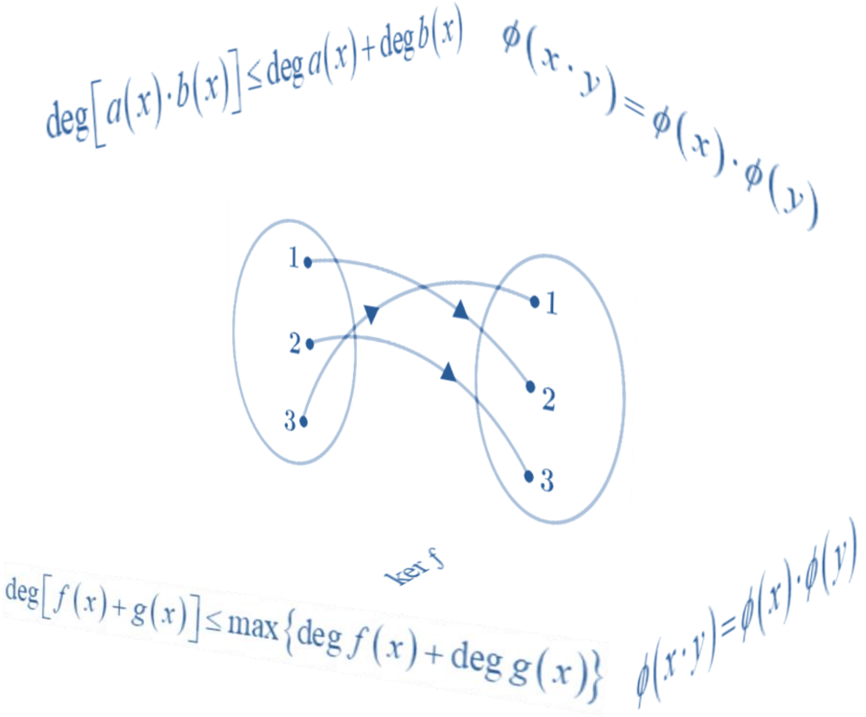
ពីជគណិតទូទៅ ២



គាំទ្រថវិកាលើការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អដោយៈ

“មូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍”

២០២២

និពន្ធដោយ៖ លោក ឈាន ហាង

គណៈកម្មការរចនាទំព័រ៖ លោកស្រី សំបាត់ អ៊ាត លោកស្រី ឈុំ ពៅ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យ៖

១. លោក ហ៊ុន រ៉ាវី ព្រឹទ្ធបុរសរង ប្រធាន
២. លោកស្រី ឡុង ស្រីអូន សមាជិក

បុព្វកថា

ដំណើរអភិវឌ្ឍនៃព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជានៅក្នុងយុគសម័យទំនើបនេះ ជាមេរៀនដ៏ជោគជ័យបំផុតមួយដែលចាក់ឫសគល់ចេញពីការបញ្ចប់របបប្រល័យពូជសាសន៍ ការបញ្ចប់សង្គ្រាម ការផ្សះផ្សារជាតិ ការកសាងមូលដ្ឋានរឹងមាំនៃសន្តិភាពនិងស្ថេរភាព និងការអភិវឌ្ឍសេដ្ឋកិច្ច។ នៅក្រោយពេលដែលសន្តិភាពត្រូវបានកើតឡើងដោយបរិបូរណ៍នៅឆ្នាំ១៩៩៨ កម្ពុជាទទួលកំណើនសេដ្ឋកិច្ចខ្ពស់ គឺប្រមាណ៨%ក្នុងមួយឆ្នាំ។ លើសពីនេះទៀតអត្រានៃភាពក្រីក្រត្រូវបានកាត់បន្ថយពីប្រមាណ៥៣% នៅឆ្នាំ២០០៤មកនៅទាបជាង១០% នៅឆ្នាំ២០១៩។ ដំណើរនៃការអភិវឌ្ឍជាតិជាសកម្មភាពដែលបន្តទៅមុខជាប់ជានិច្ច ហើយគោលនយោបាយថ្មីៗដែលមានលក្ខណៈអន្តរវិស័យគ្របដណ្តប់ ក៏កំពុងលេចរូបរាងឡើង ដើម្បីតម្រង់ទិសកម្ពុជាឆ្ពោះទៅកាន់ប្រទេសមានប្រាក់ចំណូលមធ្យមកម្រិតខ្ពស់នៅឆ្នាំ២០៣០ និងឈានឡើងជាប្រទេសមានប្រាក់ចំណូលខ្ពស់ នៅឆ្នាំ២០៥០។ ការប្រែប្រួលឆាប់រហ័សនៃនិម្មាបនកម្មពិភពលោក និងតំបន់រួមទាំងទំនាក់ទំនងភូមិសាស្ត្រនយោបាយ បានផ្តល់កាលានុវត្តភាពសម្រាប់ការអភិវឌ្ឍឧស្សាហកម្មនៅកម្ពុជា ដែលត្រូវបានរាជរដ្ឋាភិបាលចាត់ទុកជាមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃកំណើនសេដ្ឋកិច្ចកម្ពុជា។ រាជរដ្ឋាភិបាលកម្ពុជាបានកំពុងបន្តពង្រឹង និងអភិវឌ្ឍវិស័យអប់រំឆ្ពោះទៅរកការស្រាវជ្រាវ និងនវានុវត្តន៍ដើម្បីពង្រឹងសមត្ថភាពនិងជំនាញរបស់ធនធានមនុស្សនៅកម្ពុជាឱ្យស្របទៅនឹងបរិបទថ្មីនៃការអភិវឌ្ឍ ជាពិសេសការពង្រឹងសហគ្រិនភាពក្នុងការរៀបចំម៉ូដែលធុរកិច្ចថ្មីៗ។ ដើម្បីចាប់យកកាលានុវត្តភាពពីបដិវត្តន៍ឧស្សាហកម្មទី៤ និងសេដ្ឋកិច្ចឌីជីថលដែលកំពុងផុសផុលឡើង ប្រព័ន្ធអេកូឡូហ្ស៊ីដែលបង្កលក្ខណៈអំណោយផលដល់ការបង្កើតថ្មី នវានុវត្តន៍ ការស្រាវជ្រាវ និងអភិវឌ្ឍន៍ ត្រូវតែមានការកែលម្អ។

បណ្តាប្រទេសនៅទ្វីបអាស៊ីកំពុងនាំមុខក្នុងការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍ ដោយមានភាគហ៊ុនប្រមាណ៤៤% នៃការវិនិយោគទាំងមូលរបស់ពិភពលោក។ ប្រទេសចិនកំពុងបន្តកសាងហេដ្ឋារចនាសម្ព័ន្ធនៃការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍ ក៏ដូចជាសមត្ថភាពមនុស្ស។ ផ្ទុយទៅវិញ ប្រទេសនៅទ្វីបអាមេរិកខាងត្បូង និងអាហ្វ្រិក កំពុងស្ថិតនៅឆ្ងាយពីការវិនិយោគនេះ ហើយជាលទ្ធផល ប្រទេសទាំងនោះក៏ពុំមានកំណើនសេដ្ឋកិច្ចគួរឱ្យកត់សម្គាល់ដែរ។ ទុនវិនិយោគសរុបលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍរបស់ប្រទេសនៅទ្វីបអាមេរិកខាងត្បូងនិងអាហ្វ្រិក មានប្រមាណ៥%នៃការវិនិយោគទាំងមូលរបស់ពិភពលោក ក្នុងពេលដែលតំបន់ទាំង២នេះមានប្រជាជនប្រមាណ២០%នៃប្រជាជន ពិភពលោក។ ប្រទេសចំនួន៦ដែលមានលំដាប់ខ្ពស់ជាងគេនៅក្នុងការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍ រួមមានសហរដ្ឋអាមេរិក ចិន ជប៉ុន អាល្លឺម៉ង់ ឥណ្ឌា និងកូរ៉េខាងត្បូង ដែលស្មើនឹងប្រមាណ ៧០%នៃទុនវិនិយោគសរុបរបស់ពិភពលោក។

តើចំណេះដឹង ផលិតផល និងសេវាកម្មថ្មីទាំងនេះកើតឡើងពីអ្វី? ហើយកើតឡើងដោយរបៀបណា? ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជាកំពុងតែកសាងមូលដ្ឋានសម្រាប់ការត្រៀមខ្លួនទទួល និងប្រកួតប្រជែងក្នុងយុគសម័យបដិវត្តឧស្សាហកម្មទី៤ នៅក្នុងសេដ្ឋកិច្ចដែលផ្អែកលើពុទ្ធិ ហើយដែលប្រការនេះ

ចាំបាច់តម្រូវឱ្យពលរដ្ឋកម្ពុជា ត្រូវក្លាយខ្លួនជាពលរដ្ឋឌីជីថល ពលរដ្ឋសកល និងពលរដ្ឋដែលប្រកបដោយការទទួលខុសត្រូវ ដែលមានសមត្ថភាពក្នុងការផលិត ចែកចាយ និងប្រើប្រាស់ពុទ្ធិដើម្បីទទួលមនុញ្ញផល និងរួមចំណែកក្នុងកំណើន។ ធនាគារពិភពលោកបានធ្វើការកត់សម្គាល់តាំងពីឆ្នាំ២០០២ នូវបម្លាស់ប្ដូរនៃមូលដ្ឋានសេដ្ឋកិច្ច ពីសេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើកម្លាំងពលកម្ម និងធនធានអតិកម្ម (Labour and Resource Based Economy) ទៅកាន់សេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើពុទ្ធិ (Knowledge Based-Economy) ដែលក្នុងន័យនេះ ពុទ្ធិគឺជាគន្លឹះនៃការអភិវឌ្ឍន៍។ អាស្រ័យហេតុនេះ នៅលើគន្លងដែលកម្ពុជាកំពុងធ្វើដំណើរឆ្ពោះទៅកាន់សេដ្ឋកិច្ចឌីជីថល សង្គមកម្ពុជាត្រូវតែមានសមត្ថភាពក្នុងការផលិត ជ្រើសរើស បន្សាំ បង្កើតមុខរបរ និងប្រើប្រាស់ពុទ្ធិ ដើម្បីរក្សានិរន្តរភាពនៃកំណើន និងកែលម្អជីវភាពរស់នៅ។ សមត្ថភាពទាំងនេះ អាចកើតឡើងនៅពេលពលរដ្ឋកម្ពុជាមានឱកាសក្នុងការទទួលបានបទពិសោធន៍ពីការស្រាវជ្រាវ ការបណ្ដុះគំនិតច្នៃប្រឌិត និងការស្វែងរកនវានុវត្តន៍។

កំណែទម្រង់វិស័យអប់រំ គឺជាការត្រួសត្រាយមាគ៌ាសម្រាប់ដំណើរឆ្ពោះទៅកាន់សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិ និងប្រជាពលរដ្ឋប្រកបដោយភាពរស់រវើក។ តាមរយៈមូលដ្ឋានអប់រំ សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិនឹងប្រមូលផ្ដុំ បង្កើត និងចែករំលែក ទៅកាន់សមាជិកក្នុងសង្គមនូវសម្បទាអប់រំ ពិសេសគឺពុទ្ធិសម្បទាក្នុងបុព្វហេតុនៃមនុស្សជាតិនិងឧត្តមប្រយោជន៍នៃប្រទេស។ សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិ គឺពុំគ្រាន់តែជាសង្គមដែលសម្បូរព័ត៌មានប៉ុណ្ណោះទេ តែជាសង្គមដែលប្រជាពលរដ្ឋអាចធ្វើបរិវត្តកម្មពីព័ត៌មានទៅជាមូលធនប្រកបដោយប្រសិទ្ធភាព។ ការរីកចម្រើនទៅមុខជាលំដាប់នៃបច្ចេកវិទ្យានិងតំណភ្ជាប់ បានពង្រីកព្រំដែននៃការចូលទៅកាន់ និងការទទួលបានព័ត៌មានជាសកល ហើយដែលក្នុងន័យនេះ ការអប់រំនឹងបន្តវិវត្តទៅមុខនិងមានការផ្លាស់ប្ដូរ។ សង្គមមួយដែលមានអំណាន និងរបាប់ជាបុរេលក្ខខណ្ឌនៃជីវភាពប្រចាំថ្ងៃនៃប្រជាពលរដ្ឋ ពេលនោះបំណិននៃអំណាន និពន្ធ និងការគណនាលេខនព្វន្ត គឺជាចលករនៃការរៀនរបស់សិស្ស។ ជាតុដ៏ចម្បងមួយដែលស្ថិតនៅក្នុងការកសាងសង្គមដែលប្រកបដោយ ពុទ្ធិគឺសៀវភៅសិក្សា ហើយការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សាជាប្រចាំ គឺជានវានុវត្តន៍នៃ
វិស័យអប់រំដែលនាំទៅរកការសិក្សាពេញមួយជីវិត ការអភិវឌ្ឍន៍សម្បទាអប់រំ និងការចែករំលែកចំណេះដឹង។ មូលដ្ឋានអប់រំ ជាពិសេសគឺគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សាត្រូវមានតួនាទីដែលប្រកបដោយការឆ្លើយតប ចំពោះតម្រូវការខាងលើនេះ។ សាស្ត្រាចារ្យ អ្នកស្រាវជ្រាវ និងបុគ្គលិកអប់រំត្រូវបន្តសិក្សាជាប់ជានិច្ច តាមរយៈការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ហើយដែលសៀវភៅសិក្សាទាំងនេះនឹងក្លាយជា ស្ពាននៃទំនាក់ទំនងរវាងនវានុវត្តន៍នៃបច្ចេកវិទ្យា និងការរៀននិងបង្រៀននៅក្នុងថ្នាក់រៀន។

សង្គមដែលប្រកបដោយពុទ្ធិ ក៏ជាសង្គមដែលបណ្ដុះឱ្យមានរចនាសម្ព័ន្ធទន់នៃសេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើពុទ្ធិដែរ។ ឧទាហរណ៍ជាក់ស្ដែងនៃបែបផែននេះរួមមាន Silicon Valley នៃសហរដ្ឋអាមេរិក សួនឧស្សាហកម្មវិស្វកម្មអាកាសយានយន្តនិងយានយន្តនៅទីក្រុម Munich ប្រទេសអាល្លឺម៉ង់ តំបន់ជីវបច្ចេកវិទ្យានៅក្រុម Hyderabad ប្រទេសឥណ្ឌា តំបន់ផលិតគ្រឿងអេឡិចត្រូនិក និងសារ-គមនាគមន៍

ឌីជីថលនៅទីក្រុម Seoul ប្រទេសកូរ៉េខាងត្បូង ក៏ដូចជាសួនឧស្សាហកម្មថាមពល និងឥន្ទនគីមីសាស្ត្រនៃប្រទេសប្រេស៊ីល ហើយក៏នៅមានទីក្រុមនៃប្រទេសជាច្រើនទៀតនៅលើពិភពលោក លក្ខណៈសម្បត្តិនៃទីក្រុមទាំងនេះគឺការប្រើប្រាស់និន្នាការនៃការអភិវឌ្ឍដែលជំរុញ និងតម្រង់ទិសដោយចំណេះដឹងដែលចំណេះដឹងទាំងនោះកើតចេញជាដំបូងពីការវិនិយោគទៅលើគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា ស្ថាប័នស្រាវជ្រាវ មជ្ឈមណ្ឌលឧត្តមភាពនៃជំនាញជាន់ខ្ពស់ ការប្រកួតប្រជែងដោយ គុណាធិបតេយ្យ និងជាពិសេសគឺការបណ្តុះវប្បធម៌អំណាននិងនិពន្ធសៀវភៅ។ ល្បឿននៃការរីកចម្រើនផ្នែកពុទ្ធិ និងបច្ចេកវិទ្យាកំពុងមានសន្ទុះលឿនជាងអ្វីដែលសិស្ស និងនិស្សិតអាចទទួលបានពីគ្រូនៅគ្រឹះស្ថានសិក្សាដែលធ្វើឱ្យគោលដៅនៃការអប់រំនៅពេលបច្ចុប្បន្ននេះ មានការប្រឈមខ្លាំងជាងពេលណាទាំងអស់។ ឧទាហរណ៍ ក្នុងមួយឆ្នាំ មានសៀវភៅជាង២,២លានចំណងជើង ត្រូវបានសរសេរ និងបោះពុម្ព ដែលក្នុងនោះប្រទេសចិនមាន៤៤០ពាន់ ចំណែកឯសហរដ្ឋអាមេរិកមាន ៣០៥ពាន់ និងប្រទេសរុស្ស៊ីមាន ១២០ពាន់ចំណងជើង។

ខណៈពេលដែលបច្ចេកវិទ្យាកំពុងរីកចម្រើនជារៀងរាល់ថ្ងៃ មធ្យោបាយសម្រាប់អំណានក៏មានច្រើនជម្រើសសម្រាប់សិស្ស និស្សិត និងសាធារណៈជនរួមមានការអានសៀវភៅ ការអានលើឧបករណ៍អេឡិចត្រូនិក ការអានដោយប្រើទូរសព្ទវៃឆ្លាត និងការអានលើកុំព្យូទ័រ ដែលសុទ្ធសឹងជាមធ្យោបាយសំខាន់ៗដែលនាំអ្នកអានទាំងឡាយឱ្យសម្រេចគោលបំណងអានរបស់ខ្លួន។ម្យ៉ាងវិញទៀត អំណានដោយប្រើមធ្យោបាយបច្ចេកវិទ្យាទំនើប ចំណាយពេលតិច ងាយស្រួលអាន និងជួយដល់បរិស្ថានមួយកម្រិតទៀត។ នាពេលបច្ចុប្បន្ន សិស្ស និស្សិត និងសាធារណៈជនកម្ពុជាដែលស្រឡាញ់អំណានកំពុងតែប្រើប្រាស់មធ្យោបាយអំណានទាំងនេះ។ បើយើងក្រឡេកមើលទៅប្រទេសជឿនលឿន ទោះបីជាបច្ចេកវិទ្យារីកចម្រើនខ្លាំងយ៉ាងណា អំណានតាមរយៈសៀវភៅនៅតែមានសន្ទុះដដែល។ ម្យ៉ាងវិញទៀត បច្ចេកវិទ្យាអានបែបទំនើបតាមរយៈឧបករណ៍ទំនើប អាស្រ័យលើលទ្ធភាពនៃធនធានអប់រំឌីជីថល និងមាតិកាឌីជីថលគ្រប់គ្រាន់ដែលបានផលិត និងបង្ហោះចែកចាយសម្រាប់អំណាន។

ក្នុងបរិបទកម្ពុជា ជាពិសេសក្នុងបរិការណ៍នៃការផ្ទុះរីករាលដាលនៃជំងឺកូវីដ-១៩ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានជំរុញឱ្យមានបរិវត្តកម្មឌីជីថលនៅក្នុងអេកូស៊ីស្តែមនៃការអប់រំ ជាពិសេសការអប់រំតាមប្រព័ន្ធអេឡិចត្រូនិកនិងការអប់រំពីចម្ងាយ ដើម្បីលើកកម្ពស់អំណានតាមរយៈការផលិតមាតិកាឌីជីថលដែលមានភាពចម្រុះ ការកសាងសមត្ថភាពផ្នែកតំណភ្ជាប់និងវេទិកាឌីជីថល ការពង្រីកវិសាលភាពនៃមជ្ឈមណ្ឌលទិន្នន័យ និងការលើកកម្ពស់គុណភាពនៃការផលិតធនធានអប់រំឌីជីថល គួបផ្សំជាមួយការចែកសន្លឹកកិច្ចការឱ្យសិស្សយកទៅរៀននៅផ្ទះ និងការចុះទៅជួបជាមួយសិស្សជាបណ្តុំនៅតាមសហគមន៍។ ក្នុងន័យលើកកម្ពស់អំណាន និងភាពសម្បូរបែបនៃធនធានសៀវភៅសិក្សាឱ្យកាន់តែមានប្រសិទ្ធភាពនិងភាពស័ក្តិសិទ្ធិ និងផ្តល់ឱកាសអំណានកាន់តែច្រើនថែមទៀតដល់សិស្សានុសិស្ស និស្សិត និងសាធារណៈជន ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាលើកទឹកចិត្តនូវចំណុចមួយចំនួនដូចខាងក្រោម៖

1. សាស្ត្រាចារ្យ អ្នកស្រាវជ្រាវ និងបុគ្គលិកអប់រំ សូមបន្តនិងបង្កើនការបោះពុម្ពស្នាដៃបន្ថែមទៀត ដើម្បីធ្វើឱ្យធនធានសម្រាប់អំណានកាន់តែសម្បូរបែប ជាពិសេសធនធានអំណានជាខេមរភាសា
2. គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា សូមផ្តល់លទ្ធភាពគ្រប់បែបយ៉ាង ដើម្បីឱ្យបុគ្គលិកអប់រំគ្រប់លំដាប់ថ្នាក់ និង និស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សាអាចចូលរួមអាន និងសិក្សាស្រាវជ្រាវតាមគ្រប់លទ្ធភាពជាមួយធនធានអំណាន ជាពិសេសការរៀបចំឱ្យមានពេលវេលាសម្រាប់សហសិក្សា និងអំណានក្នុងបណ្ណាល័យ
3. សាស្ត្រាចារ្យតាមមុខវិជ្ជា និងអ្នកស្រាវជ្រាវតាមជំនាញឬវិស័យ ត្រូវរៀបចំដំណើរការរៀនបង្រៀន និងស្រាវជ្រាវដែលមានដាក់បញ្ចូលកិច្ចការស្វ័យសិក្សា សហសិក្សា ឬការស្រាវជ្រាវបណ្ណាល័យដែលតម្រូវឱ្យនិស្សិតត្រូវអាននិងស្រាវជ្រាវជាមួយធនធានអំណាន
4. គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងមជ្ឈមណ្ឌលស្រាវជ្រាវ ត្រូវខិតខំឱ្យអស់លទ្ធភាពក្នុងការបង្កើតបណ្ណាល័យ មជ្ឈមណ្ឌលរក្សាឯកសារ ឬមជ្ឈមណ្ឌលអប់រំឌីជីថល ជាដើម ដើម្បីឱ្យបុគ្គលិកអប់រំគ្រប់លំដាប់ថ្នាក់និងនិស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សា អាចទទួលបាន និងស្វែងរកប្រភពសម្រាប់អំណាន កាន់តែសម្បូរបែប និងមានភាពបត់បែន ឆ្លើយតបតាមតម្រូវការអ្នកអាន
5. និស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សា ត្រូវខិតខំនិងចំណាយពេលអាន និងចាត់ទុកវប្បធម៌ និងអាកប្បកិរិយាអំណានជាផ្នែកមួយ នៃពេលវេលានិងភាពស៊ីវិល័យនៃជីវិតប្រចាំថ្ងៃ
6. បងប្អូនជនរួមជាតិ ដែលជាមាតាបិតា ឬអ្នកអាណាព្យាបាល សូមជួយជំរុញ និងបង្កលក្ខណៈកាន់តែ ច្រើនថែមទៀត ជាពិសេសការលៃលកចំណាយនៅក្នុងគ្រួសារសម្រាប់ការទិញសម្ភារៈសិក្សា សៀវភៅអាន និងឧបករណ៍សម្រាប់អំណានដល់កូនៗ ដែលចាត់ទុកជាការវិនិយោគមួយដ៏សំខាន់ សម្រាប់ បង្កើនចំណេះដឹង និងអនាគតរបស់ពួកគេ។

ដោយមានការគាំទ្រពីក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ នៅឆ្នាំ២០២០ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានបង្កើតមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ដែលហៅកាត់ថា“មូលនិធិ ស.គ.ន” និងហៅជាភាសាអង់គ្លេសថា The Research Creativity and Innovation Fund ដែលហៅកាត់ជាភាសាអង់គ្លេសថា “RCI Fund”។ គោលដៅចម្បងនៃមូលនិធិនេះ គឺរួមចំណែកលើកកម្ពស់វប្បធម៌នៃការស្រាវជ្រាវ បំផុសគំនិតច្នៃប្រឌិត និងជំរុញការធ្វើនវានុវត្តន៍ ដើម្បីជាប្រយោជន៍ដល់វិស័យអប់រំដែលឆ្លើយតបទៅនឹងទីផ្សារពលកម្ម និងសាកលភាវូបនីយកម្ម។ មូលនិធិ ស.គ.ន បានសម្រេចកំណត់ប្រធានបទ ជាអាទិភាពសម្រាប់ការគាំទ្រដោយមូលនិធិចំនួន៣ រួមមាន ឌីជីថលនីយកម្មសម្រាប់បដិវត្តឧស្សាហកម្ម៤.០ (Digitalization for IR.4.0) ការស្រាវជ្រាវអនុវត្តលើវិស័យកសិកម្ម (Applied Agricultural Research) និងការស្រាវជ្រាវគរុកោសល្យសតវត្សទី២១ (21st Century Pedagogy Research)។

ដោយមានការធ្វើអត្ថិភាពរូបនីយកម្មទៅលើទិសដៅ នៃការប្រើប្រាស់ថវិកាមូលនិធិសម្រាប់ឆ្នាំ ២០២០ ក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ និងក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានផ្តល់ការគាំទ្រដល់ការ **រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អ សៀវភៅសិក្សា(Text book) ដែលនឹងត្រូវប្រើប្រាស់នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។** គោលបំណងនៃការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អ សៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សាគឺដើម្បីបង្កើនបរិមាណ លើកកម្ពស់គុណភាព និងពង្រីកសមធម៌នៃធនធានសិក្សាជាខេមរភាសាជូនដល់និស្សិតដែលកំពុងបន្តការសិក្សា និងត្រៀមខ្លួនធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។ លើសពីនេះទៀតការរៀបរៀងនិពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សាមានគោលដៅដូចខាងក្រោម ៖

- ឆ្លើយតបជាបន្ទាន់ចំពោះការខ្វះខាតធនធានសិក្សា ដែលជាតម្រូវការសិក្សារបស់និស្សិត នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា
- លើកកម្ពស់ទំនើបភាវូបនីយកម្ម និងឧត្តមានុវត្តន៍នៃការរៀននិងបង្រៀន និងការស្រាវជ្រាវនៅលើមុខវិជ្ជា កម្មវិធីសិក្សា ឬមុខជំនាញជាក់លាក់
- បង្កើនភាពស៊ីជម្រៅក្នុងការកសាងវិជ្ជាជីវៈនិងបទពិសោធន៍សម្រាប់ឋានៈសាស្ត្រាចារ្យ និងអ្នកស្រាវជ្រាវ
- រួមចំណែកដល់ការកសាងភាពជាសហគមន៍វិជ្ជាជីវៈ ការចែករំលែកបទពិសោធន៍ និងវប្បធម៌នៃការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានវាយតម្លៃខ្ពស់ចំពោះការបោះជំហានប្រកបដោយមនសិការវិជ្ជាជីវៈនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងបុគ្គលិកអប់រំទាំងអស់ ក្នុងការរៀបចំ រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ដើម្បីបង្កើនបរិមាណ លើកកម្ពស់គុណភាព និងពង្រឹងសមធម៌នៃធនធានសិក្សាជាខេមរភាសា ជូននិស្សិតដែលកំពុងបន្តការសិក្សា និងត្រៀមខ្លួនធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។ សៀវភៅសិក្សាជាផ្នែកមួយនៃការទទួលស្គាល់គុណភាពអប់រំនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងជាធនធានសិក្សាដែលជាមូលដ្ឋានមួយដ៏សំខាន់ ក្នុងការគាំទ្រដល់ការបង្រៀន និងរៀន ហើយត្រូវមានបរិមាណគ្រប់គ្រាន់ ឆ្លើយតបទៅនឹងកម្មវិធីអប់រំ និងតម្រូវការសិក្សាស្រាវជ្រាវ។ ជាគោលការណ៍ គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សាទាំងអស់ ត្រូវមានសៀវភៅសិក្សាដែលប្រើជាគោលសម្រាប់មុខវិជ្ជានីមួយៗ។ ចំនួនសៀវភៅសិក្សាដែលគ្រប់គ្រាន់សម្រាប់ការស្រាវជ្រាវ និងការសិក្សារបស់និស្សិត ត្រូវមានយ៉ាងតិចមួយចំណងជើងក្នុងមួយមុខវិជ្ជា ហើយត្រូវតម្កល់យ៉ាងតិច២ច្បាប់ នៅក្នុងបណ្ណាល័យ ឬអាចរកបានតាមប្រព័ន្ធអេឡិចត្រូនិច។ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា លើកទឹកចិត្តបន្ថែមទៀតជូនដល់គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សារដ្ឋ និងឯកជនដែលបានស្នើសុំថវិកាមូលនិធិរួច សូមចូលរួមបន្ថែមទៀតដើម្បីបង្កើនចំនួនចំណងជើងសៀវភៅ។ ចំណែកគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សារដ្ឋនិងឯកជនដែលពុំទាន់បានដាក់ពាក្យស្នើសុំ សូមចូលរួមដើម្បីជាគុណប្រយោជន៍ដល់តម្រូវការដ៏ទទូច និងថ្លៃថ្លានៃនិស្សិតកម្ពុជាក្នុងការសិក្សា និងស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។

សេចក្តីបញ្ជាក់
នៃមូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍

សៀវភៅសិក្សានេះជាលទ្ធផលនៃការស្នើសុំអនុវត្តថវិកាមូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ក្នុងគម្រោង**រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ដែលនឹងត្រូវប្រើប្រាស់នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។** សៀវភៅសិក្សានេះ ត្រូវបានរៀបរៀង និពន្ធ ឬកែលម្អដោយមានការធានាអះអាងថាជាស្នាដៃរបស់អ្នកនិពន្ធផ្ទាល់ និងបានឆ្លងកាត់ត្រួតពិនិត្យ ផ្តល់យោបល់ និងវាយតម្លៃដោយក្រុមប្រឹក្សាអប់រំ ក្រុមប្រឹក្សាស្រាវជ្រាវ ឬក្រុមប្រឹក្សាដែលមានតម្លៃស្មើនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងតាមរយៈកិច្ចសន្យាដែលបានធ្វើឡើង និងដែលបានតម្កល់ទុកនៅមូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍។ រាល់ខ្លឹមសារ ការបកស្រាយ និងរូបភាព គឺជាជំហរនិងទស្សនៈផ្ទាល់របស់អ្នកនិពន្ធ ហើយ ពុំឆ្លុះបញ្ចាំង ឬជាតំណាងដល់មូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ នៃក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ឡើយ។

មាតិកា

បុព្វកថា i

សេចក្តីបញ្ជាក់ vi

អារម្ភកថា ix

សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ x

ការបរិយាយលើមុខវិជ្ជា xi

មូលន័យសង្ខេប...xii

មេរៀនទី១៖ ទម្រង់ពីជគណិត..1

១.១.ប្រមាណវិធីក្នុង 1

១.២.លក្ខណៈនៃប្រមាវិធីក្នុង 1

១.៣.ផ្នែកស្ថាប 4

១.៤. ប្រមាណវិធីប្រាសនៃប្រមាណវិធីក្នុង...6

១.៥.ប្រមាណវិធីក្រៅ 6

១.៦. ទំនាក់ទំនងរវាងប្រមាណវិធីក្នុងពីរ...7

១.៧. ម៉ភីស (Morphisme)...10

មេរៀនទី២៖ ទម្រង់ក្រុម...22

២.១.និយមន័យ និងលក្ខណៈ..22

២.២.ទម្រង់ក្រុម (Group)...27

២.៣. ក្រុមចម្លាស់ (Groups of Permutations)..29

២.៤.ក្រុមរង និងលក្ខណៈ...36

២.៥.អូម៉ូម៉កភីសក្រុម...43

២.៦.រូបភាព (Image) និងស្នូល (Kernel) 45

២.៧.ក្រុមរងន័រម៉ាល់...51

២.៨.ក្រុមផលចែក 55
២.៩.ក្រុមរងផលចែក...56
២.១០.ទ្រឹស្ដីបទអូម៉ូម៉កភីស និងអ៊ីសូម៉កភីស 57
មេរៀនទី៣៖ ទម្រង់កង..66
៣.១.និយមន័យ និងលក្ខណៈ...66
៣.២. កងអាំងតែក...68
៣.៣.កងរង និងលក្ខណៈ 70
៣.៤.អូម៉ូម៉កភីស 72
៣.៥.អ៊ីដេអាល់ (Ideal) 73
៣.៦.កងផលចែក 75
៣.៧.កងផលចែក$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 76
៣.៨.ទ្រឹស្ដីបទកងអ៊ីសូម៉កភីស 78
មេរៀនទី៤៖ ទម្រង់កាយ..86
៤.១.និយមន័យ និងលក្ខណៈ...86
៤.២.កាយរង និងលក្ខណៈ 90
៤.៣. អូម៉ូម៉កភីសកាយ 92
៤.៤.កាយចំនួនកុំផ្លិច$\mathbb{C}$ 92
៤.៥ អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនៃចំនួនកុំផ្លិច 99
៤.៦. ឫសទីnនៃចំនួនកុំផ្លិច..100
មេរៀនទី៥៖ កងពហុធា 105
៥.១.កងពហុធា 105
៥.២.ការដាក់ជាផលគុណកត្តានៃពហុធាមួយអថេរ 113
៥.៣.ទ្រឹស្ដីបទគ្រឹះនៃពីជគណិត..123
ឯកសារពិគ្រោះ 130

សន្ទានុក្រម 130

អារម្ភកថា

សៀវភៅ ពីជគណិតទូទៅ ២ នេះត្រូវបានចងក្រងឡើងសម្រាប់គរុនិស្សិតផ្នែកគណិតវិទ្យា និងសាស្ត្រាចារ្យដែលមានខ្លឹមសារដូចខាងក្រោម៖

១. ទម្រង់ពីជគណិតទូទៅ

២. ទម្រង់ក្រុម

៣. ទម្រង់កង

៤. ទម្រង់កាយ

៥. កងពហុធា

សៀវភៅនេះអាចជួយឱ្យអ្នកអានទទួលបានចំណេះដឹងខាងទ្រឹស្តី និងផ្តោតសំខាន់ទៅការសេសេរសម្រាយបញ្ជាក់បែបគណិតវិទ្យា និងមានឧទាហរណ៍មួយចំនួន។ ឯកសារគណិតវិទ្យានេះត្រូវបានចងក្រងពីឯកសារលោកគ្រូ ឈឹម ម៉េង មួយចំនួន និងឯកសារផ្សេងៗដើម្បីបានឯកសារប្រើប្រាស់ជាឯកសារពិគ្រោះ។

យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថាក្រោយពីអាន និងពិចារណាដោយយកចិត្តទុកដាក់គរុនិស្សិតពិតជាទទួលបានចំណេះដឹងគណិតវិទ្យាផ្នែកគណនានេះបានទូលំទូលាយ។ ហើយយើងខ្ញុំក៏ទទួលការរិះគន់គ្រប់បែបយ៉ាងពីសំណាក់គរុនិស្សិត និងអ្នកអានគ្រប់មជ្ឈដ្ឋានដើម្បីកែលម្អសៀវភៅនេះនៅពេលបោះពុម្ពផ្សាយលើក្រោយ។

សេចក្ដីថ្លែងអំណរគុណ

ជាការពិតសៀវភៅ «ពីជគណិតទូទៅ ២» ដែលលេចចេញជារូបរាងនៅពេលនេះគឺបានកើតឡើងពីការខិតខំ និងយកចិត្តទុកដាក់ចូលរួមពីភាគី និងស្ថាប័នពាក់ព័ន្ធជាច្រើន។

ខ្ញុំបាទសូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅបំផុតដល់ភាគី និងស្ថាប័នពាក់ព័ន្ធទាំងអស់ដូចជា ៖

- ក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ ដែលបានគាំទ្រយ៉ាងពេញទំហឹងដល់ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាឱ្យបង្កើតមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ហៅកាត់ថា «មូលនិធិ ស.គ.ន»។

- ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាដែលបានបង្កើតមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ដែលហៅកាត់ថា «មូលនិធិ ស.គ.ន» ដើម្បីរួមចំណែកលើកកម្ពស់វប្បធម៌នៃការស្រាវជ្រាវ បំផុសគំនិតច្នៃប្រឌិត និងជំរុញការធ្វើនវានុវត្ត ដើម្បីជាប្រយោជន៍ដល់វិស័យអប់រំ យុវជន និងកីឡា ដែលឆ្លើយតបទៅនឹងទីផ្សារពលកម្ម និងសាកលភាវូបនីយកម្ម។

- មូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ដែលបានគាំទ្រដល់ការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា (Text book) ដែលនឹងត្រូវប្រើប្រាស់នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា ដើម្បីបង្កើនបរិមាណ លើកកម្ពស់គុណភាព និងពង្រីកសមធម៌នៃធនធានសិក្សាជាខេមរភាសាជូនដល់និស្សិតដែលកំពុងបន្តការសិក្សា និងត្រៀមខ្លួនធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។

- ឯកឧត្តមវិទ្យាស្ថានគរុកោសល្យបាត់ដំបងដែលបានចាត់តាំងជាគណៈកម្មការនិពន្ធចូលរួមការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សានេះ។

- នាយកដ្ឋានបណ្ដុះបណ្ដាលដែលបានចាត់តាំងជាគណៈកម្មការនិពន្ធ និងគណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យ លើស្នាដៃនៃការចូលរួមការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សានេះ។

- លោកប្រធាន នាយកដ្ឋានបណ្ដុះបណ្ដាលដែលព្រមព្រៀងទទួលសិទ្ធិជាតំណាងអ្នករៀបរៀងក្នុងការចាត់ចែង និងសម្របសម្រួលជាមួយក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ចុះហត្ថលេខាលើកិច្ចព្រមព្រៀង និងកិច្ចដំណើការទូទាត់ថវិកាតាមរយៈការស្នើសុំ និងទទួលថវិកា បោះពុម្ព និងផ្សព្វផ្សាយបន្តនូវស្នាដៃរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អរបស់អ្នករៀបរៀងក្នុងការរៀន និងបង្រៀនក្នុងគ្រឹះស្ថានសិក្សា និងប្រគល់សិទ្ធិស្របតាមការកំណត់នៃកិច្ចព្រមព្រៀង ស្ដីពីការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា ក្រោមការគាំទ្រនៃមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍។

- គ្រូឧទ្ទេសមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យានៃវិទ្យាស្ថានគរុកោសល្យបាត់ដំបង ដែលបានផ្ដល់មតិកែលម្អលើខ្លឹមសារ នៃមេរៀននីមួយៗឱ្យកាន់តែមានភាពសុក្រឹត និងមានលក្ខណៈវិទ្យាសាស្ត្រ។

ខ្ញុំបាទសង្ឃឹមថា សៀវភៅនេះនឹងឆ្លើយតបជាបន្ទាន់ចំពោះការខ្វះខាតធនធានសិក្សា ដែលជាតម្រូវការសិក្សារបស់សិស្ស និស្សិត នៅកម្រិតវិទ្យាល័យ និងឧត្តមសិក្សា។

ការបរិយាយលើមុខវិជ្ជា

មុខវិជ្ជាពីជគណិតទូទៅ២នេះផ្តល់នូវមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃគណិតវិទ្យាដែលទាក់ទងទៅនឹងទម្រង់ពីជគណិតសំខាន់ៗ មានដូចជា ប្រមាណវិធីក្នុង ប្រមាណវិធីក្រៅ ក្រុម កង និង កាយ។ មេរៀនទី១ ពិព៌ណនាអំពី ទំរង់ពីជគណិតដែលផ្តោតទៅលើប្រមាណវិធីសំខាន់ៗលើសំណុំដូចជា ប្រមាណវិធីក្នុង និងប្រមាណវិធីក្រៅ។ នៅក្នុងមេរៀនទី២ យើងសិក្សាទៅលើទំរង់ក្រុមដែលរួមមាន ក្រុម ក្រុមរង ក្រុមចម្លាស់ អូម៉ូម៉កភីស ក្រុមរងន័រម៉ាល់ ក្រុមរងស៊ីក្លីក ក្រុមផលចែក និងទ្រឹស្តីបទអ៊ីសូម៉រភីស។ មេរៀនទី៣ ផ្តោតទៅលើលក្ខណៈ និងទំរង់នៃកង កងរង អូម៉ូម៉រភីសនៃកង កងអាំងតែក អ៊ីដេអាល់ កងផលចែក និងទ្រឹស្តីបទអ៊ីសូម៉រភីសនៃកង។ នៅក្នុងមេរៀនទី៤ និយាយអំពី ទំរង់ពីជគណិតនៃកាយ កាយរង នៃចំនួនពិត និងចំនួនកុំផ្លិច ។ នៅក្នុងមេរៀនចុងក្រោយ យើងសិក្សាលក្ខណៈនៃពហុធា និងការដាក់ជាផលគុណកត្តានៃពហុធាមួយអថេរដែលមានមេគុណលើកាយ។

ខ្លឹមសារមេរៀនដែលបានលើកឡើងក្នុងសៀវភៅនេះអាចជួយដោះស្រាយបញ្ហាក្នុងការបង្រៀន និងរៀនណិតវិទ្យាដែលបង្កលក្ខណៈងាយស្រួលដល់គ្រូឧទ្ទេស គ្រូបង្រៀន គរុនិស្សិត គរុសិស្ស សិស្សានុសិស្សអាចអនុវត្តន៍ និងស្រាវជ្រាវសម្រាប់សាធារណៈជនទូទៅ។ ជាមូលដ្ឋានគ្រឹះសម្រាប់ហ្វឹកហាត់គរុនិស្សិត គរុនិស្សិតសិក្សានូវរាល់ខ្លឹមសារស្របតាមកម្មវិធីដែលធ្វើឱ្យមេរៀននីមួយៗមានទំនាក់ទំនងគ្នាពីមួយចំណុចទៅមួយចំណុច។ ការសិក្សាលម្អិតលើកម្មវិធីដែលអាចឱ្យអ្នកសិក្សាចេះប្រើប្រាស់បានដូចជា៖ មេរៀន ឧទាហរណ៍ លំហាត់អនុវត្តន៍ និងលំហាត់ស្រាវជ្រាវរួមមានវិធីផ្សេងក្នុងការដោះស្រាយដោយវិភាគ ការគិតត្រិះរិះពិចារណា ជាដើម។

មូលន័យសង្ខេប

សៀវភៅនេះផ្ដោតសំខាន់ទៅលើមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃគណិតវិទ្យាដែលមានមេរៀនសង្ខេប និយមន័យ ទ្រឹស្ដីបទ ឧទាហរណ៍ លំហាត់អនុវត្តន៍ជាដើមព្រមទាំងមានទំនាក់ទំនងនៃមេរៀននីមួយៗ។

មុខវិជ្ជាពីជគណិតទូទៅ២នេះផ្ដល់នូវមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃគណិតវិទ្យាដែលទាក់ទងទៅនឹងទំរង់ពីជគណិតសំខាន់ៗ មានដូចជា ប្រមាណវិធីក្នុង ប្រមាណវិធីក្រៅ ក្រុម កង និង កាយ។ មេរៀនទី១ ព៌ណនាអំពី ទម្រង់ពីជគណិតដែលផ្ដោតទៅលើប្រមាណវិធីសំខាន់ៗលើសំណុំដូចជា ប្រមាណវិធីក្នុង និងប្រមាណវិធីក្រៅ។ នៅក្នុងមេរៀនទី២ យើងសិក្សាទៅលើទំរង់ក្រុមដែលរួមមាន ក្រុម ក្រុមរង ក្រុមចម្លាស់ អូម៉ូម៉កភីស ក្រុមរងន័រម៉ាល់ ក្រុមរងស៊ីក្លិក ក្រុមផលចែក និងទ្រឹស្ដីបទអ៊ីសូម៉រភីស។ មេរៀនទី៣ ផ្ដោតទៅលើលក្ខណៈ និងទំរង់នៃកង កងរង អូម៉ូម៉កភីសនៃកង កងអាំងតែក អ៊ីដេអាល់ កងផលចែក និងទ្រឹស្ដីបទអ៊ីសូម៉កភីសនៃកង។ នៅក្នុងមេរៀនទី៤ និយាយអំពី ទម្រង់ពីជគណិតនៃកាយ កាយរង នៃចំនួនពិត និងចំនួនកុំផ្លិច ។ នៅក្នុងមេរៀនចុងក្រោយ យើងសិក្សាលក្ខណៈនៃពហុធា និងការដាក់ជាផលគុណកត្តានៃពហុធាមួយអថេរដែលមានមេគុណលើកាយ។

មេរៀនទី១៖ ទម្រង់ពីជគណិត

១.១.ប្រមាណវិធីក្នុង

និយមន័យ៖ E ជាសំណុំមួយមិនទទេដែលហៅថាប្រមាណវិធីក្នុងលើ E គឺគ្រប់អនុវត្តន៍ $E\times E\to E$ ។

$f:E\times E\to E$

$(a,b)\mapsto z=f\left[(a,b)\right]$

គេតាងប្រមាណវិធីក្នុងដោយ $+,-,\times,\div,\ldots,\circ,*,\top,\perp,\Delta,\oplus,\otimes,\ldots$

- បើយើងតាងប្រមាណវិធីក្នុងដោយ $*$ នោះគេបានអនុវត្តន៍ $E\times E\to E$

$$(a,b)\mapsto y=f\left[(a,b)\right]=a*b$$

ឧទាហរណ៍១៖ $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

$(a,b)\mapsto y=f\left[(a,b)\right]=a+b$ ជាអនុវត្តន៍

ប្រមាណវិធីបូកជាប្រមាណវិធីក្នុងនៃសំណុំ $\mathbb{N}$ (ឬលើសំណុំ $\mathbb{N}$)

- បើយើងតាងប្រមាណវិធីក្នុងដោយ $\circ$ នោះគេបានអនុវត្តន៍ $E\times E\to E$

$$(a,b)\mapsto y=f\left[(a,b)\right]=a\circ b$$

ឧទាហរណ៍២៖ $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

$(a,b)\mapsto y=f\left[(a,b)\right]=a-b$ មិនមែនជាអនុវត្តន៍ទេ

ព្រោះ $a-b$ មិនសុទ្ធតែជារបស់ $\mathbb{N}$ ទេ

គេបានប្រមាណវិធីដក $(-)$ មិនមែនជាប្រមាណវិធីក្នុងលើសំណុំ $\mathbb{N}$ ទេ។

១.២.លក្ខណៈនៃប្រមាណវិធីក្នុង

ប្រមាណវិធី $(*)$ ជាប្រមាណវិធីក្នុងមួយលើ E គេថា៖

ក.លក្ខណៈត្រឡប់ (Commutative law)

គេថាប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ E កាលណា៖ $\forall(a,b)\in E\times E\Rightarrow a*b=b*a$ ។

ឧទាហរណ៍៣៖ ប្រមាណវិធី $\cup,\cap,\Delta$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathscr{P}(U)$ ។

ប្រមាណវិធី $+,\circ$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$ ។

ប្រមាណវិធី $-$ គ្មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$ ទេ។

ប្រមាណវិធី $+,\times$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{R}$ ។

សម្គាល់៖ ប្រមាណវិធីក្នុងខ្លះគ្មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ E ទេ ប៉ុន្តែវាអាចមានធាតុនៃ E ដែលអាចត្រឡប់គ្នាបានចំពោះប្រមាណវិធីនេះ។

ខ.លក្ខណៈផ្តុំ (Associative law)

គេថាប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ E កាលណា៖ $\forall(a,b,c)\in E\times E\times E$ ឬ $\forall(a,b,c)\in E^3$ ឬ $\forall a,b,c\in E\Rightarrow(a*b)*c=a*(b*c)$ ។

ឧទាហរណ៍៤៖ ប្រមាណវិធី $\cup,\cap,\Delta$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ $\mathscr{P}(U)$ ។

ប្រមាណវិធី $(+,\circ)$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$ ។
ប្រមាណវិធី $(-)$ គ្មានលក្ខណៈផ្តុំលើ $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$ ទេ។

លំហាត់អនុវត្តន៍៖

1- គេឱ្យ $\mathbb{R}$ ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធី $(*),\forall a,b\in\mathbb{R}:a*b=a$ ។ ចូរសិក្សាលក្ខណៈនៃប្រមាណវិធី $*$ ក្នុង $\mathbb{R}$ ។

2- គេឱ្យ $\mathbb{Q}-\{0\}$ ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធី $(*),\forall a,b\in\mathbb{Q}-\{0\}:a*b=\dfrac{a}{b}$ ។

ចូរសិក្សាលក្ខណៈនៃប្រមាណវិធី $*$ ក្នុង $\mathbb{Q}-\{0\}$ ។

គ.លក្ខណៈបំបែក (Distributive law)

គេ E ឱ្យជាសំណុំមួយប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីក្នុងពីរ $(*)$ និង $(\circ)$ ។

- គេថាប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈបំបែកឆ្វេងចំពោះប្រមាណវិធី $(\circ)$ លើ E កាលណា៖ $\forall a,b,c\in E\Rightarrow a*(b\circ c)=(a*b)\circ(a*c)$
- គេថាប្រមាណវិធី$*$មានលក្ខណៈបំបែកស្តាំចំពោះប្រមាណវិធី $(\circ)$ លើ E កាលណា៖ $\forall a,b,c\in E\Rightarrow (b\circ c)*a=(b*a)\circ(c*a)$
- គេថាប្រមាណវិធី $(*)$ មានលក្ខណៈបំបែកចំពោះប្រមាណវិធី $(\circ)$ លើ E កាលណាវាមានលក្ខណៈបំបែកឆ្វេងផងនិងមានលក្ខណៈបំបែកស្តាំផង។

សម្គាល់៖ ក្នុងករណីប្រមាណវិធី $(*)$ នៃ E មានលក្ខណៈត្រឡប់ហើយបើប្រមាណវិធី $(*)$ មានលក្ខណៈបំបែកខាងស្តាំ ឬខាងឆ្វេងចំពោះប្រមាណវិធី $(\circ)$ គេបានប្រមាណវិធី $(*)$ មានលក្ខណៈបំបែកចំពោះប្រមាណវិធី $(\circ)$ ។

ឧទាហរណ៍៖ លើ $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$ ប្រមាណវិធីគុណមានលក្ខណៈបំបែកចំពោះប្រមាណវិធីបូក។

ឃ.ធាតុណឺត (Identity element)

បើ $\forall a\in E,e\in E\Rightarrow a*e=e*a=a$ នោះ e ជាធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $(*)$ ហើយមានតែមួយគត់ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

គេមាន $\forall a\in E,e\in E\Rightarrow a*e=e*a=a\ (1)$

ឧបមាថាមាន $e'\in E$ ដែល $\forall a\in E\Rightarrow a*e'=e'*a=a\ (2)$

- យក $a=e'$ តាម (1) គេបាន $e'*e=e*e'=e'$
- យក $a=e$ តាម (2) គេបាន $e*e'=e*e'=e$

នោះគេបាន $e=e'$

សម្គាល់៖

- $a*e=a$ នោះ e ហៅថាធាតុណឺតខាងស្តាំ។
- $e*a=a$ នោះ e ហៅថាធាតុណឺតខាងឆ្វេង។

ឧទាហរណ៍៥៖ នៅក្នុង $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$ គេបាន 0 ជាធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $+$ ហើយ 1 ជាធាតុ

ណឹតចំពោះប្រមាណវិធីគុណ។

ង. ធាតុច្រាស (Inverse element)

បើ $\forall a\in E,\exists a^{-1}\in E\Rightarrow a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$ នោះ a^{-1} ជាធាតុច្រាសចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ។

ឧទាហរណ៍៦៖ ១. គ្រប់ធាតុ a នៃ $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$ មានធាតុច្រាស $-a$ ចំពោះប្រមាណវិធីបូក។

២. គ្រប់ធាតុ a នៃ $\mathbb{Q}^*,\mathbb{R}^*$ មានធាតុច្រាស $\frac{1}{a}$ ចំពោះប្រមាណវិធីគុណ។

ច.ធាតុសម្រួលបាន

គេថា a នៃ E ជាធាតុសម្រួលបានចំពោះប្រមាណវិធី$*$ កាលណា៖

$\forall x,y\in E: x*a=y*a\Rightarrow x=y$ សម្រួលបានខាងស្តាំនិង $a*x=a*y\Rightarrow x=y$ សម្រួលបានខាងឆ្វេង។

ឧទាហរណ៍៧៖ គេបង្កើតប្រមាណវិធី$*$លើសំណុំ $\mathbb{Z}$ កំណត់ដោយ $x*y=x+y-1$។

ក. តើប្រមាណវិធី$*$មានលក្ខណៈត្រឡប់ ឬផ្តុំដែរទេ?

