t} \times \sqrt{4-x^2}\cos tdtdx$$

$$= 2\int_{-2}^{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(4-x^2\right)\cos^2 tdtdx$$

$$= 2\int_{-2}^{2} \left(4-x^2\right)\left(\frac{1}{2}t + \frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(4-x^2\right)\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)dx$$

$$= \pi\int_{-2}^{2} \left(4-x^2\right)dx = \pi\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2}$$

$$= \pi\left(8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3}\right)$$

$$= \frac{32\pi}{3}$$

ដូចនេះ $V=\dfrac{32\pi}{3}$ ឯកតាមាឌ។

គ.វិធីប្តូរអថេរក្នុងអាំងតេក្រាលទ្រីប

យើងតាង $\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$ ដែល $m(u,v,w)$ ប្រែប្រួលលើ R ហើយរូបភាព $M(x,y,z)$ របស់វាលើ D ។

បើអនុវត្តន៍នេះជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយពី D ទៅ R នោះគេបានJacobianកំណត់ដោយៈ

$$dV = dxdydz = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw$$

$$\Rightarrow |J(u,v,w)| = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_R f\left[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\right]|J(u,v,w)|dudvdw$$

ឧទាហរណ៍២៦៖ នៅក្នុងការប្តូរអញ្ញាត $x=au, y=bv$ និង $z=cw$ ដែល $a,b,c>0$ នោះសូលីតអេលីបសូអ៊ីត E កំណត់ដោយ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$ នោះគេបានស្វ៊ែរ B កំណត់ដោយ $u^2+v^2+w^2\le 1$

តាមដេទែមីណង់Jacobianគេបាន៖

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

នោះគេបានមាឌនៃសូលីតអេលីបសូអ៊ីតកំណត់ដោយ៖

$$V = \iiint_E dxdydz$$

$$= \iiint_B abcdudvdw = abc \times (Volume\ of\ \ B)$$

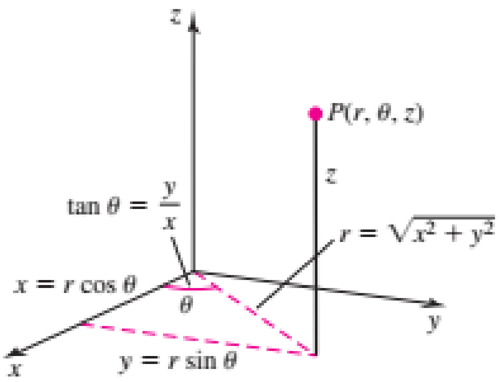
$$= \frac{4}{3}\pi abc \text{ ឯកតាមាឌ}$$

ឃ.អនុវត្តន៍

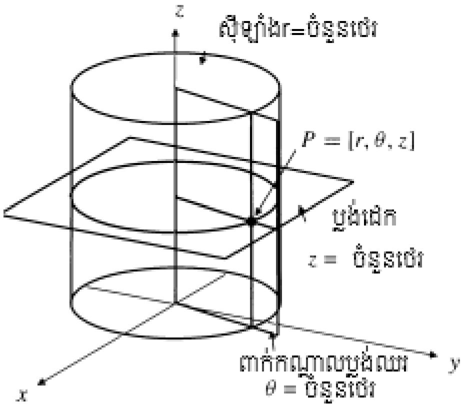
⊕ កូអរដោនេស៊ីឡាំង

ការប្តូរកូអរដោនេស៊ីឡាំងកំណត់ដោយៈ

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \quad ,0 \le \theta \le 2\pi \,, r \ge 0 \\ z = z \end{cases}$$



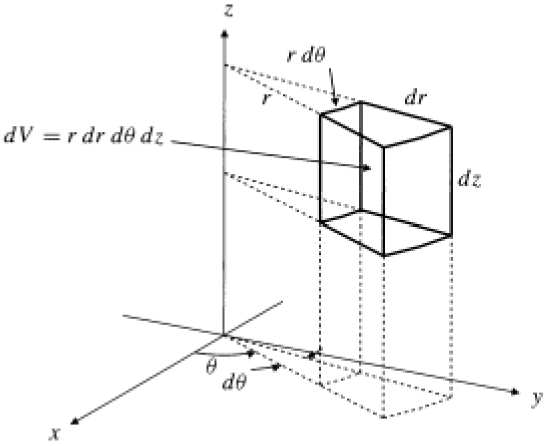
រូបទី៣.៤៣



រូបទី៣.៤៤

កូអរដោនេស៊ីឡាំងនៃចំណុច ផ្ទៃកូអរដោនេចំពោះកូអរដោនេស៊ីឡាំងដោយធាតុនៅក្នុងមាឌ កូអរដោនេស៊ីឡាំងគឺ $dV = rdrd\theta dz$

គេបាន $\left|J(r,\theta,z)\right| = \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$



រូបទី៣.៤៥

ដូចនេះ $\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_R g(r,\theta,z)rdrd\theta dz$

ឬ $\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_R f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta dz$

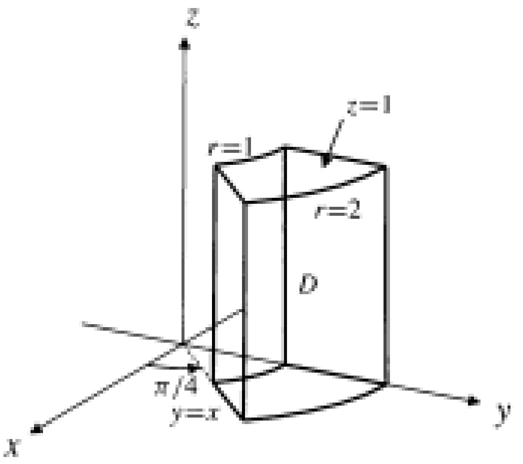
ឧទាហរណ៍២៧៖ គណនា $\iiint_D (x^2+y^2)dV$ លើតំបន់ដែលមានដែនខ័ណ្ឌដោយព័ទ្ធជុំវិញ

ដោយស៊ីឡាំង $x^2+y^2=1$ និង $x^2+y^2=4$ និងប្លង់ $z=0, z=1, x=0$ និង $x=y$ ។

ដំណោះស្រាយ

នៅក្នុងកូអរដោនេស៊ីឡាំងដែនគឺជាដែនដែលកំណត់ដោយ

$r=1, r=2, \theta=\frac{\pi}{4}, \theta=\frac{\pi}{2}, z=0$ និង $z=1$ (ដូចរូប)



រូបទី៣.៤៦

ដោយ $x^2+y^2=r^2$ គឺជាអាំងតេក្រាលនៃ $\iiint_D (x^2+y^2)dV = \int_0^1 dz\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_1^2 r^2 rdr$

$$=(1-0)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{2^4}{4}-\frac{1^4}{4}\right)=\frac{15}{16}\pi$$

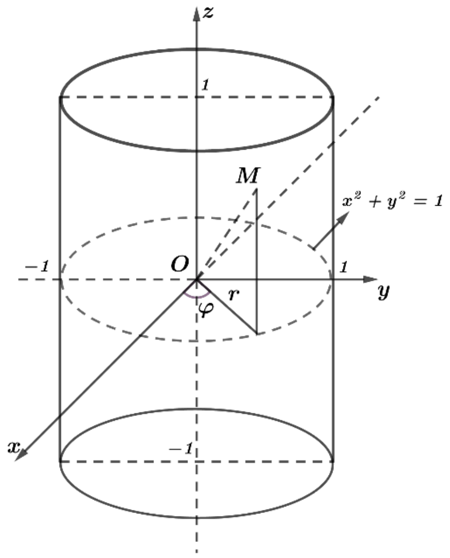
ឧទាហរណ៍២៨៖ គណនា $\iiint_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$ ដែន V ខ័ណ្ឌដោយផ្ទៃស៊ីឡាំង $x^2+y^2=1$

និងប្លង់ $z=-1$ និង $z=1$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន៖ $I=\iiint_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$

ប្តូរចូលក្នុងតម្រុយស៊ីឡាំង$V:\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \Rightarrow R:\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ -1 \le z \le 1 \end{cases}$



រូបទី៣.៤៧

$$I = \iiint_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-2)^2}} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^{1} dz \int_0^1 \frac{rdr}{\sqrt{r^2 + (z-2)^2}}$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{r^2 + (z-2)^2}\Big|_0^1 dz$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1 + (z-2)^2} - (z-2) \right) dz$$

$$= 2\pi \left(\frac{z-2}{2}\sqrt{1+(z-2)^2} + \frac{1}{2}\ln\left| z - 2 + \sqrt{1+(z-2)^2} \right| \right) - \frac{(z-2)^2}{2} \Bigg|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{9}{2}$$

ដូចនេះ $I = \frac{9}{2}$ ។

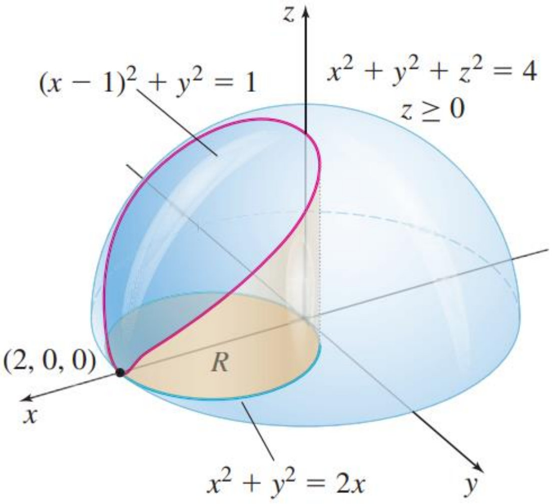
ឧទាហរណ៍២៩៖ ចូររកមាឌនៃសូលីតដែលខ័ណ្ឌដោយពាក់កណ្តាលកន្លះស្វ៊ែរ $x^2 + y^2 + z^2 = 4 \ , z \ge 0$ និងស៊ីឡាំង $(x-1)^2 + y^2 = 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