ខ. តើ$*$មានធាតុណឹតដែរឬទេ? មានធាតុច្រាសដែរឬទេ?

ដំណោះស្រាយ

ក. តើប្រមាណវិធី$*$មានលក្ខណៈត្រឡប់ ឬផ្តុំទេ?

- លក្ខណៈផ្តុំ

  $\forall a,\mathrm{b},\mathrm{c}\in\mathbb{N}: a*(b*c)=(a*b)*c$

  - $a*(b*c)=a*(b+c-1)$
    $=a+b+c-1-1$
    $=a+b+c-2$
  - $(a*b)*c=(a+b-1)*c$
    $=a+b+c-1-1$
    $=a+b+c-2$

- លក្ខណៈត្រឡប់

  $\forall a,b\in\mathbb{N}: a*b=b*a$

  - $a*b=a+b-1$
  - $b*a=b+a-1=a+b-1$

ដូចនេះ ប្រមាណវិធី$*$មានលក្ខណៈត្រឡប់ និងផ្តុំ។

ខ. តើ$*$មានធាតុណឹតឬទេ?មានធាតុច្រាសឬទេ?

- ធាតុណឹត

  ឧបមាថា e ជាធាតុណឹតចំពោះលើសំណុំ $\mathbb{Z}$ ចំពោះប្រមាណវិធី$*$

  $\forall a\in\mathbb{Z}: a*e=e*a=a$

  - $a*e=a+e-1$

$a = a + e - 1$

$e = 1$

- $e * a = e + a - 1$

  $a = e + a - 1$

  $e = 1$

ដូចនេះ $e = 1$ ជាធាតុណឺត។

- ធាតុប្រាស

  ឧបមាថា a^{-1} ជាធាតុប្រាសលើសំណុំ $\mathbb{Z}$ ចំពោះប្រមាណវិធី $*$

  $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists a^{-1} \in \mathbb{Z} : a * a^{-1} = a^{-1} * a = 1$

  - $a * a^{-1} = a + a^{-1}$

    $1 = a + a^{-1} - 1$

    $a^{-1} = 2 - a$

  - $a^{-1} * a = a^{-1} + a - 1$

    $1 = a^{-1} + a - 1$

    $a^{-1} = 2 - a$

    $2 - a = 2 - a$

ដូចនេះ a មានធាតុប្រាស $a^{-1} = 2 - a$ ចំពោះប្រមាណវិធី $*$។

១.៣.ផ្នែកស្ថាប

A ជាសំណុំរងនៃ E ដែលប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីក្នុង $*$ គេថា A ជាផ្នែកស្ថាបនៃ E កាលណា៖ $\forall a, b \in A : a * b \in A$។

ឧទាហរណ៍៨៖ $A = \{2k : k \in \mathbb{N}\}$ និង $B = \{2k + 1 : k \in \mathbb{N}\}$ ។

- គេបាន A ជាផ្នែកស្ថាបនៃ $\mathbb{N}$ ចំពោះប្រមាណវិធី $+$ និង $\times$
- គេបាន B ជាផ្នែកស្ថាបនៃ $\mathbb{N}$ ចំពោះប្រមាណវិធី $\times$ និងមិនមែនជាផ្នែកស្ថាបនៃ $\mathbb{N}$ ចំពោះប្រមាណវិធី $+$ ទេ។

ទ្រឹស្តីបទ៖ គេឱ្យ E និង F ជាពីរសំណុំប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីក្នុងរៀងគ្នា $\top$ និង $\perp$ ហើយ $f : E \to F$ ជាអូម៉ូម៉កភីស។

i. គេបាន $f(E)$ ជាផ្នែកស្ថាបនៃ F ចំពោះប្រមាណវិធី $\perp$។

ii. បើ e ជាធាតុណឺតនៃ E ហើយ $x \in E$ មានចម្រាស x^{-1} ចំពោះប្រមាណវិធី $\top$ នោះគេបាន $f(x)$ មានចម្រាស $f\left(x^{-1}\right)$ ចំពោះប្រមាណវិធី $\perp$។

iii. បើប្រមាណវិធី $\top$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ E នោះប្រមាណវិធី $\perp$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ $f(E)$

iv. បើប្រមាណវិធី $\top$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ E នោះប្រមាណវិធី $\perp$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ $f(E)$។

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងមាន $f : (E, \top) \to (F, \perp)$ ជាអូម៉ូម៉កភីស

i. ស្រាយថា $f(E)$ ជាផ្នែកស្ថាបនៃ F ចំពោះប្រមាណវិធី $\perp$

គេមាន $f(E)\subset F$

- $\forall x', y'\in f(E)\Leftrightarrow \exists x, y\in E:\begin{cases} x'=f(x)\\ y'=f(y)\end{cases}$

  គេមាន $x'\perp y'=f(x)\perp f(y)$

  $= f(x\top y)$ (f ជាអូម៉ូម៉កភីស)

- ដោយ $x, y\in E\Rightarrow x\top y\in E$

  $\Rightarrow f(x\top y)\in f(E)$

  $\Rightarrow x'\perp y'\in f(E)$

គេបាន $f(E)$ ជាផ្នែកស្ថាបនៃ F ចំពោះប្រមាណវិធី $\perp$ ។

ii. បើ e ជាធាតុណឺតនៃ E ហើយ $x\in E$ មានចម្រាស x^{-1} ចំពោះប្រមាណវិធី $\top$ នោះគេបាន $f(x)$ មានចម្រាស $f\left(x^{-1}\right)$ ចំពោះប្រមាណវិធី $\perp$

- តាមទ្រឹស្តីបទបើ e ជាធាតុណឺតនៃ E ចំពោះប្រមាណវិធី $\top$ និង e' ជាធាតុណឺតនៃ $f(E)$ ចំពោះប្រមាណវិធី $\perp$ គេបាន $f(e)=e'$
- ស្រាយថាបើ $x\in E$ មានចម្រាស x^{-1} នោះ $f(x)$ មានចម្រាស $f\left(x^{-1}\right)$ គឺស្រាយថា

  $\begin{cases} f(x)\perp f\left(x^{-1}\right)=e'\\ f\left(x^{-1}\right)\perp f(x)=e'\end{cases}$

- គេមាន $f(x)\perp f\left(x^{-1}\right)=f\left(x\top x^{-1}\right)=f(e)=e'$

  $f\left(x^{-1}\right)\perp f(x)=f\left(x^{-1}\top x\right)=f(e)=e'$

ដូចនេះ $f\left(x^{-1}\right)=\left[f(x)\right]^{-1}$ ។

iii. ស្រាយថាបើប្រមាណវិធី $\top$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ E នោះប្រមាណវិធី $\perp$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ $f(E)$

$\forall x', y', z'\in f(E)\Leftrightarrow \exists x, y, z\in E: x'=f(x), y'=f(y), z'=f(z)$

គេមាន $x'\perp(y'\perp z')=f(x)\perp\left[f(y)\perp f(z)\right]$

$= f(x)\perp f(y\top z)$

$= f\left[x\top(y\top z)\right]$

$= f\left[(x\top y)\top z\right]$ ($\top$ មានលក្ខណៈផ្តុំ)

$=\left[f(x)\perp f(y)\right]\perp(z)$

$=(x'\perp y')\perp z'$

iv. ស្រាយថាបើប្រមាណវិធី $\top$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ E នោះប្រមាណវិធី $\perp$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ $f(E)$

ឧទាហរណ៍៩៖ តើសំណុំ $\{1,-1,i,-i\}$ មានលក្ខណៈស្ថាបចំពោះប្រមាណវិធី $(\times)$ ដែរឬទេ? $\left(i=\sqrt{-1}\right)$

ដោយសារ $i\times(-i)=-i^2=1\in B=\{1,-1,i,-i\}$

$1\times(-1)=-1\in B$

$(-1)\times i=-i\in B$

$(-1)\times(-i)=i\in B$

$\Rightarrow B=\{1,-1,i,-i\}$ មានលក្ខណៈស្ថាបចំពោះប្រមាណវិធី $(\times)$ ។

ឧទហរណ៍១០៖ គេឱ្យ E ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីក្នុង $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំ។

តាង $C=\{x\in E:\forall y\in E, x*y=y*x\}$ ។

ក.បង្ហាញថា C ជាផ្នែកស្ថាបនៃ E ចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ។

ខ.បង្ហាញថាប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ C ។

ដំណោះស្រាយ

ក.បង្ហាញថា C ជាផ្នែកស្ថាបនៃ E ចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ។

$\oplus\ \forall a_1,a_2\in C:$

$$(a_1*a_2)*x=a_1*(a_2*x)=a_1*(x*a_2)=(a_1*x)*a_2=(x*a_1)*a_2$$
$$=x*(a_1*a_2)$$

$\Rightarrow a_1*a_2\in C$

ដូចនេះ C ជាផ្នែកស្ថាបនៃ E ចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ។

ខ.បង្ហាញថាប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ C

ចំពោះ $\forall a,b\in C\Rightarrow a*b=b*a$ ដែល $a\in C,\forall y,b\in E$ ។

ដូចនេះប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ C ។

១.៤. ប្រមាណវិធីច្រាសនៃប្រមាណវិធីក្នុង

ប្រមាណវិធីក្នុង $*$ លើសំណុំ E មានប្រមាណវិធីច្រាសលើសំណុំ E តែក្នុងករណីប្រមាណវិធី $*$ មានធាតុណឺត $e\in E$ និងធាតុច្រាសលើសំណុំ E ។

ឧទាហរណ៍១១៖ ១.ប្រមាណវិធី $+$ មានប្រមាណវិធីច្រាស $-$ ក្នុង $\mathbb{Z}$ គឺ $a+x=b\Rightarrow x=b-a$

២.ប្រមាណវិធី $\times$ មានប្រមាណវិធីច្រាស $\div$ ក្នុង $\mathbb{R}^*$ គឺ $a\times x=b\Rightarrow x=b\div a$

១.៥.ប្រមាណវិធីក្រៅ

និយមន័យ៖ E ជាសំណុំមួយហើយ K ជាសំណុំនៃការី។ អនុវត្តន៍ពី $K\times E\to E$ ថាប្រមាណវិធីក្រៅលើ E ដែលមានសំណុំការី K ។ បើយើងតាងប្រមាណវិធីក្រៅដោយសញ្ញា $(\cdot)$ (គុណចុច)។

ឧទាហរណ៍១២៖ បើ $K=\mathbb{R}$ ហើយ $V=E$ (លំហវ៉ិចទ័រ)។

នោះគេបាន $\mathbb{R}\times V\to V$

$$\left(a,\vec{u}\right)\mapsto f\left(a\cdot\vec{u}\right)=a\cdot\vec{u}$$

$$\left(a\cdot\vec{u}\right)\in\mathbb{R}\times V\ i.e\ a\in\mathbb{R},\vec{u}\in V$$

១.៦. ទំនាក់ទំនងរវាងប្រមាណវិធីក្នុងពីរ

(i) គេថាប្រមាណវិធី $(\circ)$ មានលក្ខណៈបំបែកចំពោះប្រមាណវិធី $(*)$ លើសំណុំ E កាលណា៖ $\forall a,b,c\in E$ ដែល $a\circ(b*c)=(a\circ b)*(a\circ c)$ មានលក្ខណៈបំបែកពីខាងឆ្វេង

$(b*c)\circ a=(b\circ a)*(c\circ a)$ មានលក្ខណៈបំបែកពីខាងស្តាំ

ប្រសិនបើប្រមាណវិធី $(\circ)$ មានលក្ខណៈត្រឡប់នោះ $a\circ(b*c)=(b*c)\circ a$

ឧទាហរណ៍១៣៖

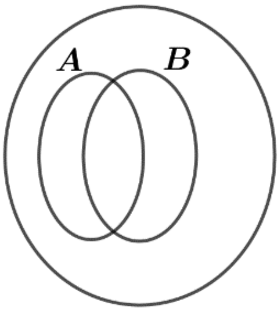
(i) លើសំណុំ $\mathbb{N}$ ៖

- ប្រមាណវិធីបូក $(+)$ ជាប្រមាណវិធីក្នុងព្រោះ $\forall a,b\in\mathbb{N}:a+b\in\mathbb{N}$ វិធីបូក $(+)$ មាន៖
  - លក្ខណៈត្រឡប់
    $\forall a,b\in\mathbb{N}:a+b=b+a$
  - លក្ខណៈផ្តុំ
    $\forall a,b,c\in\mathbb{N}:(a+b)+c=a+(b+c)$
  - ធាតុណឺត
    0 ជាត្រីកោណមាត្រព្រោះ $\forall a\in\mathbb{N}:a+0=0+a=a$
  - ធាតុប្រាស
    $0+0=0$ នោះគេបានធាតុប្រាសនៃ 0 គឺ 0 ។ $\forall a\in\mathbb{N}^*:a$ គ្មានធាតុប្រាសទេ។
  - ធាតុសម្រួលបាន
    $\forall a\in\mathbb{N}:a$ ជាធាតុសម្រួលបានព្រោះ $\forall x,y\in\mathbb{N}:a+x=a+y\Rightarrow x=y$
- ប្រមាណវិធីគុណ $(\cdot)$ ជាប្រមាណវិធីក្នុងព្រោះ៖ $\forall a,b\in\mathbb{N}:a\cdot b\in\mathbb{N}$ វិធីនេះមាន៖
  - លក្ខណៈត្រឡប់
    $\forall a,b\in\mathbb{N}:a\cdot b=b\cdot a$
  - លក្ខណៈផ្តុំ
    $\forall a,b,c\in\mathbb{N}:(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
  - ធាតុណឺត
    1 ជាត្រីកោណមាត្រព្រោះ $\forall a\in\mathbb{N}:a\cdot 1=1\cdot a=a$
  - ធាតុប្រាស
    $1\cdot 1=1$ នោះគេបានធាតុប្រាសនៃ 1 គឺ 1 ។ $\forall a\neq 1:a$ គ្មានធាតុប្រាសទេ។
  - ធាតុសម្រួលបាន
    $\forall a\in\mathbb{N}^*:a$ ជាធាតុសម្រួលបានព្រោះ $\forall x,y\in\mathbb{N}:a\cdot x=a\cdot y\Rightarrow x=y$

- វិធីគុណមានលក្ខណៈបំបែកធៀប និងបូក$(+)$
  - e ជាធាតុណឺតព្រោះ៖ $\forall a,b,c\in\mathbb{N}: a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$
  - វិធីដក និងចែកមិនមែនជាប្រមាណវិធីក្នុងលើ $\mathbb{N}$ ទេ។

    (ii) បើ E ជាប្រមាណវិធីក្នុងមួយលើ $\varphi(E)$ ៖
- ប្រមាណវិធី "$\cap$" ជាប្រមាណវិធីក្នុងព្រោះ $\forall A,B\in\varphi(E): A\cap B\in\varphi(E)$

  ប្រសព្វមាន៖
  - **លក្ខណៈត្រឡប់៖** $\forall A,B\in\varphi(E): A\cap B=B\cap A$



រូបទី១.១

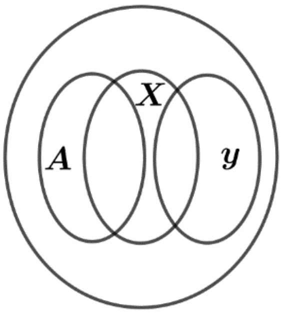
  - **លក្ខណៈផ្តុំ៖**

    $\forall A,B,C\in\varphi(E):(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
  - **ជាតុណឺត៖**

    E ជាត្រីកោណមាត្រព្រោះ $\forall A\in\varphi(E): A\cap E=A$
  - **ជាតុប្រាស៖**

    $E\cap E=E\Rightarrow E$ ជាតុប្រាសនៃ E ។ $\forall A\notin E: A$ គ្មានជាតុប្រាសទេ។
  - **ជាតុសម្រួលបាន៖**

  $\forall A\in\varphi(E): A$ មិនមែនជាជាតុសម្រួលបាន



រូបទី១.២

ព្រោះតាមរូប $A=\{1,2,3\},\{2,3,4\}, y=\{2,3,5\}$

គេបាន $A\cap X=A\cap y=\{2,3\}$ តែ $X\neq y$ ។

- ប្រមាណវិធី "$\cup$" ជាប្រមាណវិធីក្នុងព្រោះ $\forall A,B\in\varphi(E): A\cup B\in\varphi(E)$ ប្រជុំមាន៖
  - លក្ខណៈត្រឡប់

    $\forall A,B\in\varphi(E): A\cup B=B\cup A$

- លក្ខណៈផ្តុំ

  $\forall A,B,C\in\varphi(E):(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$
- ធាតុណឺត

  ϕ ជាត្រីកោណមាត្រព្រោះ $\forall A\in\varphi(E):A\cup\phi=A$
- ធាតុប្រាស

  $\phi\cup\phi=\phi\Rightarrow\phi$ ធាតុប្រាសនៃ ϕ ។ $\forall\phi\neq\phi:A$ គ្មានធាតុប្រាសទេ។
- ធាតុសម្រួលបាន

$\forall A\in\varphi(E):A$ មិនមែនជាធាតុសម្រួលបានព្រោះបើ $A=\{2,3\},X=\{1,2\},y=\{1,3\}$

គេបាន $A\cup X=A\cup y=\{1,2,3\}$ តែ $X\neq y$ ។

- $\cap$ បំបែកជៀបនិង $\cup$ ព្រោះ $\forall A,B,C\in\varphi(E):A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
- $\cup$ បំបែកជៀបនិង $\cap$ ព្រោះ $\forall A,B,C\in\varphi(E):A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

ឧទាហរណ៍១៤៖ នៅក្នុងសំណុំ $\mathbb{Z}$ ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីក្នុង $*$ ដែលកំណត់ដោយ

$\forall a,b\in\mathbb{Z}:a*b=a+b+2ab$

ក.គណនា $10*5,(-2)*3,(1*2)*3$

ខ.តើប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំដែរឬទេ ?មានលក្ខណៈត្រឡប់ដែរឬទេ ? មានធាតុណឺតឬទេ ?

គ.តើចំនួន -3 មានចម្រាសដែរឬទេ ?តើ 2 មានចម្រាសដែរឬទេ ?

ដំណោះស្រាយ

ក.គណនា

$$10*5=10+5+2\times10\times5$$
$$=15+100=115$$

$$(1*2)*3=(1*2)+3+2(1*2)\times3$$
$$=1+2+2\times1\times2+3+6(1+2+2\times1\times2)$$
$$=7+3+6\times7$$
$$=52$$

$$(-2)*3=-2+3+2(-2)\times3$$
$$=1-12$$
$$=-11$$

ខ.សិក្សាលក្ខណៈផ្តុំនៃប្រមាណវិធី $*$

$$\forall a,b,c\in\mathbb{Z}:(a*b)*c=(a*b)+c+2(a*b)\times c$$
$$=a+b+2ab+c+2c(a+b+2ab)$$
$$=a+b+2ab+2ac+2bc+4abc+c\ (1)$$

$\forall a,b,c\in\mathbb{Z}: a*(b*c)=a+(b*c)+2(b*c)\times a$

$=a+b+c+2bc+2a(b+c+2bc)$

$=a+b+2ab+2ac+2bc+4abc+c\ (2)$

តាម (1) និង (2) គេបាន $a*(b*c)=(a*b)*c$ ។

ដូចនេះប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ $\mathbb{Z}$ ។

- សិក្សាលក្ខណៈត្រឡប់នៃប្រមាណវិធី $*$

$\forall a,b\in\mathbb{Z}: a*b=a+b+2ab$

$=b+a+2ba$

$=b*a$

ដូចនេះ ប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{Z}$ ។

- រកធាតុណឺតដោយ $0\in\mathbb{Z}$

ហើយ $\forall a\in\mathbb{Z}: a*0=a+0+2a\times 0=a$

ដូចនេះ 0 ជាធាតុណឺត។

- រកចំនួនចម្រាសនៃ -3

តាង $a'\in\mathbb{Z}: a'*(-3)=0$

$\Leftrightarrow a'-3+2\times a'(-3)=0$

$-5a'=3\Rightarrow a'=-\dfrac{3}{5}\notin\mathbb{Z}$

ដូចនេះ -3 គ្មានចម្រាសទេ។

- រកចំនួនចម្រាសនៃ2

$a'*2=0\Leftrightarrow a'+2+2\times a'\times 2=0$

$\Leftrightarrow 5a'=-2$

$\Rightarrow a'=-\dfrac{2}{5}\notin\mathbb{Z}$

១.៧. ម័រភីស (Morphisme)

ក.អូម៉ូម៉កភីស

និយមន័យ៖ សំណុំ E ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីក្នុង $*$ ហើយសំណុំ F ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីក្នុង $(\circ)$ ។

អនុវត្តន៍ $f:(E,*)\to(F,\circ)$

$\forall x,y\in E:(x,y)\mapsto y=f(x*y)$ អនុវត្តន៍(អនុគមន៍) f ជាអូម៉ូម៉កភីសពីសំណុំ $(E,*)$ ទៅ $(F,\circ)$ កាលណា $f(x*y)=f(x)\circ f(y)$ ។

ឧទាហរណ៍១៥៖ គេមាន $f(x)=2^x$ ជាអូម៉ូម៉កភីសពីសំណុំ $(\mathbb{R},+)$ ទៅសំណុំ $(\mathbb{R},\times)$ ព្រោះ៖

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \ f(x+y) = 2^{x+y}$$
$$= 2^x \times 2^y$$
$$= f(x) \times f(y)$$
$$\Rightarrow f(x+y) = f(x) \times f(y)$$

ដូចនេះ អនុវត្តន៍ពី $(\mathbb{R},+)$ ទៅសំណុំ $(\mathbb{R},\times)$ ជាអូម៉ូម៉កភីស។

ឧទាហរណ៍១៦៖ គេមាន $f(x) = \ln x$ ជាអូម៉ូម៉កភីសពីសំណុំ $(\mathbb{R}^+,\times)$ ទៅសំណុំ $(\mathbb{R}^+,+)$ ព្រោះ

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+: \ f(x.y) = (\ln x.y) = \ln x + \ln y$$
$$= f(x) + f(y)$$
$$\Rightarrow f(x \times y) = f(x) + f(y)$$

ដូចនេះ អនុវត្តន៍ពី $(\mathbb{R}^+,\times)$ ទៅសំណុំ $(\mathbb{R}^+,+)$ ជាអូម៉ូម៉កភីស។

ឧទាហរណ៍១៧៖ គេមាន $f(x) = 2x$ ជាអូម៉ូម៉កភីសពីសំណុំ $\mathbb{R}$ ទៅសំណុំ $\mathbb{R}$ ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីបូកព្រោះ៖

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}: \ f(x_1 + x_2) = 2(x_1 + x_2)$$
$$= 2x_1 + 2x_2$$
$$= f(x_1) + f(x_2)$$
$$\Rightarrow f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

ដូចនេះ អនុវត្តន៍ជាអូម៉ូម៉កភីសពី $\mathbb{R}$ ទៅសំណុំ $\mathbb{R}$ ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីបូក។

១.អនុគមន៍ប្រកាន់ (Injective function)

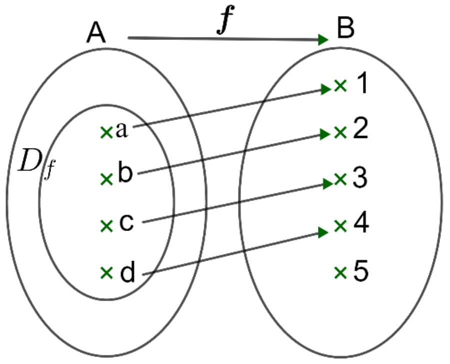
កាលណា $\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ ឬ $\forall x_1, x_2 \in D_f : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

ឧទាហរណ៍៖ បង្ហាញថា $f(x) = x^2$ មិនមែនជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់។

$$D = \mathbb{R} : \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \ f(x_1) = f(x_2)$$
$$\Rightarrow x_1^2 = x_2^2$$
$$\Rightarrow x_1 = \pm x_2$$

ដូចនេះ $f(x) = x^2$ មិនមែនជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់។

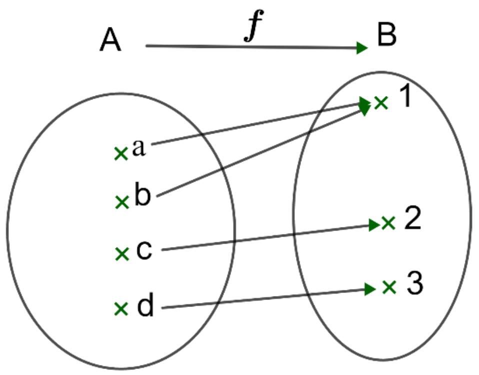
២.អនុគមន៍ពេញ (Subjective function)



រូបទី១.៣

ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់

❖ អនុគមន៍ពេញ (ឬអនុវត្តន៍ពេញ) Subjective function (Subjective mapping)



រូបទី១.៤

ជាអនុវត្តន៍ពេញ

f ជាអនុវត្តន៍ពេញកាលណា $\forall y \in B, \exists\, x \in A: f(x) = y$ ។

ឧទាហរណ៍១៨៖ តើ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = e^x$$

ជាអនុវត្តន៍ពេញដែរឬទេ ?

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $y = e^x \Rightarrow x = \ln y$

យើងឃើញថា $y < 0$ មិនមែនជារូបភាពនៃ x ទេ។

ដូចនេះ $f(x) = e^x$ មិនមែនជាអនុវត្តន៍ពេញពី $\mathbb{R}$ ទៅ $\mathbb{R}$ ទេ។

ប្រសិនបើ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

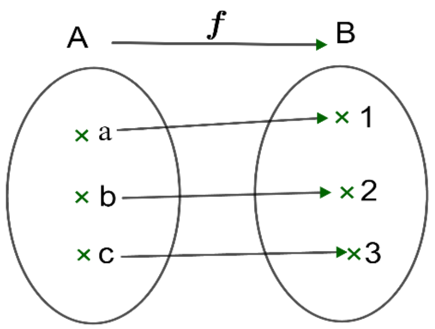
$$x \mapsto f(x) = e^x$$

គេមាន $y = e^x \Rightarrow x = \ln y$

យើងឃើញថា $\forall y > 0$ វាជារូបភាពនៃ x

ដូចនេះ $f(x) = e^x$ ជាអនុវត្តន៍ពេញពី $\mathbb{R}$ ទៅ $\mathbb{R}^+$ ។

៣.អនុវត្តន៍មួយ-ទល់-មួយ (Bijective mapping)



រូបទី១.៥

f ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ

f ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយកាលណា f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ផង និងពេញផង។

ខ. អ៊ីពីម៉កភីស (Epimorphism)

បើជា f អូម៉ូម៉កភីសហើយ f ជាអនុវត្តន៍ពេញត្រូវបានគេហៅថាអ៊ីពីម៉កភីស។

ឧទាហរណ៍១៩៖ តាង $G=\langle\mathbb{Z},+\rangle, G'=\langle\mathbb{Z}_2,\cdot_2\rangle$ មាន

$f:G\to G':f(x)=\begin{cases}1 & \text{បើ } x \text{គូ}\\ -1 & \text{បើ } x \text{សេស}\end{cases}$ ។ យើងនឹងបង្ហាញថា $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$

មានបីករណី៖

(i) បើ $x,y\in\mathbb{Z}$ ទាំងពីរគូ

$f(x)=1,\ f(y)=1$

$\because\ x+y$ ជាចំនួនគត់គូសនោះគេបាន $f(x+y)=1$

$f(x)\cdot f(y)=1\cdot 1=1$

$\Rightarrow f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$

(ii) ចំពោះ $x,y\in\mathbb{Z}$ ទាំងពីរសេស

$f(x)=-1, f(y)=-1$

$f(x)\cdot f(y)=1$

$x+y$ ជាចំនួនគត់គូសនោះគេបាន $f(x+y)=1$

$\Rightarrow f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$

(iii) ចំពោះ x គូ ហើយ y សេស

$f(x)=1, f(y)=-1$

ដោយ $x+y$ ជាចំនួនគត់សេសនោះគេបាន $f(x+y)=-1$

$f(x)\cdot f(y)=1\cdot(-1)=-1\Rightarrow f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$

នោះវាមានទម្រង់ជាអូម៉ូម៉កភីស។

ដោយវាជាអនុវត្តន៍ពេញផងដែរមានន័យថា 1 ជារូបភាពនៃគ្រប់ចំនួនគត់គូពិសេសរបស់វា យើងអាចនិយាយបានថា $f(z)=1$ និង -1 ជារូបភាពនៃគ្រប់ចំនួនគត់សេសពិសេសរបស់វានោះ $f(1)=-1$ ។ នោះគេបានជាតុនីមួយៗនៃ G' មានរូបភាពប្រាសនៅក្នុង G ។

ដូចនេះ f ជាអ៊ីពីម៉កភីស។

គ. ម៉ូណូម៉កភីស (Monomorphism)

បើ f ជាអូម៉ូម៉កភីសហើយ f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់គេហៅថាជាម៉ូណូម៉កភីស។

ឧទាហរណ៍២០៖ តាង $G=\langle\mathbb{R}^+,\cdot\rangle, G'=\langle\mathbb{R},+\rangle$ ពិនិត្យអនុវត្តន៍ $f:G\to G'$ កំណត់ដោយ $f(x)=\log x,\ x\in G$ ។

តាង $x,y\in G$ នោះគេបាន $f(xy)=\log(xy)=\log x+\log y=f(x)+f(y)$

នោះ f ជាអូម៉ូម៉កភីស

ចំពោះអនុវត្តន៍ប្រកាន់

តាង $f(x)=f(y)\Rightarrow\log x=\log y$

$\Rightarrow e^{\log x} = e^{\log y}$

$\Rightarrow x = y$

នោះ f ជាអូម៉ូម៉កភីស និងជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់

ដូចនេះ f ម៉ូណូម៉កភីស។

ឃ. អ៊ីសូម៉កភីស (Isomorphism)

បើអនុគមន៍ f ជាអូម៉ូម៉កភីសពី $(E,*)$ ទៅ $(F,\circ)$ ហើយ f ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយនោះ គេថាជាអ៊ីសូម៉កភីសពី $(E,*)$ ទៅ $(F,\circ)$ ។

ដូចនេះ f ជាអ៊ីសូម៉កភីសលុះត្រាតែ៖

១. f ជាអូម៉ូម៉កភីស

២. f ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ។

ឧទាហរណ៍២១៖ អនុគមន៍ $f(x) = 2^x$ ជាអ៊ីសូម៉កភីសពី $(\mathbb{R},+)$ ទៅ $(\mathbb{R}^+,\times)$ ព្រោះ៖

១. f ជាអូម៉ូម៉កភីស

២. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1) = f(x_2)$

$\Leftrightarrow 2^{x_1} = 2^{x_2}$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

នោះ f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់

ហើយ $\forall y \in \mathbb{R}^+$

$y = 2^x \Rightarrow x = \log_2 y$

គេបាន $\forall y \in \mathbb{R}^+, \exists x \in \mathbb{R}$ នោះ f ពេញ។

ឧទាហរណ៍២២៖ តាង $G = \langle \mathbb{R}^+, \cdot \rangle, G' = \langle \mathbb{R}, + \rangle$ យើងនឹងបង្ហាញថា $f : G \to G'$ ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយអូម៉ូម៉កភីស។

- ចំពោះអនុវត្តន៍ពេញ

  តាង $x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^x \in \mathbb{R}^+$

  ពីព្រោះ $f(e^x) = \log(e^x) = x$

  ដោយ $\forall x \in \mathbb{R}$ មានរូបភាពដើមនៅក្នុង $\mathbb{R}^+$

  នោះ f ជាអនុវត្តន៍ពេញអូម៉ូម៉កភីស

  ដោយ f ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ អនុវត្តន៍ពេញ និងជាអូម៉ូម៉កភីស

  ដូចនេះ f ជាអ៊ីសូម៉កភីស។

ង. អង់ដូម៉កភីស (Endomorphism)

f ជាអូម៉ូម៉កភីសនៃក្រុម G ហើយមានអនុវត្តន៍ពេញខ្លួនឯងហៅថាជាអង់ដូម៉កភីសនៃក្រុម G ។

ឧទាហរណ៍២៣៖ តាង $G = \langle \mathbb{R}, + \rangle$ ពិនិត្យអនុវត្តន៍ $f : G \to G$ កំណត់ដោយ $f(x) = x$

នោះគេបាន $f(x+y)=(x+y)=f(x)+f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}$

ហើយ f ជាអូម៉ូម៉កភីសពី G ជាអនុវត្តន៍ខ្លួនឯង។

ដូចនេះ f ជាអង់ដូម៉កភីស។

ប.អូតូម៉កភីស (Auto morphism)

បើ f ជាអនុវត្តន៍ជាអ៊ីសូម៉កភីសពី $(E,*)$ ទៅ $(E,*)$ ខ្លួនឯងនោះគេថាអនុវត្តន៍ f ជាអូតូម៉កភីស។

ឧទាហរណ៍២៤៖ $f(x)=x$ ជាអូតូម៉កភីសពី $(\mathbb{R},+)$ ទៅ $(\mathbb{R},+)$

$f(x)=3x$ ជាអូតូម៉កភីសពី $(\mathbb{R},+)$ ទៅ $(\mathbb{R},+)$

ឧទាហរណ៍២៥៖ តាង $G=\langle\mathbb{Q},+\rangle$ និង $f:G\to G$ កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{2x}{3}$។

- ចំពោះអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ និងកំណត់ដោយ៖

$x_1=x_2,x_1,x_2\in\mathbb{Q}$

$\Leftrightarrow 2x_1=2x_2$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x_1}{3}=\dfrac{2x_2}{3}$

$\Leftrightarrow f(x_1)=f(x_2)$

នោះការបង្ហាញថាអនុវត្តន៍ f ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ

- ចំពោះអូម៉ូម៉កភីស៖

$$f(x_1+x_2)=\frac{2}{3}(x_1+x_2)=\frac{2}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2=f(x_1)+f(x_2)$$

នោះ f ជាអូម៉ូម៉កភីស

- ចំពោះអនុវត្តន៍ពេញ៖

តាង $y\in\mathbb{Q}$ គេបាន៖

$$f(x)=y\Rightarrow\frac{2}{3}x=y$$

$$\Rightarrow x=\frac{3}{2}y$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{3}{2}y\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}y=y$$

នោះគេបាន $\forall y\in\mathbb{Q},\exists x\in\mathbb{Q}:f(x)=y\Rightarrow f$ ជាអនុវត្តន៍ពេញ។

ដោយ f ជាអូម៉ូម៉កភីស អនុវត្តន៍មួយទល់មួយ និងអនុវត្តន៍ពេញ

ដូចនេះ f ជាអូតូម៉កភីស។

ឆ. អ៊ីសូម៉ក

បើអនុគមន៍ f ជាអ៊ីសូម៉កភីសពី $(E,*)$ ទៅ $(F,\circ)$ នោះគេថាសំណុំ E ជាអ៊ីសូម៉ក F ចំពោះប្រមាណវិធី$*$និង$(\circ)$។ គេកំណត់សរសេរដោយ $E\cong F$ ចំពោះប្រមាណវិធី$*$ និង$(\circ)$។

ឧទាហរណ៍២៦៖ $f(x)=2^x$ ជាអ៊ីសូម៉កភីសពី $(\mathbb{R},+)$ ទៅ $(\mathbb{R}^+,\times)$

ដូចនេះ $\mathbb{R}\cong\mathbb{R}^+$ ចំពោះប្រមាណវិធី $(+)$ និង $(\times)$ ។

ជ. ទ្រឹស្តីបទ

f ជាអូម៉ូម៉កភីសពី $(E,*)$ ទៅ $(F,\circ)$ ។

(i) $f(E)$ ជាផ្នែកស្ថាបនៃ F ចំពោះប្រមាណវិធី $(\circ)$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ដោយ f ជាអូម៉ូម៉កភីសពី $(E,*)$ ទៅ $(F,\circ)$ នោះ $f(E)\subseteq F$

$\bullet\forall x_1,x_2\in E,\exists y_1,y_2\in f(E)$

ដែល $y_1=f(x_1),\ y_2=f(x_2)$ នោះគេបាន៖

$$y_1\circ y_2=f(x_1)\circ f(x_2)$$
$$=f(x_1*x_2)$$

ព្រោះ f ជាអូម៉ូម៉កភីស

$x_1,x_2\in E\Rightarrow f(x_1*x_2)\in f(E)$ នោះ $y_1\circ y_2\in f(E)$

ដូចនេះ $f(E)$ ជាផ្នែកស្ថាបនៃ F ចំពោះប្រមាណវិធី $(\circ)$ ។

(ii) • បើប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំនោះប្រមាណវិធី $(\circ)$ ក៏មានលក្ខណៈផ្តុំដែរ។

•បើប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈត្រឡប់នោះប្រមាណវិធី $(\circ)$ ក៏មានលក្ខណៈត្រឡប់ដែរ។

សម្រាយបញ្ជាក់

$\forall x_1,x_2,x_3\in E$ ដោយប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំ

គេបាន $x_1*(x_2*x_3)=(x_1*x_2)*x_3$

$$\Rightarrow\quad f\left[x_1*(x_2*x_3)\right]=f\left[(x_1*x_2)*x_3\right]$$
$$\Leftrightarrow f(x_1)\circ f(x_2*x_3)=f(x_1*x_2)\circ f(x_3)$$

ព្រោះ f ជាអូម៉ូម៉កភីសពី $(E,*)$ ទៅ $(F,\circ)$

$\Rightarrow f(x_1)\circ\left[f(x_2)\circ f(x_3)\right]=\left[f(x_1)\circ f(x_2)\right]\circ f(x_3)$

តាង $y_1=f(x_1),\ y_2=f(x_2),y_3=f(x_3)\Rightarrow y_1,y_2,y_3\in F$

គេបាន $y_1\circ(y_2\circ y_3)=(y_1\circ y_2)\circ y_3$

ដូចនេះ ប្រមាណវិធី $(\circ)$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ F ។

(iii) បើ e ជាធាតុណឺត E នៃចំពោះប្រមាណវិធី $*$ នោះគេបាន $f(e)$ ជាធាតុណឺតនៃ $f(E)$ ចំពោះប្រមាណវិធី $(\circ)$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងមាន e ជាធាតុណឺត E នៃចំពោះប្រមាណវិធី $*$

$\Rightarrow\forall x\in E$ គេបាន $e*x=x*e=x$

$\Rightarrow f(e*x)=f(x*e)=f(x)$

$\Rightarrow f(e)\circ f(x)=f(x)\circ f(e)=f(x)$

ព្រោះ f ជាអូម៉ូម៉កភីស

មានន័យថា $f(e)$ ជាធាតុណឺតនៃ $f(E)$ ចំពោះប្រមាណវិធី $(\circ)$។

(iv) បើជា x^{-1} ជាធាតុប្រាសនៃ E នៃចំពោះប្រមាណវិធី $*$ នោះ $f(x^{-1})$ ជាជាធាតុប្រាសនៃ $f(E)$ នៃចំពោះប្រមាណវិធី $(\circ)$។

សម្រាយបញ្ជាក់

$\forall x\in E,\exists x^{-1}\in E: x*x^{-1}=x^{-1}*x=e$

$\Rightarrow f(x*x^{-1})=f(x^{-1}*x)=f(e)$

$\Rightarrow f(x)\circ f(x^{-1})=f(x^{-1})\circ f(x)=f(e)$

នោះគេបាន $f(x^{-1})$ ជាធាតុប្រាសនៃ $f(E)$ ចំពោះប្រមាណវិធី $(\circ)$។

លំហាត់ឧទ្រម្រង់ពីជគណិត

១. នៅក្នុងសំណុំនៃចំនួនពិត $\mathbb{R}$ គេកំណត់ប្រមាណវិធី $(*)$ ដោយ $a*b=a+b+ab$ ។

ក.គណនា $1*2, 3*4, 2*3*5$

ខ.សិក្សាលក្ខណៈត្រឡប់ និងផ្តុំ។

គ.បង្ហាញថាវាមានធាតុណឺត e មួយ។

ឃ.តើប្រមាណវិធី $(*)$ មានលក្ខណៈបំបែកចំពោះប្រមាណវិធី $+$ និង $\times$ ឬទេ ?

ង. a ជាចំនួនមួយដែលគេឱ្យ ចូរដោះស្រាយ និងពិភាក្សានូវសមីការ $a*x=0$ ។

ច. a និង b ជាធាតុដើមរបស់ $\mathbb{R}$ ចូរដោះស្រាយសមីការ $a*x=b$ ។

ឆ.គេកំណត់ a^n ចំពោះ $n\geq 1$ ដោយ $\begin{cases} a^1=a \\ a^n=a^{n-1}*a \end{cases}$ ចូររក $a^2,\ a^3,\ a^4$ ។

ជ.ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{N}$ នូវសមីការ $(2*x^2)+(9*x)=24$ ។

២.នៅក្នុងសំណុំចំនួនគត់ធម្មជាតិ $\mathbb{N}$ គេបង្កើតប្រមាណវិធី $\top$ និង $(*)$ កំណត់ដោយៈ

$a\top b=2a+b,\ a*b=ab$

ក.គណនា $0\top 2,\ (3\top 4)\top 5,\ 3\top(4\top 5),\ (2\top 3)*5$

ខ.គណនា $(3\top 4)*(5\top 6),\ (3*4)\top(5*6)$

គ.ប្រាប់លក្ខណៈនៃប្រមាណវិធី $(*)$ និង $\top$ ។ តើវាមានធាតុណឺតឬទេ ?

ឃ.សិក្សាលក្ខណៈបំបែកនៃប្រមាណវិធី $\top$ ចំពោះ $+$ និង $\times$ ។

ង.សិក្សាលក្ខណៈបំបែកនៃប្រមាណវិធីបូកចំពោះ $*$ និង $\top$ ។

ច.គេកំណត់ $a^{(n)}$ ចំពោះ $n\geq 1$ ដោយ $\begin{cases} a^{(1)}=a \\ a^{(n)}=a^{(n-1)}\top a \end{cases}$ គណនា $a^{(2)},a^{(3)},a^{(4)}$ ។

៣.ក្នុង $(\mathbb{Z},*)$ គេឱ្យ $x*y=x+y+2xy$ ។

ក.គណនា $10*5,\ (-2)*3,\ (1*2)*3,\ 4*5*6$

ខ.តើ $*$ ជាប្រមាណវិធីក្នុងដែរឬទេ ?តើវាមានលក្ខណៈផ្តុំដែរឬទេ ? តើវាមានលក្ខណៈត្រឡប់ដែរឬទេ ? តើវាមានធាតុណឺតដែរឬទេ ?

គ.តើចំនួន 2 មានចម្រាសឬទេ ?

៤.ក្នុងសំណុំ $\mathbb{N}$ គេឱ្យប្រមាណវិធីក្នុងមួយដោយ $x*y=x+3y$ ។

ក.តើប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈត្រឡប់ដែរឬទេ ?

ខ.តើប្រមាណវិធីមានលក្ខណៈផ្តុំដែរឬទេ ?

គ.តើ $\mathbb{N}$ មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ដែរឬទេ ?

ឃ.តើ $\mathbb{N}$ មានចម្រាសទាំងអស់ចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ដែរឬទេ ?

៥.ក្នុងសំណុំ $\mathbb{Z}$ គេឱ្យប្រមាណវិធីក្នុងមួយដោយ $x\circ y=2x-5y$ ។

ក.តើប្រមាណវិធី $(\circ)$ មានលក្ខណៈផ្តុំដែរឬទេ ?

ខ.តើប្រមាណវិធី $(\circ)$ មានលក្ខណត្រឡប់ដែរឬទេ ?

គ.តើ $\mathbb{Z}$ មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $(\circ)$ ដែរឬទេ ?

ឃ.តើ $\mathbb{Z}$ មានចម្រាសទាំងអស់ចំពោះប្រមាណវិធី $(\circ)$ ឬទេ ?

៦.ក្នុងសំណុំ $\mathbb{Q}^*$ គេឱ្យប្រមាណវិធីក្នុងមួយដោយ $x \top y = x + \frac{1}{y}$ ។

ក.តើប្រមាណវិធី $\top$ មានលក្ខណៈផ្តុំដែរឬទេ ?

ខ.តើប្រមាណវិធី $\top$ មានលក្ខណត្រឡប់ដែរឬទេ ?

គ.តើ $\mathbb{Q}^*$ មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $\top$ ដែរឬទេ ?

ឃ.តើ $\mathbb{Q}^*$ មានចម្រាសទាំងអស់ចំពោះប្រមាណវិធី $\top$ ដែរឬទេ ?

៧.លើ $\mathbb{R}^2$ គេកំណត់ប្រមាណវិធី $*$ ក្នុងមួយដោយ៖

$\forall (a,b),(a',b') \in \mathbb{R}^2 : (a,b)*(a',b') = (aa'-bb', ab'+a'b)$

ក.តើប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈត្រឡប់ ផ្តុំឬទេ ?

ខ.តើ $\mathbb{R}^2$ មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ឬទេ ?

គ.តើគ្រប់ធាតុនៃ $\mathbb{R}^2$ មានចម្រាសចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ឬទេ ?

៨.លើ $\mathbb{R}_+$ គេកំណត់ប្រមាណវិធី $*$ ក្នុងមួយដោយ៖ $\forall a,b \in \mathbb{R}_+ : a*b = \sqrt{a^2+b^2}$

ក.តើប្រមាណវិធី $(*)$ មានលក្ខណៈត្រឡប់ ផ្តុំឬទេ ?

ខ.តើ $\mathbb{R}_+$ មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $(*)$ ឬទេ ?

គ.តើគ្រប់ប្រមាណវិធីគុណមានលក្ខណៈបំបែកចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ឬទេ ?

៩.នៅក្នុងសំណុំ $\mathbb{R}$ គេកំណត់ប្រមាណវិធី $(*)$ ដោយ $x*y = 3x+3y-xy-6$

ក.តើ $*$ ជាប្រមាណវិធីក្នុងលើ $\mathbb{R}$ ឬទេ ?

ខ.តើប្រមាណវិធី $(*)$ មានលក្ខណៈត្រឡប់ ផ្តុំឬធាតុណឺតដែរឬទេ ?

គ.តើធាតុណាខ្លះនៃ $(*)$ ដែលមានចម្រាស ?

១០.នៅក្នុងសំណុំ $\mathbb{R}$ គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុងពីរដោយ $a \circ b = a+b-1$ និង $a*b = ab-a-b+2$ ។

ក.សិក្សាលក្ខណៈត្រឡប់៖

1.ចំពោះប្រមាណវិធីក្នុង $(*)$

2.ចំពោះប្រមាណវិធីក្នុង $(\circ)$

ខ.សិក្សាលក្ខណៈផ្តុំ៖

1.ចំពោះប្រមាណវិធីក្នុង $(*)$

2.ចំពោះប្រមាណវិធីក្នុង $(\circ)$

គ.សិក្សាធាតុណឺត៖

1.ចំពោះប្រមាណវិធីក្នុង $(*)$

2.ចំពោះប្រមាណវិធីក្នុង $(\circ)$

ឃ.តើគ្រប់ធាតុនៃ $\mathbb{R}$ មានចម្រាសដែរឬទេ ?

1.ចំពោះប្រមាណវិធីក្នុង $(*)$

2.ចំពោះប្រមាណវិធីក្នុង $(\circ)$

ង.តើប្រមាណវិធី $(*)$ មានលក្ខណៈបំបែកចំពោះប្រមាណវិធី $(\circ)$ ដែរឬទេ ?

១១. នៅលើ $\mathbb{Z}$ គេកំណត់ប្រមាណវិធី $(*)$ ដោយ $\forall x,y\in\mathbb{Z}: x*y=x+y+xy$

ក. ប្រមាណវិធី $(*)$ មានលក្ខណៈផ្តុំ លក្ខណៈប្រឡប់លើ $\mathbb{Z}$ ឬទេ ?

ខ. តើ $\mathbb{Z}$ មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $(*)$ ឬទេ ?

គ. តើធាតុណាខ្លះនៃ $\mathbb{Z}$ មានចម្រាសចំពោះប្រមាណវិធី $(*)$?

ឃ. តើប្រមាណវិធី $(*)$ មានលក្ខណៈបំបែកចំពោះប្រមាណវិធីបូក និងគុណនៃ $\mathbb{Z}$ ដែរឬទេ ?

១២. លើ $\mathbb{R}^2$ គេកំណត់ពីរប្រមាណវិធី $(*)$ និង $\perp$ ដោយៈ

$$\forall(a,b),(a',b')\in\mathbb{R}^2:(a,b)*(a',b')=(a+a',b+b')$$

$$(a,b)\perp(a',b')=(aa'-bb',ab'+a'b)$$

ក. ប្រមាណវិធី $(*),\perp$ មានលក្ខណៈផ្តុំ លក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{R}^2$ ដែរឬទេ ?

ខ. តើ $\mathbb{R}^2$ មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $(*),\perp$ ដែរឬទេ ?

គ. តើធាតុណាខ្លះនៃ $\mathbb{R}^2$ មានចម្រាសចំពោះប្រមាណវិធី $(*),\perp$?

ឃ. តើប្រមាណវិធី $\perp$ មានលក្ខណៈបំបែកចំពោះប្រមាណវិធីបូក និង $(*)$ នៃ $\mathbb{R}^2$ ដែរឬទេ ?

ង. តាង $E=\{(a,0):a\in\mathbb{R}\}$ ។

(i) បង្ហាញថា E ជាផ្នែកស្ថាបនៃ $\mathbb{R}^2$ ចំពោះប្រមាណវិធី $(*)$ និង $\perp$ ។

(ii) បង្ហាញថាអនុវត្តន៍ $f:(E,*)\to(\mathbb{R},+)$ និង $f:(E,\perp)\to(\mathbb{R},\cdot)$ ជាអ៊ីសូម៉កភីស

$$(a,0)\mapsto f(a,0)=a \qquad (a,0)\mapsto f(a,0)=a$$

១៣. លើ $\mathbb{R}_+$ គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុង $(*)$ មួយដោយៈ $\forall x,y\in\mathbb{R}_+: x*y=\sqrt{x^2+y^2}$ ។

ក. ប្រមាណវិធី $(*)$ មានលក្ខណៈផ្តុំ លក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{R}_+$ ឬទេ ?

ខ. តើ $\mathbb{R}_+$ មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធីឬ $(*)$ ទេ ?

គ. តើធាតុណាខ្លះនៃ $\mathbb{R}_+$ មានចម្រាសចំពោះប្រមាណវិធី $(*)$?

ឃ. តើប្រមាណវិធីគុណនៃ $\mathbb{R}_+$ មានលក្ខណៈបំបែកចំពោះប្រមាណវិធី $(*)$ ឬទេ ?

ង. បង្ហាញថា $f:(\mathbb{R}_+,*)\to(\mathbb{R}_+,+)$ ជាអ៊ីសូម៉កភីស។

$$x\mapsto f(x)=x^2$$

ច. ចំពោះ $\forall x\in\mathbb{R}_+$ គណនា $x*x*\ldots*x$ (n តួ)។

១៤. លើ $\mathbb{R}$ គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុង $(*)$ មួយដោយៈ $\forall x,y\in\mathbb{R}_+: x*y=xy+(x^2-1)(y^2-1)$

ក. ប្រមាណវិធី $(*)$ មានលក្ខណៈផ្តុំ លក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{R}$ ឬទេ ?

ខ. តើ $\mathbb{R}$ មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $(*)$ ឬទេ ?

គ. តើធាតុណាខ្លះនៃ $\mathbb{R}$ មានចម្រាសចំពោះប្រមាណវិធី $(*)$?

១៥. គេឱ្យ $f:(E,*)\to(F,\perp)$ ជាអូម៉ូម៉កភីស។

ក. បង្ហាញថាបើ A ជាផ្នែកស្ថាបនៃ $(E,*)$ នោះគេបាន $f(A)$ ជាផ្នែកស្ថាបនៃ $(F,\perp)$។

ខ. បង្ហាញថាបើ B ជាផ្នែកស្ថាបនៃ $(F,\perp)$ នោះគេបាន $f^{-1}(B)$ ជាផ្នែកស្ថាបនៃ $(E,*)$។

១៦. គេឱ្យ E ជាសំណុំមួយប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីក្នុង $(*)$។ លើ $\mathcal{P}(E)$ គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុង $(*)$ មួយដែល $\forall A,B,\in\mathcal{P}(E): A*B=\{x*y: x\in A\wedge y\in B\}$។

ក. បង្ហាញថា $\forall A,A',B,B'\in\mathcal{P}(E)$ បើ $(A\subset A'\wedge B\subset B')\Rightarrow A*B\subset A'*B'$។

ខ. បង្ហាញថាបើប្រមាណវិធី $(*)$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ E នោះប្រមាណវិធី $(*)$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ $\mathcal{P}(E)$។

គ. បង្ហាញថាបើប្រមាណវិធី $(*)$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ E នោះប្រមាណវិធី $(*)$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathcal{P}(E)$។

ឃ. បង្ហាញថាបើ e ជាធាតុណឺតនៃ $(E,*)$ នោះគេបាន $\{e\}$ ជាធាតុណឺតនៃ $(\mathcal{P}(E),*)$។

១៧. លើ $\mathbb{Q}^2$ គេកំណត់ប្រមាណវិធី $(*)$ ដោយ $\forall(a,b),(a',b')\in\mathbb{Q}^2:(a,b)*(a',b')=(aa',a'b+b')$

ក. ប្រមាណវិធី $(*)$ មានលក្ខណៈផ្តុំ លក្ខណៈត្រឡប់លើ $\mathbb{Q}^2$ ដែរឬទេ ?

ខ. តើ $\mathbb{Q}^2$ មានធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $(*)$ ដែរឬទេ ?

គ. តើធាតុណាខ្លះនៃ $\mathbb{Q}^2$ មានចម្រាសចំពោះប្រមាណវិធី $(*)$?

ឃ. តាង $E=\{(a,0): a\in\mathbb{Q}\}$។

(i) បង្ហាញថា E ជាផ្នែកស្ថាបនៃ $\mathbb{Q}^2$ ចំពោះប្រមាណវិធី $(*)$។

(ii) បង្ហាញថាអនុវត្តន៍ $f:(E,*)\to(\mathbb{Q},\cdot)$ ជាអ៊ីសូម៉កភីស។

$$(a,0)\mapsto f(a,0)=a$$

មេរៀនទី២៖ ទម្រង់ក្រុម

២.១.និយមន័យ និងលក្ខណៈ

១. កន្លះក្រុម (Semi group)

និយមន័យ៖ គេឱ្យ A ជាសំណុំមួយប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីក្នុង $*$ ។ គេថា $(A,*)$ មានទម្រង់ជាកន្លះក្រុមកាលណាវាមានលក្ខណៈផ្តុំលើ A ។ មានន័យថា $\forall a,b,c\in A: a*(b*c)=(a*b)*c$

ឧទាហរណ៍១៖ $(\mathbb{N},+),(\mathbb{Q},+)(\mathbb{R},+),(\mathbb{Z},+)$ សុទ្ធតែជាកន្លះក្រុម។

$\left(\mathbb{R}_+^*,*\right):\forall a,b\in\mathbb{R}_+^*: a*b=a^{\ln b}$ ជាកន្លះក្រុមព្រោះ៖

$$\left(\mathbb{R}_+^*,*\right):\forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*: a*(b*c)=a^{\ln b*c}$$

$$=a^{\ln(b)^{\ln c}}$$

$$=a^{\ln c\ln b}$$

$$\left(\mathbb{R}_+^*,*\right):\forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*: (a*b)*c=(a*b)^{\ln c}$$

$$=\left(a^{\ln b}\right)^{\ln c}$$

$$=a^{\ln c\ln b}$$

ជាទូទៅ៖

(i) បើ $x_1,x_2,...,x_n$ ជាធាតុនៃកន្លះក្រុម $(A,\top)$ នោះគេបាន៖

$$\mathop{\top}_{i=1}^{n}x_i=x_1\top x_2\top\ldots\top x_n=\left(x_1\top x_2\top\ldots\top x_p\right)\top\left(x_{p+1}\top x_{p+2}\top\ldots\top x_n\right)$$

$$=\mathop{\top}_{i=1}^{p}x_i\ \top\ \mathop{\top}_{i=p+1}^{n}x_i$$

(ii) បើប្រមាណវិធីនៃកន្លះក្រុម A តាងដោយប្រមាណវិធី $+$ នោះគេបាន៖

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=\sum_{i=1}^{n}x_i\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=p}^{n}x_i+\sum_{i=p+1}^{n}x_i$$

បើ $x_1=x_2=\ldots=x_n=x\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}x_i=nx$

(iii) បើប្រមាណវិធីនៃកន្លះក្រុម A តាងដោយប្រមាណវិធីគុណនោះគេបាន៖

$$x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n=\prod_{i=1}^{n}x_i\Rightarrow\prod_{i=1}^{n}x_i=\left(\prod_{i=p}^{n}x_i\right)\left(\prod_{i=p+1}^{n}x_i\right)$$

បើ $x_1=x_2=\ldots=x_n=x\Rightarrow\prod_{i=1}^{n}x_i=x^n$ ជាពិសេស $\begin{cases}\left(x^n\right)^m=x^{m\cdot n}\\ x^n\cdot x^m=x^{n+m}\end{cases}$ ។

២.សំណើ៖

(i) បើ $x_1,x_2,...,x_n$ ជា n ធាតុនៃកន្លះក្រុម $(A,\top)$ នោះគេបាន៖

$y_1=\prod_{i=n_1=1}^{n_2}x_i\ ,y_2=\prod_{i=n_2+1}^{n_3}x_i,...,y_k=\prod_{i=n_k+1}^{n}x_i$ នោះគេបាន $\prod_{i=1}^{n}x_i=\prod_{i=1}^{k}y_i$ ព្រោះ៖

$$\prod_{i=1}^{n}x_i=x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n=\left(x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_{n_2}\right).\left(x_{n_2+1}\cdot x_{n_2+2}\cdot\ldots\cdot x_{n_3}\right)\ldots\left(x_{n_k+1}\cdot x_{n_k+2}\cdot\ldots\cdot x_n\right)$$

$$=\prod_{i=n_1=1}^{n_2} x_i \cdot \prod_{i=n_2+1}^{n_3} x_i \cdots \prod_{i=n_k+1}^{n} x_i = y_1.y_2\dots y_k = \prod_{i=1}^{k} y_i$$

ទ្រឹស្តីបទ១៖ កន្លះក្រុម $(S,*)$ ជាកន្លះក្រុមលុះត្រាតែ៖

(i) $\exists e\in S: e*a=a, \forall a\in S$

(ii) $\forall a\in S, \exists b\in S: b*a=e$

សម្រាយបញ្ជាក់

ឧបមាថា $(S,*)$ ជាកន្លះក្រុមផ្ទៀងផ្ទាត់ (i) និង (ii)

ចំពោះ $a\in S, \exists b\in S: b*a=e$

$b\in S, \exists c\in S: c*b=e$ តាម (ii)

ហើយ $a=e*a$ តាម (i)

$=(c*b)*a$

$=c*(b*a)$

$=c*e$

ហើយ $a*b=(c*e)*b$

$=c*(e*b)$

$=c*b$

$=e$

តែតាម (ii) $\quad b*a=e$

គេបាន $a*b=e=b*a \qquad (1)$

ដូចគ្នាដែរ $a*e=a*(b*a)$ តាម (1)

$=(a*b)*a$

$=e*a$

គេបាន $a*e=e*a=a$

មានន័យថា e ជាធាតុណឺតនៃ $(S,*)$។

ទ្រឹស្តីបទ២៖ កន្លះក្រុម $(S,*)$ ជាក្រុមលុះត្រាតែ $a*x=b$ និង $y*a=b$ មានដំណោះស្រាយក្នុង S ចំពោះ x និង y។

សម្រាយបញ្ជាក់

ឧបមាថាសមីការមានដំណោះស្រាយក្នុង S

$a\in S$ ពិនិត្យ $y*a=a$ និង $u\in S$ ជាឫសនៃសមីការនោះ $u*a=a$

ចំពោះ $b\in S$ សមីការ $a*x=b$ មានឫស

តាង $c\in S$ ជាឫសនៃសមីការនោះ $a*c=b$

ពិនិត្យ $u*b=u*(a*c)$

$= (u * a) * c$

$= a * c$

$= b$

$\forall b \in S, \exists u \in S$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $u * b = b$

ដូច្នេះ $(S,*)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទ្រឹស្តីបទ១) (i) (1)

តាង $d \in S$ ជាឫសនៃសមីការនោះ $y * a = u$

នោះ $d * a = u$

គេបាន $(S,*)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទ្រឹស្តីបទ១) (ii) (2)

តាម(1) និង(2)នោះគេបាន $(S,*)$ ជាក្រុម។

៣. ម៉ូណូអ៊ីត (Monoide)

និយមន័យ៖ គេឱ្យ A ជាសំណុំមួយប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីក្នុង $*$។ គេថា $(A,*)$ ជាម៉ូណូអ៊ីតលុះត្រាតែ៖

(i) ប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ A គឺ $\forall a,b,c \in A: a*(b*c) = (a*b)*c$

(ii) មានធាតុណឺត $e \in A$ ដែល $\forall a \in A: e*a = a*e = a$

វិបាក៖ ម៉ូណូអ៊ីតគឺជាកន្លះក្រុមដែលមានធាតុណឺត e។

ឧទាហរណ៍២៖ ពិនិត្យកន្លះក្រុម $(\mathbb{R},*)$ ដែល $a*b = a+b-1$។បង្ហាញថា $(\mathbb{R},*)$ ជាម៉ូណូអ៊ីត។

ដំណោះស្រាយ

⊕ លក្ខណៈផ្តុំលើ $\mathbb{R}$ ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធី $*$

$\forall a,b,c \in \mathbb{R}: a*(b*c) = (a*b)*c$ គេបាន៖

$a*(b*c) = a + (b*c) - 1$

$= a+b+c-1-1$

$= a+b+c-2$

$(a*b)*c = a+b-1+c-1$

$= a+b+c-2$

$\Rightarrow a*(b*c) = (a*b)*c$

⊕ ឧបមាថា e ជាធាតុណឺតនៃ $(\mathbb{R},*)$ គេបាន៖

$$\forall a \in \mathbb{R}: \begin{cases} a*e = a \\ e*a = a \end{cases}$$

គេមាន $a*e = a$

$\Leftrightarrow a+e-1 = a$

$\Leftrightarrow e = 1$

គេមាន $e*a = a$

$\Leftrightarrow e+a-1 = a$

$\Leftrightarrow e = 1$

គេបាន $e=1$ ជាធាតុណឺតនៃកន្លះក្រុម $(\mathbb{R},*)$ ។
ដូចនេះ $(\mathbb{R},*)$ ជាម៉ូណូអ៊ីត។
ឧទាហរណ៍៣៖ លើ $\mathbb{R}_+^*$ គេកំណត់ប្រមាណវិធី $*$ មួយដោយ $\forall a,b\in\mathbb{R}_+^* : a*b=a^{\ln b}$ ។
បង្ហាញថា $(\mathbb{R},*)$ ជាម៉ូណូអ៊ីត។

ដំណោះស្រាយ

១. $\forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$ គេមាន៖

$$(a*b)*c=a^{\ln b}*c=\left(a^{\ln b}\right)^{\ln c}=a^{\ln b\ln c}\quad(1)$$

$$a*(b*c)=a*b^{\ln c}=a^{\ln(b\ln c)}=a^{\ln b\ln c}\quad(2)$$

តាម $(1)\&(2)$ គេបាន $a*(b*c)=(a*b)*c$ ។
២. ឧបមាថា $e'=1$ ជាធាតុណឺតនៃ $\mathbb{R}_+^*$ ចំពោះប្រមាណវិធី $*$
គេបាន $\forall a\in\mathbb{R}_+^* : \begin{cases} a*e'=a \\ e'*a=a \end{cases}$
គេមាន $a*e'=a$

$$\Leftrightarrow a^{\ln e'}=a$$
$$\Leftrightarrow \ln e'=1$$
$$\Leftrightarrow e'=e\ \left(e\approx 2.718\right)$$

គេមាន $e'*a=a$

$$\Leftrightarrow e'^{\ln a}=a$$
$$\Leftrightarrow e'^{\ln a}=e^{\ln a}$$
$$\Leftrightarrow e'=e\ \left(e\approx 2.718\right)$$

គេបាន $e\approx 2.718$ ជាធាតុណឺតនៃ $\left(\mathbb{R}_+^*,*\right)$ ។
ដូចនេះ $\left(\mathbb{R}_+^*,*\right)$ ជាម៉ូណូអ៊ីត។

៤. ម៉ូណូអ៊ីតរង

គេឱ្យ $(A,*)$ ជាម៉ូណូអ៊ីតដែលមានធាតុណឺត e និង B ជាផ្នែកមិនទទេនៃ A ។ គេថា B ជាម៉ូណូអ៊ីតរងនៃ A លុះត្រាតែ B ជាផ្នែកស្ថាបនៃ A ចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ហើយធាតុណឺត e នៃ $(A,*)$ ជាធាតុនៃ $(B,*)$ ។

ដូចនេះ B ជាម៉ូណូអ៊ីតរងនៃ $(A,*)$ លុះត្រាតែ $\begin{cases} B\subset A, B\neq\varnothing \\ \forall a,b\in B : a*b\in B \\ e \text{ ជាធាតុណឺតនៃ } B \end{cases}$ ។

ឧទាហរណ៍៤៖ $(n\mathbb{Z},+)$ ជាម៉ូណូអ៊ីតរងនៃ $(\mathbb{Z},+)$ ។
ចំណាំ៖ $n\mathbb{Z}=\{nk,k\in\mathbb{Z}\}\ ,n\in\mathbb{N}$

- $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$
- $0 \in n\mathbb{Z}, \forall a \in n\mathbb{Z} : a + 0 = 0 + a = a \Rightarrow n\mathbb{Z} \neq \varnothing$
- $\forall a, b \in n\mathbb{Z} : \exists k, k' \in \mathbb{Z} : a = nk \ , b = nk'$

$$\Rightarrow a + b = nk + nk'$$
$$\Rightarrow \exists k'' \in \mathbb{Z} : a + b == n(k + k') = nk''$$
$$\Rightarrow a + b \in \mathbb{Z}$$

$\therefore (n\mathbb{Z}, +)$ ជាម៉ូណូអ៊ីតរងនៃ $(\mathbb{Z}, +)$ ។

ឧទាហរណ៍៥៖ $(\mathbb{N}, +)$ ជាម៉ូណូអ៊ីតរងនៃ $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +)$ ។

ឧទាហរណ៍៦៖ តាង $2\mathbb{N} = \{2k : k \in \mathbb{N}\}$

គេបាន $(2\mathbb{N}, +)$ ជាម៉ូណូអ៊ីតរងនៃ $(\mathbb{N}, +)$

$(2\mathbb{N}, \times)$ មិនមែនជាម៉ូណូអ៊ីតរងនៃ $(\mathbb{N}, \times)$ ទេព្រោះ $1 \notin 2\mathbb{N}$ ។

ទ្រឹស្តីបទ៣៖ ប្រសព្វនៃពីរម៉ូណូអ៊ីតរងនៃ $(A, *)$ ជាម៉ូណូអ៊ីតរង។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង B_1, B_2 ជាម៉ូណូអ៊ីតរងនៃ $(A, *)$

ស្រាយថា $B_1 \cap B_2$ ជាម៉ូណូអ៊ីតរងនៃ $(A, *)$ ។

- គេមាន $B_1 \subset A$ និង $B_2 \subset A \Rightarrow B_1 \cap B_2 \subset A$
- e ជាធាតុណឺតនៃ $(A, *)$ នោះ $e \in B_1, e \in B_2$

$$\Rightarrow e \in B_1 \cap B_2$$
$$\Rightarrow B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$$

- $\forall a, b \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \begin{cases} a, b \in B_1 \\ a, b \in B_2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a * b \in B_1 \\ a * b \in B_2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow a * b \in B_1 \cap B_2$$

ដូចនេះ $B_1 \cap B_2$ ជាម៉ូណូអ៊ីតរងនៃ $(A, *)$ ។

ទ្រឹស្តីបទ៤៖ ប្រសព្វនៃគ្រួសារម៉ូណូអ៊ីតរងនៃ $(A, *)$ ជាម៉ូណូអ៊ីតរងនៃ $(A, *)$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់៖

តាង $(B_i)_{i \in I}$ ជាគ្រួសារម៉ូណូអ៊ីតរងនៃ $(A, *)$ ។

ស្រាយថា $\bigcap_{i \in I} B_i$ ជាម៉ូណូអ៊ីតរងនៃ $(A, *)$

- $\forall i \in I : B_i \in A \Rightarrow \bigcap_{i \in I} B_i \subset A$
- e ជាធាតុណឺតនៃ $(A, *) \Rightarrow e \in B_i, \ i \in I$

$\Rightarrow e \in \bigcap_{i \in I} B_i$

$\Rightarrow \bigcap_{i \in I} B_i \neq \varnothing$

- $\forall a,b \in \bigcap_{i \in I} B_i \Rightarrow a,b \in B_i, \forall i \in I$

  $\Rightarrow a*b \in B_i \ , \forall i \in I$

  $\Rightarrow a*b \in \bigcap_{i \in I} B_i$

ដូចនេះ $\bigcap_{i \in I} B_i$ ជាម៉ូណូអ៊ីតរងនៃ $(A,*)$ ។

២.២.ទម្រង់ក្រុម (Group)

គេឱ្យ G ជាសំណុំមិនទទេមួយប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីក្នុង $*$ ។ គេថា G មានទម្រង់ជាក្រុមចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ឬ $(G,*)$ ជាក្រុមចំពោះប្រមាណវិធី $*$ កាលណា៖

ក.ប្រមាណវិធី $*$ ជាប្រមាណវិធីក្នុងនៃ G ៖ $\forall a,b \in G : a*b \in G$

ខ.ប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំនៃ G ៖ $\forall a,b,c \in G : (a*b)*c = a*(b*c)$

គ.ប្រមាណវិធី $*$ មានធាតុណឺតនៃ G ៖ $\forall a \in G, e \in G : a*e = e*a = a$

ឃ.ធាតុប្រាសនៃ G ៖ $\forall a \in G : a$ មានធាតុប្រាស a^{-1} មានន័យថា $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$

ចំណាំ៖ បើ $*$ មានលក្ខណៈត្រឡប់ $(a*b = b*a)$ ថែមទៀត $(G,*)$ ហៅថាក្រុមអាបែល ឬក្រុមមានលក្ខណៈត្រឡប់។

ឧទាហរណ៍៧៖ នៅក្នុងសំណុំ $(\mathbb{Z},+),(\mathbb{Q},+),(\mathbb{R},+)$ សុទ្ធតែជាក្រុមអាបែលព្រោះវាមាន៖

- វិធីបូកមានលក្ខណៈត្រឡប់

  $\forall a,b : a+b = b+a$
- វិធីបូកមានលក្ខណៈផ្តុំ

  $\forall a,b,c : (a+b)+c = a+(b+c)$
- វិធីបូកមានធាតុណឺត

  $\forall a : a+0 = a \Rightarrow 0$ ជាធាតុណឺត
- វិធីបូកមានធាតុផ្ទុយ(ធាតុប្រាស)

  $\forall a : a+(-a) = 0 \Rightarrow -a$ ជាធាតុផ្ទុយនៃ a

  ដូចនេះ $(\mathbb{Z},+),(\mathbb{Q},+),(\mathbb{R},+)$ សុទ្ធតែជាក្រុមអាបែល។

ឧទាហរណ៍៨៖ តើ $\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\circ\right)$ ដែល $x \circ y = \arctan(\tan x + \tan y)$ ជាក្រុមអាបែលឬទេ ?

ដំណោះស្រាយ

- លក្ខណៈផ្តុំ

  ចំពោះ $x,y,z \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ គេបាន៖

$$\begin{aligned}(x\circ y)\circ z &= \arctan(\tan x+\tan y)\circ z\\ &= \arctan\left[\tan\left(\arctan(\tan x+\tan y)\right)+\tan z\right]\\ &= \arctan[\tan x+\tan y+\tan z]\\ &= \arctan\left[\tan x+\tan\left(\arctan(\tan y+\tan z)\right)\right]\\ &= \arctan\left[\tan x+\tan(y\circ z)\right]=x\circ(y\circ z)\end{aligned}$$

- លក្ខណៈត្រឡប់
- ចំពោះ $x, y\in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ គេបាន៖

$$\begin{aligned}x\circ y &= \arctan(\tan x+\tan y)\\ &= \arctan(\tan y+\tan x)\\ &= y\circ x\end{aligned}$$

- ធាតុណឺត

គេមាន $0\in\mathbb{R}$ ជាធាតុណឺតព្រោះ៖

ចំពោះ $x\in\mathbb{R}$ គេបាន៖

$$\begin{aligned}x\circ 0 &= \arctan(\tan x+\tan 0)\\ &= \arctan(\tan x)\\ &= x\end{aligned}$$

- ធាតុប្រាស

ឧបមា $a\in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ ជាធាតុប្រាសនៃ x

$$\begin{aligned}&x\circ a=\arctan(\tan x+\tan a)=0\\ &\Rightarrow \tan x+\tan a=0\\ &\Rightarrow \tan a=-\tan x\\ &\Rightarrow a=-x\end{aligned}$$

គេបាន $a=-x$ ជាធាតុប្រាសនៃ x ដូចនេះ $\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\circ\right)$ ជាក្រុមអាបែល។

ឧទាហរណ៍៩៖ គេឱ្យ G ជាក្រុមដែល $\forall x\in G: x^2=e$ (e ជាធាតុណឺត)។ បង្ហាញថា G ជាក្រុមអាបែល។

ដំណោះស្រាយ

របៀបទី១

$$\begin{aligned}&\forall x\in G, x^2=e\\ &\quad\Leftrightarrow x^2x^{-1}=ex^{-1}\\ &\quad\Leftrightarrow xxx^{-1}=x^{-1}\\ &\quad\Leftrightarrow x=x^{-1}\end{aligned}$$

ចំពោះ $x, y \in G$ គេបាន៖

$$(xy)^2 = e \Leftrightarrow xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$$

ដូចនេះ G ជាក្រុមអាបែល។

របៀបទី២

ចំពោះ $x, y \in G$ គេបាន៖

$$(xy)^2 = e = e \cdot e = x^2y^2$$

$$\Leftrightarrow (xy)(xy) = xx \cdot yy$$

$$\Leftrightarrow x(yx)y = x(xy)y$$

$$\Leftrightarrow x^{-1}x(yx)yy^{-1} = x^{-1}x(xy)yy^{-1}$$

$$\Leftrightarrow e(yx)e = e(xy)e$$

$$\Rightarrow yx = xy$$

ដូចនេះ G ជាក្រុមអាបែល។

ឧទាហរណ៍១០៖ G ជាក្រុមដែលអនុវត្តន៍ $f : G \to G$ ជាអូម៉ូម៉កភីសក្រុម

$$x \mapsto f(x) = x^2$$

បង្ហាញថា G ជាក្រុមអាបែល។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា G ជាក្រុមអាបែល

ចំពោះ $x, y \in G, xy = yx$?

គេបាន $f(xy) = (xy)^2$

$$f(x)f(y) = (xy)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2 = (xy)(xy)$$

$$\Leftrightarrow x \cdot xy \cdot y = x(yx)y$$

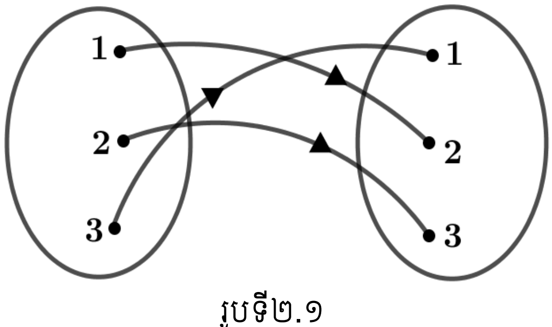
$$\Leftrightarrow \cancel{x}(xy)\cancel{y} = \cancel{x}(yx)\cancel{y}$$

$$xy = yx$$

ដូចនេះ $\forall x, y \in G, xy = yx$ មានន័យថា G ជាក្រុមអាបែល។

២.៣. ក្រុមចម្លាស់ (Groups of Permutations)

ចម្លាស់មួយនៃសំណុំមួយគឺជាអនុគមន៍ដែលតម្រៀបជាតុសារជាថ្មីនៃសំណុំនោះ។



រូបទី២.១

បើ $A=\{1,2,3\}$ ហើយ f ជាអនុគមន៍មួយទល់មួយកំណត់ដោយដ្យាក្រាម៖
មានន័យថា $1\to 2, 2\to 3$ និង $3\to 1$។
យើងនិងណែនាំឱ្យស្គាល់និមិត្តសញ្ញាសមស្រមថ្មីមួយដែលតាងឱ្យចម្លាស់នេះ។ យើងសរសេរ ជាតុ $1,2,3$ តាមជួរដេកមួយហើយសរសេររូបភាពនៃជាតុនីមួយៗខាងក្រោមផ្ទាល់
គឺ $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$។ ទំនាក់ទំនងនេះហៅថាចម្លាស់នៃសំណុំ $\{1,2,3\}$។
ជាតុនៅក្នុងជួរដេកលើជានិច្ចកាលត្រូវសរសេរតាមលំដាប់ដូចគ្នាមានន័យថា $1\ 2\ 3$ ហើយ ចម្លាស់ផ្លាស់ប្តូរតែជួរដេកទី 2។
ចំណាំ៖ ជាតុ $1, 2, 3$ នីមួយៗកើតឡើងតែម្តងគត់ក្នុងជួរដេកទី 2 ។
ស្រដៀងគ្នា $\begin{pmatrix}a&b&c&d\\c&d&a&b\end{pmatrix}$ ជាចម្លាស់មួយនៃសំណុំ $\{a,b,c,d\}$។
ចំនួននៃជាតុក្នុងជួរដេកនីមួយៗឱ្យជាដឺក្រេ (Degree) នៃចម្លាស់។

⊕ **បណ្តាក់នៃចម្លាស់៖**

ចម្លាស់ពីរ f និង g អាចជាបន្សំបានជាចម្លាស់ទីបី។ បណ្តាក់នៃ f និង g ត្រូវសរសេរ $f\circ g$ (អានថា f មូល g)។ បណ្តាក់នៃចម្លាស់គឺស្រដៀងគ្នាទៅនឹងបណ្តាក់នៃអនុគមន៍។

បើ $f=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$ និង $g=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$ នោះ $f\circ g$ ត្រូវរកដោយការចាប់ផ្តើម ជាមួយជួរឈរទីមួយនៃ g គឺពី $1\to 3$ ហើយភ្ជាប់ពី $3\to 3$ ឱ្យជាពី $1\to 3$។ តាមរបៀបដូចគ្នាជាមួយជួរឈរនីមួយៗនៃ g យើងបាន៖

$$f\circ g=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$

$$f\circ g=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$

ចំនួនរបៀបនៃ 3 ជាតុអាចតម្រៀបតាមជួរដេកបាន $3!=1\times 2\times 3=6$ របៀប។
ដូច្នេះសំណុំ $\{1,2,3\}$ មាន 6 ចម្លាស់ ដូចខាងក្រោម៖

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

ស្រដៀងគ្នាដែរចំពោះមានដឺក្រេ 4 ឧទាហរណ៍ដូចជា៖ $\begin{pmatrix}a&b&c&d\\c&a&d&b\end{pmatrix}$ មាន $24=4!$ តម្រៀប ផ្សេងគ្នា។

ឧទាហរណ៍១១៖ បើ $f=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\a&c&d&b\end{pmatrix}$ និង $g=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\b&a&d&c\end{pmatrix}$ គណនា៖

ក. $f\circ g$ គ. $g\circ f$ តើ $f\circ g=g\circ f$ ឬទេ?

ដំណោះស្រាយ

គេបាន $f\circ g=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\a&c&d&b\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}a&b&c&d\\b&a&d&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\c&a&b&d\end{pmatrix}$

$g\circ f=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\b&a&d&c\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}a&b&c&d\\a&c&d&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\b&d&c&a\end{pmatrix}$

$\Rightarrow f\circ g\neq g\circ f$

នេះបញ្ជាក់ថា ជាទូទៅបណ្តាក់នៃចម្លាស់គ្មានលក្ខណៈត្រឡប់ទេ។

ទ្រឹស្តីបទ៖ (Orbit-stabilizer) តាង G ជាក្រុមកំណត់នៃចម្លាស់ចំពោះសំណុំ S ។ នោះចំពោះ $a\in S, o(G)=o(\text{orbit}(a))\times o(\text{stab}(a))$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ដោយ $\text{stab}(a)\leq G$

$\dfrac{o(G)}{o(\text{stab}(a))}=$ សន្ទស្សន៍នៃ $\text{stab}(a)$ នៅក្នុង G

$=$ ចំនួននៃថ្នាក់សមមូលខាងឆ្វេងនៃ $\text{stab}(a)$ នៅក្នុង G

តាង $H=\text{stab}(a)$ និង G/H កំណត់ដោយសំណុំនៃគ្រប់ថ្នាក់សមមូល(Coset)ខាងឆ្វេងនៃ H នៅក្នុង G ។

កំណត់ $\varphi:\text{orb}(a)\to G/H$ ដែល

$\varphi(\sigma(a))=\sigma H$

នោះ $\varphi(\sigma(a))=\sigma(\eta(a))$

$\Leftrightarrow \sigma H=\eta H\Leftrightarrow \sigma^{-1}\eta\in H$

$\Leftrightarrow \sigma^{-1}\eta(a)=a$

$\Leftrightarrow \eta(a)=\sigma(a)$

មានន័យថា φ ត្រូវបានកំណត់ដោយអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ

ម្យ៉ាងទៀតចំពោះគ្រប់ $\sigma H\in G/H,\ \sigma(a)$ ជារូបភាពមុននោះ φ ជាអនុវត្តន៍ពេញ

ដូច្នេះ $o(\text{orb}(a))=o(G/H)=$ មិនមែនជាថ្នាក់សមមូលខាងឆ្វេងផ្សេងៗ H នៅក្នុង G ។

$=$ សន្ទស្សន៍នៃ H នៅក្នុង G

$=\dfrac{o(G)}{o(H)}$

ឧទាហរណ៍១២៖

$(i)\quad \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$ មានដឺក្រេ3

$(ii)\ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$ មានដឺក្រេ 4 ។

ឧទាហរណ៍១៣៖ ចូរសរសេរ Cycle ដាច់គ្នាចំពោះចម្លាស់ខាងក្រោម៖

$a).\ \sigma = (3\ \ 1\ \ 4)(1\ \ 5\ \ 9\ \ 2\ \ 6)(5\ \ 3) \in S_9$

$b).\ \sigma^{-1}$ ដែល $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in S_5$

$c).\ \sigma^{-1}$ ដែល $\sigma = (5\ \ 6\ \ 2)(1\ \ 3) \in S_6$

ដំណោះស្រាយ

សរសេរជាcycleដាច់គ្នា

$a).\ \sigma = (3\ \ 1\ \ 4)(1\ \ 5\ \ 9\ \ 2\ \ 6)(5\ \ 3) \in S_9$

$$= (3\ \ 1\ \ 4)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 3 & 4 & 9 & 1 & 7 & 8 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 9 & 4 & 3 & 1 & 7 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 9 & 3 & 1 & 4 & 7 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= (1\ \ 5)(2\ \ 6\ \ 4\ \ 3\ \ 9)$$

ដូចនេះ $\sigma = (1\ \ 5)(2\ \ 6\ \ 4\ \ 3\ \ 9)$ ។

$b).\ \sigma^{-1}$ ដែល $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in S_5$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= (1\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 2)$$

$c).\ \sigma^{-1}$ ដែល $\sigma = (5\ \ 6\ \ 2)(1\ \ 3) \in S_6$

$$\sigma = (5\ \ 6\ \ 2)(1\ \ 3)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (1\ \ 3)(2\ \ 6\ \ 5)$$

ដូចនេះ $\sigma^{-1} = (1\ \ 3)(2\ \ 5\ \ 6)$ ។

ឧទាហរណ៍១៤៖ គេឱ្យ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 10 & 9 & 8 & 11 & 7 & 3 & 2 & 6 & 12 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in S_{12}$ ។

a). គណនា σ^{2000} និងលំដាប់របស់វា។

b). តើ σ^{2000} ជាចម្លាស់គូ ឬសេស។

ដំណោះស្រាយ

a). គណនា σ^{2000} និងលំដាប់របស់វា

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12\\ 10 & 9 & 8 & 11 & 7 & 3 & 2 & 6 & 12 & 5 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

$$=(1\ \ 10\ \ 5\ \ 7\ \ 2\ \ 9\ \ 1\ \ 2)(3\ \ 8\ \ 6)(4\ \ 11)$$

$$\Rightarrow \sigma^{2000}=(1\ \ 10\ \ 5\ \ 7\ \ 2\ \ 9\ \ 12)^{2000}(3\ \ 8\ \ 6)^{2000}(4\ \ 11)^{2000}$$

$$2000=7\times 285+5$$

$$2000=3\times 666+2$$

$$2000=2\times 1000+0$$

$$\Rightarrow \sigma^{2000}=(1\ \ 10\ \ 5\ \ 7\ \ 2\ \ 9\ \ 12)^{7\times 285+5}(3\ \ 8\ \ 6)^{3\times 666+2}(4\ \ 11)^{2\times 1000+0}$$

$$=(1\ \ 10\ \ 5\ \ 7\ \ 2\ \ 9\ \ 12)^{5}(3\ \ 8\ \ 6)^{2}$$

$$=\underbrace{(1\ \ 9\ \ 7\ \ 10\ \ 12\ \ 2\ \ 5)}_{l_1}\underbrace{(3\ \ 6\ \ 8)}_{l_2}$$

$$\Rightarrow o\left(\sigma^{2000}\right)=LCM(7,3)=21$$

b). តើ σ^{2000} ជាចម្លាស់គូ ឬសេស

$$\varepsilon\left(\sigma^{2000}\right)=(-1)^{\sum_{i=1}^{2}(l_i-1)}$$

$$=(-1)^{(l_1-1)+(l_2-1)}$$

$$=(-1)^{(7-1)+(3-1)}$$

$$=(-1)^{6+2}=1$$

$\Rightarrow \sigma^{2000}$ ជាចម្លាស់គូ។

ឧទាហរណ៍១៥៖ ក្នុង S_{11} គេឱ្យចម្លាស់ $\sigma=(2\ \ 6\ \ 3\ \ 10)(1\ \ 3\ \ 5)(7\ \ 2)$ និង $\beta=(1\ \ 11\ \ 7\ \ 4\ \ 5)(2\ \ 5\ \ 6)$ ។

ក.គណនា $O(\sigma)$ និង $O(\beta)$

ខ.គណនា $\gamma=\sigma\beta\sigma^{-1}$

គ.តើ γ^{1999} ជាចម្លាស់គូ ឬសេស ?

ដំណោះស្រាយ

ក.គណនា $O(\sigma)$ និង $O(\beta)$

គេមាន $\sigma=(2\ \ 6\ \ 3\ \ 10)(1\ \ 3\ \ 5)(7\ \ 2)$

$$=(1\ \ 10\ \ 2\ \ 7\ \ 6\ \ 3\ \ 5)$$

$$\Rightarrow O(\sigma)=7$$

$\beta=(1\ \ 11\ \ 7\ \ 4\ \ 5)(2\ \ 5\ \ 6)=(1\ \ 11\ \ 7\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 2)$

$\Rightarrow O(\beta)=7$

ខ.គណនា $\gamma=\sigma\beta\sigma^{-1}$

គេមាន $\sigma=(1\ \ 10\ \ 2\ \ 7\ \ 6\ \ 3\ \ 5)$

$\Rightarrow\sigma^{-1}=(5\ \ 3\ \ 6\ \ 7\ \ 2\ \ 10\ \ 1)$

$\Rightarrow\gamma=\sigma\beta\sigma^{-1}$

$=(1\ \ 10\ \ 2\ \ 7\ \ 6\ \ 3\ \ 5)(1\ \ 11\ \ 7\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 2)(5\ \ 3\ \ 6\ \ 7\ \ 2\ \ 10\ \ 1)$

$=(1\ \ 3\ \ 7\ \ 10\ \ 11\ \ 6\ \ 4)(2)(5)$

$\Rightarrow\gamma=(1\ \ 3\ \ 7\ \ 10\ \ 11\ \ 6\ \ 4)$

ឬ $\gamma=\sigma\beta\sigma^{-1}=(\sigma(1)\ \ \sigma(11)\ \ \sigma(7)\ \ \sigma(4)\ \ \sigma(5)\ \ \sigma(6)\ \ \sigma(2))$

$=(1\ \ 3\ \ 7\ \ 10\ \ 11\ \ 6\ \ 4)$

គ.តើ γ^{1999} ជាចម្លាស់គូ ឬសេស?

គេមាន $\varepsilon(\gamma^{1999})=(-1)^{\sum_{i=1}^{1}(l_i-1)}$

$\Rightarrow\gamma^{1999}=(1\ \ 3\ \ 7\ \ 10\ \ 11\ \ 6\ \ 4)^{1999}$

$=(1\ \ 3\ \ 7\ \ 10\ \ 11\ \ 6\ \ 4)^{7\times285+4}$

$=(1\ \ 3\ \ 7\ \ 10\ \ 11\ \ 6\ \ 4)^{4}$

$=(1\ \ 11\ \ 3\ \ 6\ \ 7\ \ 4\ \ 10)$

$\Rightarrow\varepsilon(\gamma^{1999})=(-1)^{7-1}=(-1)^6=1$

ដូចនេះ γ^{1999} ជាចម្លាស់គូ។

ឧទាហរណ៍១៦៖ ក្នុង S_{12} គេកំណត់ចម្លាស់

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12\\4&9&6&2&12&1&11&5&3&10&7&8\end{pmatrix}$$

និង $\beta=(2\ \ 7\ \ 12\ \ 11\ \ 1)(3\ \ 1\ \ 5)(2\ \ 8)$ ។

ក. គណនា $\sigma^{1997},\beta^{1997}$ និងលំដាប់របស់វា។

ខ.គណនា $\alpha\gamma\gamma^{-1}$ និង $\gamma\alpha\gamma^{-1}$ ដែល $\alpha=\sigma^{1997}$ និង $\gamma=\beta^{1997}$

គ. តើ $\alpha\gamma\gamma^{-1},\gamma\alpha\gamma^{-1}$ ជាចម្លាស់គូ ឬសេស?

ឧទាហរណ៍១៧៖ ក្នុង S_{12} គេឱ្យចម្លាស់ $\alpha=(3\ \ 1\ \ 8\ \ 2\ \ 11\ \ 10)(2\ \ 10\ \ 5\ \ 6)(7\ \ 2)$

និង $\beta=(12\ \ 9\ \ 4\ \ 1\ \ 2\ \ 7\ \ 11)(3\ \ 8\ \ 4\ \ 7)$ ។

ក. ចូរគណនា $\alpha\beta\alpha^{-1},\beta\alpha\beta^{-1},\alpha^{2007},\beta^{2007}$ ។

ខ. តើចម្លាស់ $\alpha^{2007}\circ\beta^{2007}$ ជាចម្លាស់គូ ឬសេស?

ដំណោះស្រាយ

ក. ចូរគណនា $\alpha\beta\alpha^{-1},\beta\alpha\beta^{-1},\alpha^{2007},\beta^{2007}$ ។

+ គណនា $\alpha\beta\alpha^{-1}$

គេមាន $\alpha=(1\quad 8\quad 2\quad 7\quad 3)(5\quad 6\quad 11\quad 10)$

និង $\beta=(1\quad 2\quad 7\quad 3\quad 8)(4\quad 11\quad 12\quad 9)$

គេបាន $\alpha\beta\alpha^{-1}=\big(\alpha(1)\ \alpha(2)\ \alpha(7)\ \alpha(3)\ \alpha(8)\big)\big(\alpha(4)\ \alpha(11)\ \alpha(12)\ \alpha(9)\big)$

$=(8\ 7\ 3\ 1\ 2)(4\ 10\ 12\ 9\ )$

+ គណនា $\beta\alpha\beta^{-1}$

គេបាន $\beta\alpha\beta^{-1}=\big(\beta(1)\ \ \beta(8)\ \ \beta(2)\ \ \beta(7)\ \ \beta(3)\big)\big(\beta(5)\ \beta(6)\ \beta(11)\ \ \beta(10)\big)$

$=(2\ 1\ 7\ 3\ 8)(5\ 6\ 12\ 10)$

+ គណនា α^{2007}

ដោយ $\alpha=(1\quad 8\quad 2\quad 7\quad 3)(5\quad 6\quad 11\quad 10)$

$\Rightarrow \alpha^{2007}=(1\quad 8\quad 2\quad 7\quad 3)^{2007}(5\quad 6\quad 11\quad 10)^{2007}$

$=(1\quad 8\quad 2\quad 7\quad 3)^{5\times 401+2}(5\quad 6\quad 11\quad 10)^{4\times 501+3}$

$=(1\quad 8\quad 2\quad 7\quad 3)^{2}(5\quad 6\quad 11\quad 10)^{3}$

$=(1\quad 2\quad 3\quad 8\quad 7)(5\quad 10\quad 11\quad 6)$

+ គណនា β^{2007}

ដោយ $\beta=(1\quad 2\quad 7\quad 3\quad 8)(4\quad 11\quad 12\quad 9)$

$\Rightarrow \beta^{2007}=(1\quad 2\quad 7\quad 3\quad 8)^{2007}(4\quad 11\quad 12\quad 9)^{2007}$

$=(1\quad 2\quad 7\quad 3\quad 8)^{2}(4\quad 11\quad 12\quad 9)^{3}$

$=(1\quad 7\quad 8\quad 2\quad 3)(4\quad 9\quad 12\quad 11)$

ខ. តើចម្លាស់ $\alpha^{2007}\circ\beta^{2007}$ ជាចម្លាស់គូ ឬសេស ?

គេបាន

$\alpha^{2007}\circ\beta^{2007}=(1\quad 2\quad 3\quad 8\quad 7)(5\quad 10\quad 11\quad 6)\circ(1\quad 7\quad 8\quad 2\quad 3)(4\quad 9\quad 12\quad 11)$

$=(2\quad 8\quad 3)(4\quad 9\quad 12\quad 6\quad 5\quad 10\quad 11)$

$\Rightarrow \varepsilon\left(\alpha^{2007}\circ\beta^{2007}\right)=(-1)^{\sum(L_i-1)}=(-1)^{(3-1)+(7-1)}=(-1)^{8}=1$

ដូចនេះ $\alpha^{2007}\circ\beta^{2007}$ ជាចម្លាស់គូ។

អនុវត្តន៍៖ ក្នុង S_{11} គេឱ្យចម្លាស់ $\sigma=(2\quad 1\quad 4\quad 8)(5\quad 2\quad 10)(7\quad 9)(6\quad 1)$

និង $\beta=(5\quad 6\quad 7\quad 11\quad 2)(7\quad 8\quad 2\quad 9)$ ។

ក.តើ σ និង β មានលំដាប់ប៉ុន្មាន ?

ខ.គណនា $\sigma\beta\sigma^{-1}$ និង $\beta\sigma\beta^{-1}$ ។

គ. រកលំដាប់នៃ $\gamma=\left(\sigma\beta\sigma^{-1}\right)^{2008}$ និង $\alpha=\left(\beta\sigma\beta^{-1}\right)^{2008}$ ។

២.៤.ក្រុមរង និងលក្ខណៈ

ក.និយមន័យ៖ គេឱ្យ $(G,*)$ ជាក្រុម។ H ជាផ្នែករងមិនទទេ និងជាផ្នែកស្ថាបនៃ G ។ បើ G មានទម្រង់ជាក្រុមនោះគេថា $(H,*)$ ជាក្រុមរងនៃ $(G,*)$ ។

ឧទាហរណ៍១៨៖ $(\mathbb{Z},+)$ ជាក្រុមរងនៃក្រុម $(Q,+),(\mathbb{R},+)$

$(\mathbb{Q},+)$ ជាក្រុមរងនៃក្រុម $(\mathbb{R},+)$

$(\mathbb{Q}^*,+)$ ជាក្រុមរងនៃក្រុម $(\mathbb{R}^*,+)$

ទ្រឹស្តីបទ៥៖ គេឱ្យ $(G,*)$ ជាក្រុម។

គេបាន $(H,*)$ ជាក្រុមរងនៃ $(G,*) \Leftrightarrow \begin{cases} H \neq \varnothing \\ \forall a,b \in H \Rightarrow a*b \in H \\ \text{បើ } e \text{ ជាធាតុណឺតរបស់} G \Rightarrow e \text{ ជាធាតុណឺតរបស់} H \\ \forall a \in H \Rightarrow \exists a^{-1} \in H : a*a^{-1} = a^{-1}*a = e \end{cases}$

សម្រាយបញ្ជាក់

$\Rightarrow$? ដោយ $(H,*)$ ជាក្រុមរងនៃ $(G,*)$ គេបាន $(H,*)$ ជាក្រុម នោះគេបាន៖

- H ជាផ្នែកស្ថាបនៃ $G : \forall a,b \in H \Rightarrow a*b \in H$
- ឧបមាថា e' ជាធាតុណឺតនៃ $(H,*)$ គេបាន $\forall a \in H : a*e' = e'*a = a$ (1)

  តែ $\forall a \in H \Rightarrow a \in G \Rightarrow a*e = e*a = a$ (2)

  តាម(1) និង(2) $\Rightarrow a*e' = a*e \Leftrightarrow e' = e$

  ដូចនេះ បើ e ជាធាតុណឺតនៃ G នោះគេបាន e ជាធាតុណឺតនៃ H ។
- $\forall a \in H$ ឧបមាថា $\exists a' \in H : a*a' = a'*a = e$ (3)

  តែ $\forall a \in H \Rightarrow a \in G \Rightarrow \exists a^{-1} \in G : a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$ (4)

  តាម(3) និង(4) $\Rightarrow a*a' = a*a^{-1} \Leftrightarrow a' = a^{-1}$

  ដូចនេះ $\forall a \in H \Rightarrow \exists a^{-1} \in H : a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$ ។

$\Leftarrow$? ដោយ $\forall a,b \in H \Rightarrow a*b \in H$ គេបាន H ជាផ្នែកស្ថាបនៃ G

- ដោយ H ជាផ្នែកស្ថាបនៃ G គេបាន ប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈផ្តុំលើ H
- គេមាន e ជាធាតុណឺតនៃ H
- $\forall a \in H \Rightarrow \exists a^{-1} \in H : a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$

  គេបាន $(H,*)$ ជាក្រុម

ដូចនេះ គេបាន $(H,*)$ ជាក្រុមរងនៃ $(G,*)$ ។

ទ្រឹស្តីបទ៦៖ ចំពោះសំណុំរងមិនទទេ A នៃក្រុម G មួយ នោះសំណុំ $\langle A \rangle$ គឺជាក្រុមរងនៃ G ត្រូវបានគេហៅថាក្រុមរងនៃ G ដោយ A ។

សម្រាយបញ្ជាក់

($p \Rightarrow q$) មានយ៉ាងហោចណាស់ $a \in A$ ដោយ $A \neq \varnothing$ នោះ $e = aa^{-1} \in \langle A \rangle$

ដូច្នេះ $\langle A \rangle$ មិនទទេ។

បើ $x \in \langle A \rangle$ និង $y \in \langle A \rangle$ នោះគេបាន៖

$$x = x_1 x_2 \cdots x_n \text{ ដែល } x_i \in A \text{ ឬ } x_i^{-1} \in A$$

និង

$$y = y_1 y_2 \cdots y_k \text{ ដែល } y_j \in A \text{ ឬ } y_j^{-1} \in A$$

នោះគេបាន

$$xy = x_1 x_2 \cdots x_n y_1 y_2 \cdots y_k$$

ដែលកត្តានីមួយៗនៅខាងស្ដាំគឺស្ថិតនៅក្នុង A ឬមានធាតុប្រាសដែលជាធាតុនៃ A។

ដូចគ្នាផងដែរ

$$x^{-1} = x_n^{-1} x_{n-1}^{-1} \cdots x_2^{-1} x_1^{-1} \text{ ដែល } x_i^{-1} \in A \text{ ឬ } x_i \in A$$

សំណុំមិនទទេ $\langle A \rangle$ គឺស្ថាប និងមានធាតុប្រាស

ដូចនេះ $\langle A \rangle$ ជាក្រុមរងនៃ G ។

ឧទាហរណ៍១៩៖ តាង $A = \{(1,2,3,4),(1,4)(2,3)\}$ និងចូររក $\langle A \rangle$ នៅក្នុង S_4 ។

ដំណោះស្រាយ

យើងធ្វើការគណនាស្វ័យគុណនៃធាតុផ្សេងៗរបស់ A គេបាន៖

$$\alpha = (1,2,3,4) \qquad \alpha^2 = (1,2)(2,4)$$

$$\alpha^3 = \alpha^{-1} = (1,4,3,2) \qquad \alpha^4 = e = (1)$$

$$\beta = (1,4)(2,3) \qquad \beta^2 = e$$

ដោយប្រើតារាងផលគុណ e,α,α^2,β យើងរកធាតុថ្មីៗនៃ $\langle A \rangle$ ដូចខាងក្រោម៖

$$\alpha\beta = (1,2,3,4)(1,4)(2,3) = (2,4) = \gamma$$

$$\alpha^2\beta = (1,3)(2,4)(2,3) = (1,2)(3,4) = \Delta$$

$$\alpha^3\beta = (1,4,3,2)(1,4)(2,3) = (1,3) = \theta$$

យើងបន្ថែមតារាងដើម្បីប្រើគ្រប់ធាតុទាំង 8 គឺ

$$e,\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\beta,\gamma,\Delta,\theta$$

នោះគេបានសំណុំ $G = \{e,\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\beta,\gamma,\Delta,\theta\}$

ដូចនៅក្នុងតារាងខាងក្រោម៖

វាគឺជាក្រុមរងនៃ S_4 ដែលបង្កដោយ $A = \{\alpha,\beta\}$ ។

ក្រុម G ជាក្រុមគោល 8 ។

$\circ$	e	α	α^2	α^3	β	γ	Δ	θ
e	e	α	α^2	α^3	β	γ	Δ	θ
α	α	α^2	α^3	e	γ	Δ	θ	β
α^2	α^2	α^3	e	α	Δ	θ	β	γ
α^3	α^3	e	α	α^2	θ	β	γ	Δ
β	β	θ	Δ	γ	e	α^3	α^2	α
γ	γ	β	θ	Δ	α	e	α^3	α^2
Δ	Δ	γ	β	θ	α^2	α	e	α^3
θ	θ	Δ	γ	β	α^3	α^2	α	e

រូបទី២.២

ឧទាហរណ៍២០៖ គេឱ្យ $(\mathbb{Z},+)$ ជាក្រុម។ បង្ហាញថា $2\mathbb{Z}$ ជាក្រុមរងនៃ $\mathbb{Z}$ ។

ដំណោះស្រាយ

$+\forall 2a \in 2\mathbb{Z} : a \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 2a \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$

$+x = 2a, y = 2b : a, b \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x, y \in 2\mathbb{Z}$

$x + y = 2(a+b) \in 2\mathbb{Z}$

$0 \in \mathbb{Z}$ ហើយ $0 = 2\times 0 = 0 \Rightarrow 0 \in 2\mathbb{Z}$

$+x = 2a, a \in \mathbb{Z}$

$\forall x \in 2\mathbb{Z}, \exists -x = -2a \in 2\mathbb{Z}$

ហើយ $x + (-x) = 0$ ធាតុណឺត

គេថា $\forall x \in 2\mathbb{Z}$ មានធាតុប្រាស $-x \in 2\mathbb{Z}$

ដូចនេះ $2\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$ ។

+រកធាតុប្រាសនៃ x^{-1}

$\forall x \in 2\mathbb{Z} : x + x^{-1} = 0$

$\Leftrightarrow x^{-1} = -x = -2a \in 2\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \forall x \in 2\mathbb{Z}, \exists x^{-1} \in 2\mathbb{Z}$

ដូចនេះ $2\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$ ។

ឧទាហរណ៍២១៖ ពិនិត្យមើលថាតើ $(a)\ (\{0,2,4\}(\bmod 6),+)$, $(b)\ (\{0,1,2,3\}(\bmod 6),+)$ ជាក្រុមរងនៃ $(\mathbb{Z}_6,+)$ ដែល $\mathbb{Z}_6 = \{0,1,2,3,4,5\}(\bmod 6)$ ឬទេ ?