រូបខាងក្រោមបង្ហាញពីកន្លះស្វ៊ែ និងផ្នែកនៃស៊ីឡាំងដែលបង្កើតជាមាឌ។

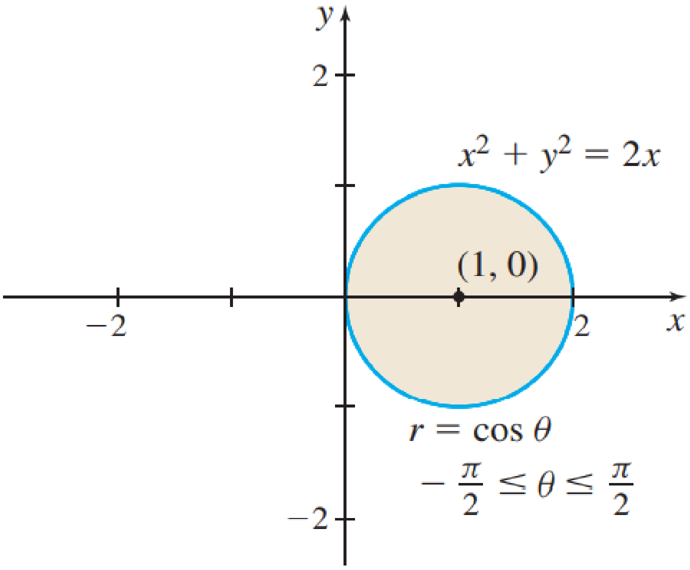
ពីព្រោះ $x^2 + y^2$ ជាសមីការនៃកន្លះស្វ៊ែរ និងស៊ីឡាំង យើងប្រើកូអរដោនេស៊ីឡាំង។ សមីការកន្លះគឺ៖

កូអរដោនេចតុកោនកែង៖ $x^2+y^2+z^2=4, z\geq 0$



រូបទី៣.៤៨

កូអរដោនេស៊ីឡាំង៖ $r^2+z^2=4, z\geq 0$ ឬ $z=\sqrt{4-r^2}$



រូបទី៣.៤៩

សមីការនៃតំបន់នៅក្នុងប្លង់ (xOy) ខាងលើជាផ្ទៃកំណត់ដោយ៖

កូអរដោនេចតុកោនកែង៖ $(x-1)^2+y^2=1$

$$x^2+y^2=2x$$

កូអរដោនេស៊ីឡាំង៖ $r^2=2(r\cos\theta)$, $-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$

$$r=2\cos\theta$$

សូលីត E ជាមាឌដែលខ័ណ្ឌដោយដែន $0\leq z\leq\sqrt{4-r^2}, 0\leq r\leq 2\cos\theta$ និង $-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$

នោះមាឌនៃសូលីត E គឺ៖

$$V=\iiint_E dV=\iiint_E r\,dr\,d\theta\,dz=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta} r\left[z\right]_0^{\sqrt{4-r^2}}dr\,d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta} r\left(4-r^2\right)^{\frac{1}{2}}dr\,d\theta$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{2}{3}\left(4-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2\cos\theta}$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[8-\left(4-4\cos^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}\right]d\theta$$

$$=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^3\theta\right)d\theta$$

$$=\frac{8\pi}{3}-\frac{32}{9}$$

ដូចនេះ មាឌនៃសូលីតដែលខ័ណ្ឌដោយកន្លះស្វ៊ែរ និងស៊ីឡាំងគឺ $\frac{8\pi}{3}-\frac{32}{9}$ ឯកតាមាឌ។

⊕ កូអរដោនេស្វ៊ែរ

ការប្តូរកូអរដោនេស្វ៊ែរកំណត់ដោយៈ

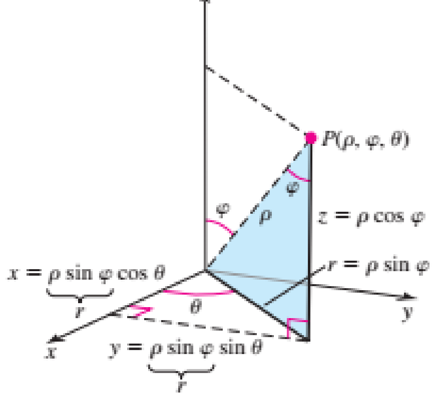
$$\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases},\ \rho\ge 0, 0\le\theta\le 2\pi, -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$$

ដែល $\rho^2=x^2+y^2+z^2=r^2+z^2$

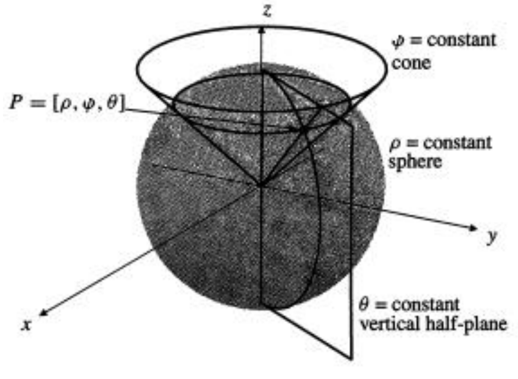
$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\rho\sin\varphi$$

$\tan\varphi=\frac{r}{z}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$ និង $\tan\theta=\frac{y}{x}$ ដោយជាតុនៅក្នុងមាឌស្វ៊ែរគឺៈ

$$dV=\rho^2\cos\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$



កូអរដោនេស្វ៊ែរនៃចំណុច(រូបទី៣.៥០)



ផ្ទៃកូអរដោនេនៃកូអរដោនេស្វ៊ែរ(រូបទី៣.៥១)

គេបាន

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)}=\begin{vmatrix}\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0\end{vmatrix}$$

$$=\rho\cos\varphi\cos\theta\left(\rho\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta\right)+\rho\cos\varphi\sin\theta\left(\rho\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\right)$$

$$+\rho\sin\varphi\left(\rho\sin^2\varphi\cos^2\theta+\sin^2\varphi\sin^2\theta\right)$$

$$=\rho^2\cos^2\varphi\cos^2\theta\sin\varphi+\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\theta\sin\varphi+\rho\sin^3\varphi$$

$$=\rho^2\sin\varphi\left(\cos^2\varphi\cos^2\theta+\cos^2\varphi\sin^2\theta+\sin^2\varphi\right)$$

$$=\rho^2\sin\varphi\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)$$

$$=\rho^2\sin\varphi$$

ដូចនេះ $\boxed{\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint_R g(r,\varphi,\theta)\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta}$ ។

ឬបើគេតាង f ជាលើដែន $D=\{(\rho,\varphi,\theta):g(\varphi,\theta)\le\rho\le h(\varphi,\theta),a\le\varphi\le b,\alpha\le\theta\le\beta\}$ ។ នោះ f គឺជាអាំងតេក្រាលលើ D និងជាអាំងតេក្រាលទ្វើបនៃ f លើ D នៅក្នុងកូអរដោនេស្វ៊ែរកំណត់ដោយ៖

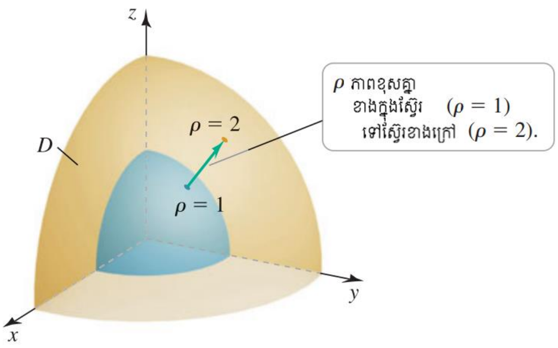
$$\boxed{\iiint_D f(\rho,\varphi,\theta)\,dV=\int_{\alpha}^{\beta}\int_{a}^{b}\int_{g(\varphi,\theta)}^{h(\varphi,\theta)} f(\rho,\varphi,\theta)\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta}$$

ឧទាហរណ៍៣០៖ គណនា $\iiint_D\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}dV$ ដែល D នៅក្នុងដែនដំបូងរវាងស្វ៊ែរពីរដែលមានកាំស្មើ1និង 2 នៅចំណុចកណ្ដាលនៃដែននោះ។

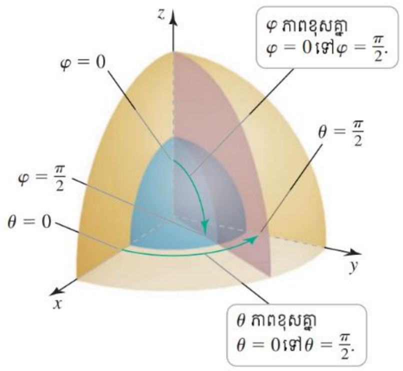
ដំណោះស្រាយ

យើងមាន៖

$\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}=\left(\rho^2\right)^{-\frac{3}{2}}=\rho^{-3}$ ដែល $D=\left\{(\rho,\varphi,\theta):1\le\rho\le 2,0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$



រូបទី៣.៥២



រូបទី

នោះគេគណនាអាំងតេក្រាលដូចខាងក្រោម៖

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 \rho^{-3}\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 \rho^{-1}\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln|\rho|\Big|_1^2\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta$$

$$=\ln 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta$$

$$=\ln 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\,d\theta$$

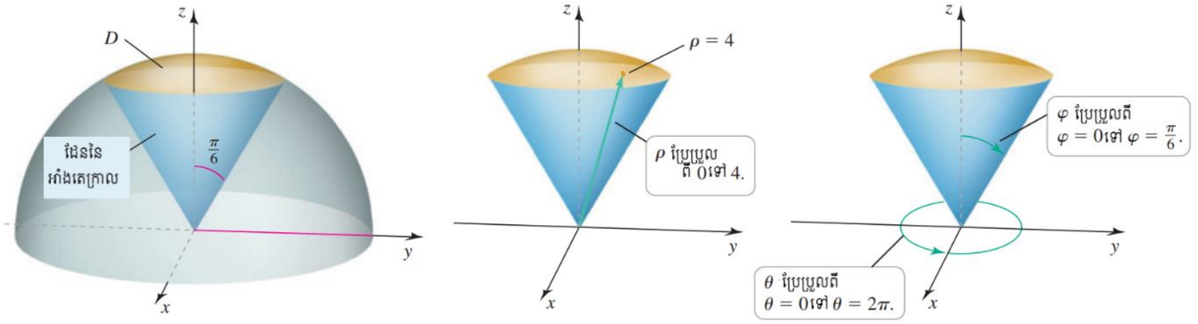
$$=\ln 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{\pi\ln 2}{2}$$

ដូចនេះ $\iiint_D\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}dV=\frac{\pi\ln 2}{2}$ ឯកតាមាឌ។

ឧទាហរណ៍៣១៖ ចូររកមាឌនៃសូលីតដែលមានដែន D ជាផ្នែកខាងក្នុងនៃកោន $\varphi=\frac{\pi}{6}$ និងខាងក្នុងស្វ៊ែរ $\rho=4$។

ដំណោះស្រាយ

ដើម្បីរកមាឌយើងត្រូវគណនាអាំងតេក្រាលទ្រីបដែល $f(\rho,\varphi,\theta)=1$ ។ នៅក្នុងទិសដៅនៃកាំជាបន្លាយពីតំបន់ $\rho=0$ទៅស្វ៊ែរ $\rho=4$។ ដើម្បីបត់គ្រប់ចំណុចនៃ D ,φ ចាប់ពី $0\to\frac{\pi}{6}$ និង θ ចាប់ពី $0\to 2\pi$ ដូចរូប។



រូបទី៣.៥៤

ដោយអនុគមន៍ $f=1$ នោះគេបានមាឌនៃដែនគឺ

$$\iiint_D dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{4} \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\rho^3}{3}\bigg|_0^4 \sin\varphi d\varphi d\theta$$

$$= \frac{64}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin\varphi d\varphi d\theta$$

$$= \frac{32}{3}\int_0^{2\pi} \left(-\cos\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta$$

$$= \frac{32}{3}\left(2-\sqrt{3}\right)\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{64\pi}{3}\left(2-\sqrt{3}\right)$$

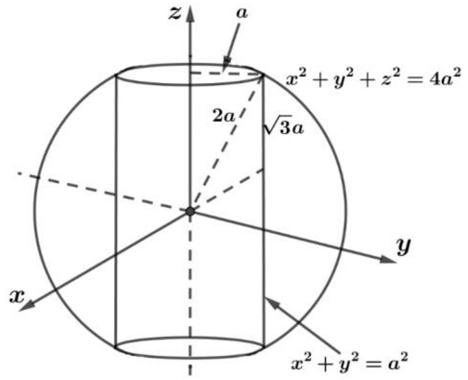
ដូចនេះ $V = \frac{64\pi}{3}\left(2-\sqrt{3}\right)$ ឯកតាមាឌ។

ឧទាហរណ៍៣២៖ ពេលដែលគេធ្វើនិចលភាពជុំវិញអ័ក្ស z នៃដង់ស៊ីតេសូលីត δ ដែលនៅតំបន់ R ត្រូវបានផ្តល់ដោយអាំងតេក្រាល $I = \iiint_R \left(x^2+y^2\right)\delta dV$ ។ ចូរគណនាម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃសូលីតដែលបង្កឡើងនៅក្នុងស្វ៊ែរ $x^2+y^2+z^2=4a^2$ និងខាងក្រៅស៊ីឡាំង $x^2+y^2=a^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយស្វ៊ែរ $x^2+y^2+z^2=4a^2 \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \\ \frac{a}{\sin\varphi} \le \rho \le 2a \end{cases}$

នៅក្នុងលក្ខខណ្ឌនៃកូអរដោនេស្វ៊ែររបស់វាគឺ



រូបទី៣.៥៥

$$I=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_{\frac{a}{\sin\varphi}}^{2a}\rho^2\sin^2\varphi\rho^2 d\rho$$

នៅក្នុងលក្ខខណ្ឌនៃកូអរដោនេស៊ីឡាំងរបស់វាគឺ

$$I=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_a^{2a}rdr\int_0^{\sqrt{4a^2-r^2}}r^2dz$$

$$=4\pi\int_a^{2a}r^3\sqrt{4a^2-r^2}dr$$

តាង $u=4a^2-r^2\Rightarrow du=-2rdr$

$$\Rightarrow I=2\pi\int_0^{3a^2}\left(4a^2-u\right)\sqrt{u}du$$

$$=2\pi\left(4a^2\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_0^{3a^2}=\frac{44}{5}\sqrt{3}\pi a^5$$

ដូចនេះ $I=\frac{44}{5}\sqrt{3}a^5\pi$ ឯកតាមាឌ។

ឧទាហរណ៍៣៣៖ គណនា $\iiint_V\left(x^2+y^2\right)dx\,dy\,dz,$ ដែល V ជាប៊ូល $x^2+y^2+z^2\le R^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន៖

$$I=\iiint_V\left(x^2+y^2\right)dx\,dy\,dz$$

ប្តូរចូលក្នុងតម្រុយកូអរដោនេស្វ៊ែរយើងបាន៖

$$\begin{cases}x=\rho\sin\theta\cos\varphi\\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi\\ z=\rho\cos\theta\end{cases}\Rightarrow V'=\begin{cases}0\le\rho\le R\\ 0\le\varphi\le 2\pi\\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\iiint_V\left(x^2+y^2\right)dx\,dy\,dz$$

$$=\iiint_{V'}\rho^2\sin^2\theta\left(\rho^2\sin\theta\right)d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

$$=\int_0^R\rho^4dr\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta$$

$$=2\pi\int_0^R \rho^4 dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2\theta-1\right)d\left(\cos\theta\right)$$

$$=2\pi\int_0^R \rho^4 dr\left[\frac{1}{3}\cos^3\theta-\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2\pi\times\frac{R^5}{5}\times\left(-\frac{1}{3}+1\right)$$

$$=\frac{4}{15}\pi R^5$$

ដូចនេះ: $I=\dfrac{4}{15}\pi R^5$ ។

៣.៥.ការអនុវត្តន៍អាំងតេក្រាលទ្រីប

បើសូលីត V មានដង់ស៊ីតេ $\rho\left(x,y,z\right)$ នោះគេបាន៖

⊕ ម៉ាសនៃដែន V

$$M=\iiint_V \rho\left(x,y,z\right)dV=\iiint_V \rho\left(x,y,z\right)dx\,dy\,dz$$

ករណីពិសេសបើ $\rho\left(x,y,z\right)=1$ នោះគេបាន៖

$$M=\iiint_V dV=\iiint_V dx\,dy\,dz=V$$

ម៉ាស=មាឌ×ដង់ស៊ីតេ ឬ $M=V\times d$

⊕ ម៉ូម៉ង់វិលជុំវិញអ័ក្សទាំងបី

+ វិលជុំវិញអ័ក្ស $\overrightarrow{Ox}$: $M_{yz}=\iiint_V x\rho\left(x,y,z\right)dV$

+ វិលជុំវិញអ័ក្ស $\overrightarrow{Oy}$: $M_{xz}=\iiint_V y\rho\left(x,y,z\right)dV$

+ វិលជុំវិញអ័ក្ស $\overrightarrow{Oz}$: $M_{xy}=\iiint_V x\rho\left(x,y,z\right)dV$

+ ទីប្រជុំទម្ងន់ $G\left(\bar{x},\bar{y},\bar{z}\right)$

$$\bar{x}=\frac{M_{yz}}{M}=\frac{1}{M}\iiint\limits_V x\rho(x,y,z)\,dV$$
$$\bar{y}=\frac{M_{xz}}{M}=\frac{1}{M}\iiint\limits_V y\rho(x,y,z)\,dV$$
$$\bar{z}=\frac{M_{xy}}{M}=\frac{1}{M}\iiint\limits_V z\rho(x,y,z)\,dV$$

ករណីពិសេសដែល $\rho(x,y,z)=1$ឯកតាគេបាន៖

$$\bar{x}=\frac{1}{V}\iiint\limits_V x\,dV \qquad \bar{y}=\frac{1}{V}\iiint\limits_V y\,dV \qquad \bar{z}=\frac{1}{V}\iiint\limits_V z\,dV$$

⊕ ម៉ូម៉ង់និចលភាពវិលជុំវិញអ័ក្សទាំងបី

+ វិលជុំវិញអ័ក្ស $\overrightarrow{Ox}$: $$I_x=\iiint\limits_V (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dV$$

+ វិលជុំវិញអ័ក្ស $\overrightarrow{Oy}$: $$I_y=\iiint\limits_V (x^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dV$$

+ វិលជុំវិញអ័ក្ស $\overrightarrow{Oz}$: $$I_z=\iiint\limits_V (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,dV$$

+ បន្ទុកអគ្គីសនីសរុប Q: $$Q=\iiint\limits_V \rho(x,y,z)\,dV$$

ឧទាហរណ៍៣៤៖ ចូររកម៉ាសនៃបន្ទះស្តើងដោយប្លង់កូអរដោនេ និងប្លង់ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ហើយមានដង់ស៊ីតេ $\rho(x,y,z)=kxyz$ ។