ដំណោះស្រាយ

(a) តារាង Cayley ចំពោះ $(\{0,2,4\}(\bmod 6),+)$ ត្រូវបានបង្ហាញនៅខាងស្តាំ។ តាមតារាង

យើងបាន៖

(i) សំណុំមានលក្ខណៈស្ថាប

(ii) $0^{-1}=0, 2^{-1}=4, 4^{-1}=2$

$\Rightarrow(\{0,2,4\}(\text{mod}\,6),+)$ ជាក្រុមរងនៃ $(\mathbb{Z}_6,+)$ ។

+	0	2	4
0	0	2	4
2	2	4	0
4	4	0	2

(b) តារាង Cayley ចំពោះ $(\{0,1,2,3\}(\text{mod}\,6),+)$ ត្រូវបានបង្ហាញនៅខាងក្រោម។

(i) តាមតារាងរបស់សំណុំមិនមានលក្ខណៈស្ថាបទេពីព្រោះ $5\notin\{0,1,2,3\}$ ។

$\Rightarrow(\{0,1,2,3\}(\text{mod}\,6),+)$ មិនមែនជាក្រុមរងនៃ $(\mathbb{Z}_6,+)$ ទេ។

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	4
2	2	3	4	5
3	3	4	5	0

ខ.ក្រុមរងស៊ីក្លិក(Cyclic subgroup)

និយមន័យ៖ គេឱ្យ $(G,\bullet)$ ជាក្រុម និង A ជាក្រុមរងនៃ G ។ គេថា A ជាក្រុមរងស៊ីក្លីកនៃ G និងបង្ករដោយ a លុះត្រាតែ $\exists a\in A: A^n=\{a^n : n\in\mathbb{Z}\}$

ហើយ $a^n=\begin{cases}\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n}, & n>0\\ 1 & n=0\\ \underbrace{a^{-1}\cdot a^{-1}\cdot\ldots\cdot a^{-1}}_{|n|}, & n<0\end{cases}$

គេកំណត់សរសេរដោយ $\langle A\rangle=\{x\in G \mid x=a_1a_2\cdots a_n, a_i\in A$ ឬ $a_i^{-1}\in A\}$ ។

សម្គាល់៖ បើប្រមាណវិធីក្នុងនៃ G ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធី $+$ គេបាន៖

$A=\langle a\rangle=\{na : n\in\mathbb{Z}\}$ ដែល $na=\begin{cases}\underbrace{a+a+\ldots+a}_{n\text{ ដង}}, & \text{បើ}\, n>0\\ 0 & \text{បើ}\, n=0\\ \underbrace{(-a)+(-a)+\ldots+(-a)}_{|n|\text{ ដង}}, & \text{បើ}\, n<0\end{cases}$

ឧទាហរណ៍២២៖ គេមាន $(\mathbb{Q}^*,\bullet)$ ជាក្រុម។ គេបាន $A=\{-1,1\}$ ជាក្រុមរងស៊ីក្លីកនៃ $(\mathbb{Q}^*,\bullet)$ ។

ព្រោះ៖ $A=\langle -1\rangle=\left\{(-1)^n : n\in\mathbb{Z}\right\}$ ។

គ. ក្រុមស៊ីក្លិក (Cyclic)

និយមន័យ៖ ក្រុម $(G,\bullet)$ ហៅថាក្រុមស៊ីក្លីកកាលណា $\exists x\in G : G=\langle x\rangle$ ។

($\langle x\rangle$ បង្ករដោយ x)

ចំណាំ៖ (i) បើ $p_1,p_2,...,p_n$ ជាចំនួនបឋមផ្សេងៗគ្នានៃ $n(>1)$ នោះគេបាន

$$\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)...\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

(ii) បើ m,n ជាចំនួនបឋមរួមនោះគេបាន៖

$$\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)\ ,(m,n\geq 1)$$

ឧទាហរណ៍២៣៖ $(\mathbb{Z},+)$ ជាក្រុម $Cyclic$ បង្ករដោយ 1 ឬ -1 ។

ព្រោះ៖ $\langle 1\rangle=\{n1 : n\in\mathbb{Z}\}=\{n : n\in\mathbb{Z}\}=\mathbb{Z}$

$$\langle -1\rangle=\{n(-1) : n\in\mathbb{Z}\}=\{-n : n\in\mathbb{Z}\}=\mathbb{Z}$$

$$\therefore \langle 1\rangle=\langle -1\rangle=\mathbb{Z}$$

ឧទាហរណ៍២៤៖ $GL_n(\mathbb{R})$ ជាក្រុមលីនេអ៊ែរប្រមាណវិធីគុណដែល $M_2(\mathbb{R})$ ជាម៉ាទ្រីសត្រឡប់បាន៖

$$\forall\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a&b\\a'&b'\end{bmatrix}\in GL_2(\mathbb{R})$$

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\a'&b'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\a'&b'\end{bmatrix}$$

នោះ $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\in GL_2(\mathbb{R})$ ជាធាតុណឺត

- ធាតុប្រាស

$$\forall A\in GL_2(\mathbb{R}) : A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-a\\-b&c\end{bmatrix}$$

- លក្ខណៈផ្តុំ $\forall A,B,C\in GL_2(\mathbb{R}) : (AB)C=A(BC)$

នោះគេបានផលគុណម៉ាទ្រីសមានលក្ខណៈផ្តុំ។

ឧទាហរណ៍២៥៖ បើ $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},J=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},H=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ និង $K=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ ។

តើក្រុម $(\{I,J,K,H\},\times)$ ជាក្រុមស៊ីក្លីក ឬទេ ?

ដំណោះស្រាយ

I មិនអាចជាធាតុបង្កនៃក្រុមទេពីព្រោះ $I^n = I$ ។

J មិនអាចជាធាតុបង្កពីព្រោះ $J^2 = I$ ហើយ J^n អាចស្មើ I ឬ J អាស្រ័យលើ n ជាចំនួនគូ ឬសេស។

$H^1 = H$

$$H^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = J$$

$$H^3 = H^2 H = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = K$$

$H^4 = H^2 H^2 = JJ = J^2 = I$

នោះ H ជាធាតុបង្កមួយនៃក្រុមដែលអាចសរសេរជា៖ $\left(\{I, H, H^2, H^3\}, \times\right)$ ដែល $H^4 = I$ ។

ដូចនេះ $\left(\{I, H, H^2, H^3\}, \times\right)$ ជាក្រុមស៊ីក្លិកដែលមានធាតុបង្ក H ។

ឧទាហរណ៍២៦៖ ក. តើ $\mathbb{Z}_{30}$ មានក្រុមរងទាំងអស់ចំនួនប៉ុន្មាន ?

ខ. ចូរសរសេរធាតុទាំងអស់នៃក្រុមរងនីមួយៗ។

ដំណោះស្រាយ

ក. តើ $\mathbb{Z}_{30}$ មានក្រុមរងទាំងអស់ប៉ុន្មាន ?

ដោយ $\langle 1 \rangle = \mathbb{Z}_{30} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,...,26,27,28,29\}$

$30 = 2\times 3\times 5$

ចំនួនតួចែកនៃ $30 = (1+1)(1+1)(1+1) = 8$

$\Rightarrow D_{30} = \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$

ដូចនេះ ចំនួនក្រុមរងនៃ $\mathbb{Z}_{30}$ ស្មើនឹងចំនួនតួចែកនៃ 30 គឺ 8 ក្រុមរង។

ខ. ចូរសរសេរធាតុទាំងអស់នៃក្រុមរងនីមួយៗ

$\langle 1 \rangle = \{0,1,2,3,4,5,6,7,....,28,29\}$ ក្រុមរងមានលំដាប់ 30 ។

$\langle 2 \rangle = \{0,2,4,6,8,....,28\}$ ក្រុមរងមានលំដាប់ 15 ។

$\langle 3 \rangle = \{0,3,6,9,12,15,18,24,27\}$ ក្រុមរងមានលំដាប់ 10 ។

$\langle 5 \rangle = \{0,5,10,15,20,25\}$ ក្រុមរងមានលំដាប់ 6 ។

$\langle 6 \rangle = \{0,6,12,18,24\}$ ក្រុមរងមានលំដាប់ 5 ។

$\langle 10 \rangle = \{0,10,20\}$ ក្រុមរងមានលំដាប់ 3 ។

$\langle 15 \rangle = \{0,15\}$ ក្រុមរងមានលំដាប់ 2 ។

$\langle 30 \rangle = \{0\}$ ក្រុមរងមានលំដាប់ 1 ។

ឧទាហរណ៍២៧៖ ចូរសរសេរធាតុបង្ករ (Generator) ទាំងអស់នៃ $\mathbb{Z}_{30}$ ។

ដំណោះស្រាយ

k ជាធាតុបង្ករនៃ $\mathbb{Z}_{30} \Leftrightarrow \gcd(k,30) = 1$

ដូច្នេះជាតុបង្ករនៃ $\mathbb{Z}_{30}$ គឺ $1,7,11,13,17,19,23,29$ ។

មានន័យថា $\langle 1\rangle = \langle 7\rangle = \langle 11\rangle = \langle 13\rangle = \langle 17\rangle = \langle 19\rangle = \langle 23\rangle = \langle 29\rangle = \mathbb{Z}_{30}$

$\langle 7\rangle = \{0,7,14,21,28,5,12,19,26,3,10,17,24,1,8,15,22,29,6,13,20,27,4,11,18$

$25,2,9,16,23\} = \mathbb{Z}_{30}$

$n = 30 = 2\times 3\times 5$

$\Rightarrow \varphi(30) = 2\times 3\times 5\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)$

$= 1\times 2\times 4 = 8$

ឧទាហរណ៍២៨៖ ក.បង្ហាញថា $\mathbb{Z}_7^\times$ ជាក្រុមស៊ីក្លិក(Cyclic)។

ខ. រកគ្រប់ជាតុបង្ករដោយ $\mathbb{Z}_7^\times$ ។

ដំណោះស្រាយ

រំលឹក៖

$G \text{ cyclic} \Leftrightarrow \exists x\in G : G\langle x\rangle$
$\mathbb{Z}_n^\times = \{x\in\mathbb{Z} \mid 0<x<n \,\&\, \gcd(x,n)=1\}$

$G = \langle x\rangle : o(x) = n$
$G = \langle x^k\rangle, \gcd(k,n)=1$

ក.បង្ហាញថា $\mathbb{Z}_7^\times$ ជាក្រុមស៊ីក្លិក(Cyclic)។

$\mathbb{Z}_7^\times = \{1,2,3,4,5,6\}$

$|\mathbb{Z}_7^\times| = \varphi(7) = 7\left(1-\frac{1}{7}\right) = 6$

ពិនិត្យ

$\langle 2\rangle = \{1,2,4\}$

$\langle 3\rangle = \{3^0 = 1, 3^1 = 3, 3^2 = 2, 3^3 = 6, 3^4 = 4, 3^5 = 5\} = \mathbb{Z}_7^\times$

$(3^5 = 243 = 34\times 7 + 5 \bmod 7 = 5)$

ដូចនេះ $\mathbb{Z}_7^\times$ ជាក្រុមស៊ីក្លិក(Cyclic)បង្ករឡើងដោយជាតុ 3 ។

ខ. រកគ្រប់ជាតុបង្ករដោយ $\mathbb{Z}_7^\times$ ។

ចំនួនជាតុបង្ករទាំងអស់នៃ $\mathbb{Z}_7^\times$ ស្មើនឹង៖

$\varphi(6) = 2\times 3\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right) = 2$ គឺ $\{3,5\}$

ដូច្នេះ $\mathbb{Z}_7^\times = \langle 3\rangle = \langle 5\rangle$ ។

ព្រោះ $G = \mathbb{Z}_7^\times = \langle 3\rangle = \langle 3^k\rangle, \gcd(k,6) = 1$

ឧទាហរណ៍២៩៖ ក.បង្ហាញថា $\mathbb{Z}_{50}^\times$ ជាក្រុមស៊ីក្លិក(Cyclic)។

ខ. រកគ្រប់ជាតុបង្ករនៃ $\mathbb{Z}_{50}^\times$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.បង្ហាញថា $\mathbb{Z}_{50}^{\times}$ ជាក្រុមស៊ីក្លិក(Cyclic)។

$$\left|\mathbb{Z}_{50}^{\times}\right| = \varphi(50) = 2\times 5^2\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) = 20$$

ដូច្នេះ $\mathbb{Z}_{50}^{\times} = \{1,3,7,9,11,13,17,19,21,23,27,29,31,33,37,39,41,43,47,49\}$ ។

ពិនិត្យ

$$\langle 3\rangle = \{3^0 = 1, 3^1 = 3, 3^2 = 9, 3^3 = 27, 3^4 = 31, 3^5 = 43, 3^6 = 29, 3^7 = 37, 3^8 = 11, 3^9 = 33$$

$$3^{10} = 49, 3^{11} = 47, 3^{12} = 41, 3^{13} = 23, 3^{14} = 19, 3^{15} = 7, 3^{16} = 21, 3^{17} = 13, 3^{18} = 39, 3^{19} = 17\}$$

$$\langle 3\rangle = \{1,3,7,9,11,13,17,19,21,23,27,29,31,33,37,39,41,43,47,49\} = \mathbb{Z}_{50}^{\times}$$

ដូច្នេះ $\mathbb{Z}_{50}^{\times}$ ជាក្រុមស៊ីក្លិក(Cyclic)បង្កើតឡើងដោយធាតុ3 ។

ខ. រកគ្រប់ធាតុបង្កនៃ $\mathbb{Z}_{50}^{\times}$ ។

ចំនួនធាតុបង្កទាំងអស់នៃ $\mathbb{Z}_{50}^{\times}$ ស្មើនឹង៖

$$\varphi(20) = 2^2\times 5\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) = 8$$ គឺ $\{3,13,17,23,27,33,37,47\}$

$$G = \mathbb{Z}_{50}^{\times} = \langle 3\rangle = \langle 3^k\rangle, \gcd(k,20) = 1$$

ដូច្នេះ $\mathbb{Z}_{50}^{\times} = \langle 3\rangle = \langle 27\rangle = \langle 37\rangle = \langle 33\rangle = \langle 47\rangle = \langle 23\rangle = \langle 13\rangle = \langle 17\rangle$ ។

ឧទាហរណ៍៣០៖ ក.តើធាតុនីមួយៗនៃ $\mathbb{Z}_{13}^{\times}$ អាចមានលំដាប់ស្មើប៉ុន្មាន?

ខ. បង្ហាញថា $\mathbb{Z}_{13}^{\times}$ ជាក្រុមស៊ីក្លីក។

ដំណោះស្រាយ

ក.តើធាតុនីមួយៗនៃ $\mathbb{Z}_{13}^{\times}$ អាចមានលំដាប់ស្មើប៉ុន្មាន?

ធាតុទាំងអស់នៃ $\mathbb{Z}_{13}^{\times} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ ជាក្រុមមានលំដាប់12 ។

លំដាប់នៃធាតុនីមួយៗនៃ $\mathbb{Z}_{13}^{\times}$ សុទ្ធតែជាតួចែកនៃ12

ពិនិត្យ

$$\langle 2\rangle = \{2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 3, 2^5 = 6, 2^6 = 12, 2^7 = 11, 2^8 = 9,$$
$$2^9 = 5, 2^{10} = 10, 2^{11} = 7\}$$

ដូច្នេះ $\mathbb{Z}_{13}^{\times}$ ជាក្រុមស៊ីក្លិក(Cyclic)បង្កើតឡើងដោយធាតុ2 ។

ខ. បង្ហាញថា $\mathbb{Z}_{13}^{\times}$ ជាក្រុមស៊ីក្លិក(Cyclic)

ចំនួនធាតុបង្កទាំងអស់នៃ $\mathbb{Z}_{13}^{\times}$ គឺស្មើនឹង

$$\varphi(12) = 2^2\times 3\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right) = 4$$ គឺ $\{2,6,7,11\}$ ។

២.៥.អូម៉ូម៉កភីសក្រុម

និយមន័យ៖ គេឱ្យ $(G,*)$ និង $(G',\perp)$ ជាក្រុម។ គេបានអនុវត្តន៍ $f: G\to G'$ ដែល

$$(x,y)\mapsto f(x*y)$$

$\forall x,y\in G: f\left(x*y\right)=f\left(x\right)\perp f\left(y\right)$ ហៅថាអូម៉ូម៉កភីសក្រុមពី G ទៅ G' ។

- អូម៉ូម៉កភីសក្រុមពី $(G,*)\to(G,*)$ ហៅថាអង់ដូម៉កភីសលើ G ។
- អូម៉ូម៉កភីសក្រុមពី $(G,*)\to(G',\perp)$ ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់នោះគេហៅថាម៉ូណូម៉កភីស។
- អូម៉ូម៉កភីសក្រុមពី $(G,*)\to(G',\perp)$ ជាអនុវត្តន៍ពេញនោះគេហៅថាអ៊ីមម៉កភីស។
- អូម៉ូម៉កភីសក្រុមពី $(G,*)\to(G',\perp)$ ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយនោះគេហៅថាអ៊ីសូម៉កភីសលើ G ។
- អង់ដូម៉កភីសក្រុមពី $(G,*)\to(G,*)$ ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយនោះគេហៅថាអូតូម៉កភីសលើ G ។

ឧទាហរណ៍៣១៖ គេមានអនុវត្តន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$

$$x\mapsto y=f\left(x\right)=2^x$$

ស្រាយថា $f:(\mathbb{R},+)\to\left(\mathbb{R}_+^*,\bullet\right)$ ជាអ៊ីសូម៉កភីស (Isomorphism)។

ដំណោះស្រាយ

❖ f ជា អូម៉ូម៉កភីស

$\forall x,y\in\mathbb{R}: f\left(x+y\right)=2^{x+y}$

$=2^x\cdot 2^y$

$=f\left(x\right)\cdot f\left(y\right)$

$\Rightarrow f:(\mathbb{R},+)\to\left(\mathbb{R}_+^*,\bullet\right)$ ជាអូម៉ូម៉កភីស

❖ f ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ

f ជាអនុវត្តន៍ពេញ $f:x\to y=2^x$

ព្រោះ $\forall y\in\mathbb{R}_+^*: y=2^x$

$\Rightarrow \forall y\in\mathbb{R}^*,\exists x\in\mathbb{R}: x=\frac{1}{2}\ln y$

f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ព្រោះ $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$ បើ $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$

$\Leftrightarrow 2^{x_1}=2^{x_2}$

$\Rightarrow x_1=x_2$

ដូចនេះ f ជាអ៊ីសូម៉កភីស។

ឧទាហរណ៍៣២៖ គេឱ្យ $(G,\cdot)$ ជាក្រុមនិង $a\in G$ ។ ស្រាយថា $f_a:G\to G$

$$x\mapsto f_a\left(x\right)=a\cdot x\cdot a^{-1}$$

ជាអូតូម៉កភីសលើ G ។

សម្រាយបញ្ជាក់

+ $\forall x,y\in G$ គេមាន៖

$f\left(x\cdot y\right)=a\cdot\left(x\cdot y\right)\cdot a^{-1}$

$= a \cdot x \cdot e \cdot y \cdot a^{-1}$

$= a \cdot x\left(a^{-1} \cdot a\right) \cdot y \cdot a^{-1}$

$= \left(a \cdot x \cdot a^{-1}\right) \cdot \left(a \cdot y \cdot a^{-1}\right) = f(x) \cdot f(y)$

$\Rightarrow f_a$ ជាអូម៉ូម៉កភីសក្រុម

\+ $\forall x, y \in G$ បើ $f(x) = f(y)$

$\Leftrightarrow a \cdot x \cdot a^{-1} = a \cdot y \cdot a^{-1}$

$\Rightarrow x = y$

$\Rightarrow f_a$ ប្រកាន់

\+ $\forall y \in G, \exists x = a^{-1} \cdot y \cdot a \in G$

ដែល $f(x) = a \cdot x \cdot a^{-1} = a \cdot \left(a^{-1} \cdot y \cdot a\right) \cdot a^{-1}$

$= \left(a \cdot a^{-1}\right) \cdot y \cdot \left(a \cdot a^{-1}\right)$

$= e \cdot y \cdot e = y$

$\Rightarrow f_a$ ពេញ

គេបាន f_a ជាអូតូម៉កភីស។

ឧទាហរណ៍៣៣៖ បើGជាក្រុមអាបែល និង $f: G \to G$ ដែល $f(x) = x^{-1}$។ បង្ហាញថា f ជាអូតូម៉កភីស។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $f(x) = x^{-1}$នោះគេបាន $f(xy) = (xy)^{-1}$

$= y^{-1}x^{-1}$

$= x^{-1}y^{-1}$

$= f(x) \cdot f(y)$

គេបាន f ជាអូម៉ូម៉កភីស

ម្យ៉ាងទៀត $f(x) = f(y) \Rightarrow x^{-1} = y^{-1}$

$\Rightarrow x = y$នោះ f ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ

ដោយ f ជាអនុវត្តន៍ពេញ

ដូចនេះ f ជាអូតូម៉កភីស។

២.៦.រូបភាព (Image) និងស្នូល (Kernel)

គេឱ្យ $f: (G, \mathrm{T}) \to (G', \mathrm{T}')$ ជាអូម៉ូម៉កភីសក្រុម។

\+បើ Aជាផ្នែកមួយនៃGគេបាន៖

$f(A) = \left\{ f(x) : x \in A \right\}$ គេតាង $\operatorname{Im} f = f(G) = \left\{ f(x) : x \in G \right\}$ ។

\+បើBជាផ្នែកមួយនៃG'គេបាន៖

$f^{-1}(B) = \left\{ x \in B : f(x) \in B \right\}$ គឺ $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$

គេតាង $\ker f = f^{-1}(e') = \{x \in G : f(x) = e'\}$

គឺ $x \in \ker f \Leftrightarrow f(x) = e'$ (e' ជាធាតុណឺតនៃ (G', T'))

ដោយ $f(e) = e' \Leftrightarrow e \in \ker f$

$\Rightarrow \ker f \neq \varnothing$

$\ker f$ ហៅថាស្នូលនៃអូម៉ូម៉កភីស។

ទ្រឹស្តីបទ៧៖ ក្រុម G មានអំពើលើសំណុំ X ។ គេបាន៖

ក. ចំពោះ $g \in G$ អនុវត្តន៍ $G(g) : X \to X$

$$x \mapsto \sigma(g)(x) = g \cdot x$$

ជាចម្លាស់នៃ X (មានន័យថា $\sigma(g) \in Sym(X)$)

($Sym(X) = \{f \mid f : X \to X\}$ មួយទល់មួយ)

ខ.អនុវត្តន៍ $\sigma : G \to Sym(X)$ ជាអូម៉ូម៉កភីសហើយ $\ker\sigma$ ហៅថាស្នូលនៃអំពើក្រុម G លើសំណុំ X ។

ចំណាំ៖ ក. $Gx = \{g \cdot x \mid g \in G\}$ ជាសំណុំរងនៃ X ហៅថា **Orbit** នៃ x (ឬG-orbit នៃ x)

ខ. $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ ជាសំណុំរងនៃ G ហៅថា **Stabilizer**។

ឧទាហរណ៍៣៤៖ គេតាង $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R}, ac \neq 0 \right\}$ ។ បង្ហាញថា៖

$a).\ G \leq GL_2(\mathbb{R})$

$b).$ G មានអំពើខាងឆ្វេងលើ $\mathbb{R}$ ដោយ

$$\mathbb{R} \times G \to \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, x \right) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot x = \frac{ax+b}{c}$$

$c).$ រកស្នូលនៃអំពើ G លើ $\mathbb{R}$ ។

$d).$ រក Orbitនៃ 0 និង Stabilizerនៃ 0 ។

ដំណោះស្រាយ

$a).$ បង្ហាញថា $G \leq GL_2(\mathbb{R})$

តាង $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \in G$

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & ay+by \\ 0 & cz \end{pmatrix} \in G$$ ព្រោះ $(a,c,x,y \neq 0)$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

ហើយ $A^{-1}=\frac{1}{ac}\begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}\in G$

ដូចនេះ G ជាក្រុមរងនៃ $GL_2(\mathbb{R})$ ព្រោះ $\frac{1}{ac}\neq 0$ ។

$b)$. បង្ហាញថា G មានអំពើខាងឆ្វេងលើ $\mathbb{R}$ ដោយ

$$\mathbb{R}\times G\to\mathbb{R}$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix},x\right)\mapsto\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\cdot x=\frac{ax+b}{c}$$

+ ចំពោះ $g_1=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $g_2=\begin{pmatrix} m & l \\ 0 & n \end{pmatrix}\in G, x\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow g_1\cdot(g_2\cdot x)=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} m & l \\ 0 & n \end{pmatrix}\cdot x\right]$$

$$=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\frac{mx+l}{n}$$

$$=\frac{a\cdot\frac{mx+l}{c}+b}{c}$$

$$=\frac{amx+al+nb}{cn}\quad(1)$$

$$\Rightarrow(g_1\cdot g_2)\cdot x=\left[\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & l \\ 0 & n \end{pmatrix}\right]x$$

$$=\begin{pmatrix} am & al+nb \\ 0 & cn \end{pmatrix}x$$

$$=\frac{amx+al+nb}{cn}\quad(2)$$

តាម $(1)\&(2)$ គេបាន $g_1\cdot(g_2\cdot x)=(g_1\cdot g_2)\cdot x$ ។

+ ចំពោះ $x\in\mathbb{R},\ I_2\cdot x=x?$

គេបាន $I_2\cdot x=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}x=x$

ដូចនេះ G មានអំពើខាងឆ្វេងលើ $\mathbb{R}$ ។

$c)$. រកស្នូលនៃអំពើ G លើ $\mathbb{R}$

$\sigma:G\to Sym(x)$ ដែល $\forall x\in X,\sigma(A)(x)=A\cdot x$

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\mapsto\sigma(A)$$

ស្នូលនៃអំពើ G លើ $\mathbb{R}=\ker\sigma$

$$\begin{aligned}
\ker\sigma &= \{A\in G \mid \sigma(A)=id_X\}\\
&=\{A\in G\mid \forall x\in\mathbb{R},\sigma(A)(x)=x\}\\
&=\{A\in G\mid \forall x\in\mathbb{R},\ A\cdot x=x\}\\
&=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}\in G\mid \forall x\in\mathbb{R},\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}x=x\right\}\\
&=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}\in G\mid \forall x\in\mathbb{R},\frac{ax+b}{c}=x\right\}\\
&=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}\in G\mid \forall x\in\mathbb{R},ax+b=cx\right\}\\
&=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}\in G\mid \forall x\in\mathbb{R},(a-c)x+b=0\right\}\\
&=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}\in G\mid \forall x\in\mathbb{R},a=c\wedge b=0\right\}\\
&=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}\in G\mid \forall a\in\mathbb{R},a\neq 0\right\}=Z(GL_2(\mathbb{R}))
\end{aligned}$$

ដូចនេះ ស្នូលនៃអំពើ G លើ $\mathbb{R}$ គឺ $\ker\sigma=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}\in G\mid \forall a\in\mathbb{R},a\neq 0\right\}=Z(GL_2(\mathbb{R}))$ ។

$d)$. រក Orbit នៃ 0 និង Stabilizer នៃ 0

\+ Orbit នៃ 0

$$\begin{aligned}
Gx&=\{A\cdot x\mid A\in G\}\\
G0&=\{A\cdot 0\mid A\in G\}\\
&=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}\cdot 0\mid a,b,c\in\mathbb{R},\ ac\neq 0\right\}\\
&=\left\{\frac{a0+b}{c}\mid a,b,c\in\mathbb{R},c\neq 0\right\}\\
G0&=\left\{\frac{b}{c}\mid a,b,c\in\mathbb{R},c\neq 0\right\}
\end{aligned}$$

\+ Stabilizer នៃ 0

$$\begin{aligned}
G_x&=\{A\in G\mid A\cdot x=x\}\\
G_0&=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}\in G\mid A\cdot 0=0\right\}\\
&=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}\in G\mid \begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}\cdot 0=0\right\}
\end{aligned}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G \mid \frac{a(0)+b}{c}=0\right\}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G \mid b=0\right\}$$

$$G_0=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G \mid ac \neq 0\right\}$$

ឧទាហរណ៍៣៥៖ គេឱ្យ $\Gamma=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R}, a>0, b>0\right\}$ បង្ហាញថា៖

ក. $\Gamma \leq GL_2(\mathbb{R})$

ខ. Γ មានអំពើខាងស្តាំលើ $\mathbb{R}^2$ តាមអនុវត្តន៍៖

$$\mathbb{R}^2 \times \Gamma \to \mathbb{R}^2$$

$$\left((x,y),\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) \mapsto (x,y)\cdot\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}=(ax,by)$$

គ. ចូររក $\Gamma_{(0,0)}, \Gamma_{(0,1)}, \Gamma_{(1,1)}$

ឃ. រក Orbit ទាំងអស់នៃ $\mathbb{R}^2$ ។ បង្ហាញថាវាមានតែ 9 Orbit ប៉ុណ្ណោះ។

ដំណោះស្រាយ

ក.បង្ហាញថា $\Gamma \leq GL_2(\mathbb{R})$

តាង $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \& B=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \in \Gamma$

$$\Rightarrow AB=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax & 0 \\ 0 & by \end{pmatrix} \in \Gamma$$ ព្រោះ $ax, by \neq 0$

$$I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$$

$$A^{-1}=\frac{1}{ab}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \in \Gamma$$

ដូចនេះ G ជាក្រុមរងនៃ $GL_2(\mathbb{R})$ ព្រោះ $\frac{1}{ab} \neq 0$ ។

ខ. បង្ហាញថា Γ មានអំពើខាងស្តាំលើ $\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{R}^2 \times \Gamma \to \mathbb{R}^2$$

$$\left((x,y),\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) \mapsto (x,y)\cdot\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}=(ax,by)$$

$+$ ចំពោះ $g_1=\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix} \& g_2=\begin{pmatrix} m & 0\\ 0 & n\end{pmatrix}\in\Gamma, x,y\in\mathbb{R}$

គេបាន $\left((x,y)\cdot g_1\right)\cdot g_2=\left[(x,y)\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} m & 0\\ 0 & n\end{pmatrix}$

$=(ax,by)\begin{pmatrix} m & 0\\ 0 & n\end{pmatrix}$

$=(axm,byn)\ (1).$

និង $(x,y)(g_1\cdot g_2)=(x,y)\left[\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 0\\ 0 & n\end{pmatrix}\right]$

$=(x,y)\begin{pmatrix} am & 0\\ 0 & bn\end{pmatrix}$

$=(amx,bny)\quad(2)$

តាម $(1)\&(2)\Rightarrow\left((x,y)\cdot g_1\right)\cdot g_2=(x,y)(g_1\cdot g_2)$

$+$ ចំពោះ $x,y\in\mathbb{R}^2, (x,y)I_2=(x,y)?$

គេបាន $(x,y)I_2=(x,y)\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$=(x,y)\quad\Rightarrow G$ មានអំពើខាងស្តាំលើ $\mathbb{R}^2$

គ. ចូរក $\Gamma_{(0,0)},\Gamma_{(0,1)},\Gamma_{(1,1)}$

- $\Gamma_{(0,0)}$

គេមាន $\Gamma_{(x,y)}=\{A\in\Gamma\mid(x,y)\cdot A=(x,y)\}$

$\Gamma_{(0,0)}=\left\{\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\in\Gamma\mid(0,0)\cdot A=(0,0)\right\}$

$=\left\{\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\in\Gamma\mid(0,0)\cdot\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}=(0,0)\right\}$

$=\left\{\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\in\Gamma\mid(a\cdot 0,b\cdot 0)=(0,0)\right\}$

$\Gamma_{(0,0)}=\Gamma$

$+\Gamma_{(1,1)}=\left\{\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\in\Gamma\mid(1,1)\cdot A=(1,1)\right\}$

$=\left\{\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\in\Gamma\mid(a,b)=(1,1)\right\}$

$=\left\{\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\in\Gamma\mid a=1\wedge b=1\right\}$

$$\Rightarrow \Gamma_{(1,1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \{ I_2 \}$$

$$+ \quad \Gamma_{(0,1)} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \Gamma \mid (0,1) \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = (0,1) \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \Gamma \mid (a \cdot 0, b) = (0,1) \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \Gamma \mid b = 1 \right\}$$

$$\Rightarrow \Gamma_{(0,1)} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a > 0 \right\}$$

ឃ. រក Orbit ទាំងអស់នៃ $\mathbb{R}^2$ ។ បង្ហាញថាមានតែ9 Orbit ប៉ុណ្ណោះ

$$\Gamma(x,y) = \left\{ (x,y) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \Gamma \right\}$$

$$\Gamma(x,y) = \{ (ax, by) \mid a > 0, b > 0 \}$$

$$+ \quad \Gamma(0,0) = \{ (a \cdot 0, b \cdot 0) \mid a > 0, b > 0 \}$$

$$= \{ (0,0) \}$$

$$+ \quad \Gamma(1,1) = \{ (a,b) \mid a > 0, b > 0 \}$$

គឺកាដ្យង់ (I) ដែលគ្មាន $\overrightarrow{]0,b)}$ & $\overrightarrow{]0,a)}$

$$+ \quad \Gamma(-1,1) = \{ (-a,b) \mid a > 0, b > 0 \}$$

គឺកាដ្យង់ (II) ដែលគ្មាន $\overrightarrow{(a',b[}$ & $\overrightarrow{]0,b)}$

$$+ \quad \Gamma(-1,-1) = \{ (-a,-b) \mid a > 0, b > 0 \}$$

គឺកាដ្យង់ (III) ដែលគ្មាន $\overrightarrow{(a',0[}$ & $\overrightarrow{(b',0[}$

$$+ \quad \Gamma(1,-1) = \{ (a,-b) \mid a > 0, b > 0 \}$$

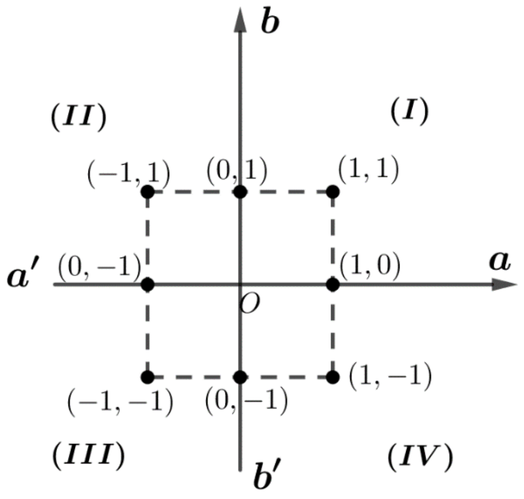
គឺកាដ្យង់ (IV) ដែលគ្មាន $\overrightarrow{]0,a)}$ & $\overrightarrow{(b',0[}$

$$+ \quad \Gamma(0,1) = \{ (0,b) \mid, b > 0 \} \text{ គឺ } \overrightarrow{]0,b)}$$

$$+ \quad \Gamma(1,0) = \{ (a,0) \mid, a > 0 \} \text{ គឺ } \overrightarrow{]0,a)}$$

$$+ \quad \Gamma(0,-1) = \{ (0,-b) \mid, b > 0 \} \text{ គឺ } \overrightarrow{(b',0[}$$

$$+ \quad \Gamma(-1,0) = \{ (-a,0) \mid, a > 0 \} \text{ គឺ } \overrightarrow{(a',0[}$$



រូបទី២.៣

ដូចនេះក្នុង $\mathbb{R}^2$ មាន Orbit(វិលជុំវិញ) ទាំងអស់ ៩ ។

២.៧.ក្រុមរងណរម៉ាល់

និយមន័យ៖ គេឱ្យ G ជាក្រុម និង H ជាក្រុមរងនៃ G ។ H ហៅថាក្រុមរងណរម៉ាល់នៃ G លុះត្រាតែ $\forall x \in H \Rightarrow xH = Hx$ ។

ទ្រឹស្តីបទ៨៖ តាង H ជាក្រុមរងនៃ G ។ នោះ H ជាក្រុមរងណរម៉ាល់នៃ G លុះត្រាតែ $xhx^{-1} \in H, \forall h \in H$ និង $\forall x \in G$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

($p \Rightarrow q$) បើ H ជាក្រុមរងណរម៉ាល់នៃ G នោះលក្ខខណ្ឌខាងក្រោមគឺងាយស្រួល ដោយ H ត្រូវតែជាណរម៉ាល់គេបាន៖

$$xHx^{-1} = H, \forall x \in G \Rightarrow xHx^{-1}, \forall x \in G$$

$$\Rightarrow xhx^{-1} \in H, \forall h \in H \text{ និង} \forall x \in G$$

($p \Leftarrow q$) ឧបមាថាឥឡូវលក្ខខណ្ឌនេះមាន។ ចំពោះ $\forall x \in G, xHx^{-1} \subseteq H$ ដោយដោះស្រាយភ្លាមៗ យើងគ្រាន់តែត្រូវការបង្ហាញថា $H \subseteq xHx^{-1}$

តាង h ជាតម្លៃណាមួយនៅក្នុង H និងតាង $x \in G$ ហើយ x^{-1} ជាធាតុមួយនៅក្នុង G និងលក្ខខណ្ឌមានន័យថា៖

$$\left(x^{-1}\right)(h)\left(x^{-1}\right)^{-1} = x^{-1}hx$$

នៅក្នុង H នោះគេបាន៖

$$x^{-1}hx = h_1 \text{ ចំពោះ } h_1 \in H \Rightarrow h = xh_1x^{-1},\ h_1 \in H$$

$$h \in xHx^{-1}$$

នោះ $H \subseteq xHx^{-1}$ និងមាន $xHx^{-1} = H, \forall x \in G$ ។ ដូចនេះ H ជាក្រុមរងណរម៉ាល់នៃ G ។

ឧទាហរណ៍៣៦៖ តាង $H = A_3 = \{(1),(1, 2, 3),(1,3,2)\} = \langle(1,2,3)\rangle$ និង $G = S_3 = \{(1), (1,2,3), (1,3,2),(1, 2),(1,3),(2,3)\}$ ។ បង្ហាញថា H ជាក្រុមរងណរម៉ាល់នៃ G ។

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះ $x = (1,2)$ យើងមាន

$$xH = \{(1,2)(1),(1,2)(1,2,3),(1,2)(1,3,2)\}$$
$$= \{(1,2),(2,3),(1,3)\}$$

និង

$$xH = \{(1)(1,2),(1,2,3)(1,2),(1,2,3)(1,2)\}$$
$$= \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$$

យើងមាន $xH = Hx$ ប៉ុន្តែ $xh \neq hx$ បើ $h = (1,2,3) \in H$ ។ ដូចការគណនាបង្ហាញថា

$$(1)H = (1,2,3)H = (1,3,2)H = \{(1),(1,2,3),(1,3,2)\} = H$$

$$H(1) = H(1,2,3) = H(1,3,2) = \{(1),(1,2,3),(1,3,2)\} = H$$

$$(1,2)H = (1, 3)H = (2,3)H = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$$

$$H(1,2) = H(1, 3) = H(2,3) = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$$

ដូចនេះ H ជាក្រុមរងណរម៉ាល់នៃ G ។

ឧទាហរណ៍៣៧៖ H ជាក្រុមរងណរម៉ាល់នៃ S_3 ចំពោះ $h=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\in H$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\circ h=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

$$h\circ\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\circ h\neq h\circ\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$$

ទោះបីយ៉ាងណាក៏ដោយយើងមាន៖

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}H=H\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$$

ចំពោះ $a\in G, H\neq\varnothing, H\subseteq G$

តាង $aHa^{-1}=\left\{aha^{-1}\mid h\in H\right\}$

ឧទាហរណ៍៣៨៖ គេឱ្យ $G=\left\{\begin{pmatrix}1&a\\0&b\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})\mid b\neq 0\right\}$ បង្ហាញថា៖

$a).$ $G\leq GL_2(\mathbb{R})$

$b).$ $H_1\lhd G$ ដែល $H_1=\left\{\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}\mid a\in\mathbb{R}\right\}$

$c).$ H_2 ក្រុមរងតែមិនណរម៉ាល់នៃ G ដែល $H_2=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&b\end{pmatrix}\mid b\neq 0\right\}$ ។

ដំណោះស្រាយ

$a).$បង្ហាញថា $G\leq GL_2(\mathbb{R})$

\+ ចំពោះ $A=\begin{pmatrix}1&a\\0&b\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&x\\0&y\end{pmatrix}\in G$ គេបាន

$$AB=\begin{pmatrix}1&a\\0&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&x\\0&y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&x+ay\\0&by\end{pmatrix}\in G \text{ ព្រោះ } by\neq 0$$

$$I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\in G$$

\+ ចំពោះ $A=\begin{pmatrix}1&a\\0&b\end{pmatrix}\in G$ គេបាន

$$A^{-1}=\frac{1}{b}\begin{pmatrix}b&-a\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\frac{a}{b}\\0&\frac{1}{b}\end{pmatrix}\in G,\left(\frac{1}{b}\neq 0\right)$$

ដូចនេះគេបាន G ជាក្រុមរងនៃ $GL_2(\mathbb{R})$ ។

រំឭក៖

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$$

$$|A|=\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{22}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}adj(A)=\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}^T,\ A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=|a_{22}|=a_{22}$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=-|a_{12}|=-a_{12}$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=-M_{21}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=-|a_{21}|=-a_{21}$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=M_{22}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=|a_{11}|=a_{11}$$

ដូច្នេះ $A^{-1}=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11}\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} & \frac{-a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} \\ \frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} & \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}\end{pmatrix}^T$

$$=\begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} & \frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} \\ \frac{-a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} & \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}\end{pmatrix}$$ ។

b). បង្ហាញថា $H_1 \triangleleft G$ ដែល $H_1=\left\{\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1\end{pmatrix} \mid a\in\mathbb{R}\right\}$

$$H_1 \triangleleft G \Leftrightarrow \begin{cases} H_1 \le G \\ \forall A\in H_1, \forall M\in G, MAM^{-1}\in H_1\end{cases}$$

តាមសំណួរ a). $\Rightarrow H_1 \le G$

ចំពោះ $A=\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1\end{pmatrix}\in H_1$ និង $M=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b\end{pmatrix}\in G$

នោះគេបាន $M^{-1}=\frac{1}{b}\begin{pmatrix} b & -a \\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{b} \\ 0 & \frac{1}{b}\end{pmatrix}$

$$MA=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x+a\\ 0 & b\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow MAM^{-1}=\begin{pmatrix}1 & x+a\\ 0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\frac{a}{b}\\ 0 & \frac{1}{b}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{a}{b}+\frac{x+a}{b}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & \frac{x}{b}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in H_1$$

ដូចនេះ H_1 ជាក្រុមរងណរម៉ាល់នៃ $G\left(H_1 \lhd G\right)$ ។

c). បង្ហាញថា H_1 មិនណរម៉ាល់ នៃ $G,\ H_2 \le G$

គេមាន $H_2=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & b\end{pmatrix} \mid b\neq 0\right\}$

ចំពោះ $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}\in H_2\ \&\ M=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & b\end{pmatrix}\in G$

$$\Rightarrow M^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{a}{b}\\ 0 & \frac{1}{b}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow MA=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & bx\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow MAM^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & bx\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\frac{a}{b}\\ 0 & \frac{1}{b}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{a}{b}\\ 0 & x\end{pmatrix}\in G$$

តែ $MAM^{-1}\notin H_2$

ដូចនេះ H_2 មិនណរម៉ាល់នៃ G ទេ។

២.៨.ក្រុមផលចែក

និយមន័យ៖ បើ H ជាក្រុមរងណរម៉ាល់នៃ G ។ ក្រុម G/H ដែលមានថ្នាក់សមមូលនៃ H នៅក្នុង G ហៅថាក្រុមផលចែក ឬក្រុមផលគុណនៃ G ដោយ H ។

សម្រាយបញ្ជាក់

បើ G ជាក្រុមអាបែល នោះវាគឺជាក្រុមផលចែក G/H ។ តាង a និង b ជាធាតុនៃ G នោះគេបាន

$aHbH=abH$ ដោយ H គឺណរម៉ាល់

$=baH$ ដោយ G គឺអាបែល

$=bHaH$ ដោយ H គឺណរម៉ាល់

និង G/H គឺអាបែល

ឧបមាក្រុម G ដែលមានលំដាប់រាប់អស់ n និងក្រុមរងណរម៉ាល់ H មានលំដាប់ m ។ នោះគេមាន

$$o(G)=o(H)\cdot o(G/H)$$

ឬ $\quad n=m\cdot o(G/H)$

និងមានលំដាប់នៃក្រុមផលចែកគឺ $o(G/H)=n/m$

ឧទាហរណ៍៣៩៖ តាង G ជាក្រុមគោល8 (Octic)ដែល $D=\{e,\alpha,\alpha^2,\beta,\gamma,\Delta,\theta\}$ ។

វាអាចត្រូវបានផ្ទៀងផ្ទាត់យ៉ាងងាយស្រួល $H=\{e,\gamma,\theta,\alpha^2\}$ ជាក្រុមរងណរម៉ាល់នៃ G ។

ថ្នាក់សមមូលផ្សេងៗនៃ H នៅក្នុង G គឺ

$$H=eH=\gamma H=\theta H=\alpha^2H=\{e,\gamma,\theta,\alpha^2\}$$

និង $\quad \alpha H=\alpha^3H=\beta H=\Delta H=\{\alpha,\alpha^3,\beta,\Delta\}$

ដូច្នេះ $G/H=\{H,\alpha H\}$ និងតារាងផលគុណចំពោះ G/H ដូចខាងក្រោម៖

$\cdot$	H	αH
H	H	αH
αH	αH	H

មានសារៈសំខាន់ណាស់ និងទំនាក់ទំនងរវាងក្រុមផលចែកនៃក្រុម G និងទម្រង់អ៊ីពីម៉កភីសពី G ទៅក្រុមផ្សេងទៀត G' ។

ឧទាហរណ៍៤០៖ ចូររកលំដាប់នៃធាតុ $<6>+5$ នៅក្នុងក្រុម $\dfrac{\mathbb{Z}}{<6>}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\mathbb{Z}_8=\{0,1,2,\ldots,7\}\bmod 8$ និង $<6>=\{0,6,12\}=H$

នោះគេបាន $\dfrac{\mathbb{Z}_8}{<6>}=\dfrac{\mathbb{Z}_8}{H}=\{H,H+1,H+2,H+3,H+5\}$

$$=\{<6>,<6>+1,<6>+2,<6>+3,<6>+4,<6>+5\}$$

តែ $<6>+5\neq<6>$

ចំពោះ $2(<6>+5)=<6>+10=<6>+4\neq<6>$

ស្រដៀងគ្នាដែរ $3(<6>+5),4(<6>+5),5(<6>+5)$ គឺមិនមែន $<6>$

ហើយ $6(<6>+5)=<6>+30=<6>$ គឺដូចគ្នា នោះគេបានលំដាប់នៃ $<6>+5$ គឺ 6 ។

២.៩.ក្រុមរងផលចែក

និយមន័យ៖ គេឱ្យក្រុមរងណរម៉ាល់នៃក្រុម $(G,\bullet)$ គេតាង $G/H=\{xH:x\in G\}$ ហៅថា សំណុំផលចែករងនៃ G និង H ។ បើ G/H ជាកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុងមួយដោយ

$\forall x\in H, yh\in G/H : xH\bullet yH=(x\bullet y)H$

គេបាន $\left(G/_{H},\cdot\right)$ មានទម្រង់ជាក្រុមហៅថាក្រុមផលចែករវាង G និង H ។

ឧទាហរណ៍៤១៖ គេឱ្យ $(\mathbb{Z},+)$ ជាក្រុម។ បង្ហាញថា H ជាក្រុមរងណរម៉ាល់នៃ $\mathbb{Z}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យក H ជាសំណុំពហុគុណនៃ 5 គេបាន $H=\{\cdots,-10,-5,0,5,10,\ldots\}$

សំណុំខាងឆ្វេងទាំងអស់នៃ $\mathbb{Z}$ មាន៖

$\bar{0}=\bar{0}+H$

$\quad =0+H$

$\bar{1}=\bar{1}+H=\{\ldots,-9,-4,1,6,11,\ldots\}$

$\bar{2}=\bar{2}+H=\{\ldots,-8,-3,2,7,12,\ldots\}$

$\bar{3}=\bar{3}+H=\{\ldots,-7,-2,3,8,13,\ldots\}$

$\bar{4}=\bar{4}+H=\{\ldots,-6,-1,4,9,14,\ldots\}$

ដូចនេះ $\mathbb{Z}/_{H}=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$ ។ $\mathbb{Z}/_{H}$ ហៅថាថ្នាក់ម៉ូឌុយឡូ(Modulo)

ឧទាហរណ៍៤២៖ គេឱ្យ G ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីបូកម៉ូឌុយឡូ 6 ។ $N=\{\bar{0},\bar{3}\}$ កំណត់សំណុំ $G/_{N}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន

$G/_{N}=\{aN:a\in G\}$

$G=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5}\}$

$G/_{N}=\{\bar{0}(\bar{0},\bar{3}),\bar{1}(\bar{0},\bar{3}),\bar{2}(\bar{0},\bar{3}),\bar{3}(\bar{0},\bar{3}),\bar{4}(\bar{0},\bar{3}),\bar{5}(\bar{0},\bar{3})\}$

$+\bar{0}(\bar{0},\bar{3})$ មាន $\bar{0}+\bar{0}(\mathrm{mod}.6)=\bar{0}$

មាន $\bar{0}+\bar{3}(\mathrm{mod}.6)=\bar{3}$

$+\bar{1}(\bar{0},\bar{3})$ មាន $\bar{1}+\bar{0}(\mathrm{mod}.6)=\bar{1}$

មាន $\bar{1}+\bar{3}(\mathrm{mod}.6)=\bar{4}$

$+\bar{2}(\bar{0},\bar{3})$

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

ដូចនេះ $G/_{N}=\{(\bar{0},\bar{3}),(\bar{1},\bar{4}),(\bar{2},\bar{5}),(\bar{3},\bar{0}),(\bar{4},\bar{1}),(\bar{5},\bar{2})\}$ ។

២.១០.ទ្រឹស្តីបទអូម៉ូម៉កភីស និងអ៊ីសូម៉កភីស

ទ្រឹស្តីបទ៩៖ តាង G ជាក្រុម និងតាង H ជាក្រុមរងណរម៉ាល់នៃ G ។ អនុវត្តន៍ $\phi:G\to G/H$ កំណត់ដោយ $\phi(a)=aH$ គឺជាអ៊ីពីម៉កភីសពី G ទៅ G/H ។

សម្រាយបញ្ជាក់

$p \Rightarrow q$ រូបមន្ត $\phi(a)=aH$ ជាការកំណត់យ៉ាងច្បាស់ចំពោះអនុវត្តន៍ពី G ទៅ G/H នៅក្នុង G ចំពោះ $a,b\in G$ គេបាន៖

$$\phi(a)\cdot\phi(b)=(aH)(bH)$$

$$=abH \text{ ដោយ } H \text{ ណរម៉ាល់នៅក្នុង } G$$

$$=\phi(ab)$$

ដូចនេះ ϕ ជាអូម៉ូម៉កភីស។ គ្រប់ធាតុនៃ G/H ជាថ្នាក់សមមូលនៃ H នៅក្នុង G ដែលមានទម្រង់ aH ចំពោះ a នៅក្នុង G ។ យើងមាន $\phi(a)=aH$ នោះគេបាន ϕ ជាអ៊ីពីម៉កភីស។

ឧទាហរណ៍៤៣៖ ចូរពិនិត្យក្រុមគោល 8 (Octic)ដែល $D=\{e,\alpha,\alpha^2,\beta,\gamma,\Delta,\theta\}$ ។

និង វាជាក្រុមរងណរម៉ាល់ $H=\{e,\gamma,\theta,\alpha^2\}$ ។

យើងឃើញថានៅក្នុងឧទាហរណ៍៣៧ $G/H=\{H,\alpha H\}$ តាមទ្រឹស្តីបទ៦ខាងលើមានអនុវត្តន៍ $\phi: G\to G/H$ កំណត់ដោយ $\phi(a)=aH$ ជាអ៊ីពីម៉កភីស។

តម្លៃនៃ ϕ កំណត់ដោយករណីខាងក្រោម៖

$$\phi(e)=\phi(\gamma)=\phi(\theta)=\phi(\alpha^2)=H$$

$$\phi H(\alpha)=\phi(\alpha^3)=\phi(\beta)=\phi(\Delta)=\alpha$$

តាមទ្រឹស្តីបទ៦យើងអាចនិយាយបានថាគ្រប់ក្រុមផលចែក G/H គឺជារូបភាពអូម៉ូម៉កភីសនៃ G ។

ទ្រឹស្តីបទ១០៖ តាង G និង G' ជាក្រុមដែល G' ជារូបភាពអូម៉ូម៉កភីសសនៃ G ។ នោះ G' ជាអ៊ីសូម៉កភីសទៅក្រុមផលចែក G ។

សម្រាយបញ្ជាក់

($p\Rightarrow q$)តាង ϕ អ៊ីមពីម៉កភីសពី G ទៅ G' និងតាង $K=\ker\phi$ ចំពោះ aK នៅក្នុង G/K កំណត់ដោយ $\theta(aK)$ គឺ

$$\theta(aK)=\phi(a)$$

ដំបូងយើងត្រូវបញ្ជាក់ថា ច្បាប់នេះគឺកំណត់ក្នុងអនុវត្តន៍។ ចំពោះ aK និង bK មួយណានៅក្នុង G/K គេបាន $aK=bK \Leftrightarrow b^{-1}aK=K$

$$\Leftrightarrow b^{-1}a\in K$$

$$\Leftrightarrow \phi(b^{-1}a)=e'$$

$$\Leftrightarrow \phi(b^{-1})\phi(a)=e'$$

$$\Leftrightarrow [\phi(b)]^{-1}\phi(a)=e'$$

$$\Leftrightarrow \phi(a)=\phi(b)$$

$$\Leftrightarrow \theta(aK)=\theta(bK)$$

នោះθជាការកំណត់អនុវត្តន៍ពីG/KទៅG' និងការបង្ហាញថាθជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ។ យើងនិងបង្ហាញថាθជាអ៊ីសូម៉កភីសពីG/KទៅG'ដោយៈ

$$\begin{aligned}\theta(aK\cdot bK)&=\theta(abK)\\&=\phi(ab)\\&=\phi(a)\cdot\phi(b)\\&=\theta(aK)\cdot\theta(bK)\end{aligned}$$

នោះθជាអូម៉ូម៉កភីស។ ដើម្បីបង្ហាញថាθជាអនុវត្តន៍ពេញ តាងa'ជាតម្លៃណាមួយក៏បាននៅក្នុងG។ ដោយϕជាអ៊ីពីម៉កភីស មានធាតុaនៅក្នុងGដែល$\phi(a)=a'$។ នោះaKនៅក្នុងG/K និង$\theta(aK)=\phi(a)=a'$។

ដូចនេះ គ្រប់ធាតុនៅក្នុងG'ជារូបភាពនៅក្រោមθ និងការបង្ហាញថាθជាអ៊ីសូម៉កភីស។

ទ្រឹស្តីបទគ្រឹះនៃអូម៉ូម៉កភីសៈ បើϕ ជាអ៊ីពីម៉កភីសពីក្រុមG ទៅក្រុមG' នោះG'ជាអ៊ីសូម៉កភីសទៅ$G/\ker\phi$។

ឧទាហរណ៍៤៤ៈ ពិនិត្យលើក្រុម$G=S_3$ និង$G'=\{[1],[2]\}$នៅក្រុមឧទាហរណ៍មុន។ យើងនិងបង្ហាញថាKernelនៃអ៊ីពីម៉កភីស$\phi:G\to G'$ជាក្រុមរងណរម៉ាល់។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន
$$\begin{aligned}K&=\ker\phi\\&=\{(1),(1,2,3),(1,2,3)\}\end{aligned}$$

នៃGក្រុមផលចែកG/Kជាក្រុមកំណត់ដោយៈ

$$G/K=\{K,(1,2)K\}$$

ដែល$(1,2)K=\{(1,2),(2,3),(1,3)\}$

អ៊ីសូម៉កភីស$\theta:G/K\to G'$ មានតម្លៃ

$$\theta(K)=\phi(1)=[1]$$
$$\theta((1,2)K)=\phi(1,2)=[2]$$

ដូចនេះ អ៊ីពីម៉កភីស$\phi:G\to G'$ជាក្រុមរងណរម៉ាល់។

ឧទាហរណ៍៤៥ៈ តាង$G=S_3$ក្រុមស៊ីមេទ្រីនៅលើបីធាតុ។ ដើម្បីរកគ្រប់រូបភាពអូម៉ូម៉កភីសនៃG យើត្រូវតែរកគ្រប់ក្រុមរងណរម៉ាល់ទាំងអស់នៃH នៃG និងទម្រង់ក្រុមផលចែកទាំងអស់G/Kនោះគេបានក្រុមរងនៃGគឺ

$$\begin{array}{ll}H_1=\{(1)\} & H_4=\{(1),(2,3)\}\\ H_2=\{(1),(1,2)\} & H_5=\{(1),(1,2,3),(1,2,3)\}\\ H_3=\{(1),(1,3)\} & H_6=S_3\end{array}$$

ចំពោះH_1,H_5 និងH_6ជាក្រុមរងណរម៉ាល់តែមួយគត់។ រូបភាពអូម៉ូម៉កភីសដែលអាចកើតមាននៃGនោះគេបានៈ

$G/H_1=\{H_1,(1,2)H_1,(1,3)H_1,(2,3)H_1,(1,2,3)H_1,(1,3,2)H_1\}$

$G/H_5=\{H_2,(1,2)H_5\}$

$G/G=\{G\}$

នោះរូបភាពអូម៉ូម៉កភីសផ្សេងៗនៃ S_3 ជាអ៊ីសូម៉កភីសពី S_3 ទៅក្រុមស៊ីក្លីកលំដាប់ 2 ឬទៅក្រុមដែលមានធាតុណឺតតែមួយគត់។

ទ្រឹស្តីបទ១១៖គេឱ្យ H និង K ជាពីរក្រុមរងណរម៉ាល់នៃ G ដែល $H\subset K$ ។គេបាន $H\cap K$ ជាក្រុមរងណរម៉ាល់នៃ K ។

$\Rightarrow$ក្រុមផលចែក $K/_{H\cap K}$ កំណត់បាន៖

តាង $HK=\{hk:h\in H\wedge k\in K\}$

គេបាន HK ជាក្រុមរងនៃ $(G,\cdot)$ ព្រោះ៖ $\forall\alpha\in HK\Rightarrow\exists h\in H\wedge\exists k\in K:\alpha=h\cdot k$

ដោយ $H\subset G\wedge K\subset G$

$\Rightarrow\alpha=h.k\in G$

$\Rightarrow HK\subset G$

គេមាន $e=e\cdot e$ ដែល $e\in H\wedge e\in K$

$\Rightarrow e\in HK$

$\Rightarrow HK\neq\varnothing$

ទ្រឹស្តីបទ១២៖ គេឱ្យ $(G,\cdot)$ ជាក្រុម។ H និង K ជាពីរក្រុមរងណរម៉ាល់នៃ $(G,\cdot)$ ដែល $H\subset K$

គេបាន $\dfrac{G/H}{K/H}\sim G/K$ ។

ពិនិត្យអនុវត្តន៍៖ $\varphi:G/_H\to G/_K$

$x\cdot H\mapsto\varphi(x\cdot H)=x\cdot K$

សម្រាយបញ្ជាក់

ពិនិត្យអនុវត្តន៍៖ $\varphi:G/_H\to G/_K$

$x\cdot H\mapsto\varphi(x\cdot H)=x\cdot K$

- φ ជាអូម៉ូម៉កភីស (Homomorphism) : $\forall x\cdot H,y\cdot H\in G/_H$

គេមាន $\varphi[(x\cdot H)\cdot(y\cdot H)]=\varphi[(x\cdot y)\cdot H]=(x\cdot y)\cdot K=(x\cdot K)\cdot(y\cdot K)$

$=\varphi(x\cdot H)\varphi(y\cdot H)$

- φ ជាអនុវត្តន៍ពេញគេមាន $\varphi\left(G/_H\right)=\left\{\varphi(x\cdot H):x\cdot H\in G/_H\right\}$

$=\{x\cdot K:x\in G\}=G/_K$

គេបាន $\varphi:G/_H\to G/_H$ ជាអ៊ីពីម៉កភីស (Epimorphisme)

$\Rightarrow\dfrac{G/H}{\ker\varphi}\sim G/_K$

តែ $\ker\varphi = \left\{x\cdot H \in {}^{G}\!/_{H} : \varphi(x\cdot H) = e\cdot K\right\} = \left\{x\cdot H \in {}^{G}\!/_{H} : x\cdot K = K\right\}$

$= \left\{x\cdot H \in {}^{G}\!/_{H} : x \in K\right\} = {}^{K}\!/_{H}$ (ព្រោះ $H \subset K \Rightarrow {}^{K}\!/_{H\cap K} = {}^{K}\!/_{H}$ និង ${}^{K}\!/_{H} \subset {}^{G}\!/_{H}$)

ដូចនេះគេបាន $\dfrac{{}^{G}\!/_{H}}{{}^{K}\!/_{H}} \sim {}^{G}\!/_{K}$ ។

ឧទាហរណ៍៤៦៖ ចូររកគ្រប់អូម៉ូម៉កភីសពី $\dfrac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$ ទៅ $\dfrac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $f : \dfrac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}} \to \dfrac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}$ ជាអូម៉ូម៉កភីសនោះគេបាន $f(4\mathbb{Z}+n) = nf(4\mathbb{Z}+1)$

ដូច្នេះ f ត្រូវបានដឹងគ្រប់គ្រាន់បើ $f(4\mathbb{Z}+1)$ យើងស្គាល់

ចំពោះលំដាប់នៃ $(4\mathbb{Z}+1)$ គឺស្មើ 4 នោះគេបា $o\big(f(4\mathbb{Z}+1)\big)$ ចែកនឹង 4 ។

ដូចគ្នាផងដែល $o\big(f(4\mathbb{Z}+1)\big)$ ចែកនឹង 6 នោះ $o\big(f(4\mathbb{Z}+1)\big) = 1$ ឬ 2

បើ $o\big(f(4\mathbb{Z}+1)\big) = 1$ នោះ $f(4\mathbb{Z}+1) = 6\mathbb{Z} =$ សូន្យនៃ $\dfrac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}$ នោះគេបាន $f(4\mathbb{Z}+n) = 0$

បើ $o\big(f(4\mathbb{Z}+1)\big) = 2 \Rightarrow f(4\mathbb{Z}+1) = 6\mathbb{Z}+3$

$\Rightarrow f(4\mathbb{Z}+n) = 6\mathbb{Z}+3n$

ដូចគ្នាដែរ $f(4\mathbb{Z}+n+4\mathbb{Z}+m) = f(4\mathbb{Z}+n=m)$

$= 6\mathbb{Z}+3(n+m)$

$= (6\mathbb{Z}+3n)+(6\mathbb{Z}+3m)$

$= f(4\mathbb{Z}+n)+f(4\mathbb{Z}+m)$

នោះមានពីរជម្រើសចំពោះ f ហើយវាអាចកំណត់ដូចជា៖

$f : \dfrac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}} \to \dfrac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}$ ដែល $f(4\mathbb{Z}+n) = 6\mathbb{Z}+3n$

ចំណាំ៖ $4\mathbb{Z}+n = 4\mathbb{Z}+m$

$\Rightarrow n-m \in 4\mathbb{Z}$

$\Rightarrow 3(n-m) \in 12\mathbb{Z} \subseteq 6\mathbb{Z}$

$\Rightarrow 3(n-m) \in 6\mathbb{Z}$

$\Rightarrow 6\mathbb{Z}+3n \in 6\mathbb{Z}+3m$

មានន័យថា f គឺត្រូវបានកំណត់

ដូចច្នេះ មានពីរអូម៉ូម៉កភីសពី $\dfrac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$ ទៅ $\dfrac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}$ ។ ជាទូទៅ មាន d អូជាម៉ូម៉កភីសពី $\dfrac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}} \to \dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ ដែល $d = \gcd(m,n)$ ។

លំហាត់ទម្រង់ក្រុម

១. លើសំណុំ $\mathbb{R}$ គេកំណត់ដោយប្រមាណវិធីក្នុង $*$ ដោយ $\forall a,b\in\mathbb{N}: a*b=a+b-ab\sqrt{3}$ ។

ក. សិក្សាលក្ខណៈនៃ $*$ លើ $\mathbb{R}$?

ខ.តើសំណុំរងពិតណានៃ $\mathbb{R}$ ដែលប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធី $*$ មានទម្រង់ជាក្រុមអាបែល ?

២. គេបង្កើតប្រមាណវិធី $*$ លើសំណុំ $\mathbb{Z}$ កំណត់ដោយ $x*y=x+y-1$ ។

ក. តើប្រមាណវិធី $*$ មានលក្ខណៈត្រឡប់ ឬផ្តុំទេ ?

ខ. តើ $*$ មានធាតុណឺតឬទេ ? មានធាតុប្រាស ឬទេ ?

គ. បញ្ជាក់ទម្រង់នៃ $(\mathbb{Z},*)$ ។

៣. ក្នុងសំណុំ $\mathbb{R}$ គេឱ្យប្រមាណវិធី $*$ ដោយ $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2: x*y=\dfrac{x+y}{1-xy}$ ។ បង្ហាញថា $(\mathbb{R},*)$ ជាក្រុមអាបែល។

៤. $(G,\bullet)$ ជាក្រុមដែល $\forall x\in G: x^2=e$ (e ជាធាតុណឺតនៃ G)បង្ហាញថា G ជាក្រុមត្រឡប់។

៥. នៅក្នុងសំណុំ $\mathbb{R}$ នៃចំនួនពិតគេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុងមួយដោយ $*$ គឺ $a*b=\dfrac{a+b-ab+1}{2}$ ។

ក. គណនា $a*b$ ក្នុងករណី៖

$i.\ a=3,\ b=2$

$ii.\ a=1,\ b=-2$

$iii. a=5,\ b=0$

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា -1 ជាធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $*$

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថាគ្រប់ធាតុនៃ $\mathbb{R}$ មានចម្រាសមួយចំពោះ $*$ លើកលែងតែធាតុមួយដែលគេនឹងបញ្ជាក់។

ឃ. តើគេសន្និដ្ឋានបានដូចម្តេចចំពោះទម្រង់ពីជគណិតនៃសំណុំ $\mathbb{R}$?

៦. នៅក្នុងសំណុំ $\mathbb{R}$ នៃចំនួនពិតគេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុងមួយដោយ $*$ គឺ
$\forall x,y\in\mathbb{R}: x*y=x+y+xy$ ។

ក. សិក្សាលក្ខណៈនៃប្រមាណវិធីនេះ

ខ. តើ $\mathbb{R}$ ជាក្រុមអាបែលចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ឬទេ ?

គ. បង្ហាញថា $\mathbb{R}-\{1\}$ ជាក្រុមអាបែលចំពោះប្រមាណវិធី $*$ ។

៧. E ជាសំណុំចំនួនពិតខុសពីមួយ។ ហើយ $a*b=a+b-ab$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូល។ បង្ហាញថា $(E,*)$ ជាក្រុមអាបែល។

៨.លើ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុង $\oplus$ មួយដោយ
$\forall(a,b),(a',b')\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: (a,b)+(a',b')=(a+a',b+b')$

ក. បង្ហាញថា $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},+)$ ជាក្រុមអាបែល។

ខ.គេតាង $H=\{(a,0)|a\in\mathbb{R}\}$ ។ បង្ហាញថា H ជាក្រុមរងនៃ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ និង $H\sim\mathbb{R}$ (H អ៊ីសូម៉ក

ភីស $\mathbb{R}$)។

៩. គេឱ្យ S_1 & S_2 ជាក្រុមរងនៃ $(G,\bullet)$ ។ $(G,\bullet)$ ជាក្រុមអាបែល។ គេតាង

$S_1 \bullet S_2 = \{x_1 \bullet x_2 : x_1 \in S_1 \wedge x_2 \in S_2\}$ ។

បង្ហាថា $S_1 \bullet S_2$ ជាក្រុមរងនៃក្រុម G ។

១០. គេឱ្យ $(G,\bullet)$ និង $(G',\bullet)$ ជាក្រុម។ $f:(G,\bullet)\to(G',\bullet)$ ជាអ៊ីភីម៉កភីស។ បង្ហាញថាបើ $(G,\bullet)$ ជាក្រុម Cyclicនោះ $(G',\bullet)$ ជាក្រុមCyclicដែរ។

១១.លើ $G=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុង $*$ មួយដោយ

$\forall(x,y),(x',y')\in G:(x,y)*(x',y')=\left(xx',xy'+\frac{y}{x'}\right)$

ក. បង្ហាញថា $(G,*)$ ជាក្រុម។

ខ. រកផ្ចិតនៃ G ។

គ. បង្ហាញថា $\mathbb{R}^*\times\{0\},\{1\}\times\mathbb{R}$ ជាក្រុមរងនៃ G ។

ឃ. បង្ហាញថា $\forall k\in\mathbb{R}:H_k=\left\{x,k\left(x-\frac{1}{x}\right):x\in\mathbb{R}^*\right\}$ ជាក្រុមនៃ G ។

១២. គេឱ្យ $(G,*)$ ជាក្រុមដែលមាន e ជាធាតុណឺត។

ក. បង្ហាញថា $\forall a,b,c,d\in G$ បើ $a*b*c*d=e\Rightarrow b*c*d*a=e, c*d*a*b=e$ និង $d*a*b*c=e$ ។

ខ. គណនា d^{-1} ជាអនុគមន៍នៃ a,b,c និងគណនា $d^{-1}*c^{-1}$ ជាអនុគមន៍នៃ a និង b ។

១៣. គេឱ្យ $(G,\bullet)$ ជាក្រុមដែល $\forall x\in G\Rightarrow x^3=e$ (e ជាធាតុណឺតនៃ G)។

ក. ចូរប្រៀបធៀបការនៃធាតុមួយរបស់ G និងចម្រាសរបស់ធាតុនោះ។

ខ. បង្ហាញថា $\forall x,y\in G$ គេបាន $(x\cdot y)^2=y^2\cdot x^2,\ x\cdot y^2\cdot x=y\cdot x^2\cdot y\ ,\ x^2\cdot y\cdot x^2=y^2\cdot x\cdot y^2$ ។

១៤. គេឱ្យ G ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីក្នុង . ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌទាំងបីខាងក្រោម៖

ក. $\forall x,y,z\in G:(x\cdot y)z=x\cdot(y\cdot z)$

ខ. G មាន e ជាធាតុណឺតឆ្វេងចំពោះប្រមាណវិធី.

គ. $\forall x\in G$ មានចម្រាសខាងឆ្វេង x^{-1} ចំពោះប្រមាណវិធី $(\cdot)$ បង្ហាញថា $(G,\bullet)$ ជាក្រុមអាបែល។

១៥. នៅក្នុងលំហាត់១ដល់៦ H ជាក្រុមរងណរម៉ាល់នៃក្រុម G ។ ចូររកលំដាប់ផលចែកនៃក្រុម G/H និងសងតារាងផលគុណនៃ G/H ។

១. ក្រុមគោល8 $G=\{e,\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\beta,\gamma,\Delta,\theta\},\ H=\{e,\alpha^2\}$

២. ក្រុមគោល8 $G=\{e,\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\beta,\gamma,\Delta,\theta\},\ H=\{e,\beta,\Delta,\alpha^2\}$

៣. ក្រុមចំនួនកុំផ្លិចដែលមានបួនកំប៉ូសង់ $G=\{\pm1,\pm i,\pm j,\pm k\},H=\{\pm1\}$

៤. ក្រុមនៃចលនាមិនប្រែប្រួល(Rigid motion) នៃបច្ចកោណនិយ័ត

$G=\{e,\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\beta,\gamma,\Delta,\theta,\sigma\}=D_5$ ដែល $\alpha=(1,2,3,4,5),\beta=(2,5)(3,4),$

$\gamma=(1,2)(3,4), \Delta=(1,3)(4,5), \theta=(1,4)(2,3)$ និង $\sigma=(1,5)(2,4)$ ។

៥. ក្រុមចម្លាស់ $G=A_4, H=\{(1),(1,2),(3,4),(1,3)(2,4),(1,4)(2,3)\}$ ។

៦. ក្រុមស៊ីមេទ្រី $G=S_4, H=\{(1),(1,2),(3,4),(1,3)(2,4),(1,4)(2,3)\}$ ។

១៦. តាង $G=S_3$ ចំពោះ H នីមួយៗខាងក្រោម បង្ហាញថាសំណុំទាំងអស់នៃសមមូលខាងឆ្វេងនៃ H នៅក្នុង G គឺមិនមានទម្រង់ជាក្រុមដែលធៀបទៅនឹងផលគុណកំណត់ដោយ $(aH)(bH)=abH$ ។

ក. $H=\{(1),(1,2)\}$

ខ. $H=\{(1),(1,3)\}$

គ. $H=\{(1),(2,3)\}$

១៧. គណនាចម្លាស់នីមួយៗខាងក្រោម៖

$(i).\ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}$ $(ii).\ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}$

$(iii.)\ \begin{pmatrix}p&q&r\\r&q&q\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}p&q&r\\p&r&q\end{pmatrix}$ $(iv).\ \begin{pmatrix}a&b&c&d\\b&d&c&a\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}a&b&c&d\\b&a&c&d\end{pmatrix}$

១៨. គេឱ្យ $a=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}, c=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$ ។

តើ $(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$ ឬទេ ?

១៩. បើ $e=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}, f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}, g=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix},$

និង $h=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$ ។

បង្ហាញថា៖

$(i)\ h\circ h=g$ $(ii)\ h\circ h\circ h=f$ $(iii)\ f\circ g=e$

គណនា

$(i)\ g^{-1}$ $(ii)\ h^{-1}\circ e^{-1}$ $(iii)\ (f\circ g)\circ h$

២០. បើ $a=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$ បង្ហាញថា $a^2=e$ ដែល e ជាចម្លាស់ណឺត និង $a^2=a\circ a$ ។

២១. តាង G ជាសំណុំនៃម៉ាទ្រីសលំដាប់ 2×2 នៃ $\begin{pmatrix}a&b\\0&d\end{pmatrix}$ ដែល $ad\neq 0$ ជាម៉ាទ្រីសផលគុណ។

តាង $N=\left\{\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ បង្ហាញថា៖

ក. N ជាក្រុមរងណរម៉ាល់នៃ G

ខ. G/N ជាក្រុមអាបែល

២២. បង្ហាញថា $f:(\mathbb{R},+)\to(\mathbb{R},+)$ កំណត់ដោយ $f(x)=5x$ ជាអូម៉ូម៉កភីស។

២៣.បង្ហាញថា $f:(\mathbb{R},+)\to(\mathbb{R},+)$ កំណត់ដោយ $f(x)=x+1$ មិនមែនជាអូម៉ូម៉ក ភីសចំពោះ $\forall x,y\in\mathbb{R}$ ។ $\left(f(x+y)=x+y+1\neq f(x)+f(y)\right)$

២៤. បើ G ជាក្រុមអាបែល និង $G'=G$ បង្ហាញថា $f:G\to G'$ កំណត់ដោយ $f(x)=x^n,\forall x\in G$ និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានគឺជាអូម៉ូម៉កភីស។

$\left[f(xy)=(xy)^n=x^ny^n\ (\because G\text{ ជាក្រុមអាបែល}=f(x)f(y)\right]$

២៥. បង្ហាញថាអនុវត្តន៍ $f:(\mathbb{C},+)\to(\mathbb{R},+)$ កំណត់ដោយ $f(x+iy)=x$ ជាអូម៉ូម៉កភីស។ ចូររក $\ker f$ ។

ការណែនាំ៖ $\ker f=\{x+iy: f(x+iy)=0\text{ ជាធាតុណឺតនៃ }(\mathbb{R},+)\}$

$$=\{x+iy: x=0\}$$

$$=\{iy: y\in\mathbb{R}\}$$

មេរៀនទី៣៖ ទម្រង់កង

៣.១.និយមន័យ និងលក្ខណៈ

ក.និយមន័យ៖ គេឱ្យ R ជាសំណុំមួយប្រដាប់ដោយពីរប្រមាណវិធីក្នុងបូក និងគុណ។

គេថា $(R,+,\cdot)$ មានទម្រង់ជាកងលុះត្រាតែ៖

(1) $(R,+)$ ជាក្រុមអាប៊ែល(ដែលមានធាតុណឺតសូន្យ)ចំពោះគ្រប់តម្លៃ $a,b,c\in R$

(a) មានធាតុណឺត $0\in R$ ដែល $a+0=0+a=a$

(b) ចំពោះគ្រប់ $a\in R$ មានធាតុប្រាសចំពោះប្រមាវិធីបូក $-a\in R$ ដែល

$$a+(-a)=(-a)+a=0$$

(c) $a+(b+c)=(a+b)+c$

(d) $a+b=b+a$

(2) ប្រមាណវិធីគុណ $(\cdot)$ មានលក្ខណៈផ្តុំចំពោះ $\forall a,b,c\in R$

គេបាន $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$

(3) ប្រមាណវិធីគុណមានលក្ខណៈបំបែកចំពោះប្រមាណវិធីបូកលើ R

$\forall a,b,c\in R\Rightarrow a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$ និង

$$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$$

❖ **បន្ថែមពីនេះ**

⊕ បើប្រមាណវិធី $(\cdot)$ មានលក្ខណៈត្រឡប់លើ $R:\forall a,b\in R,\ a\cdot b=b\cdot a$ នោះ $(R,+,\bullet)$ ហៅថា **កងមានលក្ខណៈត្រឡប់**។

⊕បើ R មានធាតុឯកតា(ធាតុណឺត)ចំពោះប្រមាណវិធី $(\cdot)$ នោះ $(R,+,\cdot)$ ហៅថា**កងឯកតា**។

⊕ បើប្រមាណវិធី $(\cdot)$ មានលក្ខណៈត្រឡប់ និង R មានធាតុឯកតាចំពោះប្រមាណវិធី $(\cdot)$ នោះ $(R,+,\cdot)$ ហៅថា **កងឯកតាមានលក្ខណៈត្រឡប់**។

ឧទាហរណ៍១៖ នៅក្នុងសំណុំ $(\mathbb{Z},+,\cdot),(\mathbb{Q},+,\cdot),(\mathbb{R},+,\cdot)$ ជាកងឯកតាមានលក្ខណៈត្រឡប់។

ខ.លក្ខណៈ៖

គេឱ្យ $(R,+,\cdot)$ ជាកងមួយនឹង $\forall a,b,c\in R$ គេបាន៖

(i) $a\cdot 0=0\cdot a=0$

(ii) $a\cdot(-b)=(-a)\cdot b=-(a\cdot b)$

(iii) $(-a)\cdot(-b)=a\cdot b$

(iv) $a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c$ និង $(a-b)\cdot c=a\cdot c-b\cdot c$

សម្រាយបញ្ជាក់

(i).គេបាន $a\cdot(b+0)=a\cdot b$

$$\Rightarrow a\cdot b+a.0=a\cdot b+0$$

$$\Rightarrow a\cdot 0=0$$

ដូចគ្នា $a\cdot 0=0$

(ii) $a\cdot(b+(-b))=a\cdot 0=0$

$$\Rightarrow a\cdot b+a\cdot(-b)=0$$

$$\Rightarrow (-a)\cdot b=-(a\cdot b)$$

ដូចគ្នាដែរ $(-a)\cdot b=-(a\cdot b)$

(iii) ម្យ៉ាងវិញទៀត $(-a)\cdot(-b)=-[(-a)\cdot b]=-[(-a\cdot b)]=ab$

(iv) តាង $a,b,c\in R$ នោះគេបាន $a\cdot(b-c)=a\cdot[b+(-c)]=a\cdot b+a\cdot(-c)$

$$=a\cdot b+[-(a\cdot c)]=a\cdot b-a\cdot c$$

ដូចនេះ $a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c$ ។

ដូចគ្នាដែរចំពោះ $(a-b)\cdot c=a\cdot c-b\cdot c$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ $M_2(\mathbb{Z})$ ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ពីរដែលមានធាតុយកតែជាចំនួនគត់ $(M_2(\mathbb{Z}),+,\cdot)$ ។ $(M_2(\mathbb{Z}),+,\cdot)$ ជាកងគ្មានលក្ខណៈត្រឡប់

$$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5&1\\7&8\end{bmatrix}\in M_2(\mathbb{Z})$$

$$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5&1\\7&8\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}5&1\\7&8\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$$

ឧទាហរណ៍៣៖ ប្រព័ន្ធចំនួនពិត $(R,+,\cdot)$ ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីបូក និងគុណជាកង។ សំណុំ $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ និង $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ នៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប និងចំនួនអសនិទានជាទម្រង់កងផងដែរ។

បើ E ជាសំណុំនៃចំនួនគត់គូ នោះ $(E,+,\cdot)$ គឺជាកង។

នៅក្នុងប្រព័ន្ធចំនួនគត់ $(\mathbb{N}\cup\{0\},+,\cdot)$ មិនមែនជាកងទេ ពីព្រោះ $(\mathbb{N}\cup\{0\},+)$ មិនមែនជាក្រុម ហើយមានតែធាតុសូន្យជាចម្រាសនៃប្រមាណវិធីបូក។

ឧទាហរណ៍៤៖ តាង $S=\{x+y\sqrt[3]{3}+z\sqrt[3]{9}:x,y,z\in\mathbb{Q}\}$ ជាកងធៀបទៅនឹងផលបូក និងផលគុណនៅលើ ។ បង្ហាញថា S មានលក្ខណៈស្ថាបធៀបទៅនឹងប្រមាណវិធីទាំងនេះ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $a+b\sqrt[3]{3}+c\sqrt[3]{9},\ d+e\sqrt[3]{3}+f\sqrt[3]{9}\in S$ គេបាន

$\left(a+b\sqrt[3]{3}+c\sqrt[3]{9}\right)+\left(d+e\sqrt[3]{3}+f\sqrt[3]{9}\right)=\left(a+d\right)+\left(b+e\right)\sqrt[3]{3}+\left(c+f\sqrt[3]{9}\right)\in S$

និង $\left(a+b\sqrt[3]{3}+c\sqrt[3]{9}\right)+\left(d+e\sqrt[3]{3}+f\sqrt[3]{9}\right)=\left(ad+3bf+3ce\right)$

$$+\left(ae+bd+3ef\right)\sqrt[3]{3}+\left(af+be+cd\right)\sqrt[3]{9}\in S$$

យើងកត់សម្គាល់ឃើញថា P_1,P_2,P_5-P_7 ដោយមាន S ជាសំណុំរងនៃកង $\mathbb{R}$ ។

ជាសរុប $0=0+0\sqrt[3]{3}+0\sqrt[3]{9}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង P_3 និងចំពោះ $x+y\sqrt[3]{3}+z\sqrt[3]{9}\in S$

ដែលមាន $-x-y\sqrt[3]{3}-z\sqrt[3]{9}\in S$ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង P_4 ។

ដូចនេះ S មានគ្រប់តាមលក្ខណៈទាំងអស់នៃកង។

ឧទាហរណ៍៥៖ បង្ហាញថា $R=\left\{a+b\sqrt{2}:a,b\in\mathbb{Z}\right\}$ ជាទម្រង់កងត្រឡប់ឯកតាធៀបទៅនឹងផលបូក និងផលគុណនៅក្នុង $\mathbb{R}$ ។ បង្ហាញថាក្រុមនៃឯកតា R មិនអាចរាប់បាន។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\left(a+b\sqrt{2}\right)+\left(c+d\sqrt{2}\right)=\left(a+c\right)+\left(b+d\right)\sqrt{2}\in R$

និង $\left(a+b\sqrt{2}\right)\left(c+d\sqrt{2}\right)=\left(ac+2bd\right)+\left(ad+bc\right)\sqrt{2}\in R$

ដោយ R ជាសំណុំរងនៃ $\mathbb{R}$ លក្ខណៈ $(\mathrm{R1}),(\mathrm{R2}),(\mathrm{R5}),(\mathrm{R6})$ និង $(\mathrm{R7})$

បំពេញលក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់។ កងដែលមានលក្ខណៈ $(\mathrm{R3}),(\mathrm{R4})$ និង $(\mathrm{R8})$

ដោយធាតុសូន្យគឺ $0+0\sqrt{2}$

អវិជ្ជមាននៃ $a+b\sqrt{2}$ គឺ $(-a)+(-b)\sqrt{2}$

ជាតុណឹតគឺ $1+0\sqrt{2}$

ជាតុ $1+\sqrt{2}$ គឺនៅក្នុងក្រុមឯកតាដោយ $\left(1+\sqrt{2}\right)\left(-1+\sqrt{2}\right)=1$ ។ ស្វ័យគុណនៃជាតុទាំងអស់គឺផ្សេងៗដោយ $1+\sqrt{2}>1$ នោះ

$$1+\sqrt{2}<\left(1+\sqrt{2}\right)^2<\left(1+\sqrt{3}\right)^2<\cdots$$

គ្រប់ស្វ័យគុណទាំងអស់នៅក្នុងក្រុមឯកតារាប់មិនអស់។

ដូចនេះ ក្រុមឯកតាគឺ $\left\{a+b\sqrt{2}:a,b\in\mathbb{Z},\left|a^2-2b^2\right|=1\right\}$ ។

៣.២. កងអាំងតែក

និយមន័យ៖ តាង D ជាកង។ នោះ D ជាកងអាំងតែកត្រូវបំពេញលក្ខខណ្ឌដូចខាងក្រោម៖

1. D ជាកងមានលក្ខណៈត្រឡប់
2. D មានជាតុណឹត e និង $e\neq 0$
3. D គ្មានតួចែកនៃសូន្យ

- ធាតុមិនសូន្យនៃ a កង $(R,+,\bullet)$ ហៅថាតួចែកនៃសូន្យ (Zero Division) កាលណាមានធាតុមិនសូន្យ b ដែល $a\cdot b=0\ ,b\neq 0$ ។
- កងដែលមានលក្ខណៈត្រឡប់ $(R,+,\bullet)$ ហៅថាកងអាំងតែក(Integral domain)

កាលណា R គ្មានតួចែកនៃសូន្យមានន័យថាបើ $a\cdot b=0\Rightarrow a=0\vee b=0$ ។

- កងនៃចំនួនគត់ $\mathbb{Z}$ ជាកងអាំងតែក។

$M_2(\mathbb{Z})$ មិនមែនជាកងអាំងតែកព្រោះប្រមាណវិធីគ្មានលក្ខណៈត្រឡប់ហើយមានតួចែកសូន្យ

ជាឧទាហរណ៍ $\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\in M_2(\mathbb{Z})$ និង $\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

ឧទាហរណ៍៧៖ $\left(\mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}},+,\bullet\right)$ មិនមែនជាកងអាំងតែកទេ

ព្រោះគេមាន $\bar{2}\neq\bar{0},\bar{3}\neq\bar{0}$ តែ $\bar{2}\cdot\bar{3}=\bar{0}$ ($\bar{2},\bar{3}$ ជាតួចែកនៃសូន្យ)។

- បើ n ជាចំនួនបឋម នោះគេបាន $\left(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}},+,\cdot\right)$ ជាកងអាំងតែកឯកតា

ឧទាហរណ៍៨៖ នៅក្នុង $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]=\left\{a+b\sqrt{3}\mid a,\in\mathbb{Z}\right\}$ ជាកង។

- $0+0\sqrt{3}$ ជាធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $+$
- $1+0\sqrt{3}$ ជាធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $(\cdot)$
- ឧបមាថា $\sqrt{3}$ ជាធាតុឯកតាក្នុង $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$
- នោះ $\left(\sqrt{3}\right)^{-1}=a+b\sqrt{3},\ a,b\in\mathbb{Z}$
- បើ $a=0\Rightarrow\left(\sqrt{3}\right)^{-1}=b\sqrt{3}$ ឬ $1=3b$ ផ្ទុយពីការពិតព្រោះសមីការគ្មានឫសក្នុង $\mathbb{Z}$ ទេ។
- ចំពោះ $a\neq 0\ ,1=a\sqrt{3}+3b$ ឬ $\sqrt{3}=\dfrac{1-3b}{a}$ ផ្ទុយពីការពិត
- គេបាន $\sqrt{3}$ មិនមែនជាធាតុឯកតា
- ដូចនេះ $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$ មិនមែនជាកងអាំងតែក។
- ដូចគ្នាដែរចំពោះ

  $\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]=\left\{a+b\sqrt{d}\mid a,b\in\mathbb{Z}\right\}$

  $\mathbb{Z}\left[i\sqrt{d}\right]=\left\{a+bi\sqrt{d}\mid a,b\in\mathbb{Z}\right\}$

  $\mathbb{Z}[i]=\{a+bi\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$

  $\mathbb{Q}\left[\sqrt{d}\right]=\left\{a+b\sqrt{d}\mid a,b\in\mathbb{Q}\right\}$

  $\mathbb{Q}\left[i\sqrt{d}\right]=\left\{a+bi\sqrt{d}\mid a,b\in\mathbb{Q}\right\}$

  $\mathbb{Q}[i]=\{a+bi\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$
- ដែល d ជាចំនួនគត់ថេរនិង $i^2=-1$ ។

៣.៣.កងរង និងលក្ខណៈ

និយមន័យ៖ គេឱ្យ $(R,+,\circ)$ និង B ជាផ្នែកមិនទទេនិងជាផ្នែកស្ថាបនៃ R ចំពោះប្រមាណវិធីទាំងពីរ។ បើ $(B,+,\circ)$ មានទម្រង់ជាកង នោះ $(B,+,\circ)$ ហៅថាកងរងនៃ $(R,+,\circ)$ ។

ឧទាហរណ៍៩៖ $(\mathbb{Z},+,\circ)$ ជាកងរងនៃ $(\mathbb{Q},+,\circ),(\mathbb{R},+,\circ)$ ។

$(\mathbb{Q},+,\circ)$ ជាកងរងនៃ $(\mathbb{R},+,\circ)$

ទ្រឹស្តីបទ៖ គេឱ្យ $(R,+,\cdot)$ ជាកង។ គេបាន $(B,+,\cdot)$ ជាកងរងនៃ $(R,+,\cdot)$

លុះត្រាតែ $\begin{cases} B\subset R, B\neq\varnothing \\ \forall x,y\in B: x-y\in B \\ \forall x,y\in B: x\cdot y\in B \end{cases}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

$\Rightarrow$?- ដោយ B ជាកងរងនៃ $(R,+,\cdot)$ នោះគេបាន $(B,+,\cdot)$ ជាកង

$\Rightarrow (B,+)$ ជាក្រុមអាបែល និងជាក្រុមរងនៃ $(R,+)$

$\begin{cases} B\subset R\wedge B\neq\varnothing \\ \forall x,y\in B: x-y\in B \end{cases}$

- ដោយ B ជាកងរងនៃ $(R,+,\cdot)\Rightarrow B$ ជាផ្នែកស្ថាបនៃ R ចំពោះប្រមាណវិធី $(\cdot)$

$\forall x,y\in B: x\cdot y\in B$

$\Leftarrow$?-ដោយ $\begin{cases} B\subset R\wedge B\neq\varnothing \\ \forall x,y\in B: x-y\in B \end{cases}$ គេបាន $(B,+)$ ជាក្រុមរងនៃ $(R,+)$

នោះ $(B,+)$ ជាក្រុមអាបែល (ព្រោះ $(R,+)$ ជាក្រុមអាបែល)

-ដោយ $\forall x,y\in B: x\cdot y\in B\Rightarrow B$ ជាផ្នែកស្ថាបនៃ R ចំពោះប្រមាណវិធី $(\cdot)$

$\Rightarrow$ ប្រមាណវិធី $(\cdot)$ លើ B មានលក្ខណៈផ្តុំ និងលក្ខណៈបំបែកចំពោះប្រមាណវិធី $(+)$

នោះគេបាន $(B,+,\cdot)$ ជាកងរង

តាមនិយមន័យ គេបាន B ជាកងរងនៃ $(R,+,\cdot)$ ។

ឧទាហរណ៍១០៖ $(n\mathbb{Z},+,\circ)$ ជាកងរងនៃ $(\mathbb{Z},+,\circ)$

ចំណាំ៖ $n\mathbb{Z}=\{nk, k\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}\}$

$n\mathbb{Z}\subset\mathbb{Z}$

$+0\in n\mathbb{Z}\Rightarrow n\mathbb{Z}\neq\varnothing$

$+\forall a,b\in n\mathbb{Z}:\exists k_1,k_2\in\mathbb{Z}: a=nk_1, b=nk_2$

$\Rightarrow a-b=n(k_1-k_2)\in\mathbb{Z}$

ហើយ $a\cdot b=nk_1\cdot nk_2=nk\in n\mathbb{Z}, k_1,k_2\in\mathbb{Z}$

$\therefore (n\mathbb{Z},+,\circ)$ ជាកងរងនៃ $(\mathbb{Z},+,\circ)$ ។

ឧទាហរណ៍១១៖ គេឱ្យ $H=\{\bar{0},\bar{3}\}$ ។ បង្ហាញថា $(H,+,\times)$ ជាកងរងនៃ $(\mathbb{Z}_6,+,\times)$ ។

ដំណោះស្រាយ

$+$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$

$\times$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$

$\forall a,b\in H \Rightarrow a+b\in H$

$\forall a,b\in H \Rightarrow a\times b\in H$

ដូចនេះ $(H,+,\times)$ ជាកងរងនៃ $(\mathbb{Z}_6,+,\times)$ ។

ឧទាហរណ៍១២៖ តាង U ជាសំណុំសកលមិនទទេ និង $\mathscr{P}(U)$ កំណត់គ្រប់សំណុំរងនៃ U ។ ចំពោះសំណុំរង A និង B នៃសំណុំសកល U គេតាង $A+B$ កំណត់ដោយ៖

$$A+B=(A\cup B)-(A\cap B)$$

តាមនិយមន័យប្រមាណវិធីបូកនៅលើសំណុំរងនៃ U ដែល $\mathscr{P}(U)$ មានលក្ខណៈស្តាបចំពោះប្រមាណវិធីបូក និងប្រមាណវិធីផ្តុំ។ លក្ខណៈត្រឡប់ចំពោះប្រមាណវិធីបូកដោយ $A\cup B=B\cup A$ និង $A\cap B=B\cap A$ ។ សំណុំទទេ $\varnothing$ ជាផលបូកមានភាពដូចគ្នា

$$\begin{aligned}\varnothing+A&=A+\varnothing\\&=(A\cup\varnothing)-(A\cap\varnothing)\\&=A-\varnothing\\&=A\end{aligned}$$

មានលក្ខណៈពិសេសមួយមិនធម្មតាគឺសំណុំរងនីមួយៗរបស់ A នៃ U ដែលផលបូកប្រាសខ្លួនឯង

$$\begin{aligned}A+A&=(A\cup A)-(A\cap A)\\&=A-A\\&=\varnothing\end{aligned}$$

យើងកំណត់ផលគុណនៅក្នុង $\mathscr{P}(U)$ ដោយ $A\cdot B=A\cap B$ និង $\mathscr{P}(U)$ គឺស្តាបធៀបទៅនឹងផលគុណ។ ដូចគ្នាដែរផលគុណគឺមានលក្ខណៈផ្តុំដោយ

$$\begin{aligned}A\cdot(B\cdot C)&=A\cap(B\cap C)\\&=(A\cap B)\cap C\\&=(A\cdot B)\cdot C\end{aligned}$$

តាមលក្ខណៈបំបែកឆ្វេង $A\cap(B+C)=(A\cap B)+(A\cap C)$ និងលក្ខណៈបំបែកស្តាំពីការប្រសព្វនៃសំណុំប្រមាណវិធីត្រឡប់។

ដូចនេះ $\mathscr{P}(U)$ ជាកងប្រជាប់ដោយប្រមាណវិធី $(+)$ និង $(\cdot)$ ។

ឧទាហរណ៍១៣៖ តាង R ជាកងនៃម៉ាទ្រីស 3×3 លើចំនួនពិត។ បង្ហាញថា

$$S=\left\{\begin{bmatrix}x&x&x\\x&x&x\\x&x&x\end{bmatrix} \mid x\text{ជាចំនួនពិត}\right\}$$ គឺជាកងរងនៃ R និងមានធាតុណឺតផ្សេងៗពីនៃ R ។

ដំណោះស្រាយ

វាគឺងាយស្រួលដើម្បីបង្ហាញថា S ជាកងរងនៃ R

គេបាន $\begin{bmatrix}x&x&x\\x&x&x\\x&x&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y&y&y\\y&y&y\\y&y&y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3xy&3xy&3xy\\3xy&3xy&3xy\\3xy&3xy&3xy\end{bmatrix}$ ដែលជារបស់ S

ដោយ $\begin{bmatrix}x&x&x\\x&x&x\\x&x&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x&x&x\\x&x&x\\x&x&x\end{bmatrix}$ យើងរក

S មានធាតុណឺត $\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$ ដែល $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ ជាទម្រង់ធាតុណឺតផ្សេងៗនៃ R ។

៣.៤.អូម៉ូម៉កភីស

និយមន័យ៖ តាង $(R,+,\cdot)$ និង $(S,\oplus,\otimes)$ ជាកងពីរ។ ពិនិត្យអនុវត្ត f ពី R ទៅ S ហៅថាអូម៉ូម៉កភីសកងកាលណា៖ $\forall a,b\in R,\begin{cases}f(a+b)=f(a)\oplus f(b)\\f(a\cdot b)=f(a)\otimes f(b)\end{cases}$ ។

បើ f ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ និងពេញចំពោះ S នោះ f អូម៉ូម៉កភីសកង។

- អូម៉ូម៉កភីសកងពី $(R,+,*)\to(R',+,*)$ ហៅថាអង់ដូម៉កភីសកង។
- អូម៉ូម៉កភីសកងពី $(R,+,*)\to(R',+,*)$ ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់នោះគេហៅថាម៉ូណូម៉កភីសកង។
- អូម៉ូម៉កភីសកងពី $(R,+,*)\to(R',+,*)$ ជាអនុវត្តន៍ពេញនោះគេហៅថាអ៊ីពីម៉កភីសកង។
- អូម៉ូម៉កភីសកងពី $(R,+,*)\to(R',+,*)$ ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយនោះគេហៅថាអ៊ីសូម៉កភីសកង។
- អង់ដូម៉កភីសកងពី $(R,+,*)\to(R',+,*)$ ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយនោះគេហៅថាអូតូម៉កភីសកងលើ R ។

ឧទាហរណ៍១៤៖ ពិនិត្យអនុវត្តន៍ $\theta:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_n$ កំណត់ដោយ $\theta(a)=[a]$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយ $\theta(a+b)=[a+b]=[a]+[b]=\theta(a)+\theta(b)$

និង $\theta(ab)=[ab]=[a][b]=\theta(a)\theta(b)$

ចំពោះគ្រប់ a,b នៅក្នុង $\mathbb{Z}$ ហើយ θ ជាអូម៉ូម៉កភីសពី $\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_n$ ។

នោះ θ ជាអ៊ីពីម៉កភីស និង $\mathbb{Z}_n$ ជារូបភាពអូម៉ូម៉កភីសនៃ $\mathbb{Z}$ ។

ឧទាហរណ៍១៥៖ ពិនិត្យអនុវត្តន៍ $\theta:\mathbb{Z}_6\to\mathbb{Z}_6$ កំណត់ដោយ $\theta([a])=4[a]$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេបាន
$$\theta([a]+[b])=4([a]+[b])$$
$$=4[a]+4[b]$$
$$=\theta([a])+\theta([b])$$

ដែល θ ជាការបូកបន្ថែម។ ចំពោះផលគុណគេមាន៖
$$\theta([a][b])=\theta([ab])=4[ab]=[4ab]$$

និង $$\theta([a])\theta([b])=(4[a])(4[b])=16[ab]=[16ab]=[4ab]$$

ដោយ $[16]=[4]$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}_6$ ។ នោះ θ ជាអូម៉ូម៉កភីស។

ផ្ទៀងផ្ទាត់បានថា $\theta(\mathbb{Z}_6)=\{[0],[2],[4]\}$ ហើយយើងឃើញថា θ គឺជាអនុវត្តន៍ពេញផង ឬអនុវត្តន៍មួយទល់មួយផង។

៣.៥.អ៊ីដេអាល់ (Ideal)