ដំណោះស្រាយ

បន្ទះស្តើងមានដែនកំណត់ដោយ $x=0,y=0,z=0$ និង $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

$$M=\iiint\limits_V \rho(x,y,z)\,dV=\int_0^c\int_0^{b\left(1-\frac{z}{c}\right)}\int_0^{a\left(1-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)}(kxyz)\,dx\,dy\,dz$$

$$=k\int_0^c z\,dz\int_0^{b\left(1-\frac{z}{c}\right)}y\,dy\int_0^{a\left(1-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)}x\,dx=k\int_0^c z\,dz\int_0^{b\left(1-\frac{z}{c}\right)}y\,dy\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^{a\left(1-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)}$$

$$=k\int_0^c z\,dz\int_0^{b\left(1-\frac{z}{c}\right)}y\,dy\frac{a^2}{2}\left(1-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)^2=k\int_0^c z\,dz\int_0^{b\left(1-\frac{z}{c}\right)}y\left[\left(1-\frac{z}{c}\right)-\frac{y}{b}\right]^2dy$$

$$=\frac{ka^2}{2}\int_0^c z\,dz\int_0^{b\left(1-\frac{z}{c}\right)}\left[y\left(1-\frac{z}{c}\right)^2+\frac{y^3}{b^2}-\frac{2y^2}{b}\left(1-\frac{z}{c}\right)\right]dy$$

$$=\frac{ka^2}{2}\int_0^c z\,dz\left[\frac{y^2}{2}\left(1-\frac{z}{c}\right)^2+\frac{y^4}{4b^2}-\frac{2y^3}{3b}\left(1-\frac{z}{c}\right)\right]_0^{b\left(1-\frac{z}{c}\right)}$$

$$=\frac{ka^2}{2}\int_0^c z\,dz\left[\frac{y^2}{2}\left(1-\frac{z}{c}\right)^4+\frac{b^4}{4b^2}\left(1-\frac{z}{c}\right)^4-\frac{2b^3}{3b}\left(1-\frac{z}{c}\right)^4\right]$$

$$=\frac{ka^2}{2}\int_0^c z\left[\frac{b^2}{2}+\frac{b^4}{4}-\frac{2b^2}{3}\right]\left(1-\frac{z}{c}\right)^4dz=\frac{ka^2}{2}\times\frac{b^2}{12}\int_0^c\left(1-\frac{z}{c}\right)^4dz\quad\left(Let\,z=c\sin^2\theta\right)$$

$$=\frac{k\,a^2b^2}{12}\int_0^{\frac{\pi}{2}}c\sin^2\theta\left(1-\sin^2\theta\right)^4\left(2c\sin\theta\cos\theta\right)d\theta$$

$$=\frac{k\,a^2b^2c^2}{12}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\left(\cos^8\theta\right)\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$=\frac{k\,a^2b^2c^2}{12}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos^9\theta\,d\theta$$

ចំពោះ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos^9\theta d\theta$

តាង $u=\cos\theta\Rightarrow du=-\sin\theta d\theta$

$$\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos^9\theta d\theta=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}u^9\left(1-u^2\right)du$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-u^9+u^{11}\right)du$$

$$=\left[-\frac{u^{10}}{10}+\frac{u^{12}}{12}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left[-\frac{\cos^{10}\theta}{10}+\frac{\cos^{12}\theta}{12}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{10}-\frac{1}{12}=\frac{1}{60}$$

$$\Rightarrow M=\frac{k\,a^2b^2c^2}{12}\times\frac{1}{60}=\frac{k\,a^2b^2c^2}{720}$$

ដូចនេះ ម៉ាសនៃបន្ទះស្តើងគឺ $\frac{k\,a^2b^2c^2}{720}$ ។

ឧទាហរណ៍៣៥៖ រកកូអរដោនេទីប្រជុំទម្ងន់នៃស៊ីឡាំងដែលខ័ណ្ឌដោយស្វ៊ែរ $x^2+y^2+z^2=a^2$ និង ដង់ស៊ីតេ $\rho\left(x,y,z\right)=k\,xyz$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងបំលែងជាកូអរដោនេស្វ៊ែរគេបាន៖

$$x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta\ , dx\,dy\,dz = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

$$\Rightarrow V : \begin{cases} 0 \le r \le a \\ 0 \le \phi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

រកម៉ាស

$$M = \iiint_V \rho(x,y,z)\,dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a (r\sin\theta\cos\phi)(r\sin\theta\sin\phi)(r\cos\theta)(r^2\sin\theta)\,dr\,d\theta\,d\phi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^5\sin^3\theta\cos\theta\sin\phi\cos\phi\,dr\,d\theta\,d\phi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\phi\cos\phi\,d\phi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos\theta\,d\theta\int_0^a r^5dr$$

$$= -\left[\frac{\cos^2\phi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\sin^4\theta}{4}\right]\left[\frac{r^6}{6}\right]_0^a = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{a^6}{6}\right) = \frac{a^6}{48}$$

រកកូអរដោនេទីប្រជុំទម្ងន់

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iiint_V x\rho(x,y,z)\,dV = \frac{48}{a^6}\iiint_V x^2yz\,dx\,dy\,dz$$

$$= \frac{48}{a^6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a (r\sin\theta\cos\phi)^2(r\sin\theta\sin\phi)(r\cos\theta)(r^2\sin\theta)\,dr\,d\theta\,d\phi$$

$$= \frac{48}{a^6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^6\sin^4\theta\cos\theta\sin\phi\cos^2\phi\,dr\,d\theta\,d\phi$$

$$= \frac{48}{a^6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\phi\cos^2\phi\,d\phi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\cos\theta\,d\theta\int_0^a r^6dr$$

$$= \frac{48}{a^6}\times\left[-\frac{\cos^3\phi}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\times\left[\frac{\sin^5\theta}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\times\left[\frac{r^7}{7}\right]_0^a$$

$$= \frac{48}{a^6}\times\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{a^7}{7}\right) = \frac{16a}{35}$$

ដូចគ្នាដែរចំពោះ $\bar{y} = \bar{z} = \dfrac{16a}{35}$

ដូចនេះទីប្រជុំទម្ងន់នៃស៊ីឡាំងគឺ $G\left(\dfrac{16a}{35}, \dfrac{16a}{35}, \dfrac{16a}{35}\right)$ ។

ឧទាហរណ៍៣៦៖ ចូររកម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃផ្នែកនៃតេត្រាអែត $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ វិលជុំវិញអ័ក្ស $\overrightarrow{Oz}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង ρ ជាដង់ស៊ីតេនៃតេត្រាអែត

$$I_z=\iiint_V\left(x^2+y^2\right)\rho\left(x,y,z\right)dV=\rho\int_0^a dx\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}\left(x^2+y^2\right)dy\int_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)}dz$$

$$=\rho\int_0^a dx\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}\left(x^2+y^2\right)dy\; c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)$$

$$=\rho c\int_0^a dx\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}\left[x^2\left(1-\frac{x}{a}\right)-\frac{x^2y}{b}+y^2\left(1-\frac{x}{a}\right)-\frac{y^3}{b}\right]dy$$

$$=\rho c\int_0^a\left[x^2\left(1-\frac{x}{a}\right)y-\frac{x^2y^2}{2b}+\frac{y^3}{3}\left(1-\frac{x}{a}\right)-\frac{y^4}{4b}\right]_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}dx$$

$$=\rho c\int_0^a\left[x^2\left(1-\frac{x}{a}\right)b\left(1-\frac{x}{a}\right)-\frac{x^2}{2b}b^2\left(1-\frac{x}{a}\right)^2+\frac{b^3}{3}\left(1-\frac{x}{a}\right)^3\left(1-\frac{x}{a}\right)-\frac{b^4}{4b}\left(1-\frac{x}{a}\right)^4\right]dx$$

$$=b\rho c\int_0^a\left[x^2\left(1-\frac{x}{a}\right)^2-\frac{x^2}{2}\left(1-\frac{x}{a}\right)^2-\frac{b^2}{3}\left(1-\frac{x}{a}\right)^4-\frac{b^2}{4}\left(1-\frac{x}{a}\right)^4\right]dx$$

$$=\rho bc\int_0^a\left[\frac{x^2}{2}\left(1-\frac{x}{a}\right)^2+\frac{b^2}{12}\left(1-\frac{x}{a}\right)^4\right]dx$$

$$=\rho bc\int_0^a\left[\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{2x^3}{a}+\frac{x^4}{a^2}\right)+\frac{b^2}{12}\left(1-\frac{4x}{a}+\frac{6x^2}{a^2}-\frac{4x^3}{a^3}+\frac{x^4}{a^4}\right)\right]dx$$

$$=\rho bc\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2a}+\frac{x^5}{5a^2}\right)+\frac{b^2}{12}\left(x-\frac{2x^2}{a}+\frac{2x^3}{a^2}-\frac{x^4}{a^3}+\frac{x^5}{5a^4}\right)\right]_0^a$$

$$=\rho bc\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a^3}{3}-\frac{a^4}{2a}+\frac{a^5}{5a^2}\right)+\frac{b^2}{12}\left(a-\frac{2a^2}{a}+\frac{2a^3}{a^2}-\frac{a^4}{a^3}+\frac{a^5}{5a^4}\right)\right]$$

$$=\rho bc\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a^3}{30}\right)+\frac{b^2}{12}\left(\frac{a}{5}\right)\right]$$

$$=\rho bc\left(\frac{a^3}{60}+\frac{ab^2}{60}\right)$$

$$=\frac{\rho abc}{60}\left(a^2+b^2\right)$$

ដូចនេះ $I_z=\rho\frac{abc}{60}\left(a^2+b^2\right)$ ។

លំហាត់ពហុអាំងតេក្រាល

៣.១.គណនាអាំងតេក្រាលឌុប

១. គណនា $\iint_D x\ln y\,dxdy, D=\{(x,y):0\le x\le 4, 1\le y\le e\}$ ។

២.គណនា $\iint_D (x-y)dxdy, D$ ខណ្ឌដោយបន្ទាត់ $y=2-x^2$, $y=2x-1$ ។

៣.គណនា $\iint_D (x^2+y^2)dxdy, D$ ខណ្ឌដោយខ្សែកោង $y=x, x=0, y=1, y=2$ ។

៤.គណនា $\iint_D (3x^2-2xy+y)dxdy, D$ ខណ្ឌដោយខ្សែកោង $x=0, x=y^2, y=2$ ។

៥.គណនា $\iint_D y\ln x\,dxdy,\ D$ ខណ្ឌដោយ $xy=1,\ y=\sqrt{x},\ x=2$ ។

៦.គណនា $\iint_D (\cos 2x+\sin y)dxdy, D$ ខណ្ឌដោយខ្សែកោង $x=0, y=0, 4x+4y-\pi=0$ ។

៧.គណនា $\iint_D (3x+y)dxdy, D$ កំណត់ដោយវិសមភាព $x^2+y^2\le 9,\ y\ge \frac{2}{3}x+3$ ។

៨.គណនា $\iint_D \sin(x+y)dxdy, D$ ខណ្ឌដោយខ្សែកោង $x=0, y=\frac{\pi}{2},\ y=x$ ។

៩.គណនា $\iint_D x\,dxdy, D$ ជាត្រីកោនមានកំពូល $A(2,3), B(7,2), C(4,5)$ ។

៣.២. ប្តូរអថេរក្នុងអាំងតេក្រាលឌុប

១០.គណនា $\iint_D \left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)dxdy, D$ ជាថាស $x^2+y^2\le \pi^2$ ។

១១.គណនា $\iint_D \frac{dxdy}{x^2+y^2+1}, D$ ខណ្ឌដោយកន្លះរង្វង់ $y=\sqrt{1-x^2}$ និង (Ox) ។

១២.គណនា $\iint_D (x^2+y^2)dxdy, D$ ខណ្ឌដោយខ្សែកោង $x^2+y^2=2ax$ ។

១៣.គណនា $\iint_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy, D$ ខណ្ឌដោយខ្សែកោង $x^2+y^2=\frac{\pi^2}{9}, x^2+y^2=\pi^2$ ។

១៤.គណនា $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy, D$ ខណ្ឌដោយ $x^2+y^2=a^2, x^2+y^2=4a^2$ ។

១៥.គណនា $\iint_D dxdy, D$ ខណ្ឌដោយខ្សែកោង $xy=1, xy=2, y=x$ និង $y=3x$ ។

១៦.គណនា $\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy, D$ កំណត់ដោយ $x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0$ ។

៣.៣. គណនាផ្ទៃក្រឡាដោយប្រើអាំងតេក្រាលឌុប

១៧.គណនាផ្ទៃក្រឡាខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង $x = y^2 - 2y$ និង $x + y = 0$ ។

១៨.គណនាផ្ទៃក្រឡាខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង $y = 2 - x$ និង $y^2 = 4x + 4$ ។

១៩.គណនាផ្ទៃក្រឡាខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង $y^2 = 4x - x^2$ និង $y^2 = 2x$ (ក្រៅប៉ារ៉ាបូល)។

២០.គណនាផ្ទៃក្រឡាខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង $3y^2 = 25x$ និង $5x^2 = 9y$ ។

២១.គណនាផ្ទៃក្រឡាខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង $y^2 + 2y - 3x + 1 = 0$ និង $3x - 3y - 7 = 0$ ។

២២.គណនាផ្ទៃក្រឡាខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង $y = 4x - x^2$ និង $y = 2x^2 - 5x$ ។

២៣.គណនាផ្ទៃក្រឡាខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង $x = 4 - y^2$ និង $x + 2y - 4 = 0$ ។

២៤.គណនាផ្ទៃក្រឡាខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង $y^2 = 4(1 - x)$ និង $x^2 + y^2 = 4$ (ក្រៅប៉ារ៉ាបូល)។

៣.៤.គណនាមាឌដោយប្រើអាំងតេក្រាលឌុប

២៥.គណនាមាឌនៃសូលីតដែលខ័ណ្ឌដោយផ្ទៃ $x^2 + y^2 = 8, x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 4$ ។

២៦.គណនាមាឌនៃសូលីតដែលខ័ណ្ឌដោយផ្ទៃ $x = 2y^2, x + 2y + z = 4, y = 0, z = 0$ ។

២៧.គណនាមាឌនៃសូលីតដែលខ័ណ្ឌដោយផ្ទៃ $z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1$ និង $z = 0$ ។

២៨.គណនាមាឌនៃសូលីតដែលខ័ណ្ឌដោយផ្ទៃ $z = 4 - x^2, 2x + y = 4, x = 0, y = 0, z = 0$ ។

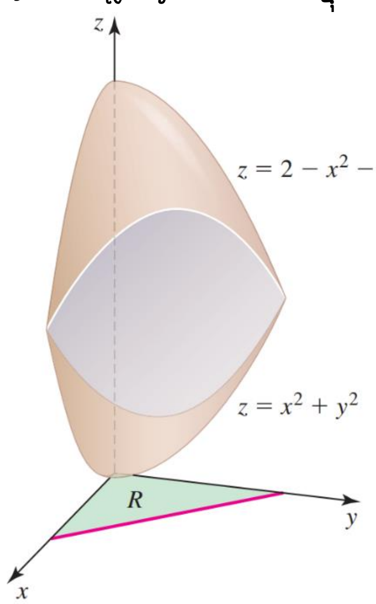
២៩.គណនាមាឌនៃសូលីតដែលខ័ណ្ឌដោយផ្ទៃ $z = xy, x = 0, y = 0, z = 0$ និង $y = 4$ ។

៣០.គណនាមាឌនៃសូលីតដែលខ័ណ្ឌដោយផ្ទៃ $z = 5x, x^2 + y^2 = 9, z = 0$ ។

៣១.គណនាមាឌនៃសូលីតដែលខ័ណ្ឌដោយផ្ទៃ $z = 0,\ z = xy$ និង $x^2 + y^2 = 4$ ។

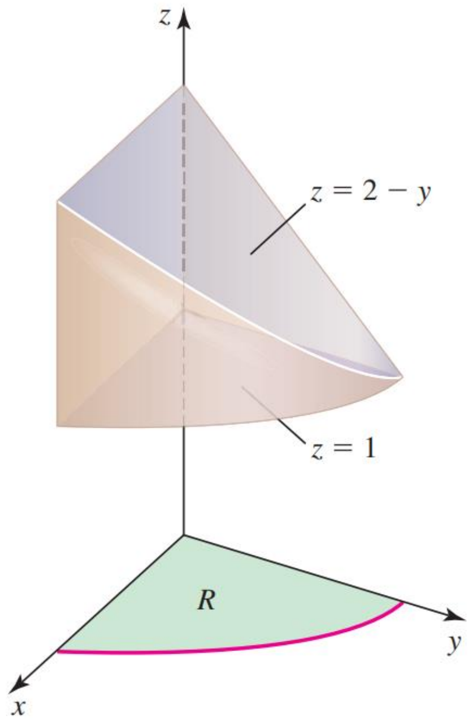
⊕ ចូររកមាឌនៃសូលីតនៃដែនខាងក្រោម៖

ក. សូលីតនៅលើដែន $R = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x\}$ ដែលខ័ណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូឡូអ៊ីត $z = x^2 + y^2$ និង $z = 2 - x^2 - y^2$ និងប្លង់កូអរដោនេនៅក្នុងអដ្ឋមុខទី១។

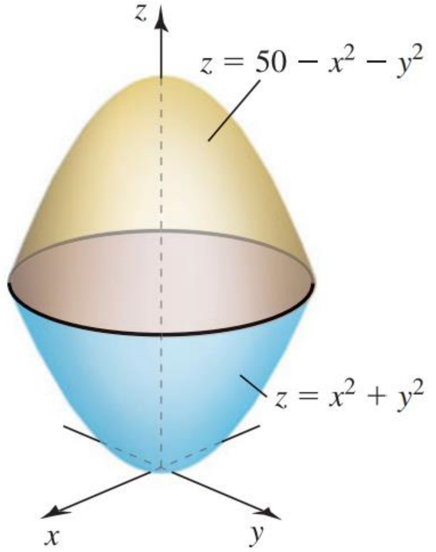


ខ.សូលីតខាងលើប៉ារ៉ាបូឡូអ៊ីតនៃដែន $R = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x^2\}$ និងចន្លោះនៃ

ប្លង់ $z=1$ និង $z=2-y$ ។



គ. សូលីតដែលខណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូឡូអ៊ីត $z=x^2+y^2$ និង $z=50-x^2-y^2$ ។



៣.៥. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃផ្ទៃដោយប្រើអាំងតេក្រាលឌុប

៣២.រកផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកស្វ៊ែរ $x^2+y^2+z^2=4$ ត្រូវបានកាត់ដោយស៊ីឡាំង $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ ។

៣៣.រកផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់ $z=x$ ដែលស្ថិតនៅក្នុងស៊ីឡាំង $x^2+y^2=4$ និងស្ថិតនៅខាងលើប្លង់ $z=0$ ។

៣៤.រកផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកផ្ទៃកោន $x^2-y^2-z^2=0$ ដែលស្ថិតនៅក្នុងស៊ីឡាំង $x^2+y^2=4$ ។

៣៥. រកផ្ទៃក្រឡានផ្នែកនៃប្លង់ $z=24-3x-2y$ នៅក្នុងអដ្ឋមុខនៃអ័ក្សបីទីមួយ។

៣៦.រកផ្ទៃក្រឡានផ្នែកនៃប៉ារ៉ាបូឡូអ៊ីត $z=16-x^2-y^2$ នៅក្នុងអដ្ឋមុខនៃអ័ក្សបីទីមួយ។

៣៧. រកផ្ទៃក្រឡានផ្នែកនៃស្វ៊ែរ $x^2+y^2+z^2=25$ នៅផ្នែកខាងក្នុងនៃស៊ីឡាំង $x^2+y^2=9$ ។

៣៨. រកផ្ទៃក្រឡានផ្នែកនៃកោន $z=2\sqrt{x^2+y^2}$ នៅផ្នែកខាងក្នុងនៃស៊ីឡាំង $x^2+y^2=4$ ។

៣.៦.ម៉ាស ម៉ូម៉ង់និចលភាព និងទីប្រជុំទម្ងន់នៃបន្ទះមួយដោយប្រើអាំងតេក្រាលឌុប

៣៩.បន្ទះមួយជាផ្នែកនៃតំបន់ដែលស្ថិតនៅក្នុងកាដ្រង់ទីមួយខ័ណ្ឌដោយក្រាហ្វនៃ $y=\sin x$ និង $y=\cos x$ ក្នុងចន្លោះ $x=0$ និង $x=\dfrac{\pi}{4}$ ។ រកកូអរដោនេនៃទីប្រជុំទម្ងន់បើគេដឹងថាដង់ស៊ីតេរបស់វាស្មើ $\rho(x,y)=y$ ។

៤០.បន្ទះមួយជាតំបន់ដែលខ័ណ្ឌដោយបន្ទាត់ $x=0,\ y=0$ និង $2x+y=4$ ។ រកកូអរដោនេទីប្រជុំទម្ងន់ បើគេដឹងថាដង់ស៊ីតេរបស់វាស្មើ $\rho(x,y)=x^2$ ។