និយមន័យ៖ គេឱ្យ $(R,+,\cdot)$ ជាកង និង I ជាផ្នែកមិនទទេនៃកង R ។

1. I ហៅថាអ៊ីដេអាល់នៃ R ឆ្វេងកាលណា៖ $\begin{cases}\forall a,b\in I: a-b\in I\\ \forall x\in R,\forall a\in I: x\cdot a\in I\end{cases}$ ។
2. I ហៅថាអ៊ីដេអាល់នៃ R ស្តាំកាលណា៖ $\begin{cases}\forall a,b\in I: a-b\in I\\ \forall x\in R,\forall a\in I: a\cdot x\in I\end{cases}$ ។
3. I ហៅថាអ៊ីដេអាល់នៃ R កាលណា I អ៊ីដេអាល់ស្តាំ និង I ជាអ៊ីដេអាល់ឆ្វេងនៃ R ។

ឧទាហរណ៍១៦៖ $\forall n\in\mathbb{N}$ គេបាន $n\mathbb{Z}$ ជាអ៊ីដេអាល់នៃ $(\mathbb{Z},+,.)$ ។

ព្រោះ៖ $n\mathbb{Z}\subset\mathbb{Z}, n\mathbb{Z}\neq\varnothing$

$+\forall x,y\in n\mathbb{Z}\Rightarrow x-y\in n\mathbb{Z}$

$+\forall x\in n\mathbb{Z}\Rightarrow \exists k\in\mathbb{Z}: x=nk,\forall a\in\mathbb{Z}$

គេមាន $x\cdot a=a\cdot x=nka=nk'\ ,k'nk\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow x\cdot a\in n\mathbb{Z}$

ឧទាហរណ៍១៧៖ $\mathbb{Z}$ ជាកងរងនៃ $(\mathbb{R},+,\bullet)$ តែ $\mathbb{Z}$ មិនមែនជាអ៊ីដេអាល់នៃ $\mathbb{R}$ ទេ

ព្រោះ $\forall x\in\mathbb{Z},\forall a\in\mathbb{Z}$ គេមិនសុទ្ធតែបាន $x\cdot a\in\mathbb{Z}$ ទេ

បើ $x=3\in\mathbb{Z}\ \&\ a=\sqrt{2}\in\mathbb{R}$

គេមាន $x\cdot a=3\sqrt{2}\notin\mathbb{Z}$ ទេ។

ឧទាហរណ៍១៨៖ តាង R ជាកងនៃម៉ាទ្រីសលំដាប់ 2×2 លើចំនួនគត់។

តាង $A=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a,b\in\mathbb{N}\right\}$

នោះ A ជាអ៊ីដេអាល់ខាងស្តាំនៃ R នោះគេបាន៖

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a-c & b-d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\in A$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax+bz & ay+ba \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\in A$$

ប៉ុន្តែ A គ្មានអ៊ីដេអាល់ខាងឆ្វេងនៃ R ទេ

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\in I,\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\in R$$

តែ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\notin I$

សម្គាល់៖ ១. អ៊ីដេអាល់នៃ R កងជាកងរង R ។

២.បើ R ជាកងមានលក្ខណៈត្រឡប់នោះបើ I ជាអ៊ីដេអាល់ឆ្វេង ឬជាអ៊ីដេអាល់ស្តាំនៃ R វាជាអ៊ីដេអាល់នៃ R ។

ឧទាហរណ៍១៩៖ ចូរពិនិត្យកង $M_2(\mathbb{Z})$ ។

តាង $I_1=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \mid a,b\in\mathbb{Z}\right\}$

$I_2=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a,b\in\mathbb{Z}\right\}$

$I_3=\left\{\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \mid a,b,c \text{ និង } d \text{ ជាចំនួនគត់គូ}\right\}$ និង $I_4=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a\in\mathbb{Z}\right\}$ ។

- ដោយ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\in I_1, I_1\neq\varnothing$

តាង $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix}\in I_1$ និង $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\in M_2(\mathbb{Z})$

នោះគេបាន $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a-c & 0 \\ b-d & 0 \end{bmatrix}\in I_1$

និង $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} xa+yb & 0 \\ za+wb & 0 \end{bmatrix}\in I_1$

គេបាន I_1 ជាអ៊ីដេអាល់ឆ្វេងនៃ $M_2(\mathbb{Z})$ ។

ហើយ $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax & ay \\ bx & by \end{bmatrix}\notin I_1$ ឬ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\in I_1$ និង $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\in M_2(\mathbb{Z})$

តែ $\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}\notin I_1$

ដូចនេះ I_1 មិនមែនជាអ៊ីដេអាល់ស្តាំនៃ $M_2(\mathbb{Z})$ ទេ។

- ចំពោះ $\begin{bmatrix}a&b\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}c&d\\0&0\end{bmatrix}\in I_2,\begin{bmatrix}x&y\\z&w\end{bmatrix}\in M_2(\mathbb{Z})$

នោះ $\begin{bmatrix}a&b\\0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}c&d\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a-c&b-d\\0&0\end{bmatrix}\in I_2$

និង $\begin{bmatrix}x&y\\z&w\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ax&bx\\za&bz\end{bmatrix}\notin I_2$

ដូចនេះ I_2 មិនមែនជាអ៊ីដេអាល់ឆ្វេងនៃ $M_2(\mathbb{Z})$ ទេ។

គេមាន $\begin{bmatrix}a&b\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&y\\z&w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ax+bz&ay+bw\\0&0\end{bmatrix}\in I_2$

ដូចនេះ I_2 ជាអ៊ីដេអាល់ស្តាំនៃ $M_2(\mathbb{Z})$ ។

- យើងមាន $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\in I_3\Rightarrow I_3\neq\varnothing$

ដោយ $\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a_1&c_1\\b_1&d_1\end{bmatrix}\in I_3,\begin{bmatrix}x&y\\z&w\end{bmatrix}\in M_2(\mathbb{Z})$

នោះ $\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}a_1&c_1\\b_1&d_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a-a_1&c-c_1\\b-b_1&d-d_1\end{bmatrix}\in I_3$

$\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&y\\z&w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ax+cz&ay+cw\\bx+dz&by+dw\end{bmatrix}\in I_3$

ដូចនេះ I_3 ជាអ៊ីដេអាល់ស្តាំនៃ $M_2(\mathbb{Z})$ ។

ហើយ $\begin{bmatrix}x&y\\z&w\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ax+by&xc+yd\\za+wb&zc+wd\end{bmatrix}\in I_3$

នោះ I_3 ជាអ៊ីដេអាល់ឆ្វេងនៃ $M_2(\mathbb{Z})$ ។

ដូច្នេះ I_3 ជាអ៊ីដេអាល់។

៣.៦.កងផលចែក

ទ្រឹស្តីបទ៖ គេឱ្យ $(R,+,\bullet)$ ជាកងនិង I ជាអ៊ីដេអាល់នៃកង R ។ លើ R គេកំណត់ទំនាក់ទំនងទ្វេជាតុ $\mathscr{R}$ មួយដោយ $\forall x,y\in R: x\mathscr{R}y\Leftrightarrow x-y\in I$ ។គេបាន $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ R ហើយចំពោះគ្រប់ $\forall x\in R$ គបាន $\bar{x}=x+I=I+x=\{x+a:a\in I\}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ដោយ I ជាអ៊ីដេអាល់នៃកង R គេបាន I ជាកងរងនៃកង R

$\Rightarrow(I,+)$ ជាក្រុមរងណរម៉ាល់នៃក្រុមអាបែល $(R,+)$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទខាងលើគេបាន $\mathscr{R}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ R និង

$\forall x \in R : \overline{x} = x + I = I + x$

ឧទាហរណ៍២០៖ តាង $H_4 = \{4n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ដែល $<\mathbb{Z},+,\cdot>$ ជាកងនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប។ នោះ H_4 ជាអ៊ីដេអាល់នៃ $\mathbb{Z}$ និងដូចនេះ $\frac{\mathbb{Z}}{H_4}$ គឺជាកងផលចែក

កំណត់ដោយ $\frac{\mathbb{Z}}{H_4} = \{H_4, H_4+1, H_4+2, H_4+3\}$

ឧទាហរណ៍នេះផងដែរនិងបង្ហាញឱ្យយើងថាកងផលចែកនៃកងអាំងតែកគឺមិនមែនជាកងអាំងតែក។

ចំណាំ៖ $(H_4+2)(H_4+2) = H_4+4 = H_4 =$ សូន្យនៃ $\frac{\mathbb{Z}}{H_4}$ ប៉ុន្តែ $H_4+2 \neq H_4$

បើយើងពិនិត្យលើ

$R = \{0,2,4,6,8\} \bmod 12$

$S = \{0,6\} \bmod 12$

នោះ R មិនមែនជាកងអាំងតែក ហើយ R/S ជាកងអាំងតែក

យើងមាន $R/S = \{S, S+2, S+4\}$

ដោយ $(S+2)(S+2) = S+2, (S+2)(S+2) = S+8 = S+2$

និង $(S+4)(S+4) = (S+16) = S+4$ យើងរក $\frac{R}{S}$ គ្មានតួចែកនៃសូន្យទេ។

៣.៧.កងផលចែក $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$

ទ្រឹស្តីបទ៖ គេឱ្យ $(R,+,\bullet)$ ជាកងនិង I ជាអ៊ីដេអាល់នៃកង R។ គេតាង $R/_I = \{x+I : x \in R\}$ ជាសំណុំផលចែកនៃ R ដោយ I។លើ $R/_I$ គេកំណត់ពីរប្រមាណវិធីក្នុងដូចខាងក្រោម៖

$$\forall x+I, y+I \in R/_I : \begin{cases} (x+I)+(y+I) = (x+y)+I \\ (x+I)\cdot(y+I) = (x\cdot y)+I \end{cases}$$

គេបាន $\left(R/_I, +, \bullet\right)$ មានទម្រង់ជាកងហៅថាកងផលចែកនៃ R។

សម្រាយបញ្ជាក់

- ប្រមាណវិធី $+$ មានលក្ខណៈត្រឡប់៖ $\forall x+I, y+I \in R/_I$

  គេបាន $(x+I)+(y+I) = (x+y)+I = (y+x)+I = (y+I)+(x+I)$
- ប្រមាណវិធី $+$ មានលក្ខណៈផ្តុំ $\forall x+I, y+I, z+I \in R/_I$

  គេបាន $(x+I)+\left[(y+I)+(z+I)\right] = (x+I)\left[(y+z)+I\right]$

  $$= \left[x+(y+z)\right]+I$$
  $$= \left[(x+y)+z\right]+I$$

$=\left[(x+y)+I\right]+(z+I)$

$=\left[(x+I)+(y+I)\right]+(z+I)$

- ធាតុណឺត៖ គេមាន $0+I=I$ ជាធាតុណឺតនៃ $\left(R/_{I},+\right)$

ព្រោះ $\forall x+I\in R/_{I}\Rightarrow(x+I)+(0+I)=(0+I)+(x+I)=(x+0)+I=x+I$

- ធាតុប្រាស៖ $\forall x+I\in R/_{I}$ មានចម្រាស $-x+I\in R/_{I}$ ចំពោះប្រមាណវិធីបូក

  ព្រោះ $(x+I)+(-x+I)=(-x+I)+(x+I)=(x-x)+I=0+I$

  គេបាន $\left(R/_{I},+\right)$ មានទម្រង់ជាក្រុមអាបែល។

- ប្រមាណវិធីគុណ $(\cdot)$ មានលក្ខណៈផ្តុំ៖ $\forall x+I,y+I,z+I\in R/_{I}$

  គេបាន $(x+I)\cdot\left[(y+I)\cdot(z+I)\right]=(x+I)\cdot\left[(y\cdot z)+I\right]$

  $=\left[x\cdot(y\cdot z)\right]+I$

  $=\left[(x\cdot y)\cdot z\right]+I$

  $=\left[(x\cdot y)+I\right]\cdot(z+I)$

  $=\left[(x+I)\cdot(y+I)\right]\cdot(z+I)$

- ប្រមាណវិធីគុណ $(\cdot)$ មានលក្ខណៈបំបែកចំពោះប្រមាណវិធីបូក $(+)$៖

  $\forall x+I,y+I,z+I\in R/_{I}$

គេបាន $(x+I)\cdot\left[(y+I)+(z+I)\right]=(x+I)\cdot\left[(y+z)+I\right]$

$=\left[x\cdot(y+z)\right]+I$

$=(x\cdot y+x\cdot z)+I$

$=\left[(x\cdot y)+I\right]+\left[(x\cdot z)+I\right]$

$=\left[(x+I)\cdot(y+I)\right]+\left[(x+I)\cdot(z+I)\right]$

សម្រាយដូចគ្នាចំពោះលក្ខណៈបំបែកខាងស្តាំ

ដូចនេះ គេបាន $\left(R/_{I},+,\bullet\right)$ មានទម្រង់ជាកង។

ឧទាហរណ៍២១៖ $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីក្នុង $\forall\bar{x},\bar{y}\in\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}:\begin{cases}\bar{x}+\bar{y}=\overline{x+y}\\ \bar{x}\cdot\bar{y}=\overline{x\cdot y}\end{cases}$ ជាកងផលចែក។

ឧទាហរណ៍២២៖ នៅក្នុងកង $\mathbb{Z}$ នៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបចូរពិចារណាអ៊ីដេអាល់ក្នុងកង $(4)=\{4k\mid k\in\mathbb{Z}\}$ ជាតុផ្សេងនៃកង $\mathbb{Z}/_{(4)}$ គឺ

$$(4)=\{\ldots,-8,-4,0,4,8,\ldots\}$$
$$1+(4)=\{\ldots,-8,-3,1,5,9,\ldots\}$$
$$2+(4)=\{\ldots,-6,-2,2,6,10,\ldots\}$$
$$3+(4)=\{\ldots,-5,-1,3,7,11,\ldots\}$$

យើងឃើញថាសំណុំរួមគឺដូចគ្នានៃជាតុ$\mathbb{Z}_4$៖

$(4)=[0],\quad 1+(4)=[1],\quad 2+(4)=[2],\quad 3+(4)=[3]$

ម្យ៉ាងវិញទៀតចំពោះផលបូក

$$\{a+(4)\}+\{b+(4)\}=\{a+b\}+(4)$$

គេបានពិតផងដែលចំពោះ$[a]+[b]=[a+b]$

នៅក្នុង$\mathbb{Z}_4$ និងប្រមាណវិធីគុណ

$$\{a+(4)\}\cdot\{b+(4)\}=ab+(4)$$

គេបានពិតផងដែលចំពោះ$[a][b]=[ab]$នៅក្នុង$\mathbb{Z}_4$។

នោះ$\mathbb{Z}/(4)$ជាទំនាក់ទំនងដើម$\mathbb{Z}_4$។ $\mathbb{Z}_4$ជាកងផលចែកនៃចំនួនគត់$\mathbb{Z}$ដោយអ៊ីដេអាល់(4)

ចំពោះចំនួនគត់$n>1$ និងសំណុំ$\mathbb{Z}_n$ជាកងផលចែកនៃ$\mathbb{Z}$ដោយអ៊ីដេអាល់(n)។

យើងឃើញថា

$$(a+I)(b+I)=ab+I$$
$$\neq\{xy \mid x\in a+I \text{ និង } y\in b+I\}$$

ពិនិត្យ$I=(4)$យើងមាន

$$(0+I)(0+I)=0+I=I$$

ម្យ៉ាងទៀត$\{xy \mid x\in 0+I \text{ និង } y\in 0+I\}=\{16r \mid r\in\mathbb{Z}\}$

ដោយ $x=4p$ និង $y=4q,\ p,q\in\mathbb{Z}$ នោះគេបាន $xy=16pq$ ។

៣.៨.ទ្រឹស្តីបទកងអ៊ីសូម៉កភីស

និយមន័យ៖ តាង R និង R'ជាកងពីរ។ អនុវត្តន៍$\phi:R\to R'$ជាកងអ៊ីសូម៉កភីសពី R ទៅ R' ត្រូវបំពេញលក្ខខណ្ឌដូចខាងក្រោម៖

ក. ϕ ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយពី R ទៅ R'

ខ. $\phi(x+y)=\phi(x)+\phi(y),\forall x,y\in R$

គ. $\phi(x\cdot y)=\phi(x)\cdot\phi(y),\forall x,y\in R$

បើអ៊ីសូម៉កភីសពី R ទៅ R'មាន នោះ Rជាអ៊ីសូម៉កភីសទៅ R'

ឧទាហរណ៍២៣៖ អនុគមន៍ $g:\mathbb{Z}_6\to\mathbb{Z}_6$កំណត់ដោយ $g(x)=3x$ ជាកងអូម៉ូម៉កភីស។

តាង $x,y\in\mathbb{Z}_6$

នោះគេបាន $g(x+y)=3(x+y)=3x+3y=g(x)+g(y)$

$$g(x\cdot y)=3xy=9xy=3x\cdot 3y=g(x)\cdot g(y)\ (3=9(\mathrm{mod}\,6))$$

ដូចនេះ g ជាអូម៉ូម៉កភីស។

ឧទាហរណ៍២៤៖ ពិនិត្យលើអនុវត្តន៍ $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ដែល $f(a+ib)=a-ib$ នោះ f ជាអូម៉ូម៉កភីសដែល $\mathbb{C}$ ជាចំនួនកុំផ្លិច។

គេបាន $f\left[(a+ib)+(c+id)\right]=f\left((a+c)+i(b+d)\right)$

$$=(a+c)-i(b+d)$$

$$=(a-ib)+(c-id)$$

$$=f(a+ib)+f(c+id)$$

និង $f\left[(a+ib)(c+id)\right]=f\left((ac-bd)+i(ad+bc)\right)$

$$=(ac-bd)-i(ad+bc)$$

$$=(a-ib)-id(a-ib)$$

$$=(a-ib)(c-id)$$

$$=f(a+ib)\cdot f(c+id)$$

ឧទាហរណ៍២៥៖ តាង R ជាកងចម្លាស់មួយ និងឧបមាថា $px=0,\forall x\in R$ ដែល p ជាចំនួនបឋម។ នោះអនុវត្តន៍ $f:R\to R$ កំណត់ដោយ $f(x)=x^p, x\in R$ គឺជាអូម៉ូម៉កភីស។

យើងអាចបង្ហាញថា $p\,|\,C(p,r), 1\le r\le p-1$

$$n=C(p,r)=\frac{p!}{(p-r)!r!}$$

$$=\frac{p(p-1)\ldots(p-r+1)(p-r)!}{(p-r)!1\cdot 2\cdots r}$$

$$\Rightarrow nr!=p(p-1)\ldots(p-r+1)$$

ដោយ p ចែកនោះវានឹងចែក $nr!$

$\Rightarrow p\,|\,n$ ឬ $p\,|\,r!$ (ដែលចំនួនបឋមមួយចែកផលគុណ ab យ៉ាងហោចណាស់ត្រូវតែចែក a ឬ b)

ប៉ុន្តែ $p\nmid r!$ ចំពោះ $1,2,\ldots,r-1$ គឺគ្រប់ p តូចជាង ដូច្នេះ p មិនអាចចែកបានក្នុងចំណោមចំនួនទាំងនោះ។ ដូចនេះ $p\nmid r!$ មានន័យថា $p\,|\,n$ ចំពោះ $x,y\in R$ គេបាន៖

$$f(x+y)=(x+y)^p=x^p+C(p,1)x^{p-1}y+C(p,2)x^{p-2}y^2+\ldots+y^p$$

$\Rightarrow C(p,r)x^{p-1}y=px^{p-1}y=0$ ចំពោះ $x^{p-1}y\in R$ (R លក្ខណៈត្រឡប់)

$C(p,r)x^{p-2}y^2=(kp)x^{p-2}y^2=0$ ចំពោះ $p\,|\,C(p,r)\Rightarrow C(p,r)=kp$ ចំពោះ k មួយចំនួនដូចគ្នាដែរ $C(p,r)$ ជាពហុគុណនៃ p គេបាន

$$f(x+y)=x^p+y^p=f(x)+f(y)$$

$f(x\cdot y)=(x\cdot y)^p=x^p\cdot y^p$ (R ត្រឡប់)

$$=f(x)\cdot f(y)$$

ដូចនេះ f ជាអូម៉ូម៉កភីស។

ទ្រឹស្តីបទគ្រឹះនៃកងអូម៉ូម៉កភីស៖ បើ $f:R\to R'$ ជាអនុវត្តន៍ពេញអូម៉ូម៉កភីស នោះ R'ជាអ៊ីសូម៉កភីសទៅកងផលចែកនៃ R ចំពោះ $R'\cong\dfrac{R}{\ker f}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង $f:R\to R'$ជាអនុវត្តន៍ពេញអូម៉ូម៉កភីស

កំណត់ $\varphi:\dfrac{R}{\ker f}\to R'$ដែល $\varphi(x+I)=f(x),\forall x\in R$ ហើយ $I=\ker f$

នោះ φ ត្រូវបានកំណត់ដូចជា៖

$$\begin{aligned}&x+I=y+I\\ &\Rightarrow x-y\in I=\ker f\\ &\Rightarrow f(x-y)=0\\ &\Rightarrow f(x)-f(y)=0\\ &\Rightarrow \varphi(x+I)=\varphi(y+I)\end{aligned}$$

យើងពិនិត្យតាមជំហានឡើងវិញដើម្បីបង្ហាញថា φ ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយដូចជា៖

$$\varphi\big[(x+I)+(y+I)\big]=\varphi\big((x+y)+I\big)=f(x+y)=f(x)+f(y)$$
$$=\varphi(x+I)+\varphi(y+I)$$
$$\varphi\big[(x+I)(y+I)\big]=\varphi(x\cdot y+I)=f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$$
$$=\varphi(x+I)\cdot\varphi(y+I)$$

φ ជាអូម៉ូម៉កភីស

បើ $r'\in R'$ មានធាតុផ្សេងៗនោះ $f:R\to R'$ ជាអនុវត្តន៍ពេញ $\exists r\in R$

ដែល $f(r)=r',\varphi(r+I)=f(r)=r'$

យើងរក $r+I$ ដែលជារូបភាពនៃ r'ក្នុង φ ការបង្ហាញថា φ ជាអនុវត្តន៍ពេញ និងអ៊ីសូម៉កភីស។

ដូចនេះ $\dfrac{R}{\ker f}\cong R'\Rightarrow R'\cong\dfrac{R}{\ker f}$ ។

ទ្រឹស្តីបទ៖(ទ្រឹស្តីបទទី១នៃអ៊ីសូម៉កភីស)

តាង $B\subseteq A$ ជាអ៊ីដេអាល់ពីរនៃកង R នោះគេបាន $\dfrac{R}{A}\cong\dfrac{R/B}{A/B}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងកំណត់អនុវត្តន៍ $f:\dfrac{R}{B}\to\dfrac{R}{A}$ ដែល $f(r+B)=r+A$

នោះ f ជាអនុវត្តន៍ពេញអូម៉ូម៉កភីស

តាមទ្រឹស្តីបទគ្រឹះ $\dfrac{R}{A}\cong\dfrac{R/B}{\ker f}$

ដោយ $r+B\in\ker f\Leftrightarrow f(r+B)=A$

$$\Leftrightarrow r+A=A$$
$$\Leftrightarrow r\in A$$
$$\Leftrightarrow r+B\in\frac{A}{B}$$

យើងបាន $\ker f=A/B$

ដូចនេះ គេបាន $\frac{R}{A}\cong\frac{R/B}{A/B}$ ។

ទ្រឹស្តីបទ៖ (ទ្រឹស្តីបទគ្រឹះទី២នៃអ៊ីសូម៉កភីស)

តាង A,B ជាអ៊ីដេអាល់ពីរនៃកង R នោះគេបាន $\frac{A+B}{A}\cong\frac{B}{A\cap B}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងកំណត់អនុវត្តន៍ $f:B\to\frac{A+B}{A}$ ដែល $f(b)=b+A,\forall b\in B$

នោះ f ត្រូវបានកំណត់ជាអូម៉ូម៉កភីស

បើ $x+A\in\frac{A+B}{A}$ ជាធាតុផ្សេងៗនោះ

$$x\in A+B\Rightarrow x=a+b,a\in A,b\in B$$

នោះគេបាន $x+A=(a+b)+A=(b+a)+A=b+(a+A)=b+A$

ដូចនេះ $x+A=b+A=f(b)$ ។

មានន័យថា b ជារូបភាពនៃ $x+A$ ក្នុង f ឬ f ជាអនុវត្តន៍ពេញ

តាមទ្រឹស្តីបទគ្រឹះនោះ $\frac{A+B}{A}\cong\frac{B}{\ker f}$

នោះ $x\in\ker f\Leftrightarrow f(x)=A$

$$\Leftrightarrow x+A=A\Leftrightarrow x\in A$$
$$\Leftrightarrow x\in A\cap B$$

គេបាន $\ker f=A\cap B$

ដូចនេះគេបាន $\frac{A+B}{A}\cong\frac{B}{A\cap B}$ ។

ចំណាំ៖ $\frac{A+B}{B}\cong\frac{A}{A\cap B}$

ឧទាហរណ៍២៦៖ បង្ហាញថា $\frac{\mathbb{Z}}{<2>}\cong\frac{5\mathbb{Z}}{10\mathbb{Z}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យក $A=<2>,B=<5>=5\mathbb{Z}$ អ៊ីដេអាល់នៃ $\mathbb{Z}$

នោះ $A+B=<d>$ ដែល $d=\gcd(2,5)=1$

$A\cap B=<l>$ ដែល $l=LCM(2,5)=10$

ដូច្នេះ $A+B=<1>=\mathbb{Z}$

$A\cap B=<10>=10\mathbb{Z}$

ដោយប្រើលទ្ធផលខាងលើគឺ $\frac{A+B}{A}\cong\frac{B}{A\cap B}$ នោះគេបាន $\frac{\mathbb{Z}}{<2>}\cong\frac{5\mathbb{Z}}{10\mathbb{Z}}$ ។

ឧទាហរណ៍២៧៖ បង្ហាញថា $\mathbb{Z}_n\cong\frac{\mathbb{Z}}{(n)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\mathbb{Z}_n=\{0,1,2,\dots,n-1\}$

$$\frac{\mathbb{Z}}{(n)}=\left\{(n),1+(n),2+(n),\dots,(\overline{n-1})+(n)\right\}$$

គេកំណត់ $\theta:\frac{\mathbb{Z}}{(n)}\to\mathbb{Z}_n$ ដែល $\theta(r+(n))=r,\ 0\le r\le n-1$

តាង $r+(n)=s+(n)$ និងឧបមា $r\neq s$

នោះ $r-s\in(n)\Rightarrow n\,|\,(r-s)\Rightarrow n\le r-s$ ដែល $r,s\le n$ យើងបានវាផ្ទុយពីការពិត

គេបាន $r=s$ និងគេបាន θ គឺត្រូវបានកំណត់។

យើងឃើញថាវាជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ។ ដូចជា៖

$$\theta\big((r+(n))+(s+(n))\big)=\theta\big(\overline{r+s}+(n)\big)=\theta\big((nq+t)+(n)\big) \text{ ចំពោះ } q,t,0\le t<n$$

$$=\theta\big(t+(n)\big)=t=r\oplus s=\theta\big(r+(n)\big)\oplus\theta\big(s+(n)\big)$$

$$\theta\big((r+(n))(s+(n))\big)=\theta\big(rs+(n)\big)=\theta\big((nq'+k+(n))\big) \text{ ចំពោះ } q',k,0\le k<n$$

$$=\theta\big(k+(n)\big)=k=r\otimes s=\theta\big(r+(n)\big)\otimes\theta\big(s+(n)\big)$$

យើងបាន θ ជាអូម៉ូម៉កភីស និងជាអ៊ីសូម៉កភីស។

លំហាត់ទម្រង់កង

១.លើសំណុំ$\mathbb{R}$ គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុង$*$ដោយ៖ $\forall a,b\in\mathbb{N}: a*b=a+b-ab\sqrt{3}$ ។

ក. សិក្សាលក្ខណៈនៃ$*$។

ខ. តើសំណុំរងពិតណានៃ$\mathbb{R}$ដែលប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធី$(*)$ មានទម្រង់ជាក្រុមអាបែល?

២. $(G,*)$ជាក្រុមមួយមានeជាធាតុណឺតធាតុប្រាសនៃ a គឺ $a^{-1}, H\in G$ ។

បង្ហាញថា H ជាក្រុមរងនៃ $G \Leftrightarrow \begin{cases} H\neq\varnothing \\ \forall a,b\in H, a*b^{-1}\in H \end{cases}$ ។

៣. បង្ហាញថាកង R មានលក្ខណៈត្រឡប់លុះត្រាតែ$(a+b)^2=a^2+b^2=2ab, \forall a,b\in R$ ។

៤. បើកង Rដែល $x^2=x$ ចំពោះគ្រប់ x បង្ហាញថា $2x=0$ និង $x+y=0\Rightarrow x=y$ ។

៥. បើ R ជាកងឯកតា និង$(ab)^2=(ba)^2, \forall a,b\in R$ និង $2x=0\Rightarrow x=0$បង្ហាញថា R មានលក្ខណៈត្រឡប់។

៦. តាង$\mathbb{R}$ជាសំណុំនៃចំនួនពិត។ បង្ហាញថា$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$មានទម្រង់ជាកាយនៅក្នុងផលបូក និងផលគុណដែលកំណត់ដោយ៖

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$
$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

៧. តាង R ជាកងត្រឡប់ឯកតា។ បង្ហាញថា៖

ក. a គឺឯកតា លុះត្រាតែ a^{-1}ឯកតា

ខ. a,bគឺឯកតា លុះត្រាតែ ab ឯកតា

៨. ចូររកឧទាហរណ៍នៃកងមិនត្រឡប់ Rដែល$(xy)^2=x^2y^2, \forall x,y\in\mathbb{R}$ ។

៩. ក្នុងកង Aដែលគ្មានលក្ខណៈត្រឡប់គេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុង$*$ដោយ៖ $x*y=xy-yx$

ក. បង្ហាញថា $x*y=-y*x$

ខ. បង្ហាញថា$*$មានលក្ខណៈបំបែកចំពោះប្រមាណវិធីបូក

គ. បង្ហាញថា $x*(y*z)=(x*y)*z-(x*z)*y$

អនុវត្តន៍រក $S=x*(y*z)+y*(z*x)+z*(x*y)$

១០. គេមានសំណុំផលគុណ$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$នៃធាតុ$\alpha=(a,b)$គេសន្មត់៖

$$(a,b)\Leftrightarrow(a',b')\Rightarrow\begin{cases} a=a' \\ b=b' \end{cases}$$
$$(a,b)+(a',b')=(a+a,b+b')$$
$$(a,b)(a',b')=(aa',0)$$

បង្ហាញថាសំណុំ$\mathbb{Z}^2$ ជាកងមានលក្ខណៈត្រឡប់ចំពោះប្រមាណវិធីបូក និងគុណ។

១១. គេឱ្យ$(A,+)$ជាក្រុមអាបែល។ លើ Aគេកំណត់ប្រមាណវិធីគុណក្នុងមួយទៀតដែល $\forall a,b\in A: a\cdot b=0$។ បង្ហាញថា$(A,+,\cdot)$ ជាកង។

១២. គេឱ្យ $(A,+,\cdot)$ ជាកង។ លើ $\mathbb{Z}\times A$ គេកំណត់ពីរប្រមាណវិធីក្នុង $(+)$ និង $(\cdot)$ ដូចខាងក្រោម៖

$$\forall(m,a),(n,b)\in\mathbb{Z}\times A:(m,a)+(n,b)=(m+n,a+b)$$

$$(m,a)\cdot(n,b)=(mn,na+mb+ab)$$

ក. បង្ហាញថា $(\mathbb{Z}\times A,+,\cdot)$ មានទម្រង់ជាកងឯកតា។ រកលក្ខខណ្ឌដើម្បីឱ្យ $(\mathbb{Z}\times A,+,\cdot)$ ជាកងមានលក្ខណៈត្រឡប់។

ខ. តាង $A'=\{(0,a):a\in A\}$ ។ បង្ហាញថា A' ជាកងរងនៃ $(\mathbb{Z}\times A,+,\cdot)$ ហើយអ៊ីសូម៉កភីស និង A ។

១៣. គេឱ្យ $(A,+,\cdot)$ ជាកងឯកតាដែល $\forall x\in A:x^2=x$ (កងប៊ូល)។

ក. បង្ហាញថា $\forall x\in A$ គេបាន $x+x=0$ ។

ខ. ទាញបង្ហាញថា $(A,+,\cdot)$ ជាកងមានលក្ខណៈត្រឡប់។

គ. បង្ហាញថា $\forall(x,y,z)\in A^3$ គេបាន $(x+y)\cdot z=0\Leftrightarrow\begin{cases}x(y+1)z=0\\(x+1)yz=0\end{cases}$ ។

១៤. គេឱ្យ $(A,+,\cdot)$ ជាកង និង $C=\{x\in A:\forall a\in A,ax=xa\}$ ផ្ចិតនៃកង A ។

ឧបមាថា $\forall x\in A:x^2-x\in C$ ។

ក. បង្ហាញថា $\forall(x,y)\in A^2\Rightarrow xy+yx\in C$ ។

ខ. ទាញបង្ហាញថា $\forall(x,y)\in A^2\Rightarrow xy=yx$ ។

១៥. តាង $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ ជាសំណុំ $\left\{a+b\sqrt{2}:a,b\in\mathbb{Z}\right\}$ ។ $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ ត្រូវបានហៅថា " $\mathbb{Z}$ ជាប់ $\sqrt{2}$ "

កំណត់ប្រមាណវិធីបូក និងគុណនៅលើ $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ នៅក្នុងវិធីធម្មតា។ នោះគឺ៖

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)+\left(c+d\sqrt{2}\right)=(a+c)+(b+d)\sqrt{2} \text{ និង}$$

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)\cdot\left(c+d\sqrt{2}\right)=ac+bd\sqrt{2}+bc\sqrt{2}+bd\left(\sqrt{2}\right)^2$$

$$=ac+2bd+(ad+bc)\sqrt{2}$$

បង្ហាញថា $\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right],+,\cdot\right)$ ជាកង។

១៦. បើ a,b,c,d ជាធាតុនៃកង R បង្ហាញថា៖

ក. $a-b=c-d\Leftrightarrow a+d=b+c$

ខ. $(a-b)(c-d)=(ac+bd)-(ad+bc)$

១៧. សន្មត់ថា R ជាកង និងតាង S ជាសំណុំនៃគ្រប់គូលំដាប់ (m,x) ដែល $m\in S,x\in R$ ។ នៅក្នុងសមភាព S កំណត់ដោយ៖

$$(m,x)=(n,y)\Leftrightarrow m=n \text{ និង } x=y$$

ប្រមាណវិធីបូក និងគុណនៅក្នុង S កំណត់ដោយ៖

$$(m,x)+(n,y)=(m+n,x+y)$$

និង $(m,x)\cdot(n,y)=(mn,my+nx+xy)$ ដែល my និង nx ជាពហុគុណនៃ y និង x

នៅក្នុងកង R ។

ក. បង្ហាញថា S ជាកងឯកតា។

ខ. បង្ហាញថាអនុវត្តន៍ $\phi: R \to S$ កំណត់ដោយ $\phi(x) = (0, x)$ ជាអ៊ីសូម៉កភីសពី R ទៅកងរង R' នៃ S ។

១៨. ក. បង្ហាញថាសំណុំ $R = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix} | \, x, y \in \mathbb{Z} \right\}$ ជាកងធៀបទៅនឹងម៉ាទ្រីសផលបូក និងផលគុណ។

ខ. តើ R មានលក្ខណៈត្រឡប់ដែរឬទេ ?

គ. តើ R មានធាតុឯកតាដែរឬទេ ?

ឃ. ចូរកំណត់ថាតើសំណុំ $U = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix} | \, a \in \mathbb{Z} \right\}$ ជាអ៊ីដេអាល់នៃ R ឬក៏មិនមែន ? ហើយធ្វើការស្រាយបញ្ជាក់ផង។

១៩. គេកំណត់អនុវត្តន៍ $\theta: M_2(\mathbb{Z}) \to M_2(\mathbb{Z}_2)$ ដោយ $\theta\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} [a] & [b] \\ [c] & [d] \end{bmatrix}$ ។

បង្ហាញថា θ ជាអូម៉ូម៉កភីស និងរក $\ker \theta$ ។

២០. សន្មត់ថា $R = \left\{ \begin{bmatrix} m & 2n \\ n & m \end{bmatrix} | \, m, n \in \mathbb{Z} \right\}$ និង $R' = \left\{ m + n\sqrt{2} \, | \, m, n \in \mathbb{Z} \right\}$ គឺជាកងធៀបទៅនឹងប្រមាណវិធីធម្មតា។ បង្ហាញថា R និង R' គឺជាកងអ៊ីសូម៉កភីស។

មេរៀនទី៤៖ ទម្រង់កាយ

៤.១.និយមន័យ និងលក្ខណៈ

និយមន័យ៖ គេឱ្យ K ជាសំណុំមួយប្រដាប់ដោយពីរប្រមាណវិធី $+$ និង $\bullet$ ។ គេថា $(K,+,\bullet)$ មានទម្រង់ជាកាយលុះត្រាតែ៖

$i.(K,+,\bullet)$ ជាកងឯកតា(មាន 0 ជាធាតុណឺត និង 1 ជាធាតុឯកតា)

$ii.\forall x\in K-\{0\},\ \exists x^{-1}\in K: x\cdot x^{-1}=x^{-1}\cdot x=1$ ។

ចំណាំ៖ បើ $(K,+,\bullet)$ ជាកាយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\forall a,b\in K: a\cdot b=b\cdot a$ នោះ $(K,+,\bullet)$ ហៅថាកាយមានលក្ខណៈត្រឡប់។

ឧទាហរណ៍០៖ $(\mathbb{Q},+,\bullet),(\mathbb{R},+,\bullet)$ ជាកាយមានលក្ខណៈត្រឡប់។

ឧទាហរណ៍១៖ នៅក្នុងកាយ $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ ។ យើងអាចប្រើ $\sqrt{2}$ ដើម្បីរៀបរាប់ពីសំណុំរងនៃ $\mathbb{R}$ គឺជាកាយ

$$\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)=\left\{a+b\sqrt{2}: a,b\in\mathbb{Q}\right\}$$

ប្រមាណវិធីគុណប្រាសនៃធាតុមិនសូន $a+b\sqrt{2}$ ដោយបំបាត់រ៉ាឌីកាល់ពីភាគបែង

$$\begin{aligned}\frac{1}{a+b\sqrt{2}}&=\frac{1}{a+b\sqrt{2}}\cdot\frac{a-b\sqrt{2}}{a+b\sqrt{2}}\\&=\frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}\\&=\frac{a}{a^2-2b^2}-\frac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}\end{aligned}$$

ចម្រាសនៃ $a+b\sqrt{2}$ ត្រូវបានកំណត់ពីព្រោះ $\sqrt{2}$ មិនមែនជាចំនួនសនិទាន។

ដោយ $a^2-2b^2\neq 0,\forall a,b\in\mathbb{Q}$ ហើយ $a,b\neq 0$ ។

សម្គាល់៖

$i.$ ធាតុ a មួយនៃកាយ $(K,+,\bullet)$ ហៅថាធាតុផ្ចិតកាលណា $\forall x\in K: a\cdot x=x\cdot a$ ។ សំណុំនៃធាតុផ្ចិតទាំងអស់នៃកាយ $(K,+,\bullet)$ ហៅថាផ្ចិតកាយ $(K,+,\bullet)$ ហើយជាសំណុំមិនទទេព្រោះធាតុឯកតា 1 នៃ $(K,+,\bullet)$ ជាផ្ចិត។

$ii.$ គ្រប់ធាតុមិនសូន្យសុទ្ធតែមានចម្រាស និងជាធាតុសម្រួលបាន ដូចនេះក្នុងកាយគ្មានតួចែកនៃសូន្យទេ ព្រោះបើ $a\cdot b=0$ និង $a\neq 0\Rightarrow\exists a^{-1}\in K: a^{-1}\cdot(a\cdot b)=a^{-1}\cdot 0$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\left(a^{-1}\cdot a\right)\cdot b=0\\&\Leftrightarrow 1\cdot b=0\\&\Rightarrow b=0\end{aligned}$$

- ដូចនេះគ្រប់កាយមានលក្ខណៈត្រឡប់សុទ្ធតែជាកងអាំងតែក។

iii. $(K,+,\bullet)$ ជាកាយ $\forall a\in K,\forall b\in K^{*}$ គេបាន៖

$\forall x\in K: x\cdot b=a\Leftrightarrow x=a\cdot b^{-1}$

$\forall y\in K: b\cdot y=a\Leftrightarrow x=b^{-1}\cdot a$

- បើប្រមាណវិធី $\bullet$ មានលក្ខណៈត្រឡប់គេបាន $x=y\Leftrightarrow a\cdot b^{-1}=b^{-1}\cdot a$ ដែលជាទូទៅកំណត់សរសេរដោយ $x=\dfrac{a}{b}$ និងគេបាន $\forall z\in K^{*}: x=\dfrac{a}{b}=\dfrac{a\cdot z}{b\cdot z}$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធី $+,\bullet$

$\forall(a,b),(a',b')\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:\begin{cases}(a,b)+(a'+b')=(a+a',b+b')\\(a,b)\cdot(a',b')=(aa'-bb',ab'+a'b)\end{cases}$ មានទម្រង់ជាកាយមានលក្ខណៈត្រឡប់ ព្រោះ៖

១.ប្រមាណវិធី $+$ មានលក្ខណៈត្រឡប់ $\forall(a,b),(a',b')\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

គេមាន $(a,b)+(a',b')=(a+a',b+b')$

$$=(a'+a,b'+b)$$
$$=(a',b')+(a,b)$$

២. ប្រមាណវិធីបូកមានលក្ខណៈផ្តុំ $\forall(a,b),(a',b'),(a'',b'')\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

គេបាន $\left[(a,b)+(a',b')\right]+(a'',b'')=(a+a',b+b')+(a'',b'')$

$$=\left[(a+a')+a'',(b+b')+b''\right]$$
$$=\left[a+(a'+a''),b+(b'+b'')\right]$$
$$=(a,b)+(a'+a'',b'+b'')$$
$$=(a,b)+\left[(a',b')+(a'',b'')\right]$$

៣. គេមាន $(0,0)$ ជាធាតុណឺតនៃ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ចំពោះប្រមាណវិធីបូកព្រោះ៖

$$\forall(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:(a,b)+(0,0)=(0,0)+(a,b)=(a+0,b+0)=(a,b)$$

៤. ចំពោះ $\forall(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:(a,b)+(-a,-b)=(-a,-b)+(a,b)$

$$=(-a+a,-b+b)=(0,0)$$

៥.ប្រមាណវិធីគុណមានលក្ខណៈផ្តុំ $\forall(a,b),(a',b'),(a'',b'')\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

គេបាន $\left[(a,b)\cdot(a',b')\right]\cdot(a'',b'')=(aa'-bb',ab'+a'b)+(a'',b'')$

$$=\left[(aa'-bb')a''-(ab'+a'b)b'',(aa'-bb')b''+a''(ab'+a'b)\right]$$
$$=(aa'a''-a''bb'-a'bb'',aa'b''-bb'b''+a''ab'+a'a''b)$$
$$=\left[a(a'a''-b'b'')-b(a'b''+a''b'),a(a'b''+a''b')-(b'b''-a'a'')b\right]$$
$$=(a,b)\cdot(a'a''-b'b'',a'b''+a''b')$$
$$=(a,b)\left[(a',b')\cdot(a'',b'')\right]$$

៦. ប្រមាណវិធីគុណមានលក្ខណៈត្រឡប់ $\forall(a,b),(a',b')\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

គេមាន $(a,b)\cdot(a',b')=(aa'-bb',ab'+a'b)(a'a-b'b,a'b+ab')$

$$=(a',b')\cdot(a,b)$$

៧.ប្រមាណវិធីគុណមានលក្ខណៈបំបែកចំពោះប្រមាណវិធីបូក

$\forall(a,b),(a',b'),(a'',b'')\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

គេមាន $(a,b)\cdot\left[(a',b')+(a'',b'')\right]=(a,b)(a'+a'',b'+b'')$

$$=\left[a(a'+a'')-b(b'+b''),a(b'+b'')+(a'+a'')b\right]$$

$$=(aa'+aa''-bb'-bb'',ab'+ab''+a'b+a''b)$$

$$=\left[(aa'-bb')+(aa''-bb''),(ab'+a'b)+(ab''+a''b)\right]$$

$$=(aa'-bb',ab'+a'b)+(aa''-bb'',ab''+a''b)$$

$$=(a,b)\cdot(a',b')+(a,b)\cdot(a'',b'')$$

៨. គេមាន $(1,0)$ ជាធាតុណឺតនៃ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ចំពោះប្រមាណវិធីគុណព្រោះ៖

$\forall(a,b)\mathbb{R}\times\mathbb{R}:(a,b)\cdot(1,0)=(1,0)\cdot(a,b)=(1\cdot a-0\cdot b,1\cdot b+a\cdot 0)=(a,b)$

៩. ចំពោះ $\forall(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}-\{(0,0)\}$ ឧបមាថាមានចម្រាស $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ចំពោះប្រមាណវិធីគុណគេបាន៖ $(a,b)\cdot(x,y)=(x,y)\cdot(a,b)=(1,0)\Leftrightarrow(ax-by,ay+xb)=(1,0)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}ax-by=1\\bx+ay=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{a}{a^2+b^2}\\[2mm] y=\dfrac{-b}{a^2+b^2}\end{cases}$$

គេបាន $\left(\dfrac{a}{a^2+b^2},\dfrac{-b}{a^2+b^2}\right)$ មានចម្រាសនៃ $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}-\{(0,0)\}$ ចំពោះប្រមាណវិធី $(\cdot)$

ដូចនេះ $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},+,\cdot)$ មានទម្រង់ជាកាយមានលក្ខណៈត្រឡប់។

ឧទាហរណ៍៣៖ បង្ហាញថាសំណុំនៃចំនួនមានទម្រង់ $a+b\sqrt{2}$ ដែល a និង b ជាចំនួនសនិទានគឺជាកាយ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $R=\{a+b\sqrt{2}:a,b\in\mathbb{Q}\}$

តាង $a_1+b_1\sqrt{2}\in R$ និង $a_2+b_2\sqrt{2}\in R$ នោះ $a_1,b_2,a_2,b_2\in\mathbb{Q}$

យើងមាន $\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right)+\left(a_2+b_2\sqrt{2}\right)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{2}\in R$

ដោយ $a_1+a_2,b_1+b_2\in\mathbb{Q}$

ដូចគ្នាដែរ $\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right)\cdot\left(a_2+b_2\sqrt{2}\right)=\left(a_1a_2+2b_1b_2\right)+\left(a_1b_2+a_2b_1\right)\sqrt{2}\in R$
ដោយ $a_1a_2+2b_1b_2, a_1b_2+a_2b_1\in\mathbb{Q}$
នោះ R គឺស្ថាបចំពោះប្រមាណវិធីបូក និងប្រមាណវិធីគុណ។
គ្រប់ធាតុទាំងអស់ R ជាចំនួនពិត និងប្រមាណវិធីបូក និងគុណទាំងពីរមានលក្ខណៈផ្តុំដែលជាចម្លាស់មាននៅក្នុងសំណុំនៃចំនួនពិត។
ម្យ៉ាងទៀតយើងមានៈ $0+0\sqrt{2}\in R, 0\in\mathbb{Q}$
បើ $a+b\sqrt{2}\in R$ នោះ $\left(0+0\sqrt{2}\right)+\left(a+b\sqrt{2}\right)=\left(0+a\right)+\left(0+b\right)\sqrt{2}=a+b\sqrt{2}$
មានន័យថា $0+0\sqrt{2}$ ជាធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធីបូក។
បើ $a+b\sqrt{2}\in R\Rightarrow(-a)+(-b)\sqrt{2}\in R$ ហើយយើងមាន

$$\left[(-a)+(-b)\sqrt{2}\right]+\left(a+b\sqrt{2}\right)=0+0\sqrt{2}$$

មានន័យថា គ្រប់ធាតុនីមួយៗនៃ R មានធាតុប្រាសចំពោះប្រមាណវិធីបូក។
ម្យ៉ាងវិញទៀតនៅក្នុងសំណុំចំនួនពិតប្រមាណវិធីគុណមានលក្ខណៈបំបែកធៀបទៅនឹងប្រមាណវិធីបូក។
គេបាន $1+0\sqrt{2}\in R$ និងយើងមាន

$$\left(1+0\sqrt{2}\right)\left(a+b\sqrt{2}\right)=\left(a+b\sqrt{2}\right)=\left(a+b\sqrt{2}\right)\left(1+0\sqrt{2}\right)$$

មានន័យថា $1+0\sqrt{2}$ គឺជាធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធីគុណ។
ដូច្នេះ R គឺជាកងត្រឡប់ឯកតា។ ជាតុសូន្យនៃកងគឺ $0+0\sqrt{2}$ និងជាតុឯកតា $1+0\sqrt{2}$ ។
នោះ R ជាកាយបើ គ្រប់ធាតុមិនសូន្យនៃ R មានធាតុប្រាសចំពោះប្រមាណវិធីគុណ។
តាង $a+b\sqrt{2}$ ជាគ្រប់ធាតុមិនសូន្យនៃកងដែល $a,b\neq 0$
នោះគេបាន

$$\frac{1}{a+b\sqrt{2}}=\frac{a-b\sqrt{2}}{\left(a+b\sqrt{2}\right)\left(a-b\sqrt{2}\right)}=\frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}$$

$$=\left(\frac{a}{a^2-2b^2}\right)+\left(-\frac{b}{a^2-2b^2}\right)\sqrt{2}$$

បើ $a,b\in\mathbb{Q}$ នោះគេមាន $a^2=2b^2\Leftrightarrow a=0,b=0$ ។
ដោយយ៉ាងហោចណាស់មានមួយនៃចំនួនសនិទាន a និង b មិនសូន្យ នោះគេមិនមាន $a^2=2b^2$
មានន័យថា $a^2-2b^2=0$ ។
មានន័យថា $\frac{a}{a^2-2b^2}$ និង $-\frac{b}{a^2-2b^2}$ ទាំងពីរជាចំនួនសនិទាន និងយ៉ាងហោចណាស់មួយមិនសូន្យ។
ពីព្រោះ $\left(\frac{a}{a^2-2b^2}\right)+\left(-\frac{b}{a^2-2b^2}\right)\sqrt{2}$ គឺជាធាតុមិនសូន្យនៃ R និងជាធាតុប្រាសចំពោះប្រមាណវិធីគុណនៃ $a+b\sqrt{2}$ ។

ដូចនេះ សំណុំនៃចំនួនមានទម្រង់ $a+b\sqrt{2}$ ដែល a និង b ជាចំនួនសនិទានគឺជាកាយ។

៤.២.កាយរង និងលក្ខណៈ

និយមន័យ១៖ គេឱ្យ $(K,+,\cdot)$ ជាកាយ និង L ជាផ្នែកមិនទទេ និងជាផ្នែកស្ថាបនៃ K ចំពោះប្រមាណវិធីទាំងពីរ។ បើ $(L,+,\cdot)$ មានទម្រង់ជាកាយ នោះ $(L,+,\cdot)$ ហៅថាកាយរងនៃកាយ $(K,+,\cdot)$។

និយមន័យ២៖ កាយរងមួយនៃកាយ K គឺជាកងរង k នៃ K ដែលជាកាយផងដែរ។

ទ្រឹស្តីបទ១៖

ក. សំណុំរង k នៃកាយ K គឺជាកាយរងលុះត្រាតែវាជាកងរងដែលមានស្ថាបនៅក្រោមទម្រង់ប្រាស បើ $a\in k$ និង $a\neq 0$ នោះ $a^{-1}\in k$។