៤១.បន្ទះមួយជាតំបន់ដែលខ័ណ្ឌដោយបន្ទាត់ $y=|x|$ និង $y=3$ ។ រកកូអរដោនេនៃទីប្រជុំទម្ងន់ បើគេដឹងថាដង់ស៊ីតេរបស់វាស្មើ $\rho(x,y)=x^2+y^2$ ។

៤២.បន្ទះមួយជាតំបន់ដែលខ័ណ្ឌដោយបន្ទាត់ $x=1, y=0$ និងប៉ារ៉ាបូល $y=x^2$ ។ រកកូអរដោនេនៃទីប្រជុំទម្ងន់ បើគេដឹងថាដង់ស៊ីតេរបស់វាស្មើ $\rho(x,y)=x+y$ ។

៤៣.រកម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបនឹងអ័ក្ស $\overrightarrow{Ox}$ នៃបន្ទះដែលខ័ណ្ឌដោយក្រាហ្វ $x=y-y^2$ និង $x=0$ បើគេដឹងថាដង់ស៊ីតេរបស់វាស្មើ $\rho(x,y)=2x$ ។

៤៤.រកម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបនឹងអ័ក្ស $\overrightarrow{Ox}$ នៃបន្ទះដែលខ័ណ្ឌដោយក្រាហ្វ $y=x^2$ និង $y=\sqrt{x}$ បើគេដឹងថាដង់ស៊ីតេរបស់វាស្មើ $\rho(x,y)=x^2$ ។

៤៥.រកម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបនឹងអ័ក្ស $\overrightarrow{Ox}$ នៃបន្ទះដែលខ័ណ្ឌដោយក្រាហ្វ $y=\cos x, -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ និង $y=0$ បើគេដឹងថាដង់ស៊ីតេរបស់វាស្មើ $\rho(x,y)=k$ (ថេរ)។

៤៦.រកម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបនឹងអ័ក្ស $\overrightarrow{Ox}$ នៃបន្ទះដែលខ័ណ្ឌដោយក្រាហ្វ $y=\sqrt{4-x^2}$, $x=0$ និង $y=0$ ហើយស្ថិតនៅក្នុងកាដ្រង់ទីមួយ បើគេដឹងថាដង់ស៊ីតេរបស់វាស្មើ $\rho(x,y)=y$ ។

៤៧.រកម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបនឹងអ័ក្ស $\overrightarrow{Oy}$ នៃបន្ទះដែលខ័ណ្ឌដោយក្រាហ្វ $y=x^2, x=0$ និង $y=4$ ហើយស្ថិតនៅក្នុងកាដ្រង់ទីមួយ បើគេដឹងថាដង់ស៊ីតេរបស់វាស្មើ $\rho(x,y)=y$ ។

៤៨.រកម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបនឹងអ័ក្ស $\overrightarrow{Oy}$ នៃបន្ទះដែលខ័ណ្ឌដោយក្រាហ្វ $y=x^2, y=\sqrt{x}$ បើគេដឹងថាដង់ស៊ីតេរបស់វាស្មើ $\rho(x,y)=x^2$ ។

៤៩.រកម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបនឹងអ័ក្ស $\overrightarrow{Oy}$ នៃបន្ទះដែលខ័ណ្ឌដោយក្រាហ្វ $y=x, y=0, y=1$ និង $x=3$ បើគេដឹងថាដង់ស៊ីតេរបស់វាស្មើ $\rho(x,y)=4x+3y$ ។

៥០.រកម៉ូម៉ង់និចលភាពប៉ូលែនៃបន្ទះដែលខ័ណ្ឌដោយបន្ទាត់ $x+y=a,\ a>0, x=0$ និង $y=0$ បើគេដឹងថាដង់ស៊ីតេរបស់វាស្មើ $\rho(x,y)=k$ (ថេរ)។

៥១.រកម៉ូម៉ង់និចលភាពប៉ូលែនៃបន្ទះដែលខ័ណ្ឌដោយបន្ទាត់ $y=x^2$ និង $y=\sqrt{x}$ បើគេដឹងថាដង់ស៊ីតេរបស់វាស្មើ $\rho(x,y)=x^2$ ។

៥២.រកម៉ូម៉ង់និចលភាពប៉ូលែនៃបន្ទះដែលខ័ណ្ឌដោយបន្ទាត់ $x=y^2+2$ និង $x=6-y^2$ បើគេដឹងថាដង់ស៊ីតេរបស់វាត្រង់ចំណុចមួយប្រាសសមាមាត្រទៅនឹងចម្ងាយពីចំណុចនោះទៅគល់។

៥៣.រកម៉ូម៉ង់និចលភាពប៉ូលែនៃបន្ទះដែលខ័ណ្ឌដោយបន្ទាត់ $y=0, y=0, y=3$ និង $x=4$ បើគេដឹងថាដង់ស៊ីតេរបស់វាស្មើ $\rho(x,y)=k$ (ថេរ)។

៣.៧.អាំងតេក្រាលទ្រីប

៥៤.គណនា $\iiint\limits_V \left(x^2+y+z^2\right)dxdydz, V$ ខ័ណ្ឌដោយប្លង់ $z=0, z=a, x=0, y=0$ និង $x+y=b\left(a,b>0\right)$ ។

៥៥.គណនា $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}, V$ ខ័ណ្ឌដោយប្លង់ $x=0, y=0, z=0$ និង $x+y+z=1$ ។

៥៦.គណនា $\iiint\limits_V y\cos(z+x)dxdydz, V$ ខ័ណ្ឌដោយស៊ីឡាំង $y=\sqrt{x}$ និងប្លង់ $y=0, z=0$ និង $x+z=\frac{\pi}{2}$ ។

៥៧.គណនា $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz, V$ ខ័ណ្ឌដោយប្លង់ $y=0, z=0, z=a$ និងស៊ីឡាំង $x^2+y^2=2x$ ។

៥៨.គណនា $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}, V$ ខ័ណ្ឌដោយប្លង់ $z=-1, z=1$ និងស៊ីឡាំង $x^2+y^2=1$ ។

៥៩.គណនា $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dxdydz, V$ ជាប៊ូល $x^2+y^2+z^2\le R^2$ ។

៦០.គណនា $\iiint\limits_V (x+y+z)^2 dxdydz, V$ ជាផ្នែករួមនៃប៉ារ៉ាបូលឡូអ៊ីត $z\ge\frac{x^2+y^2}{2a}$ និងប៊ូល $x^2+y^2+z^2\le 3a^2$ ។

៦១.គណនា $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}, V$ ជាប៊ូល $x^2+y^2+z^2\le 1$ ។

៦២.គណនា $\iiint\limits_V x^2dxdydz, V$ ជាប៊ូល $x^2+y^2+z^2\le R^2$ ។

៦៣.គណនា $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dxdydz, V$ ខ័ណ្ឌដោយផ្ទៃ $z=\frac{x^2+y^2}{2}$ និង $z=2$ ។

៦៤.គណនា $\iiint_V \sqrt{1+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,dxdydz, V$ ជាប៊ូល $x^2+y^2+z^2\le 1$ ។

៦៥.គណនា $\iiint_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz, V$ ខ័ណ្ឌដោយផ្ទៃស៊ីឡាំង $x^2+y^2=2x$ និងប្លង់ $y=0, z=0, z=a$ ។

៣.៨.អនុវត្តន៍អាំងតេក្រាលទ្រីប

៦៦.គណនាមាឌនៃសូលីតខ័ណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូលឡូអ៊ីត $z=x^2+y^2$ និងប្លង់ $z=y+2$ ។

៦៧.គណនាមាឌនៃសូលីតខ័ណ្ឌដោយផ្ទៃ $y=x^2$ និងប្លង់ $z=y, y=4, z=0$ ។

៦៨.គណនាមាឌនៃសូលីតខ័ណ្ឌដោយប្លង់ $2x+3y+z=6$ និងប្លង់ $x=0, y=0, z=0$ ។

៦៩.គណនាមាឌនៃសូលីតខ័ណ្ឌដោយផ្ទៃ $y=4-x^2$ និងប្លង់ $z+y=4, y=0,\ z=0$ ។

៧០.គណនាមាឌនៃសូលីតខ័ណ្ឌដោយផ្ទៃ $z=10-x^2-y^2, y=x^2, x=y^2$ និងប្លង់ $z=0$ ។

៧១.គណនាមាឌនៃសូលីតខ័ណ្ឌដោយផ្ទៃ $hz=x^2+y^2$ និងប្លង់ $z=h$ ។

៧២.គណនាមាឌនៃសូលីតខ័ណ្ឌដោយផ្ទៃស៊ីឡាំង $x=\dfrac{x^2+y^2}{2}$ និងស្វ៊ែរ $x^2+y^2+z^2=4$ (ស្ថិតនៅខាងក្រៅផ្ទៃស៊ីឡាំង)។

៧៣.គណនាមាឌនៃសូលីតខ័ណ្ឌដោយផ្ទៃ $z=\sqrt{x^2+y^2}$ និង $z=x^2+y^2$ ។

៧៤.គណនាមាឌនៃសូលីតខ័ណ្ឌខាងលើដោយ $z=2x$ និងខាងក្រោមដោយ $z=x^2+y^2$ ។

៧៥.គណនាមាឌនៃសូលីតខ័ណ្ឌខាងលើដោយផ្ទៃ $x^2+y^2+z^2=2$ និងដោយ $z=x^2+y^2$ ។

៧៦.គណនាមាឌនៃសូលីតដែលស្ថិតនៅក្នុងស្វ៊ែរ $x^2+y^2+z^2=4$ និងស៊ីឡាំង $x^2+y^2=1$ ។

៧៧.គណនាមាឌនៃសូលីតដែលស្ថិតនៅក្នុងស្វ៊ែរ $x^2+y^2+z^2=4$ និងស៊ីឡាំង $x^2+y^2=2x$ ។

៧៨.គណនាម៉ាសនៃគូប $V=\left\{(x,y,z): 0\le x\le a, 0\le y\le a, 0\le z\le a\right\}$ ដែលមានដង់ស៊ីតេត្រង់ចំណុច (x,y,z) ស្មើនឹង $\gamma(x,y,z)=x+y+z$ ។