ខ. បើ $\{F_i : i\in I\}$ ជាគ្រួសារនៃកាយរងចំពោះកាយ K នោះ $k=\bigcap_{i\in I}F_i$ ជាកាយរងនៃ K។

សម្រាយបញ្ជាក់

ក. បើសំណុំរង k នៃកាយ K ជាកាយរងនោះវាផ្ទុកចម្រាសនៃធាតុមិនសូន្យរបស់វា។ ផ្ទុយមកវិញបើ k ជាកងរងដែលផ្ទុកធាតុប្រាសមិនសូន្យ នោះវាជាកាយ និងជាកាយរងនៃ K។

ខ.យើងប្រើផ្នែក(ក)។ ដោយការប្រសព្វនៃកងរងគឺជាកងរងខ្លួនឯងនោះ k ជាកងរងនៃ K។ បើ $a\in k$ មិនសូន្យនោះវាជាអនុវត្តន៍ពេញចំពោះគ្រប់ F_i។ ប៉ុន្តែដោយ F_i ជាកាយរង $a^{-1}\in F_i$ និង $a^{-1}\in\bigcap_i F_i=k$។ ដូចនេះ k ជាកាយរងនៃ K។

ឧទាហរណ៍៖ $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ ជាកាយរងនៃ $(\mathbb{R},+,\cdot)$។

- ក្បួនគណនាទាំងឡាយដែលប្រើបានក្នុងកង សុទ្ធតែប្រើបានក្នុងកាយ។
- គេឱ្យ $(K,+,\cdot)$ និង $(K',+,\cdot)$ ជាកាយ។ គ្រប់អនុវត្តន៍ $f:K\to K'$ ដែល៖

  $\forall x,y\in K:\begin{cases} f(x+y)=f(x)+f(y)\\ f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)\end{cases}$ ហៅថាអូម៉ូម៉កភីសកាយពី K ទៅ K' ហើយ

  និយមន័យផ្សេងៗ និងលក្ខណៈនៃអូម៉ូម៉កភីស កាយមានដូចក្នុងកងដែរ។

ឧទាហរណ៍៣៖ តាង $F=\left\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Q}\right\}$ នោះ F ជាសំណុំរងមិនទទេនៃកាយ $\mathbb{R}$។

ដំណោះស្រាយ

ដើម្បីបង្ហាញថា F ជាកាយរងយើងប្រើទ្រឹស្តីបទ១

1. ក. ធាតុនៃ F គឺ $a+b\sqrt{2}$ និង $c+d\sqrt{2}\,(a,b,c,d\in\mathbb{Q})$ និងផលបូករបស់វាគឺ $\left(a+b\sqrt{2}\right)+\left(c+d\sqrt{2}\right)=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}$

   ដែលជាទម្រង់នៃ $q_1+q_2\sqrt{2},q_1,q_2\in\mathbb{Q}$។

   នោះប្រមាណវិធីបូកនៅក្នុង F គឺស្ថាប។

   ខ. $a+b\sqrt{2}\Rightarrow -\left(a+b\sqrt{2}\right)=(-a)+(-b)\sqrt{2}\in F$

2. ក.តាង $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$ នោះគេបាន៖

$\left(a+b\sqrt{2}\right)\left(c+d\sqrt{2}\right)=\left(ac+2bd\right)+\left(ad+bc\right)\sqrt{2}\in F$

ដោយ $ac+2bd,\ ad+bc\in\mathbb{Q}$ ។

នោះប្រមាណវិធីគុណនៅក្នុង F គឺស្ថាប។

ខ. $1=1+0\sqrt{2}\in F$

គ. តាង $a+b\sqrt{2}\neq 0\left(a,b\in\mathbb{Q}\right)$ នោះ a និង b គឺមិនសូន្យ។

តែ $a-b\sqrt{2}\neq 0$ ដោយ $a-b\sqrt{2}=0\Rightarrow a=b=0$ ដោយ $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ ។

នោះគេបាន៖

$$\begin{aligned}\left(a+b\sqrt{2}\right)^{-1}&=\frac{1}{a+b\sqrt{2}}=\frac{a-b\sqrt{2}}{\left(a+b\sqrt{2}\right)\left(a-b\sqrt{2}\right)}\\&=\frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}\\&=\frac{a}{a^2-2b^2}+\frac{(-b)}{a^2-2b^2}\sqrt{2}\in F\end{aligned}$$

ដូចនេះ F ជាកាយរងនៃ $\mathbb{R}$ ។

- ស្រាយថា $\mathbb{C}_1=\left\{(a,0):a\in\mathbb{R}\right\}$ ជាកាយរងនៃ $\mathbb{C}$
  - គេមាន $\mathbb{C}_1\neq\varnothing$ ព្រោះ $(0,0)\in\mathbb{C}_1$ និង $\mathbb{C}_1\subset\mathbb{C}$
  - $\forall(a,0),(a',0)\in\mathbb{C}_1:(a,0)-(a',0)=(a,0)+(-a',0)=(a-a',0)\in\mathbb{C}_1$

    $(a,0)\cdot(a',0)=(aa'-0\cdot 0,a\cdot 0+a'\cdot 0)=(a\cdot a',0)\in\mathbb{C}_1$
  - $\forall(a,0)\in\mathbb{C}_1-\left\{(0,0)\right\}\exists\left(\frac{1}{a},0\right)\in\mathbb{C}_1:(a,0)\cdot\left(\frac{1}{a},0\right)=\left(\frac{1}{a},0\right)\cdot(a,0)=(1,0)$

  ដូចនេះ គេបាន $\mathbb{C}_1=\left\{(a,0):a\in\mathbb{R}\right\}$ ជាកាយរងនៃ $\mathbb{C}$ ។
- ស្រាយថា $\mathbb{C}_1=\left\{(a,0):a\in\mathbb{R}\right\}$ អ៊ីសូម៉កភីសជាមួយ $\mathbb{R}$

  ពិនិត្យអនុវត្តន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}_1$

  $$a\mapsto f(a)=(a,0)$$
  - f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់៖ $\forall a,a'\in\mathbb{R}$ បើ $f(a)=f(a')\Leftrightarrow(a,0)=(a',0)\Rightarrow a=a'$
  - f ជាអនុវត្តន៍ពេញ៖ $f(\mathbb{R})=\left\{f(a):a\in\mathbb{R}\right\}=\left\{(a,0):a\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{C}_1$
  - f ជាអូម៉ូម៉កភីសកាយ៖ $\forall a,a'\in\mathbb{R}$ គេមាន

    $f(a+a')=(a+a',0)=(a,0)+(a',0)=f(a)+f(a')$

    $f(a\cdot a')=(a\cdot a',0)=(a,0)\cdot(a',0)=f(a)\cdot f(a')$

ដូចនេះគេបាន $\mathbb{C}_1=\{(a,0):a\in\mathbb{R}\}$ អ៊ីសូម៉កភីសជាមួយ $\mathbb{R}$ ។

សម្គាល់៖

- ដោយ $\mathbb{R}\approx\mathbb{C}_1$ គេអាចប្រដូច $\mathbb{R}$ គឺ $\mathbb{C}_1$ ដោយតាង $a=(a,0)$ ។ ដូចនេះគេបាន $\mathbb{R}$ ជាផ្នែកមួយនៃ $\mathbb{C}$ ។
- គេតាង $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}$

៤.៣. អូម៉ូម៉កភីសកាយ

គេមាន $(K,T,\cdot),(L,T,*)$ ជាកាយពីរអនុវត្តន៍ $f:K\to L$ ហៅថាអូម៉ូម៉កភីសកាយកាលណា f ជាអូម៉ូម៉កភីសកង។

ចំណាំ៖ កាយទាំងអស់សុទ្ធតែជាកងអាំងតែក។

៤.៤.កាយចំនួនកុំផ្លិច $\mathbb{C}$

ទ្រឹស្តីបទ១៖ កាយមានលក្ខណៈត្រឡប់ $\mathbb{C}$ ដែលមានជាតុមួយតាងដោយ i ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដូចខាងក្រោម៖

(i) $\mathbb{R}$ ជាកាយរងនៃ $\mathbb{C}$

(ii) $\forall z\in\mathbb{C},z$ សរសេរជាមួយទំនាក់ទំនងមួយបែបគត់ $z=x+iy,\ x,y\in\mathbb{R}$

(iii) $i^2=-1$

សម្រាយបញ្ជាក់

គេយក $\mathbb{R}^2=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{R}\}$ ហើយគេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុងគឺ $\forall(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2$

ប្រមាណវិធីបូក $(+)$ ៖ $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$

ប្រមាណវិធីគុណ $(\bullet)$ ៖ $(x,y)\cdot(x',y')=(xx'-yy',xy'+yx')$

គេបាន $(\mathbb{R}^2,+,\bullet)$ មានទម្រង់ជាកាយមានលក្ខណៈត្រឡប់ព្រោះ៖

1) $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ ជាកងឯកតា

- វិធីគុណមានលក្ខណៈត្រឡប់
  $(x,y)\cdot(x',y')=(x',y')\cdot(x,y)$ ពិតព្រោះវិធីគុណក្នុង $\mathbb{R}$ មានលក្ខណៈត្រឡប់
- វិធីគុណមានលក្ខណៈផ្តុំ

$$[(x,y)\cdot(x',y')]\cdot(x'',y'')=(x,y)\cdot[(x',y')\cdot(x'',y'')]$$

$$\Leftrightarrow(xx'-yy',xy'+yx')(x'',y'')=(x,y)\cdot(x'x''-y'y'',x'y''+y'x'')$$

$$\Leftrightarrow[(xx'-yy')x''-(xy'+yx')y'',(xx'-yy')y''+(xy'+yx')x'']$$

$$=[x(x'x''-y'y'')-y(x'y''+y'x''),x(x'y''+y'x'')+y(x'x''-y'y'')]$$

- វិធីគុណមានលក្ខណៈបំបែកចំពោះវិធីបូក

$$(x,y)\cdot\left[(x',y')+(x'',y'')\right]=(x,y)(x',y')+(x,y)(x'',y'')$$

$$\Leftrightarrow (x,y)(x'+x'',y'+y'')=\left[x(x'+x'')-y(y'+y''),x(y'+y'')+y(x'+x'')\right]$$

$$=(xx'+xx''-yy'-yy'',xy'+xy''+yx'+yx'')$$

$$=(xx'-yy',xy'+yx')+(xx''-yy'',xy''+yx'')$$

$$=(x,y)\cdot(x',y')+(x,y)(x'',y'')$$ ពិត

- ❖ ជាតុឯកតា ឬជាតុណឺតនៃវិធីគុណគឺ $(1,0)$
  ព្រោះ $(x,y)(1,0)=(x\cdot 1-y\cdot 0,x\cdot 0+y\cdot 1)=(x,y)$

2) $\forall (x,y)\in(\mathbb{R}^2)^*=\mathbb{R}^2-\{0,0\}$ មានជាតុច្រាសចំពោះប្រមាណវិធីគុណ

$$(x,y)\cdot(x',y')=(1,0)$$

$$\Leftrightarrow (xx'-yy',xy'+yx')=(1,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xx'-yy'=1 \\ xy'+yx'=0 \end{cases}$$

$D=\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}=x^2+y^2>0$ ព្រោះ $(x,y)\neq(0,0)$

$$D_{x'}=\begin{vmatrix} 1 & -y \\ 0 & x \end{vmatrix}=x$$

$$D_{y'}=\begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{vmatrix}=-y$$

ដូច្នេះ $(x',y')=(x,y)^{-1}=\left(\dfrac{x}{x^2+y^2},\dfrac{-y}{x^2+y^2}\right)$។

តាង $\mathbb{C}'=\mathbb{R}^2$ដែលប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីទាំងពីរខាងលើមានន័យថា $(\mathbb{C}',+,\bullet)$ ជាកាយមានលក្ខណៈត្រឡប់។

(α) គេបាន $\mathbb{R}'=\{(x,0)\mid x\in\mathbb{R}\}$ ជាកាយរងនៃ $\mathbb{C}'$

- $(x,0)+(x',0)=(x+x',0)$
- $-(x,0)=(-x,0)\in\mathbb{R}$ ពិត
- $(x,0)(x',0)=(xx'-0,0+0)=(xx',0)\in\mathbb{R}'$ ពិត
- $\forall x\neq 0,(x,0)^{-1}=\left(\dfrac{x}{x^2+0},\dfrac{-0}{x^2+0}\right)=\left(\dfrac{1}{x},0\right)\in\mathbb{R}'$ ពិត

(β) បើតាង $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}'$

$$x\mapsto\varphi(x)=(x,0)$$

គេបាន φ ជាអ៊ីសូម៉កភីសនៃកាយព្រោះ៖

- φ មួយទល់មួយ (សម្រាយងាយ)
- $\varphi(x+x')=(x+x',0)=(x,0)+(x',0)=\varphi(x)+\varphi(x')$ ពិត
- $\varphi(x\cdot x')=(x\cdot x',0)=(x,0)\cdot(x',0)=\varphi(x)\cdot\varphi(x')$ ពិត

ដូច្នេះ គេអាចប្រដូច $\mathbb{R}'$ ទៅនឹង $\mathbb{R}$ ដែលកំណត់សរសេរដោយ $(x,0)=x$ ជាពិសេស $(0,0)=0,(1,0)=1$។

(γ) ម្យ៉ាងទៀតបើតាង $i=(0,1)\in\mathbb{C}'$ គេបាន៖

$i^2=(0,1)(0,1)=(0-1,0+0)=(-1,0)=-1$ មានន័យថា (iii) $i^2=-1$ ពិត

ហើយតាមលក្ខណៈ $\mathbb{C}'$ ជាលំហវិចទ័រលើកាយ $\mathbb{R}$ គេអាចសរសេរ

$\forall(x,y)\in\mathbb{C}',(x,y)=(x,0)+(0,y)=x(1,0)+y(0,1)=x+iy$

ដូច្នេះ តាម (γ) បើតាង $\mathbb{C}=\{z=x+iy\mid x,y\in\mathbb{R}\}$ នោះគេបាន $\mathbb{C}$ ជាកាយមានលក្ខណៈត្រឡប់ហើយមាន $\mathbb{R}$ ជាកាយរង។ *i.e* ទ្រឹស្តីបទពិតហើយ $\mathbb{C}$ ជាសំណុំចំនួនកុំផ្លិច។

- **ចំណាំ**

ក. បើ $z=x+iy\in\mathbb{C}$ នោះ x ហៅថាផ្នែកពិតនៃ z តាងដោយ $x=\operatorname{Re}(z)$ និង y ហៅថាផ្នែកនិម្មិតនៃ z តាងដោយ $y=\operatorname{Im}(z)$

- បើ $y=0\Rightarrow z=x$ ហៅថាចំនួនពិតសុទ្ធ
- បើ $x=0\Rightarrow z=iy$ ហៅថាផ្នែកនិម្មិតសុទ្ធ

ខ.បើ $z=x+iy\in\mathbb{C}$ គេកំណត់ $\overline{z}=x-iy$ ហៅថាកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ z

លក្ខណៈ

(i) z ជាចំនួនពិតសុទ្ធលុះត្រាតែ $\overline{z}=z$, z ជាចំនួននិម្មិតសុទ្ធ $\overline{z}=-z$

(ii) $z+\overline{z}=2\operatorname{Re}(z)\Leftrightarrow\operatorname{Re}(z)=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$

$z-\overline{z}=2i\operatorname{Im}(z)\Leftrightarrow\operatorname{Im}(z)=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

(iii) $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'},\ \overline{zz'}=\overline{z}\cdot\overline{z'}$

គ.បើ $z=x+iy\in\mathbb{C}$ គេតាង $|z|=\sqrt{x^2+y^2}\ge 0$ ហៅថាម៉ូឌុលនៃ z

(i) $|z|=0\Leftrightarrow z=0$

(ii) $z\cdot\overline{z}=|z|^2\Leftrightarrow|z|=\sqrt{z\overline{z}}$

(iii) $|z|=|-z|=|\overline{z}|$

$(iv)\ |\text{Re}(z)|,|\text{Im}(z)|\le |z|$

$|z|\le |\text{Re}(z)|+|\text{Im}(z)|$

$(v)\ |z\bar{z}|=|z||\bar{z}|$ ពិតតាម (iii)

$(vi)\ |z+z'|\le |z|+|z'|$

សម្រាយបញ្ជាក់

$(vi)\ |z+z'|\le |z|+|z'|$

យើងមាន $|z+z'|^2=(z+z')\left(\overline{z+z'}\right)=(z+z')\left(\bar{z}+\bar{z}'\right)$

$=z\bar{z}+z\bar{z}'+z'\bar{z}+z'\bar{z}'$

$=|z|^2+|z'|^2+2\text{Re}\left(z\bar{z}'\right)$

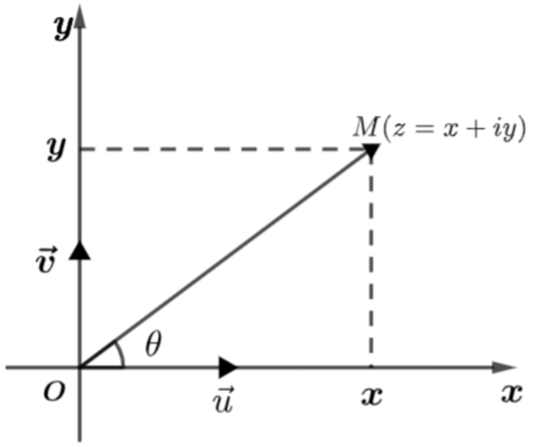
ដោយ $2\text{Re}\left(z\bar{z}'\right)\le 2|z\bar{z}'|=2|z||\bar{z}'|=2|z||z'|$

$\Rightarrow |z+z'|^2\le |z|^2+|z'|^2+2|z||z'|=(|z|+|z'|)^2$

$\Rightarrow |z+z'|\le |z|+|z'|$

ខ.ប្លង់កុំផ្លិច $\mathbb{C}$

$a)$. ម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច តាងដោយ $\mathbb{C}$ ប្រដូចនឹង $\mathbb{R}^2$ គេហៅថា**ប្លង់កុំផ្លិច** គឺជាប្លង់អាភីន ρ (ចំណុច)ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរមេ (xOy) ដែលមានវ៉ិចទ័រឯកតា $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ដែលពី $\forall M(x,y)\in\rho$ គេផ្ទុំចំនួនកុំផ្លិច $z=x+iy$ ហើយម្យ៉ាងទៀតការផ្ទុំនេះជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយគេសរសេរដោយ $M(z)$ ។



រូបទី៣.១

មើល M មានអាភិច z ហើយ z ជាអាភិចនៃ y ហើយ M ជារូបភាពនៃ z ក្នុងករណីនេះគេបាន៖

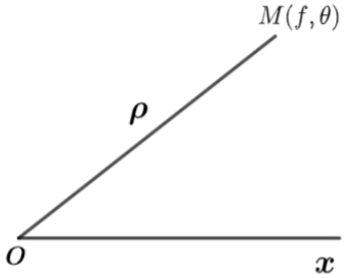
- $\rho=|z|=OM=\sqrt{x^2+y^2}\ge 0$ ម៉ូឌុលនៃ z
- បើ $z\ne 0$ $i.e$ $\rho>0$ គេហៅថាអាគុយម៉ង់នៃ z គឺមានមុំទិសដៅ $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)$ បើ $\theta\in[-\pi,\pi]$ ជាតម្លៃមួយនៃ $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)$ នោះ θ ហៅថាអាគុយម៉ង់គោលនៃ z ។ គេតាងដោយ $\arg(z)=\theta$ ហើយអាគុយម៉ង់ទូទៅនៃ z គឺ

$\arg(z) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \theta \pm 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

ឬ $\arg(z) = \theta (\bmod 2\pi)$ ក្នុងករណីនេះគេបាន៖

$[\rho, \theta] = [\rho, \theta + 2k\pi]$ ហៅថា កូអរដោនេប៉ូលែ

នៃ $M(x, y)$ ហើយទំនាក់ទំនង



រូបទី៣.២

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$x = \rho \cos\theta$$
$$y = \rho \sin\theta$$

គេបាន $\underbrace{z = x + iy}_{\text{រាងពីជគណិត}} = \underbrace{[\rho, \theta] = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)}_{\text{ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ}}$

រាងពីជគណិត ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ចំណាំ៖

១. បើ $z = 0$ គ្មានអាគុយម៉ង់ ឬមានអាគុយម៉ង់កំណត់មិនបាន

២. ចំនួនកុំផ្លិចពិតសុទ្ធ $z = x \neq 0$ ដែលមានរូបនៅលើអ័ក្សចំនួនពិត (Ox) មានអាគុយម៉ង់គោលស្មើសូន្យលើ $x > 0$ និង π បើ $x < 0$ ។

ចំនួនកុំផ្លិចនិម្មិតសុទ្ធដែល $z = iy \neq 0$ មានរូបលើអ័ក្សចំនួននិម្មិត្ត (Oy) មានអាគុយម៉ង់ស្មើ $\frac{\pi}{2}$ បើ $y > 0$ និងស្មើ $-\frac{\pi}{2}$ បើ $y < 0$ ។

៣. ក្នុងករណីខ្លះចំនួនកុំផ្លិច $z = x + iy$ មានរូបជាវ៉ិចទ័រសេរី $\vec{v}(x, y) = \overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ គេសរសេរដូចគ្នា $\vec{v}(z = x + iy)$ ដែល z ជាអាភិចនៃ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជារូបនៃ z នោះគេបាន $\rho = |z| = \|\vec{v}\|, \arg(z) = (\vec{u}, \vec{v}) \ (\bmod 2\pi)$ ។

លក្ខណៈ៖

ក. បើ $\vec{v}(z), \vec{v}'(z'), \lambda \in \mathbb{R}$ គេបាន $\vec{v}(z) \pm \vec{v}'(z') = z \pm z', \lambda\vec{v} = \lambda z$ ។

ខ. $A(z_A), B(z_B) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(z_B - z_A)$ ព្រោះ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

b). ម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃផលគុណ ចម្រាស ផលចែក និងស្វ័យគុណ

- គេឱ្យ $z = [\rho, \theta], z' = [\rho', \theta'], \rho, \rho' > 0, \theta, \theta' \in \mathbb{R}$ គេបាន៖

$$z \cdot z' = [\rho, \theta][\rho', \theta'] = [\rho(\cos\theta + i\sin\theta)][\rho'(\cos\theta' + i\sin\theta')]$$
$$= \rho\rho'[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta')]$$
$$= \rho\rho'[\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')] = [\rho\rho', \theta + \theta']$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z \cdot z'| = \rho\rho' = |z| \cdot |z'| \\ \arg(z \cdot z') = \theta + \theta' = \arg(z) + \arg(z') \end{cases}$$

- គេឱ្យ $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

  បើ $z = x + iy \Rightarrow \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$

  គេបាន $\bar{z} = x - iy = \rho\cos\theta - i\rho\sin\theta$

  $$= \rho\left[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right]$$

  $$\Rightarrow \begin{cases} |\bar{z}| = \rho|z| \\ \arg(\bar{z}) = -\theta = -\arg(z) \end{cases}$$

- គេឱ្យ $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \neq 0$

  គេមាន $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\rho\left[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right]}{\rho^2}$

  $$= \frac{1}{\rho}\left[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right]$$

  $$\Rightarrow \begin{cases} \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{|z|} \\ \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\theta = -\arg(z) \end{cases}$$

- គេឱ្យ $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ និង $z' = \rho'(\cos\theta' + i\sin\theta')$
- បើ $z' \neq 0 \Rightarrow \frac{z}{z'} = z \cdot \frac{1}{z'}$

  $$\Rightarrow \begin{cases} \left|\frac{z}{z'}\right| = \left|z \cdot \frac{1}{z'}\right| = |z| \cdot \left|\frac{1}{z'}\right| = |z| \cdot \frac{1}{|z|} = \frac{|z|}{|z'|} = \frac{\rho}{\rho'} \\ \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg\left(z \times \frac{1}{z'}\right) = \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z'}\right) \end{cases}$$

  $$= \arg(z) - \arg(z') = \theta - \theta'$$

c). **រូបមន្តDe Moivre**

បើ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានហើយ $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ ជាចំនួនកុំផ្លិចក្នុងទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនោះ $z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$។

សម្រាយបញ្ជាក់

ចំពោះ $n = 1$ ពិតនោះយើងសន្មត់ថាវាពិតចំពោះ $n = k$ គេបាន $z^k = \rho^k(\cos k\theta + i\sin k\theta)$

យើងនឹងស្រាយវាឱ្យពិតរហូតដល់ $n=k+1$ គឺ $z^{k+1}=\rho^{k+1}\left[\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta\right]$

យើងមាន

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= z^k\cdot z \\ &= \left[\rho^k\left(\cos k\theta+i\sin k\theta\right)\right]\left[\rho\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)\right] \\ &= \rho^{k+1}\left[\cos\left(k\theta+\theta\right)+i\sin\left(k\theta+\theta\right)\right] \\ &= \rho^{k+1}\left[\cos\left(k+1\right)\theta+i\sin\left(k+1\right)\theta\right] \end{aligned}$$ ពិត

ឧទាហរណ៍៤៖ ដោយប្រើរូបមន្តDe Moivreចូរគណនា៖

ក. $\left(-2+2i\right)^4$ ខ. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)^{40}$

ដំណោះស្រាយ

ក $\left(-2+2i\right)^4$ គេបាន

$$\begin{aligned} \left(-2+2i\right)^4 &= \left[2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right]^4 \\ &= \left[2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right]^4 \\ &= 64\left(\cos 3\pi+i\sin 3\pi\right) \\ &= 64\left(-1+0i\right) \\ &= -64 \end{aligned}$$

ខ. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)^{40}$ គេបាន

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)^{40} &= \left[1\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^{40} \\ &= 1^{40}\left(\cos\frac{20\pi}{3}+i\sin\frac{20\pi}{3}\right) \\ &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}+6\pi\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}+6\pi\right) \\ &= \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3} \\ &= -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

ចំណាំ៖

- $\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}=\frac{1}{[\rho,\theta]}=\frac{[\rho,-\theta]}{\rho^2}=\left[\frac{1}{\rho},-\theta\right]$
- $\frac{z'}{z}=\frac{[\rho',\theta']}{[\rho,\theta]}=\left[\frac{\rho'}{\rho},\theta'-\theta\right]$
- $z^2=[\rho,\theta][\rho,\theta]=[\rho^2,2\theta]$
- $z^k=[\rho,\theta]^k=[\rho^k,k\theta],\forall k\in\mathbb{Z}$

៤.៥ អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនៃចំនួនកុំផ្លិច

បើ $\theta\in\mathbb{R}$ គេកំណត់តាង $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

ព្រោះ $\begin{cases} e^{i\theta}\cdot e^{i\theta'}=(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta'+i\sin\theta') \\ \qquad\qquad =[\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')]=e^{i(\theta+\theta')} \\ (e^{i\theta})^k=(\cos\theta+i\sin\theta)^k=\cos k\theta+i\sin k\theta=e^{ik\theta}\end{cases}$

ដូច្នេះ $[1,\theta]=e^{i\theta}$ និង $[\rho,\theta]=\rho e^{i\theta}$ រាងអ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនៃ z

ជាពិសេស $\forall k\in\mathbb{Z},\ e^{i2k\pi}=1, e^{ik\pi}=(-1)^k$ ។ $i.e\ e^{i(\theta+2k\pi)}=e^{i\theta'}, i.e\ f(\theta)=e^{i\theta}$

មានខួប $T=i2\pi$

$$\rho e^{i\theta}=\rho' e^{i\theta'}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\rho=\rho'\\ \theta=\theta'+2k\pi\end{cases}$$

ម្យ៉ាងទៀត

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots \qquad ...(1)$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots \qquad ...(2)$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots \qquad ...(3)$$

តាម (2) និង (3) គេបាន៖

$$\cos z+i\sin z=\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots\right)+i\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots\right)$$

$$=1+\frac{(zi)^1}{1!}+\frac{(iz)^2}{2!}+\frac{(iz)^3}{3!}+\ldots=e^{iz}$$

នោះគេបាន $\cos z+i\sin z=e^{iz} \qquad ...(4)$

ដូចគ្នាដែរ $\cos z-i\sin z=e^{-iz} \qquad ...(5)$

តាម (4) និង (5) គេបាន៖

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \qquad ...(6)$$

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \qquad ...(7)$$

ដូចនេះ $e^{iz}=\cos z+i\sin z$ ។

៤.៦. ឫសទីn នៃចំនួនកុំផ្លិច

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិចមិនសូន្យ $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ។ រកចំនួនកុំផ្លិច $z'=r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$ ដែល $(z')^n=z,\ (n\in\mathbb{N}^*)$ ។

គេមាន $(z')^n=z\Leftrightarrow\left[r'(\cos\theta'+i\sin\theta')\right]^n=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$$\Leftrightarrow(r')^n(\cos n\theta'+i\sin\theta')=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(r')^n=r\\ n\theta'=\theta+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}r'=\sqrt[n]{r}\\ \theta'=\dfrac{\theta}{n}+\dfrac{2k\pi}{n},k=0,1,\dots,n-1\end{cases}$$

គេតាង $\theta_k=\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n},k=0,1,\dots,n-1$

គេបានឫសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ មាន n គឺ

$z_k=\sqrt[n]{r}(\cos\theta_k+i\sin\theta_k)$ ដែល $\theta_k=\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n},k=0,1,\dots,n-1$

ក.ទ្រឹស្តីបទ៣៖ គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិចមិនសូន្យ $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ។ គេបានឫសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច z មាន n គឺ $z_k=\sqrt[n]{r}(\cos\theta_k+i\sin\theta_k)$ ដែល $\theta_k=\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n},k=0,1,\dots,n-1$ ។

- ដោយ $|z_{k+1}|=|z_k|=\sqrt[n]{r}$ និង $\arg(z_{k+1})=\frac{\theta}{n}+\frac{2(k+1)\pi}{n}=\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+\frac{2\pi}{n}$

$$=\arg(z_k)+\frac{2\pi}{n}$$

គេបានចំណុចរូបភាពនៃឫសទី n ទាំងអស់នៃ z គឺជាចំណុចកំពូលនៃពហុកោណនិយ័ត n ជ្រុង ចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត O កាំ $\sqrt[n]{r}$ ។

ខ. ឫសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិចឯកតា

គេមាន 1 ជាចំនួនកុំផ្លិចឯកតាដែលសរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រស្មើនិង $\cos 0+i\sin 0$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទខាងលើគេបានឫសទី n នៃ 1 មាន n គឺ

$u_k=(\cos\theta_k+i\sin\theta_k)$ ដែល $\theta_k=\frac{2k\pi}{n},k=0,1,\dots,n-1$ ។

ទ្រឹស្តីបទ៤៖ ឫសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិចឯកតាមាន n គឺ $u_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$

$$=e^{i\frac{2k\pi}{n}},k=0,1,\ldots,n-1$$

ឧទាហរណ៍៥៖ ឫសការេនៃចំនួនកុំផ្លិចឯកតាមានពីរគឺ $u_0=\cos 0+i\sin 0=1$ និង $u_1=\cos\pi+i\sin\pi=-1$។

ឧទាហរណ៍៦៖ ឫសទីបីនសចំនួនកុំផ្លិចឯកតាមានបីគឺ $u_0=\cos 0+i\sin 0=1$

$u_1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $u_2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

- គេតាងឫសទីបីនៃចំនួនកុំផ្លិចឯកតាដោយ $1,j,j^2$ ដែល $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

ឧទាហរណ៍៦៖ ឫសទី៣នៃចំនួនកុំផ្លិចឯកតាមានបួនគឺ $u_0=\cos 0+i\sin 0=1$,

$u_1=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i,u_2=\cos\pi+i\sin\pi=-1$ និង $u_3=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$

សម្គាល់៖

i. ចំពោះ $\forall k\in[0,n-1]$ គេបាន $\overline{u_k}=u_k^{-1}=u_{-k}$

ព្រោះ៖ តាមទ្រឹស្តីបទ $|u_k|=1\Rightarrow u_k=u_k^{-1}$

ដោយ $u_k=\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$

$$\Rightarrow\overline{u_k}=\left[\cos\frac{2(-k)\pi}{n}+i\sin\frac{2(-k)\pi}{n}\right]=u_{-k}$$

ii. ចំពោះ $\forall k\in[0,n-1]$ គេបាន $u_k=(u_1)^k$

ព្រោះ $u_k=\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k=(u_1)^k$

iii. ផលបូកឫសទី n ទាំងអស់នៃចំនួនកុំផ្លិចឯកតាស្មើនិងសូន្យ។

ព្រោះ៖ គេមាន $\sum_{k=0}^{n-1}u_k=\sum_{k=0}^{n-1}(u_1)^k=1\cdot\frac{1-(u_1)^n}{1-u_1}=\frac{1-1}{1-u_1}=0,(u_1)^n=1$

ទ្រឹស្តីបទ៥៖ សំណុំនៃឫសទី n ទាំងអស់នៃចំនួនកុំផ្លិចឯកតាគឺជាក្រុមរងនៃក្រុមប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីគុណ U សំណុំនៃចំនួនកុំផ្លិចដែលមានម៉ូឌុលស្មើនិង 1 ហើយជាអ៊ីសូម៉កភីសនឹងក្រុម $\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+\right)$។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង U_n ជាសំណុំឫសទី n ទាំងអស់នៃចំនួនកុំផ្លិចឯកតា

គេបាន $U_n=\left\{u_k:(u_k)^n=1,0\le k\le n-1\right\}$

➢ បង្ហាញថា U_n ជាក្រុមរងនៃក្រុម $(U,\cdot)$

- គេមាន $U_n \subset U$ និង $U_n \neq \varnothing$ ព្រោះ $\begin{cases} \forall k \in [0, n-1] : |u_k| = 1 \\ 1 \in U_n \end{cases}$

- $\forall u_k, u_1 \in U_n \Rightarrow u_k u_\ell^{-1} = u_k \cdot u_{-\ell} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \cdot e^{i\frac{2(-\ell)\pi}{n}} = e^{i\frac{2(k-\ell)\pi}{n}} \in U_n$

  ព្រោះ $\left(u_k u_\ell^{-1}\right)^n = \left(e^{i\frac{2(k-\ell)\pi}{n}}\right)^n = e^{i2(k-\ell)\pi} = 1$

ដូចនេះ គេបាន U_n ជាក្រុមរងនៃ $(U, \cdot)$ ។

➢ បង្ហាញថា $U_n \sim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

  ពិនិត្យអនុវត្តន៍ $f : U_n \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$$u_k \mapsto f(u_k) = \bar{k} \left(\bar{k} \text{ ជាថ្នាក់សមមូល } \operatorname{mod}.n\right)$$

- f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់៖ $\forall u_k, u_\ell \in U_k$ បើ $f(u_k) = f(u_\ell) \Leftrightarrow \bar{k} = \bar{\ell}$

$$\Leftrightarrow k \equiv l (\operatorname{mod}.n)$$

$$\Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z} : k = \ell + np$$

$$\Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z} : \frac{2k\pi}{n} = \frac{2\ell\pi}{n} + 2p\pi$$

$$\Leftrightarrow e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2\ell\pi}{n}}$$

$$\Leftrightarrow u_k = u_\ell$$

- f ជាអនុវត្តន៍ពេញ៖ $f(U_n) = \{f(u_k) : u_k \in U_n\} = \{\bar{k} : 0 \le k \le n-1\} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

- f ជាអូម៉ូម៉កកឹស៖ $\forall u_k, u_\ell \in U_k$ គេមាន $f(u_k \cdot u_\ell) = f(u_{k+\ell}) = \overline{k+\ell}$

$$= \bar{k} + \bar{\ell}$$

$$= f(u_k) + f(u_\ell)$$

ដូចនេះ គេបាន $U_n \sim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ។

លំហាត់ឧទ្រង់កាយ

១. លើសំណុំ $\mathbb{N}$ គេកំណត់ប្រមាណវិធី $\top$ ដោយ៖ $\forall a,b\in\mathbb{N}, a\top b=2a+3b$ សិក្សាលក្ខណៈនៃ $\top$ ។

២. នៅក្នុងសំណុំ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ គេកំណត់ប្រមាណវិធី $(+)$ និង $(\cdot)$ ដូចតទៅ៖

$$(a,b)+(a',b')=(a+a',b+b')$$

$$(a,b)\cdot(a',b')=(aa'-bb',ab'+ba')$$

បង្ហាញថា $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ មានទម្រង់ជាកាយមានលក្ខណៈត្រឡប់ចំពោះប្រមាណវិធី $(+)$ និង $(\cdot)$ ។

៣. K ជាកាយមានលក្ខណៈត្រឡប់ប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធី $(+)$ និង $(\times)$ ។ សូន្យជាធាតុណឺតនៃប្រមាណវិធី $(+)$ ហើយ e ជាធាតុណឺតចំពោះប្រមាណវិធី $(\times)$ ដោយ $x^2=x\times x$ ។

ក. បើ K មានធាតុ $x\neq 0$ ដែល $x+x=0$

(i) បញ្ជាក់ថា $e+e=0$ ហើយ $\forall y\in K\Rightarrow y+y=0$

(ii) បញ្ជាក់ថា $\forall y,z\in K:(y+z)^2=y^2+z^2$

ខ. រកឧទាហរណ៍ចំពោះកាយ K ដែល $x\in K, x\neq 0$ និង $x+x+x=0$ ។ រកករណីទូទៅចំពោះធាតុច្រើននៃ K ។

៤. បង្ហាញថានៅក្នុងកាយ

(i) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc$ $\qquad(ii)$ $\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad-bc}{bd}$

(iii) $(-a)^{-1}=-(a^{-1})$ $\qquad(iv)$ $\dfrac{(-a)}{(-b)}=\dfrac{a}{b}$

៥. តាង $S=\{a+b\sqrt{5}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ ជាសំណុំរងនៃ $\mathbb{R}$ ។ បង្ហាញថា S ជាកាយ។

៦.តាង $S=\{a+b\sqrt{6}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ ជាសំណុំរងនៃ $\mathbb{R}$ ។ តើ S ជាកាយដែរឬទេ ?

៧. បង្ហាញថាសំណុំរងនីមួយៗខាងក្រោមនៃ $\mathbb{R}$ គឺជាកាយ៖

(a) $\mathbb{Q}(\sqrt{3})=\{a+b\sqrt{3}:a,b\in\mathbb{Q}\}$

(b) $\mathbb{Q}(\sqrt{4})=\{a+b\sqrt{4}:a,b\in\mathbb{Q}\}$

(c) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})=\{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}:a,b,c\in\mathbb{Q}\}$

៨. បង្ហាញថាកងនីមួយៗខាងក្រោមមិនមែនជាកាយ៖

(a) $\mathbb{Z}(i)=\{a+bi:a,b\in\mathbb{Z}\}$

(b) $\mathbb{Z}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}:a,b\in\mathbb{Z}\}$

(c) $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ដែល p ជាចំនួនបឋម

៩. កាយ $\mathbb{Q}(i)$ និង $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ទាំងពីរនៅក្នុងកាយ $\mathbb{C}$ ។

ក. បង្ហាញថា $\mathbb{Q}(i)$ គឺមិននៅក្នុង $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

ខ. បង្ហាញថា $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ គឺមិននៅក្នុង $\mathbb{Q}(i)$

១០. ក. បង្ហាញថា $\sqrt{6} \notin \left\{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3} : a,b,c \in \mathbb{Q}\right\}$ និងសន្និដ្ឋានថាសំណុំនៃចំនួនពិតគឺមិនមែនជាកង។

ខ. បង្ហាញថាសំណុំ $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)=\left\{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3} : a,b,c \in \mathbb{Q}\right\}$ គឺជាកងរងនៃ $\mathbb{R}$ ។

គ.បង្ហាញថា $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$ ជាកាយរងនៃ $\mathbb{R}$ ។

មេរៀនទី៥៖ កងពហុធា

៥.១.កងពហុធា

នៅក្នុងកន្សោមពីជគណិត $2x^3-\frac{1}{2}x^2+3$ មានមេគុណនៅក្នុងកង A ។ គេពង្រីកពី $\mathbb{Z}$ ដោយការបន្ថែម π ហើយនៅចន្លោះពី $-\pi$ ទៅ π គឺ $a\pi^n+b\pi^{n-1}+\cdots+k\pi+\ell$ ដែល $a,b,\cdots,k,\ell$ ជាចំនួនគត់ហើយ π មេគុណពហុធានៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប (ចំនួនពិត និងកុំផ្លិច) ដែលផ្ទុកកន្សោមពហុធានោះ។

កងត្រឡប់ A មួយជាធាតុណឺតដែល $a,b,c\in A$ ប៉ុន្តែ x ជានិម្មិត្តសញ្ញា ឬអញ្ញាត្តិ គេបាន ax^2+bx+c ជាកន្សោមពហុធា។

ជាឧទាហរណ៍៖ $1+x-3x^2+4x^3$ និង $4x^3-3x^2+x+1$ ជាហុជាដូចគ្នា។

១.និយមន័យ៖

តាង A ជាកងត្រឡប់មួយជាធាតុណឺត និង x ជានិម្មិត្តសញ្ញាណាមួយ។ គ្រប់កន្សោមនៃទម្រង់

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

ហៅថា ពហុធាមួយអថេរ x ដែលមានមេគុណនៅក្នុង A ឬ ពហុធានៅក្នុង x លើ A ។

កន្សោម $a_kx^k,k\in\{1,2,3,\cdots,n\}$ ហៅថាតួនៃពហុធាដែល a_k ជាមេគុណនាំមុខនៃ x^k ។

- បើ $a(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ ដែល $a(x)$ មានដឺក្រេ n មានន័យថា $a_n\neq 0$ តែ $a_m=0$ ចំពោះគ្រប់ $m>n$ ដឺក្រេ $a(x)$ នៃកំណត់សរសេរដោយ $\deg a(x)$ ។

ឧទហរណ៍១៖ $1+2x-3x^2+x^3$ ជាពហុធាមានដឺក្រេបី។

- បើ $a(x)$ មានដឺក្រេសូន្យនោះគេបាន $a(x)=a_0$
- បើពីរពហុធា $a(x)$ និង $b(x)$ គ្នា $a(x)=b(x)\Rightarrow n=m$ និង

  $a_k=b_k,\forall k\in\{0,1,\ldots\}$ នោះគេបាន $a(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k=\sum_{k=0}^{n}b_kx^k=b(x)$
- បើ A មានធាតុណឺតហើយ $a_n=1$ នោះ $f(x)$ ហៅថាពហុធាឯកតា(Monic polynomial) ពហុធា $\deg(0)$ ក្នុង $A[x]$ ជាធាតុទាំងឡាយពី A លើកលែងត្រង់សូន្យ។ $0\in A[x]$ ជាធាតុគ្មានដឺក្រេយើងហៅជាតុនៃ A ជាScalar ឬពហុធាថេរ។

ទ្រឹស្តីបទ១៖ គេឱ្យ $R[x]$ ជាកងពហុធា និង $f(x),g(x)$ ជាពីរពហុធាមិនសូន្យក្នុងកង $R[x]$

(i) បើ $f(x)\cdot g(x)\neq 0\Rightarrow \deg\left[f(x)\cdot g(x)\right]\leq \deg f(x)+\deg g(x)$

(ii) បើ $f(x)+g(x)\neq 0\Rightarrow \deg\left[f(x)+g(x)\right]\leq \max\{\deg f(x)+\deg g(x)\}$

សម្រាយបញ្ជាក់

(i) បើ $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$

$g(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m$

នោះ $f(x)\cdot g(x)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+\ldots+a_nb_mx^{n+m}$

បើ $f(x)\cdot g(x)\neq 0$ នោះយ៉ាងហោចណាស់មានមេគុណមួយក្នុងចំណោមមេគុណនៃ

$f(x)\cdot g(x)\neq 0$ បើ $a_nb_m\neq 0$
នោះ $\deg\left[f(x)\cdot g(x)\right]=n+m$
$=\deg f(x)+\deg g(x)$
បើ $a_nb_m=0$ (R មានតួចែកសូន្យ)
នោះគេបាន $\deg\left[f(x)\cdot g(x)\right]\leq \deg f(x)+\deg g(x)$
(ii) បើ $\deg f(x)>\deg g(x)$
នោះ $\deg\left[f(x)+g(x)\right]=\deg f(x)$
$=\max\left\{\deg f(x)+\deg g(x)\right\}$
បើ $\deg f(x)=\deg g(x)$ នោះ $f(x)+g(x)=0$
នោះគេបាន $\deg\left[f(x)+g(x)\right]\leq \max\left\{\deg f(x)+\deg g(x)\right\}$

ឧទាហរណ៍២៖ ពិនិត្យកងពហុធា $\mathbb{Z}_6[x]$
$f(x)=\bar{1}+\bar{2}x^2, g(x)=\bar{1}+\bar{3}x$
នោះ $f(x)\cdot g(x)=\bar{1}+\bar{3}x+\bar{2}x^2+\bar{6}x^3,\ \left(\bar{6}=0\right)$
$=\bar{1}+\bar{3}x+\bar{2}x$
ដូចនេះ $\deg\left[f(x)\cdot g(x)\right]=2<3=\deg f(x)+\deg g(x)$
តាង $h(x)=\bar{5}+\bar{4}x^2$ នោះ $f(x)+h(x)=\bar{6}+\bar{6}x=0$ ។

២. ផលបូក និងផលគុណនៃពហុធា

គេមាន $a(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ និង $b(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n$
នោះគេបាន $a(x)+b(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n$
បើ $n>m\Rightarrow \deg\left(a(x)+b(x)\right)\leq n$
$a(x)\cdot b(x)=(a_0\cdot b_0)+(a_0b_1+b_0a_1)x+\cdots+(a_n\cdot b_n)x^{2n}$
ផលគុណ $a(x)$ និង $b(x)$ ជាពហុធានៃ $c(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_{2n}x^{2n}$
ចំពោះ $k=\{0,\cdots,2n\}$ នោះគេបាន $c_k=\sum_{i+j=k}a_ib_j$
ចំពោះផលបូកទាំងអស់នៃ a_ib_j ចំពោះ $i+j=k$
គេបាន $\deg\left[a(x)\cdot b(x)\right]\leq \deg a(x)+\deg b(x)$
គេតាង $A[x]$ ជាសំណុំនៃពហុធាទាំងអស់នៅក្នុងកង A ។

ទ្រឹស្តីបទ១២៖ តាង A ជាកងមានលក្ខណៈត្រឡប់ដែលមានធាតុណឺត។ នោះ $A[x]$ ជាកងមានលក្ខណៈត្រឡប់ដែលមានធាតុណឺតដែរ។

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងត្រូវបង្ហាញថា $A[x]$ បំពេញគ្រប់ស្វ័យសត្យទាំងអស់នៃកង
តាង $a(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$

$b(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n$

និង $c(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n$

(i) លក្ខណៈត្រឡប់

$$a(x)+b(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n$$
$$=(b_0+a_0)+(b_1+a_1)x+\cdots+(b_n+a_n)x^n$$
$$=b(x)+a(x)$$

លក្ខណៈផ្តុំ

$$a(x)+[b(x)+c(x)]=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\Big[\big(b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n\big)$$
$$+\big(c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n\big)\Big]$$
$$=\Big[\big(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\big)+\big(b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n\big)\Big]$$
$$+c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n$$
$$=[a(x)+b(x)]+c(x)$$

(ii): ធាតុប្រាស

$$-a(x)=(-a_0)+(-a_1)x+\cdots+(-a_n)x^n\in A[x]$$

(iii) លក្ខណៈផ្តុំចំពោះប្រមាណវិធីគុណ

តាង $b(x)c(x)=d(x)=d_0+d_1x+\cdots+d_nx^n$

$$\Rightarrow d_k=\sum_{i+j=k}b_ic_j$$

នោះគេបាន $a(x)[b(x)\cdot c(x)]=a(x)\cdot d(x)=e(x)$

ដែល $e(x)=e_0+e_1x+e_2x^2+\cdots+e_{3n}x^{3n}$ មាន ℓ ជាមេគុណនៃ $a(x)\cdot d(x)$

$$e_\ell=\sum_{h+k=\ell}a_hd_k=\sum_{h+k=\ell}a_h\left(\sum_{i+j=k}b_ic_j\right)$$

នោះគេបាន $e_\ell=\sum_{i+j+h=k}a_hb_ic_j$ ចំពោះ $\ell\in\{0,\cdots,3n\}$ ជាមេគុណនៃ $a(x)[b(x)\cdot c(x)]$

សម្រាយដូចគ្នាចំពោះ $[a(x)\cdot b(x)]c(x)$ យើងឃើញថា $e_\ell=\sum_{i+j+h=k}a_hb_ic_j$

ដូចនេះ គេបាន $a(x)[b(x)\cdot c(x)]=[a(x)\cdot b(x)]c(x)$ ។

(iv) លក្ខណៈបំបែក

តាង $a(x)[b(x)+c(x)]=d(x)$ ដែល $d(x)=d_0+d_1x+\cdots+d_{2n}x^{2n}$

ចំពោះ k ជាមេគុណនៃ $a(x)[b(x)+c(x)]$ គឺ

$$d_k = \sum_{i+j=k} a_i\left(b_j + c_i\right) = \sum_{i+j=k}\left(a_i b_j + a_i c_j\right)$$
$$= \sum_{i+j=k} a_i b_j + \sum_{i+j=k} a_i c_j$$

ប៉ុន្តែ $\sum_{i+j=k} a_i b_j$ មាន k ជាមេគុណនៃ $a(x)\cdot b(x)$ និង $\sum_{i+j=k} a_i c_j$ មាន k មេគុណនៃ $a(x)\cdot b(x)$ ។

នោះគេបាន d_k ស្មើទៅនឹងមេគុណ k នៃ $a(x)\cdot b(x) + a(x)\cdot c(x)$

ដូចនេះ $a(x)\left[b(x)+c(x)\right] = a(x)b(x) + a(x)c(x)$ ។

ឧទាហរណ៍៣៖ យើងសន្មត់ថា a ជារបស់ $[a]$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}_6$ ។

តាង $f(x) = \sum_{i=0}^{3} a_i x^i = 1x^0 + 5x^1 + 3x^3$ និង $g(x) = \sum_{i=0}^{1} b_i x^i = 4x^0 + 2x^1$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}_6$ ។

ដោយមេគុណសូន្យពហុធានេះអាចកំណត់សរសេរ៖

$$f(x) = 1x^0 + 5x^1 + 0x^2 + 3x^3$$
$$g(x) = 4x^0 + 2x^1 + 0x^2 + 0x^3$$

និងតាមនិយមន័យផលបូកកាយ

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{3}\left(a_i + b_i\right)x^i$$
$$= (1+4)x^0 + (5+2x)x^1 + (0+0)x^2 + (3+0)x^3$$
$$= 5x^0 + 1x^1 + 0x^2 + 3x^3$$
$$= 5x^0 + 1x^1 + 3x^3$$

ដោយ $5+2=1$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}_6$ តាមនិយមន័យនៃផលគុណគេបាន៖

$$f(x)\cdot g(x) = \sum_{i=1}^{4} c_i x^i$$

ដែល

$$c_0 = a_0 b_0 = 1\cdot 4 = 4$$
$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_0 = 1\cdot 2 + 5\cdot 4 = 2 + 2 = 4$$
$$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 1\cdot 0 + 5\cdot 2 + 0\cdot 4 = 4$$
$$c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_1 + a_2 b_1 + a_3 b_0 = 1\cdot 0 + 5\cdot 0 + 0\cdot 2 + 3\cdot 4 = 0$$
$$c_4 = a_0 b_4 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_4 b_0$$
$$= 1\cdot 0 + 5\cdot 0 + 0\cdot 0 + 3\cdot 2 + 0\cdot 4 = 0$$