៧៩.គណនាម៉ាសនៃស៊ីឡាំង $0\le r\le a, 0\le z\le h$ បើដង់ស៊ីតេរបស់វាត្រង់ចំណុច (x,y,z) ស្មើនឹង $\gamma(x,y,z)=z$ ។

៨០.រកកូអរដោនេនៃទីប្រជុំទម្ងន់នៃស៊ីឡាំងខ័ណ្ឌដោយ $x=0, z=0, y=1, y=3$ និង $x+2z=3$ ។

៨១.រកកូអរដោនេនៃទីប្រជុំទម្ងន់នៃសូលីតខ័ណ្ឌដោយ $y^2+2z^2=4x$ និង $x=2$ ។

៨២.រកកូអរដោនេនៃទីប្រជុំទម្ងន់នៃសូលីតខ័ណ្ឌដោយ $x+y=1,\ z=x^2+y^2, x=0,\ y=0$ និង $z=0$ ។

៨៣.រកកូអរដោនេនៃទីប្រជុំទម្ងន់នៃសូលីតខ័ណ្ឌដោយ $z=9-x^2-y^2$ និងប្លង់ $z=0$ ។

៨៤.រកកូអរដោនេនៃទីប្រជុំទម្ងន់នៃសូលីតខ័ណ្ឌដោយ $z=x^2+y^2$ និង $z=12-2x^2-2y^2$ ។

៨៥.រកកូអរដោនេនៃទីប្រជុំទម្ងន់នៃសូលីតខ័ណ្ឌដោយ $z=2x^2+y^2$ និង $z=12-2x^2-2y^2$ ។

៨៦.រកម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃគូប $V=\{(x,y,z):0\le x\le a,0\le y\le a,0\le z\le a\}$ ធៀបនឹងទ្រនុងខាងនិមួយៗរបស់វា។

៨៧.រកម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃអេលីបសូអ៊ីត $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ធៀបនឹងអ័ក្សកូអរដោនេទាំងបី។

៨៨.រកម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃផ្នែកនៃប៉ារ៉ាប៉ូលឡូអ៊ីត $x^2+y^2=2cz$ កាត់ដោយប្លង់ $z=c$ ធៀបនឹងអ័ក្ស (Oz)។

៨៩. រកម៉ូម៉ង់និចលភាពនៃអ័ក្សអាប់ស៊ីស និងអ័ក្សអរដោនេចំពោះសូលីតដែលខ័ណ្ឌដោយចន្លោះកន្លះស្វ៊ែរ $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ និងប្លង់ (xOy) ដែលមានដង់ស៊ីតេ (x,y,z) ជាសមាមាត្រទៅនឹងចម្ងាយរវាង (x,y,z) និងប្លង់ (xOy) ។

៣.៩.គណនាអាំងតេក្រាលទ្រីបខាងក្រោម៖

1). $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dz\,dy\,dx$

2). $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 2xz\,dz\,dy\,dx$

3). $\int_0^4\int_{-2\sqrt{16-y^2}}^{2\sqrt{16-y^2}}\int_0^{16-\left(\frac{x^2}{4}\right)-y^2} dz\,dx\,dy$

4). $\int_1^6\int_0^{4-\frac{2y}{3}}\int_0^{12-2y-3z}\frac{1}{y}\,dx\,dz\,dy$

5). $\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-z^2}}\int_0^{\sqrt{1+x^2+z^2}} dy\,dx\,dz$

6). $\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\sin x}\sin y\,dz\,dx\,dy$

7). $\int_1^{\ln 8}\int_1^{\sqrt{z}}\int_{\ln y}^{\ln 2y} e^{x+y^2-z}\,dx\,dy\,dz$

8). $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{2-x}4yz\,dz\,dy\,dx$

9). $\int_0^2\int_0^4\int_{y^2}^4\sqrt{x}\,dz\,dx\,dy$

10). $\int_0^1\int_y^{2-y}\int_0^{2-x-y}xy\,dz\,dx\,dy$

11). $\int_{-3}^7\int_0^{2x}\int_y^{x-1}dz\,dy\,dx$

12). $\int_0^2\int_{-1}^4\int_0^{3y+x}dz\,dy\,dx$

13). $\int_0^5\int_{z-1}^{2z}\int_0^{y+2z}6xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$

14). $\int_0^2\int_1^z\int_0^{\sqrt{\frac{x}{z}}}2xyz\,dy\,dx\,dz$

15). $\int_0^{\pi/2}\int_0^z\int_0^y\sin(x+y+z)\,dx\,dy\,dz$

16). $\int_0^{\pi/2}\int_{\sin 2z}^0\int_0^{2yz}\sin\left(\frac{x}{y}\right)dx\,dy\,dz$

17). $\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+y^2}^4 x\,dx\,dy\,dz$

18). $\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx$

19). $\int_{-a}^a\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2+y^2}}\int_a^{a+\sqrt{a^2-x^2-y^2}}x\,dz\,dy\,dx$

20). $\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dy\,dx$

21). $\int_{-1}^5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^3 r\cos\theta\,dr\,d\theta\,dz$

22). $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^6\int_0^{6-r}rz\,dz\,dr\,d\theta$

23). $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos^2\theta}\int_0^{4-r^2}r\sin\theta\,dz\,dr\,d\theta$

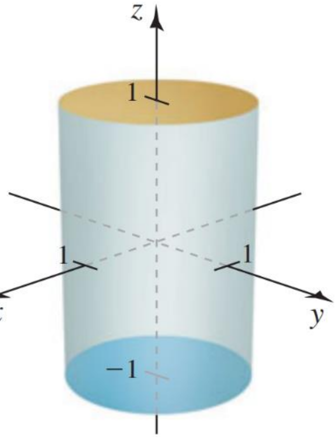
24). $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi}\int_0^2 e^{-\rho^3}\rho^2\,d\rho\,d\theta\,d\phi$

25). $\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{0}^{\cos\phi}\rho^{2}\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

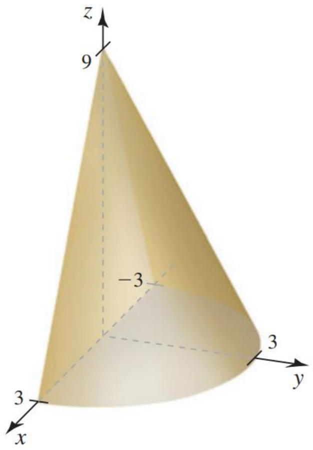
៣.១០.អាំងតេក្រាលនៅក្នុងកូអរដោនេស៊ីឡាំង និងស្វ៊ែរ

⊕ ចូរគណនាអាំងតេក្រាលតាមកូអរដោនេស៊ីឡាំងខាងក្រោម៖

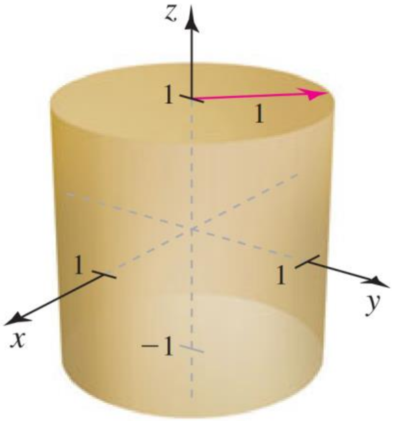
1). $\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1}\int_{-1}^{1} dz\, r\, dr\, d\theta$



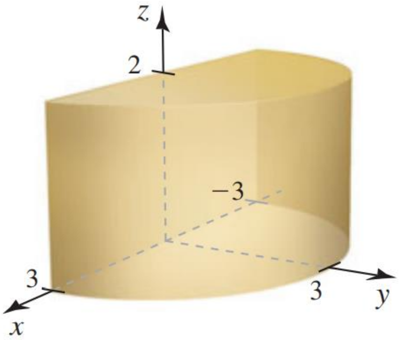
2). $\int_{0}^{3}\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}}\int_{0}^{9-3\sqrt{x^2+y^2}} dz\, dx\, dy$



3). $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{-1}^{1}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}} dz\, dx\, dy$



4). $\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{2}\frac{1}{1+x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx$



⊕ ចូរគណនាអាំងតេក្រាលតាមកូអរដោនេស៊ីឡាំងខាងក្រោម៖

1). $\int_{0}^{4}\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\int_{x}^{\sqrt{1-x^2}} e^{-x^2-y^2}\,dy\,dx\,dz$

2). $\int_{-4}^{4}\int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{4} dz\,dy\,dx$

3). $\int_{0}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} dz\,dy\,dx$

4). $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\frac{1}{2}}\int_{\sqrt{3}y}^{\sqrt{1-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$

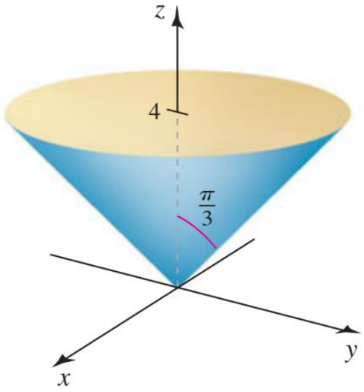
⊕ ចូរគណនាអាំងតេក្រាលតាមកូអរដោនេស្វ៊ែរខាងក្រោម៖

1). $\iiint_D \left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}} dV$ ដែល D ជាឯកតានៃប៊ូល។

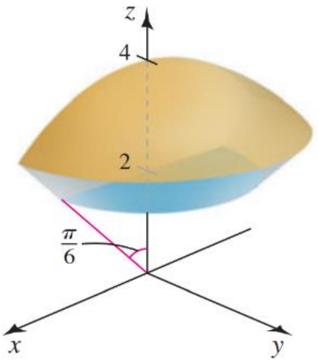
2). $\iiint_D e^{-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} dV$ ដែល D ជាឯកតានៃប៊ូល។

3). $\iiint_D \frac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} dV$ ដែល D ជាដែននៅចន្លោះស្វ៊ែរដែលមានកាំស្មើ 1 និង 2 ត្រង់ចំណុចកណ្តាល។

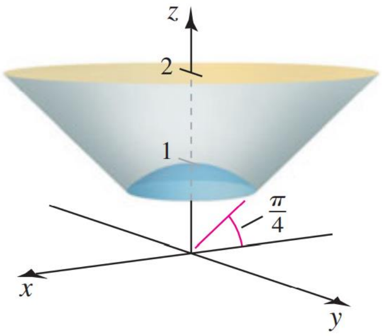
4). $\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\int_{0}^{4\sec\varphi} \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\theta$



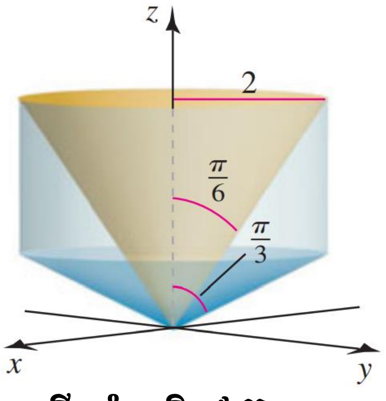
$$5).\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_{2\sec\varphi}^{4}\rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$



$$6).\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_1^{2\sec\varphi}\left(\rho^{-3}\right)\rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$



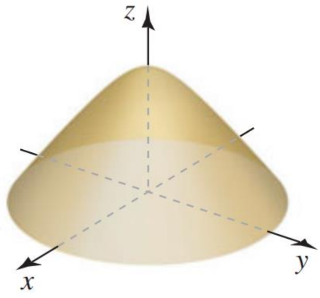
$$7).\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{2\csc\varphi}\rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$



៣.១១. មាឌនៅក្នុងកូអរដោនេស៊ីឡាំង និងស្វ៊ែរ

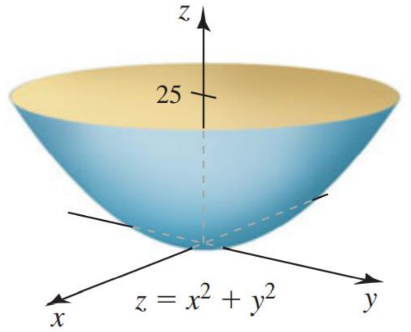
⊕ ដោយប្រើកូអរដោនេស៊ីឡាំងចូរគណនាមាឌសូលីតនៃដែនខាងក្រោម៖

១.ដែលដែនកំណត់ខ័ណ្ឌដោយប្លង់ $z=0$ និងអ៊ីពែរបូលឡូអ៊ីត $z=\sqrt{17}-\sqrt{1+x^2+y^2}$ ។

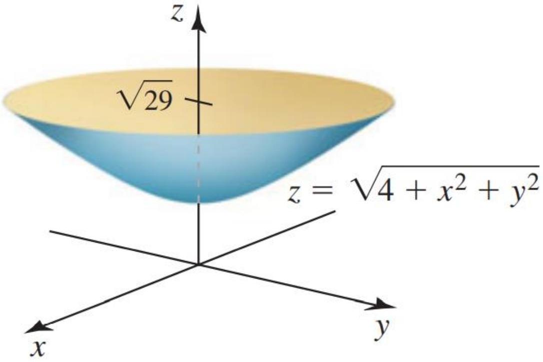


$z=\sqrt{17}-\sqrt{1+x^2+y^2}$

២.ដែលមានដែនកំណត់ខ័ណ្ឌដោយប្លង់ $z=25$ និងប៉ារ៉ាបូលឡូអ៊ីត $z=x^2+y^2$ ។

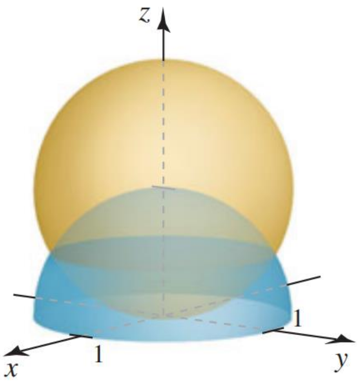


៣.ដែលមានដែនកំណត់ខ័ណ្ឌដោយប្លង់ $z=\sqrt{29}$ និងប៉ារ៉ាបូលឡូអ៊ីត $z=\sqrt{4+x^2+y^2}$ ។



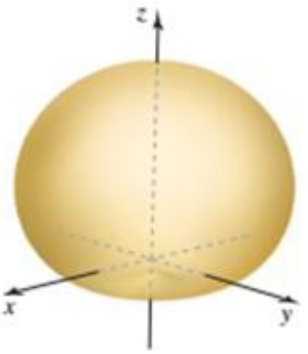
⊕ ដោយប្រើកូអរដោនេស្វ៊ែរចូរគណនាមាឌនៃតំបន់ខាងក្រោម៖

១.ដែលមានដែនកំណត់ខ័ណ្ឌដោយស្វ៊ែរ $\rho=2\cos\varphi$ និងកន្លះស្វ៊ែរ $\rho=1, z\geq 0$ ។

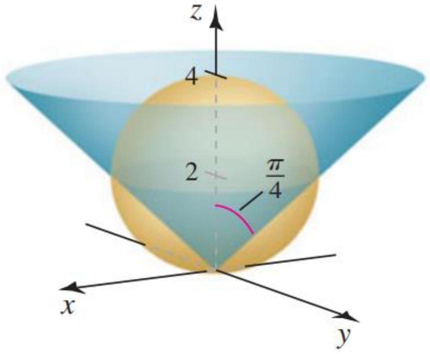


២.ដែលខ្សែកោងរាងបេះដូងនៃការបង្វិលជុំវិញអ័ក្ស

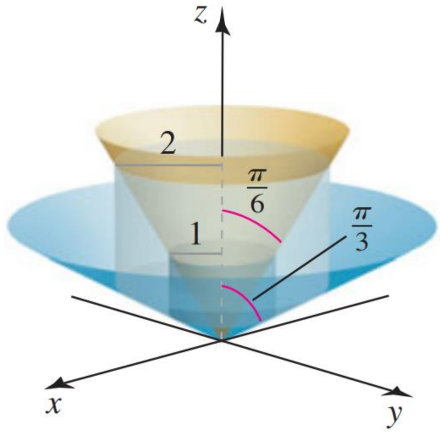
$D=\left\{(\rho,\varphi,\theta): 0\leq\rho\leq 1+\cos\varphi\leq\pi, 0\leq\theta\leq 2\pi\right\}$ ។



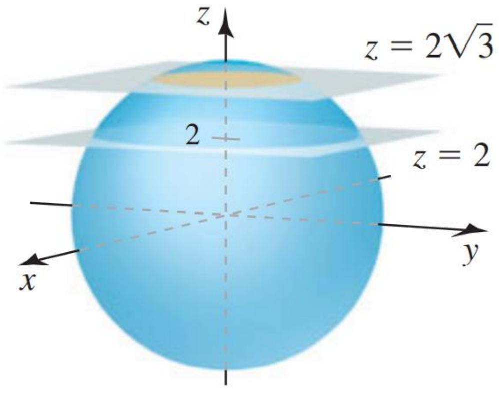
៣.ដែលមានដែនកំណត់ខ័ណ្ឌដោយខាងក្នុងកោន $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ និងខាងក្នុងស្វ៊ែរ $\rho=4\cos\varphi$ ។



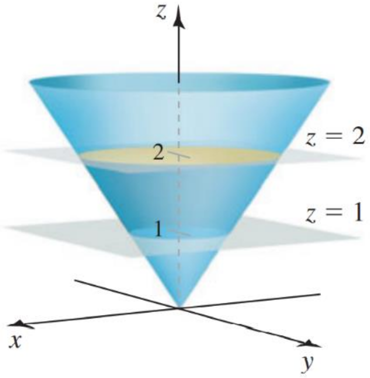
៤.ដែលមានដែនកំណត់ខ័ណ្ឌដោយស៊ីឡាំង $r=1$ និង $r=2$ និងកោន $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$ និង $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$ ។



៥.ដែលមានដែនខ័ណ្ឌដោយផ្នែកនៃបូល $\rho\le 4$ និងនៅចន្លោះប្លង់ពីរ $z=2$ និង $z=2\sqrt{2}$ ។



៦.ដែលដែនកំណត់ខ័ណ្ឌដោយខាងក្នុងកោន $z=\sqrt{x^2+y^2}$ និងនៅចន្លោះប្លង់ពីរ $z=1$ និង $z=2$ ។



ឯកសារពិគ្រោះ

Adams, R. A., & Essex, C. (2010). *Calculus several variables*. Pearson.

BRIGGS, W., COCHRAN, L., & GILLETT, B. (2013). *calculus for scientists and engineers, early transcendentals*. Pearson.

Canuto, C., & Tobacco, A. (2015). *Mathematics Analysis II*. Springer International.

DASS, H. K. (2014). *Advanced engineering mathematics by H.K. DASS*. S. Chand & Company.

Larson, R., & Edwards, B. H. (2016). *Calculus of a Single Variable 11th Edition* Cengage Learning.

Singh, R. R. (2018). *Mathematics-1*. McGraw Hill Education.

Soun, S. (2004). *វិភាគចំនួនពិត ភាគ ២* (*Real analysis 2)*. Royal University of Phnom Penh.

Soun, S. (2008). *វិភាគចំនួនពិត ភាគ ៣* (*Real analysis 3)*. Royal University of Phnom Penh.

STEWART, J. (2008). *Calulus early transcendentals sixth edition*. Bob Pirtle.

Stroud, K. A., & Booth, D. J. (2003). *Advanced engineering mathematics* (4 ed.). Industrial Press, Inc.

Sullivan, M., & Miranda, K. (2014). *Calculus early transcendentals*. Ruth Baruth.

សន្ទានុក្រម

[1] សន្ទានុក្រមគណិតវិទ្យាសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ

[2] សន្ទានុក្រមគណិតវិទ្យារាជបណ្ឌិតសភាកម្ពុជា