ដូចនេះ $f(x)g(x) = \left(1x^0 + 5x^1 + 3x^3\right)\left(4x^0 + 2x^1\right)$

$$= 4x^0 + 4x^1 + 4x^2 + 0x^3 + 0x^4$$
$$= 4x^0 + 4x^1 + 4x^2$$

នៅក្នុង $\mathbb{Z}_6$ ផលគុណនេះយើងអាចប្រើលក្ខណៈបំបែក

$$f(x)g(x)=(1x^0+5x^1+3x^3)(4x^0)+(1x^0+5x^1+3x^3)(2x^1)$$
$$=(4x^0+2x^1+0x^3)+(2x^1+4x^2+0x^4)$$
$$=4x^0+4x^1+4x^2$$

ទ្រឹស្តីបទ៣៖ បើ A ជាកងអាំងតែក នោះកងពហុធា $A[x]$ ក៏ជាកងអាំងតែកដែរ។

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងត្រូវបង្ហាញថាបើ $a(x)\neq b(x)\neq 0$ នោះគេបាន $a(x)b(x)\neq 0$

តាង a_n ជាមេគុណនៃ $a(x)$ និង b_m ជាមេគុណ $b(x)$

ដោយផ្អែកលើនិយមន័យ $a_m\neq 0$ និង $b_m\neq 0$ នោះគេបាន $a_n b_m\neq 0$

$\Rightarrow a(x)b(x)$ មានមេគុណខុសពីសូន្យ $(n+m)$

$\Rightarrow a(x)b(x)\neq 0$ កំណត់ដោយ $\deg(a_n b_m)$

$\Rightarrow \deg[a(x)\cdot b(x)]=\deg a(x)+\deg b(x)$

ចំណុចពិសេសនៅពេលមេគុណមាននៅក្នុងកាយ F ប៉ុន្តែ $F(x)$ មិនមែនជាកាយ

ឧទាហរណ៍៖ $[a(x)]^{-1}$ មិនមែនជាពហុធា

តាមទ្រឹស្តីបទ២ $F(x)$ ជាកងអាំងតែក

$a(x)=b(x)q(x)+r(x)$ ដែល $q(x)$ ជាផលចែកហើយ $r(x)$ ជាសំណល់

ឧទាហរណ៍៤៖ បើ x^2 ចែកនឹង $x-2$ នោះគេបាន $\underbrace{x^2}_{a(x)}=\underbrace{(x-2)}_{b(x)}\underbrace{(x+2)}_{q(x)}+\underbrace{4}_{r(x)}$ ។

ទ្រឹស្តីបទ៤៖ បើ $a(x)$ និង $b(x)$ ជាពហុធានៅលើកង F និង $b(x)\neq 0$ មានពហុធា $q(x)$ និង $r(x)$ នៅលើ F នោះគេបាន $a(x)=b(x)\cdot q(x)+r(x)$ និង $r(x)=0$ ឬ $\deg r(x)<\deg b(x)$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង $b(x)$ ជាសំណល់មិនប្រែប្រួល យើងត្រូវបង្ហាញថាគ្រប់ $a(x)$ ត្រូវបំពេញលក្ខខណ្ឌដូចខាងក្រោម៖

មានពហុធា $q(x)$ និង $r(x)$ នៅលើ F នោះគេបាន $a(x)=b(x)\cdot q(x)+r(x)$

និង $r(x)=0$ ឬ $\deg r(x)<\deg b(x)$

ឧបមាថា $\exists a(x)\neq b(x)q(x)+r(x), r(x)=0, \deg r(x)<\deg b(x)$

$a(x)\neq 0,\ 0=0\cdot b(x)+0$ ត្រូវបានបំពេញលក្ខខណ្ឌ

តាង $a(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$

$\quad b(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$

យើងកំណត់ពហុធា $A(x)=a(x)-\dfrac{a_n}{b_m}x^{n-m}b(x)$

$$=a(x)-\left[b_0\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}+b_1\frac{a_n}{b_m}x^{n-m+1}+\cdots+\underbrace{b_m\frac{a_n}{b_m}x^{n-m+m}}_{a_nx^n}\right]$$

កន្សោមនេះគឺវាខុសគ្នានៃពហុធាពីរទាំងដឺក្រេ n និងទាំងតួនៃ a_nx^n

នោះគេបាន $A(x)$ មានដឺក្រេតូចជាង n នោះគេបាន $A(x)$ ត្រូវបានបំពេញលក្ខខណ្ឌ

$\Rightarrow \exists p(x),r(x): A(x)=b(x)p(x)+r(x), r(x)=0$ ឬ $\deg r(x)<\deg b(x)$

$$a(x)=A(x)+\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}b(x)$$

$$=b(x)p(x)+r(x)+\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}b(x)$$

$$=b(x)\left[p(x)+\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}\right]+r(x)$$

$$=b(x)q(x)+r(x)$$

នោះ $a(x)$ ត្រូវបានបំពេញលក្ខខណ្ឌដែលគេឱ្យ ប៉ុន្តែវាជាសំណើផ្ទុយនឹងលក្ខខណ្ឌ

ដូចនេះ គ្រប់ $a(x)$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ។

ឧទាហរណ៍៥៖ គេតាង $a(x)=2x^2+3x+1$ និង $b(x)=x^3+5x^2+x$ ។

ចូរគណនា $a(x)+b(x), a(x)-b(x)$ និង $a(x)\cdot b(x)$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}[x],\mathbb{Z}_5[x],\mathbb{Z}_6[x]$ និង $\mathbb{Z}_7[x]$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $a(x)=2x^2+3x+1$ និង $b(x)=x^3+5x^2+x$ នោះគេបាន

$$a(x)+b(x)=x^3+7x^2+4x+1$$

$$a(x)-b(x)=-x^3-2x^2+2x+1$$

$$a(x)\cdot b(x)=2x^5+13x^4+18x+8x^2+x$$

យើងគណនា $a(x)\cdot b(x)$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}_5[x]$

$$a(x)b(x)=(2x^2+3x+1)(x^3+5x^2+x)=2x^5+3x^4+3x^3+3x+x$$

$\Rightarrow a(x)\cdot b(x)=2x^5+3x^4+3x^3+3x+x$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}_5[x]$

យើងគណនា $a(x)\cdot b(x)$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}_6[x]$

$$a(x)\cdot b(x)=(2x^2+3x+1)(x^3+5x^2+x)=2x^5+13x^4+18x^3+8x^2+x$$

ប៉ុន្តែមេគុណគឺក្នុង $\mathbb{Z}_6$ និងនៅក្នុង $\mathbb{Z}_6$, $13=6$ $\quad 18=4$ និង $8=2$

$\Rightarrow a(x)\cdot b(x)=2x^5+x^4+2x^2+x$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}_6[x]$

យើងគណនា $a(x)\cdot b(x)$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}_7[x]$

$a(x)\cdot b(x)=(2x^2+3x+1)(x^3+5x^2+x)=2x^5+13x^4+18x^3+8x^2+x$

ប៉ុន្តែមេគុណគឺក្នុង $\mathbb{Z}_7$ និងនៅក្នុង $\mathbb{Z}_7$, $13=1$ $18=0$ និង $8=1$

$\Rightarrow a(x)\cdot b(x)=2x^5+6x^4+4x^3+x^2+x$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}_7[x]$

ឧទាហរណ៍៦៖ ចូររក $q(x)$ និង $r(x)$ បើ x^3+x^2+x+1 ចែកនឹង x^2+3x+2 នៅក្នុង $\mathbb{Z}[x]$ និង $\mathbb{Z}_5[x]$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $a(x)=x^3+x^2+x+1$ និង $b(x)=x^2+3x+2$

យើងធ្វើប្រមាណវិធីចែកដូចខាងក្រោម

$$\begin{array}{r|l} x^3+x^2+x+1 & x^2+3x+2 \\ -\ \ x^3+3x^2+2x & \overline{x-2} \\ \hline -2x^2-x+1 & \\ -\ \ -2x^2-6x-4 & \\ \hline 5x+5 & \end{array}$$

គេបាន $q(x)=x-2$ និង $r(x)=5x+5$

ឧទាហរណ៍៧៖ តើ $x^8+1=x^3+1$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}_5[x]$ ដែរឬទេ ?

ដំណោះស្រាយ

$x^8+1=x^3+1$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}_5[x]$

$2^3+1=8+1=9=4$ (នៅក្នុង $\mathbb{Z}_5$)

$2^8+1=256+1=257=2$ (នៅក្នុង $\mathbb{Z}_5$)

$\Rightarrow x^3+1\neq x^8+1$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}_5[x]$

ឧទាហរណ៍៨៖ ចូរឱ្យឧទាហរណ៍នៅក្នុង $\mathbb{Z}_4[x],\mathbb{Z}_6[x]$ និង $\mathbb{Z}_9[x]$ នៃពហុធា $a(x)$ និង $b(x)$ ដែល $\deg[a(x)\cdot b(x)]<\deg a(x)+\deg b(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ឧទាហរណ៍នៅក្នុង $\mathbb{Z}_4[x],\mathbb{Z}_6[x]$ និង $\mathbb{Z}_9[x]$

នៅក្នុង $\mathbb{Z}_4[x]$ គេបាន $(2x^2+1)(2x^2+1)=4x^5+2x^3+2x^2+1$

$$=0x^5+2x^3+2x^2+1$$

$\Rightarrow \deg 3<\deg 5$

នៅក្នុង $\mathbb{Z}_6[x]$ គេបាន $(3x^4+1)(2x^2+1)=6x^6+3x^4+2x^2+1$

$$=3x^4+2x^2+1$$

$\Rightarrow \deg 4<\deg 6$

នៅក្នុង $\mathbb{Z}_9[x]$ គេបាន $(3x^4+1)(6x^4+1)=18x^8+9x^4+1$

$\Rightarrow \deg 4<\deg 8$

ឧទាហរណ៍៩៖ បង្ហាញថាបើ A មានលក្ខណៈ p នោះ $A[x]$ មានលក្ខណៈ p ដែរ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\forall x\in A,\exists p:\ p\cdot x=0$

តាង $A[x]$ ជាកងនៃពហុធា $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$

$\forall A_i,\exists p:p\cdot a_i=0\Rightarrow \exists p:p\cdot a(x)=0$

នោះគេបាន $A[x]$ មានលក្ខណៈ p

ឧទាហរណ៍១០៖ បង្ហាញថាបើ B ជាកងរងនៃ A នោះ $B[x]$ ជាកងរងនៃ $A[x]$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងត្រូវបង្ហាញថា $B[x]$ មានលក្ខណៈស្ថាប

(i) ផលបូក

(ii) អវិជ្ជមាន

(iii) ផលគុណ

បង្ហាញ (i) តាង $b(x),c(x)\in B[x]:b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n+c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n$

$$=(b_0+c_0)+(b_1+c_1)x+\cdots+(b_n+c_n)x^n\in B[x]$$

(ii) $-b(x)=(-b_0)+(-b_1)x+\cdots+(-b_n)x^n\Rightarrow -b(x)\in B[x]$

(iii) $b(x)\cdot c(x)=d(x),d_k=\sum_{i+j=k}b_ic_j$

តែ B ជាកង នោះ $d_k\in B,\forall k\Rightarrow d(x)\in B[x]$

តាម $(i),(ii),(iii)\Rightarrow B[x]$ ជាកងរងនៃ $A[x]$ ។

ឧទាហរណ៍១១៖ តាង A ជាកងអាំងតែក។ តាង $h:A[x]\to A$ ជាអនុវត្តន៍គ្រប់ពហុធាទៅមេគុណថេរដែល $h(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)=a_0$ ។ បង្ហាញថា h គឺជាអូម៉ូម៉ក់ភីស និងរកKernel របស់វា។

ដំណោះស្រាយ

(i) $h[a(x)+b(x)]=h[(a_0+b_0)+(a_1+b_1)+\cdots+(a_n+b_n)]$

$$=a_0+b=h(a(x))+h(b(x))$$

(ii) $h[a(x)\cdot b(x)]=h[c(x)],\ c_k=\sum_{i+j=k}a_ib_j$

$h[c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n]=c_0=a_0b_0=h(a(x))h(b(x))$

$a\in A,\exists a(x)\in A[x]:A[x]=a+x$

ហើយ $h(a+x)=a,\forall a\in A$

$\Rightarrow \ker = \left\{ a(x) \in A[x] : h(a(x)) = 0 \right\}$

$= \left\{ xa(x), \forall x \in A[x] \right\}$

ឧទាហរណ៍១២៖ តាង A និង B ជាកងហើយ $h: A \to B$ ជាអូម៉ូម៉កភីសជាមួយ $\ker K$ ។

កំណត់ $\bar{h}: A[x] \to B[x]$ ដោយ $\bar{h}(a(x)) = \bar{h}(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)$

$= h(a_0) + h(a_1)x + \cdots + h(a_n)x^n$

យើងអាចនិយាយបានថា $\bar{h}$ ជាកំណើនដោយ h

ក. បង្ហាញថា $\bar{h}$ ជាអូម៉ូម៉កភីសពី $A[x]$ ទៅ $B[x]$ ។

ខ. រក $\ker \overline{K}$ នៃ $\bar{h}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថាជាអូម៉ូម៉កភីសពី $A[x]$ ទៅ $B[x]$

$(i)\ \bar{h}(a(x) + b(x)) = \bar{h}((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n)$

$= h(a_0 + b_0) + h(a_1 + b_1)x + \cdots + h(a_n + b_n)x^n$

$= h(a_0) + h(a_1)x + \cdots + h(a_n)x^n + h(b_0) + h(b_1)x + \cdots + h(b_n)x^n$

$= \bar{h}(a(x)) + \bar{h}(b(x))$

$(ii)\ h(a(x) \cdot b(x)) = \bar{h}(c(x)) = \bar{h}(c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n)$

$= h(c_0) + h(c_1)x + \cdots + h(c_n)x^n$

$$h(c_k) = h\left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right)$$

$$= \sum_{i+j=k} h(a_i) h(b_j), \forall h$$

$$= \bar{h}(a(x)) \cdot \bar{h}(b(x))$$

ដូចនេះ $\bar{h}$ ជាអូម៉ូម៉កភីសពី $A[x]$ ទៅ $B[x]$ ។

ខ. រក $\ker \overline{K}$ នៃ $\bar{h}$

$a(x)$ ដូចនោះ $\bar{h}(a(x)) = 0$ ជាពហុធាសូន្យនៅក្នុង $B[x]$

នោះគេបាន $\bar{h}(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) = 0$

$\Rightarrow \ker \bar{h} \left\{ a(x) : h(a_i) = 0 \right\}, a_i \in \ker h$

៥.២.ការដាក់ជាផលគុណកត្តានៃពហុធាមួយអថេរ

១. អ៊ីដេអាល់នៅក្នុងកងពហុធា

ទ្រឹស្តីបទ៩៥៖ គ្រប់អ៊ីដេអាល់នៃ $F[x]$ គឺជាគោល។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង J ជាអ៊ីដេអាល់នៃ $F[x]$

បើ J ថេរមានតែពហុធាសូន្យនោះ $J=\langle 0\rangle$

បើ J មាន $a(x)\neq 0$

តាង $b(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេតូចបំផុតនៅក្នុង J យើងនឹងបង្ហាញថា $J=\langle b(x)\rangle$

តាង $a(x)\in J$ ជាតំណាងចែកមាន $q(x),r(x)$ ដែល $r(x)=0$ ឬ $\deg r(x)<\deg b(x)$

$$a(x)=b(x)\cdot q(x)+r(x)$$

$\Rightarrow r(x)=a(x)-b(x)\cdot q(x)\in J$

បើ $r(x)\neq 0,\deg r(x)<\deg b(x)$ ប៉ុន្តែវាមិនអាចទៅរួចទេពីព្រោះ $b(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេ

តូចបំផុតនៅក្នុង J នោះគេបាន $r(x)=0$

$\Rightarrow a(x)=b(x)\cdot q(x)$

ដូច្នេះ $a(x)$ ជាពហុគុណនៃ $b(x)$

$\Rightarrow J=\langle b(x)\rangle$ នោះគេបានគ្រប់អ៊ីដេអាល់នៃ $F[x]$ ជាគោល។

២. ពហុធានៅលើកាយ

បើ F ជាកាយនោះ $F[x]$ មិនអាចជាកាយទេ

តាង $a(x)$ និង $b(x)$ នៅក្នុង $F[x]$ យើងអាចនិយាយបានថា $b(x)$ ជាពហុគុណនៃ $a(x)$

នោះគេបាន $a(x)/b(x)$

$$\Rightarrow b(x)=a(x)\cdot s(x)$$

គ្រប់ពហុធាថេរ $c\neq 0$ ចែកគ្រប់ពហុធា $a(x)$

$$a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=c\left(\frac{a_0}{c}+\frac{a_1x}{c}+\cdots+\frac{a_nx^n}{c}\right)$$

ដូច្នេះ $c/a(x)$។

ពហុធា $a(x)$ គឺប្រាស លុះត្រាតែវាជាតួចែកនៃពហុធាមានជាតុណឹត 1។

ប៉ុន្តែបើ $a(x)\cdot b(x)=1$ នោះគេបានទាំង $a(x)$ និង $b(x)$ មានដឺក្រេសូន្យ

$\Rightarrow a(x)=a,b(x)=b$ ដែល $ab=1$ នោះជាតុប្រាសនៃ $F[x]$ ជាពហុធាមិនសូន្យ។

បើ $a(x)\neq 0,b(x)\neq 0$ មានទំនាក់ទំនងគ្នា(Associate)លុះត្រាតែ $a(x)|b(x)$ និង

$b(x)|a(x)$

$\Rightarrow a(x)=b(x)c(x)$

$\quad b(x)=a(x)d(x)$

$\Rightarrow a(x)=a(x)d(x)c(x)$

$\Rightarrow d(x)c(x)=1$

ពីព្រោះ $F[x]$ ជាកងអាំងតែក នោះគេបាន $a(x)$ និង $b(x)$ ជាពហុគុណថេរនៃកន្សោម

បើ $a(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+x^n$ មានទំនាក់ទំនងគ្នា(Associate)នៃ $a(x)$ ជាពហុធា

មិនសូន្យ។

$$\frac{a_0}{a_n}+\frac{a_1}{a_n}x+\frac{a_2}{a_n}x^2+\cdots+x^n=\frac{1}{a_n}a(x)$$

ដូច្នេះ រាល់ពហុធាដែលមិនសូន្យ $a(x)$មានម៉ូនិចតែមួយគត់។

ឧទាហរណ៍១៣៖ ចូរពិនិត្យលើពហុធាលើកង$(\mathrm{I}_8,+_8,\times_8)$ដែល៖

$f(x)=2+6x+4x^2, g(x)=2x+4x^2, h(x)=2+4x$

និងរក (i) $\deg\left[f(x)+g(x)\right]$

(ii) $\deg\left[f(x)\cdot g(x)\right]$

(iii) $\deg\left[h(x)\cdot h(x)\right]$

ដំណោះស្រាយ

(i) យើងមាន

$$\begin{aligned}f(x)+g(x)&=\left(2+6x+4x^2\right)+\left(0+2x+4x\right)\\&=\left(2+_8 0\right)+\left(6+_8 2\right)x+\left(4+_8 4\right)x^2\\&=2+0x+0x^2=2\end{aligned}$$

ដូចនេះ $f(x)+g(x)$ជាពហុធាមិនសូន្យ និងមាន$\deg\left[f(x)+g(x)\right]=0$ ។

(ii) យើងមាន

$f(x)\cdot g(x)=\left(2+6x+4x^2\right)\left(2x+4x^2\right)$

$=\left(2\times_8 2\right)x+\left[\left(2\times_8 4\right)+_8\left(6\times_8 2\right)\right]x^2+\left[\left(6\times_8 4\right)+_8\left(4\times_8 2\right)\right]x^3+\left(4\times_8 4\right)x^4$

$=4x+\left(0+_8 4\right)x^2+\left(0+_8 0\right)x^3+0x^4$

$=4x+4x^2+0x^3+0x^4$

$=4x+4x^2$

ដូចនេះ $f(x)\cdot g(x)$ជាពហុធាមិនសូន្យ និងមាន$\deg\left[f(x)\cdot g(x)\right]=2$ ។

(iii) យើងមាន

$$\begin{aligned}h(x)\cdot h(x)&=(2+4x)(2+4x)\\&=\left(2\times_8 2\right)+\left[\left(2\times_8 4\right)+_8\left(4\times_8 2\right)\right]x+\left(4\times_8 4\right)x^2\\&=4+\left(0+_8 0\right)x+0x^2\\&=4+0\cdot x+0\cdot x^2=4\end{aligned}$$

ដូចនេះ $h(x)\cdot h(x)$ជាពហុធាមិនសូន្យ និងមាន$\deg\left[h(x)\cdot h(x)\right]=0$ ។

៣. តួចែករួមធំបំផុត (Greatest Common Divisor)

និយមន័យ៖ ពហុធា $d(x)$ហៅថាតួចចែករួមធំបំផុត(GCD)នៃ$a(x)$ និង$b(x)$បើ៖

(i) $d(x)\mid a(x)$ និង $d(x)\mid b(x)$

(ii) $\forall u(x)\in F[x]$ បើ $u(x)\mid a(x)$ និង $u(x)\mid b(x)$ នោះគេបាន $u(x)\mid d(x)$

ជាតួចែករួមធំបំផុតពីរផ្សេងគ្នាហើយមានទំនាក់ទំនងនឹងគ្នា(Associate)។

តាមនិយមន័យនេះ បើ GCD ពីរផ្សេងគ្នានៃ $a(x)$ និង $b(x)$ ចែកដាច់ទៅវិញទៅមក នោះវាគឺជាទំនាក់ទំនង(Associate) នៃ GCD ទាំងអស់ដែលអាចធ្វើទៅបាន $a(x)$ និង $b(x)$ យើងជ្រើសរើសម៉ូនិកមួយ ហៅវាថា GCD នៃ $a(x)$ និង $b(x)$ ហើយកំណត់វាដោយ $GCD\left[a(x),b(x)\right]$។

ទ្រឹស្តីបទ៦៖ បើ $a(x)\neq 0, b(x)\neq 0$ នៅក្នុង $F[x]$ នោះគេបាន $GCD(d(x))$ ជាបន្សំលីនេអ៊ែរ $d(x)=r(x)a(x)+s(x)b(x)$ ដែល $r(x)$ និង $s(x)$ នៅក្នុង $F[x]$។

សម្រាយបញ្ជាក់

បើ J ជាសំណុំទាំងអស់នៃបន្សំលីនេអ៊ែរ $u(x)a(x)+v(x)b(x)$ ដែល $u(x)$ និង $v(x)$ ជាសំណុំតម្លៃនៅលើ $F[x]$ នោះគេបាន J អ៊ីដេអាល់នៃ $F[x]=\langle d(x)\rangle$ ។

គេបាន $a(x)=1\cdot a(x)+0\cdot b(x)\in J$

$$b(x)=0\cdot a(x)+1\cdot b(x)\in J$$

គ្រប់ធាតុនៃ J ជាពហុគុណនៃ $d(x)\Rightarrow d(x)|a(x)$ និង $d(x)|b(x)\ \ (i)$

បើ $k(x)$ ជាតួចែករួមនៃ $a(x)$ និង $b(x)$ $\Rightarrow \exists f(x),g(x):\ a(x)=k(x)\cdot f(x)$

$$b(x)=k(x)\cdot g(x)$$

បើ $d(x)\in J\Rightarrow d(x)=r(x)a(x)+s(x)b(x)$

$$=r(x)k(x)f(x)+s(x)k(x)g(x)$$

$$=k(x)\left[r(x)f(x)+s(x)g(x)\right]$$

$\Rightarrow k(x)|d(x)$

- ពហុធា $a(x)$ និង $b(x)$ បឋមរវាងគ្នា បើ $GCD\left[a(x),b(x)\right]=1$។

ពហុធា $a(x)$ នៃដឺក្រេវិជ្ជមានអាចសម្រួលបានលើ $F[x]$ បើពហុធាទាំងពីរ $b(x)$ និង $c(x)$ នៅក្នុង $F[x]$ ហើយដឺក្រេវិជ្ជមាននោះគេបាន $a(x)=b(x)c(x)$។

ដោយសារតែ $b(x)$ និង $c(x)$ ទាំងពីរមានដឺក្រេវិជ្ជមាន ហើយផលបូកនៃដឺក្រេរបស់ពួកគេគឺ $\deg a(x)$ នីមួយៗមានដឺក្រេតិចជាង $\deg a(x)$។

អាល់កូរីតអឺគ្លីដ

$$g(x)=f(x)q_0(x)+r_1(x),\qquad \deg r_1(x)<\deg f(x)$$

$$f(x)=r_1(x)q_1(x)+r_2(x),\qquad \deg r_2(x)<\deg r_1(x)$$

$$r_1(x)=r_2(x)q_2(x)+r_3(x),\qquad \deg r_3(x)<\deg r_2(x)$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$r_{n-2}(x)=r_{n-1}(x)q_{n-1}(x)+r(x),\qquad \deg r_n(x)<\deg r_{n-1}(x)$$

$$r_{n-1}(x)=r_n(x)q_n(x)$$

ឧទាហរណ៍១៤៖ ចូររក GCD នៃ $f(x)=3x^3+5x^2+6x$ និង $g(x)=4x^4+2x^3+6x^2+4x+5$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}_7[x]$។ ការចែកនៃ $f(x)$ និង $g(x)$

ឱ្យដោយផលចែកនៃ $q_0(x)=6x$ និងសំណល់ $r_1(x)=5x^2+4x+5$ យើងមាន

$$g(x)=f(x)\cdot(6x)+\left(5x^2+4x+5\right)$$

ចែក $f(x)$ ដោយ $r_1(x)$ យើងបាន

$$f(x)=r_1(x)\cdot(2x+5)+(4x+3)$$

ដូច្នេះ $q_1(x)=2x+5$ និង $r_2(x)=4x+3$ នៅក្នុងវិធីចែកអាល់កូរីតអឺគ្លីដ(Euclidian Algorithm)។

ការចែកនៃ $r_1(x)$ ដោយ $r_2(x)$ នោះគេបាន៖

$$r_1(x)=r_2(x)\cdot(3x+4)$$

នោះ $r_2(x)=4x+3$ ជាសំណល់ចុងក្រោយមិនសូន្យ និង $GCD\left[f(x),g(x)\right]$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}_7[x]$ គឺ

$$\begin{aligned}d(x)&=4^{-1}(4x+3)\\&=2(4x+3)\\&=x+6\end{aligned}$$

វិធីចែកអាល់កូរីតអឺគ្លីដអាចត្រូវបានប្រើដើម្បីរកពហុធា $s(x)$ និង $t(x)$ ដែល

$$d(x)=f(x)s(x)+g(x)t(x)$$

នេះជាការបង្ហាញនៅក្នុងឧទាហរណ៍១៤។

ឧទាហរណ៍១៥៖ ដូចនៅក្នុងឧទាហរណ៍ ១៤ តាង $f(x)=3x^3+5x^2+6x$ និង $g(x)=4x^4+2x^3+6x^2+4x+5$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}_7[x]$ ។ តាមឧទាហរណ៍១៤ GCD នៃ $f(x)$ និង $g(x)$ គឺ $d(x)=x+6$ ។ ចូររកពហុធា $s(x)$ និង $t(x)$ ដែល

$$d(x)=f(x)s(x)+g(x)t(x)$$

ដំណោះស្រាយ

យើងដោះស្រាយចំពោះសំណល់នៅក្នុងវិធីចែកអាល់កូរីតអឺគ្លីដ(ដូចក្នុងឧទាហរណ៍១៣)ដូចខាងក្រោម៖

$$\begin{aligned}r_2(x)&=f(x)-r_1(x)(2x+5)\\r_1(x)&=g(x)-f(x)(6x)\end{aligned}$$

ជំនួស $r_1(x)$ នៅក្នុងសមីការដំបូងយើងបាន

$$\begin{aligned}r_2(x)&=f(x)-\left[g(x)-f(x)(6x)\right](2x+5)\\&=f(x)+f(x)(6x)(2x+5)-g(x)(2x+5)\\&=f(x)\left[1+(6x)(2x+5)\right]+g(x)(-2x-5)\\&=f(x)\left(5x^2+2x+1\right)+g(x)(5x+2)\end{aligned}$$

ដើម្បីបង្ហាញ $d(x)=4^{-1}r_2(x)=2r_2(x)$ ជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃ $f(x)$ និង $g(x)$ យើងគុណអង្គទាំងពីរនឹង $4^{-1}=2$ គេបាន

$$d(x)=2r_2(x)=f(x)(2)\left(5x^2+2x+1\right)+g(x)(2)(5x+2)$$

$$d(x)=f(x)\left(3x^2+4x+2\right)+g(x)(3x+4)$$

ដូចនេះ $s(x)=3x^2+4x+2$ និង $t(x)=3x+4$ ។

ឧទាហរណ៍១៦៖ បង្ហាញថាពហុធា x^2+x+4 ជាពហុធាមិនអាចសម្រួលបានលើកាយ F នៃចំនួនគត់ mod11 ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមានកាយ F គឺ $\left(\{0,1,\ldots,10\},+_{10},\times_{11}\right)$

តាង $f(x)=x^2+x+4$

បើ $a\in F$ នោះ a^n អាចសរសេរ $a\times_{11}a\times_{11}a\times_{11}a\ldots$ រហូតដល់ n តួ

គេបាន $f(0)=0^2+_{11}0+_{11}4=4,\ f(1)=1^2+_{11}1+_{11}4=6$

$f(2)=2^2+_{11}2+_{11}4=10,\ f(3)=3^2+_{11}3+_{11}4=5,\ f(4)=2$

$f(5)=1,\ f(6)=6^2+_{11}6+_{11}4=2,\ f(7)=5,\ f(8)=10,\ f(9)=6,\ f(10)=4$

ដោយ $f(a)\neq 0,\forall a\in F$ នោះគេបានទ្រឹស្តីបទផលគុណ $x-a$ មិនអាចចែក $f(x),\forall a\in F$ ។ គេបាន $f(x)$ មិនមានតួចែកផ្ទាល់នៅក្នុង $F[x]$ ទេ។

ដូចនេះ $f(x)$ មិនអាចសម្រួលបាន។

ឧទាហរណ៍១៧៖ ចូររក GCD នៃ

ក. $9, 15, 7, 10$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}$

ខ. $11+7i, 18-i$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}[i]$

គ. $x^4+x^3+2x^2+x+1,\ \ x^2+1,\ x^6+x^3+x+1$ នៅក្នុង $\mathbb{Q}[x]$

ដំណោះស្រាយ

ក. យើងមាន

$15=9\times1+6 \qquad 10=7\times1+3$

$9=6\times1+3 \qquad 7=3\times2+1$

$6=3\times2+0 \qquad 3=1\times3+0$

$\Rightarrow GCD(9,15)=3$ និង $GCD(7,10)=1$

ខ. ចែក $18-i$ ដោយ $11+7i$ យើងបាន៖

$$\frac{18-i}{11+7i}=\frac{(18-i)(11-7i)}{(11+7i)(11-7i)}=\frac{191}{170}-\frac{137}{170}i$$

$$=\left(1+\frac{21}{170}\right)-\left(1-\frac{33}{170}\right)i$$

$$=(1-i)+\left(\frac{21}{170}+\frac{33}{170}i\right)$$

$\Rightarrow 18-i=(11+7i)(1-i)+3i \quad (1)$

ចែក $11+7i$ ដោយ $3i$ យើងបាន៖

$$\frac{11+7i}{3i}=\frac{(11+7i)(-3i)}{(3i)(-3i)}=\frac{21}{9}-\frac{33}{9}i$$

$$=\frac{7}{3}-\frac{11}{3}i$$

$$=(2-3i)+\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i\right)$$

$$\Rightarrow(11+7i)=3i(2-3i)+(2+i)\qquad(2)$$

ចំពោះ $\frac{3i}{2+i}=\frac{3i(2-i)}{(2+i)(2-i)}=i+\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i\right)$

$$\Rightarrow\qquad 3i=i(2+i)+\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i\right)(2+i)$$

$$3i=i(2+i)+(1+i)\qquad(3)$$

ចែក $(2+i)$ ដោយ $(1+i)$ យើងបាន៖

$$\frac{2+i}{1+i}=\frac{(2+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$=1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$

$$\Rightarrow 2+i=(1+i)\cdot1+1\qquad(4)$$

ចែក $1+i$ ដោយ 1 យើងមាន $(1+i)=1\cdot(1+i)+0$

$\Rightarrow GCD(11+7i,18-i)=1$

បើយើងធ្វើត្រឡប់ពី (4) ទៅ (1) វិញយើងបាន៖

$$1=(11+7i)(6-6i)-(6-6i)(18-i)$$

ដូចនេះ យើងអាចបង្ហាញ GCD នៅក្នុងទម្រង់ $\lambda a+\mu b$ ។

គ. ដោយចែកដាក់ស្តែងយើងបាន

$$x^4+x^3+2x^2+x+1=(x^3-1)(x+1)+(2x^2+2x+2)$$

ដូចគ្នាដែរ $x^3-1=(2x^2+2x+2)\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)+0$

នោះ GCD របស់វាគឺ $2x^2+2x+2$

កំណត់ចំណាំថា៖

$x^6+x^3+x+1=(x^2+1)x^2+(x+1)$ (x^6+x^3+x+1 ចែកដោយ x^2+1)

$x^2+1=(x+1)(x-1)+2$ (x^2+1 ចែកដោយ $x+1$)

$x+1=2\left(\frac{1}{2}x\right)+1$ ($x+1$ ចែកដោយ 2)

$2 = 1\times 2 + 0$ (2 ចែកដោយ 1)

ដូចនេះ $GCD\left(x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1,\ \ x^2 + 1, x^6 + x^3 + x + 1\right) = 1$ ។

ទ្រឹស្តីបទ៧៖ ទ្រឹស្តីបទសំណល់

គេឱ្យ R ជាកាយត្រឡប់ដែលមានធាតុណឺតមួយ។ ចំពោះ $f(x)\in R[x]$ និង $a\in R, \exists q(x)\in R[x]$ ដែល $f(x) = (x-a)q(x) + f(a)$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង $g(x) = x - a$

$\exists q(x), r(x)$ តែមួយគត់របស់ $R[x]$ ដែល $f(x) = (x-a)q(x) + f(a)$ $(*)$

ដែល $r(x) = 0$ ឬ $\deg r(x) < 1$ (ព្រោះ $\deg g(x) = \deg(x-a) = 1$)

គេបាន $r(x)$ ជាពហុធាថេរ បើ $r(x) = d$

ជំនួស x ដោយ a ក្នុង $(*)$ គេបាន

$$f(x) = (a-a)q(a) + d$$

$$\Rightarrow d = f(a)$$

ដូចនេះ $f(x) = (x-a)q(x) + f(a)$ ។

កូរ៉ូលែ១៖ (ទ្រឹស្តីបទផលគុណកត្តា) គេឱ្យ R ជាកងត្រឡប់មានធាតុណឺត។ ចំពោះ $f(x)\in R[x]$ និង $a\in R, x-a$ ចែកដាច់ $f(x)$ លុះត្រាតែ a ជាឫសនៃ $f(x)$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ឧបមាថា $(x-a)\,|\, f(x)$ នោះមាន $q(x)\in R[x]$ ដែល $f(x) = (x-a)q(x)$

គេបាន $f(a) = (a-a)q(a)$

$= 0$

នោះ a ជាឫសនៃ $f(x)$

ផ្ទុយមកវិញបើ a ជាឫសនៃ $f(x)$ តាមទ្រឹស្តីបទសំណល់គេបាន $f(a) = 0$

យើងបាន $f(x) = (x-a)q(x)$ ឬ $(x-a)\,|\, f(x)$ ។

ទ្រឹស្តីបទ៨៖ គេឱ្យ R ជាកងអាំងតែក និង $f(x)$ ជាពហុធាមិនសូន្យក្នុង $R[x]$ ដែលមានដឺក្រេ n ។ នោះ $f(x)$ មានចំនួនឫសយ៉ាងច្រើន n ក្នុង R ។

សម្រាយបញ្ជាក់

បើ $\deg f(x) = 0$ នោះ $f(x)$ ជាពហុធាថេរ

$f(x) = c \neq 0, c\in R$

$\Rightarrow f(x)$ គ្មានឫសក្នុង R (1)

ឧបមាថាពិតចំពោះពហុធាដែលមានដឺក្រេតូចជាង n ដែល $n > 0$ (2)

ចំពោះ $\deg f(x) = n$

បើ $f(x)$ គ្មានឫសក្នុង R ទ្រឹស្តីបទពិត

ឧបមាថា $r\in R$ ជាឫសនៃ $f(x)$

តាមកូរ៉ូលែ $f(x)=(x-r)q(x)$ ដែល $\deg q(x)=n-1$

បើ។$\exists r'\in R$ដែលr'ជាឫសមួយទៀតនៃ $f(x)$នោះគេបាន$0=f(r')=(r'-r)q(r')$

ដោយ $r'\neq r$ និង R ជាកងអាំងតែក (Integral domain)

$$q(r')=0$$

ដូច្នេះ ឫសផ្សេងទៀតនៃ $f(x)$ក៏ជាឫសនៃ$q(x)$ដែរ តាម(2) $\deg q(x)=n-1$នោះ$q(x)$ មានឫសយ៉ាងច្រើន$n-1$។

ដូចនេះ $f(x)$មានឫសទាំងអស់យ៉ាងច្រើនnក្នុងR។

ឡេម៉ាអឺគ្លីដចំពោះពហុធា៖ តាង $p(x)$ មិនអាចសម្រួលបាន។ បើ $p(x)|a(x)b(x)$ នោះ $p(x)|a(x)$ ឬ $p(x)|b(x)$។

កូរ៉ូលែ២៖ តាង $p(x)$មិនអាចសម្រួលបាន។ បើ $p(x)|a_1(x)a_2(x)\cdots a_n(x)$នោះ $p(x)|a_i(x)$ ។

កូរ៉ូលែ៣៖ តាង$q_1(x),q_2(x),\ldots,q_r(x)$ និង $p(x)$ជាពហុធាម៉ូនិកមិនអាចសម្រួលបាន។ បើ $p(x)|q_1(x),q_2(x),\ldots,q_r(x)$នោះ $p(x)=q_i(x)$។

ទ្រឹស្តីបទ៩៖ ការដាក់ជាផលគុណកត្តាដែលមិនអាចសម្រួលបាន

គ្រប់ពហុធា$a(x)\in F[x]:a(x)=kp_1(x)p_2(x)\ldots p_r(x)$

ដែល $p_1(x),p_2(x),\ldots,p_r(x)$ជាពហុធាម៉ូនិកដែលមិនអាចសម្រួលបាននៃ$F[x]$។

សម្រាយបញ្ជាក់

ប្រសិនបើមិនពិតយើងយកពហុធា$a(x)$មានដឺក្រេតូចជាងគេ

ដែល$a(x)\neq p_1(x),p_2(x),\ldots,p_r(x)$

បើ$a(x)$អាចសម្រួលបាននោះគេបាន$a(x)=b(x)c(x)$ដឺក្រេតូចជាង$a(x)$

$\Rightarrow b(x)$ និង$c(x)$ជាផលគុណកត្តាមិនអាចសម្រួលបានវាជាសំណើផ្ទុយ ដូច្នេះវាពិត។

ទ្រឹស្តីបទ១០៖ ផលគុណកត្តាដែលមានតែមួយគត់

បើ$a(x)=kp_1(x)p_2(x)\cdots p_r(x)=eq_1(x)q_2(x)\cdots q_s(x)$

នោះគេបាន$k=e,r=s$ និង$q_i(x)=p_i(x),\forall i,j$ ។

ទ្រឹស្តីបទនព្វន្តមូលដ្ឋាន (The unique factorization theorem)៖ ពហុធាផ្សេង $f(x)$នៃដឺក្រេ $m\geq 1$ និងមេគុណនាំមុខaនៅក្នុង$F[x]$នោះគេបាន៖

$$f(x)=a[p_1(x)]^{m_1}\cdot[p_2(x)]^{m_2}\ldots[p_j(x)]^{m_j}$$

ដែល $p_i(x)$ជាពហុធាម៉ូនិកបឋមលើF និងm_iជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ ម្យ៉ាងវិញទៀតលើកលែងចំពោះលំដាប់នៃកត្តាផលគុណ នោះផលគុណកត្តាមានតែមួយគត់។

ឧទាហរណ៍១៨៖ ចូរបំបែក $f(x)=4x^4+3x^3+4x^2+4x+6$នៅលើ$\mathbb{Z}_7$ជាផលគុណនៃពហុធាបឋម។

ដំណោះស្រាយ

យើងមានមេគុណទាំងអស់ជាថ្នាក់សំណល់ថ្នាក់$\bmod 7$គេបាន៖

$$f(x)=4x^4+3x^3+4x^2+4x+6=4x^4+24x^3+4x^2+4x+20$$
$$=4\left(x^4+6x^3+x^2+x+5\right)$$
$$=4(x+1)\left(x^3+5x^2+3x+5\right)$$
$$=4(x+1)(x+3)\left(x^2+2x+4\right)$$
$$=4(x+1)(x+3)(x+3)(x+6)$$
$$=4(x+1)(x+3)^2(x+6)$$

ឧទាហរណ៍១៩៖ យើងនឹងរកឱ្យឃើញពីកត្តាដែលរៀបរាប់ពីទ្រឹស្តីបទនព្វន្តមូលដ្ឋាន(Unique Factorization Theorem) សំខាន់ចំពោះពហុធា $f(x)=2x^4+x^3+3x^2+2x+4$ នៅលើកាយ $\mathbb{Z}_5$ ។

ដំបូងយើងរកសូន្យនៃ $f(x)$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}_5$ ៖

$$f(0)=4,\quad f(1)=2,\quad f(2)=0,\quad f(3)=1,\quad f(4)=1$$

នោះត្រង់ 2 ជាសូន្យតែមួយនៃ $f(x)$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}_5$ និងទ្រឹស្តីបទនៃផលគុណកត្តា $x-2$ ជាកត្តានៃ $f(x)$ ។ ដោយចែក $x-2$ យើងបាន៖

$$f(x)=(x-2)\left(2x^3+3x+3\right)$$

នោះគេបាន 2 ជាឫសមួយនៃ $f(x)$ និងត្រូវរក $g(x)=2x^3+3x+3$ នៃចំពោះ $g(x)=0$ នោះគេបាន 2 ជាដែលធ្វើឱ្យ $g(x)$ ស្មើសូន្យចំពោះ $f(x)$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}_5$ នោះយើងរក $g(2)=0\Rightarrow(x-2)$ ជាផលគុណកត្តានៃ $g(x)$ យើងបាន

$$2x^3+3x+3=(x-2)\left(2x^2+4x+1\right)$$

និង

$$f(x)=(x-2)(x-2)\left(2x^2+4x+1\right)$$
$$=(x-2)^2\left(2x^2+4x+1\right)$$

យើងរកឃើញថា $2x^2+4x+1$ មិនអាចសម្រួលបាននៅលើ $\mathbb{Z}_5$ ដោយវាគ្មានតម្លៃណាដែលធ្វើឱ្យវាស្មើសូន្យនៅក្នុង $\mathbb{Z}_5$ ។

យើងរកមេគុណនាំមុខនៃ $f(x)$ ពីកន្សោម $2x^2+4x+1$ គេបាន៖

$$f(x)=(x-2)^2\left(2x^2+4x+1\right)$$
$$=(x-2)^2\left[2x^2+4x+(2)(3)\right]$$
$$=2(x-2)^2\left(x^2+2x+3\right)$$

ឧទាហរណ៍២០៖ ក.ពហុធា x^4-4 មិនអាចសម្រួលបានលើ $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ ។

$$x^4-4=\left(x^2-2\right)\left(x^2+2\right)=\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}i\right)\left(x-\sqrt{2}i\right)$$

ខ.ពហុធា x^6-16 មិនអាចដាក់ជាកត្តាដែលសម្រួលបានលើ $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ ។

នៅក្នុង $\mathbb{Q}$ គេបាន $x^6-16=\left(x^3-4\right)\left(x^3+4\right)$

នៅក្នុង $\mathbb{R}$ គេបាន $x^6-16=\left(x^3-4\right)\left(x^3+4\right)$

$$=\left(x-2^{\frac{2}{3}}\right)\left(x^2+2^{\frac{2}{3}}x+2^{\frac{4}{3}}\right)\left(x+2^{\frac{2}{3}}\right)\left(x^2-2^{\frac{2}{3}}x+2^{\frac{4}{3}}\right)$$

នៅក្នុង $\mathbb{C}$ គេបាន $x^6-16=\left(x+\sqrt[3]{4}\right)\left(x+\frac{2^{\frac{2}{3}}}{2}+\frac{(432)^{\frac{1}{6}}}{2}i\right)\left(x+\frac{2^{\frac{2}{3}}}{2}-\frac{(432)^{\frac{1}{6}}}{2}i\right)$

$$\left(x+2^{\frac{2}{3}}\right)\left(x-\frac{2^{\frac{2}{3}}}{2}+\frac{(432)^{\frac{1}{6}}}{2}i\right)\left(x-\frac{2^{\frac{2}{3}}}{2}-\frac{(432)^{\frac{1}{6}}}{2}i\right)$$

ឧទាហរណ៍២១៖ ចូររកគ្រប់ពហុធាដែលមិនអាចសម្រួលបាននៃដឺក្រេ ≤ 4 នៅក្នុង $\mathbb{Z}_2[x]$ ។

$\deg 0: 0, 1,\ldots$

$\deg 1: x, x+1,\ldots$

$\deg 2: x^2, x^2+1,\ldots$

$$\begin{array}{r|l} x^2+x+1 & x+1 \\ \cline{2-2} \underline{x^2+x} & x \\ +1 & \end{array}$$

$\deg 2: x^2+x+1$ មិនអាចសម្រួលបាន

$x\left(x^2+x+1\right)=x^3+x^2+x$

$(x+1)\left(x^2+x+1\right)=x^3+1$

$x^3=x\cdot x\cdot\cdot x,\ x^2(x+1)=x^3+x, x(1+x)^2=x\left(x^2+1\right)=x^3+x$

$\left(x^2+x\right)x=x^3+x^2,(x+1)^3=\left(x^2+1\right)(x+1)$

នោះ x^2+x+1 មិនអាចសម្រួលបាន។

៥.៣.ទ្រឹស្តីបទគ្រឹះនៃពីជគណិត

បើ $f(x)$ ជាពហុធានៃដឺក្រេវិជ្ជមានលើកាយនៃចំនួនកុំផ្លិច នោះ $f(x)$ មានសូន្យនៅក្នុងចំនួនកុំផ្លិច។

ទ្រឹស្តីបទ៖ ផលគុណកត្តានៅលើ $\mathbb{C}$ ។ បើ $f(x)$ ជាពហុធានៃដឺក្រេវិជ្ជមាន n លើកាយ $\mathbb{C}$ នៃចំនួនកុំផ្លិច នោះ $f(x)$ អាចដាក់ជាកត្តាដូចជា $f(x)=a\left(x-c_1\right)\left(x-c_2\right)\ldots\left(x-c_n\right)$ ដែល a ជាមេគុណនាំមុខនៃ $f(x)$ និង $c_1,c_2,\ldots,c_n$ ហើយ n ជាចំនួនកុំផ្លិចសូន្យនៃ $f(x)$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន n តាង S_n ជាសំណើនៃទ្រឹស្តីបទ

បើ $n=1$ នោះ $f(x)=ax+b, a\neq 0$ ចំនួនកុំផ្លិច $c_1=-a^{-1}b$ ជាសូន្យនៃ $f(x)$ និង

$$f(x)=ax+b=ax-ac_1=a(x-c_1)$$

ដូច្នេះ S_1 ពិត។

ឧបមាថា S_k ពិត តាង $f(x)$ ជាពហុធានៃដឺក្រេ $k+1$ នៅលើ $\mathbb{C}$

នោះ $f(x)$ មានសូន្យ c_1 នៅក្នុងចំនួនកុំផ្លិច និងតាមទ្រឹស្តីបទផលគុណកត្តាបញ្ជាក់ថា

$f(x)=(x-c_1)q(x)$ ចំពោះពហុធា $q(x)$ នៅលើ $\mathbb{C}$

ដោយ $x-c_1$ ជាម៉ូនិក $q(x)$ មានមេគុណនាំមុខដូច $f(x)$ នោះ $q(x)$ មានដឺក្រេ k

តាមកំណើនសម្មតិកម្ម $q(x)$ ជាកត្តាផលគុណដូចផលគុណនៃមេគុណនាំមុខរបស់វា និង k

កត្តាពី $x-c_1$ នោះគេបាន

$$q(x)=a(x-c_2)(x-c_3)\cdots(x-c_{k+1})$$

នោះ $$f(x)=(x-c_1)q(x)$$

$$=a(x-c_2)(x-c_3)\cdots(x-c_{k+1})$$ និង S_{k+1} ពិត

តាមទ្រឹស្តីបទគឺពិតចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ n ។

លំហាត់អនុវត្ត

១. ចូររក $q(x)$ និង $r(x)$ បើ x^3+2 ចែកនឹង $2x^2+3x+4$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}[x], \mathbb{Z}_3[x]$ និង $\mathbb{Z}_5[x]$ ។

២.បង្ហាញថាសំណើខាងក្រោមពិតនៅក្នុង $A[x]$ នៃកង A ចំពោះ n សេស

ក. $x+1$ ជាផលគុណកត្តានៃ x^n+1

ខ. $x+1$ ជាផលគុណកត្តានៃ $x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1$

៣. បង្ហាញថានៅក្នុង $\mathbb{Z}_3[x]$, $x+2$ ជាផលគុណកត្តានៃ x^m+2 ចំពោះគ្រប់ m ។ នៅក្នុង $\mathbb{Z}_n[x], x+(x-1)$ ជាផលគុណកត្តានៃ $x^m+(n-1)$ ចំពោះគ្រប់ m និង n ។

៤. បង្ហាញថាគ្មានចំនួនគត់ m ដែល $3x^2+4x+m$ ជាកត្តាផលគុណនៃ $6x^4+50$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}[x]$ ។

៥. តើចំពោះតម្លៃអ្វីនៃ n ដែល x^2+1 ជាកត្តាផលគុណនៃ x^5+5x+6 នៅក្នុង $\mathbb{Z}_n[x]$?

៦. តាង A ជាកងអាំងតែកបង្ហាញសំណើខាងក្រោម៖

- បើ $(x+1)^2=x^2+1$ នៅក្នុង $A[x]$ នោះ A ត្រូវមានលក្ខណៈ 2។
- បើ $(x+1)^4=x^4+1$ នៅក្នុង $A[x]$ នោះ A ត្រូវមានលក្ខណៈ 2។
- បើ $(x+1)^6=x^6+2x^3+1$ នៅក្នុង $A[x]$ នោះ A ត្រូវមានលក្ខណៈ 3។

៧. ចូររកឧទាហរណ៍តួចែកនៃសូន្យចំពោះដឺក្រេ $0,1$ និង 2 នៅក្នុង $\mathbb{Z}_4[x]$ ។

៨. នៅក្នុង $\mathbb{Z}_{10}[x]$, $(2x+2)(2x+2)=(2x+2)(5x^3+2x+2)$ ប៉ុន្តែ $(2x+2)$ មិនអាចសម្រួលបាននៅក្នុងសមីការ។ ចូរពន្យល់ថាហេតុអ្វីវាអាចសម្រួលបានៅក្នុង $\mathbb{Z}_{10}[x]$ ប៉ុន្តែមិនអាចនៅក្នុង $\mathbb{Z}_5[x]$ ។

៩. បើ A ជាកងអាំងតែកនៅក្នុង $A[x]$ ដែល $\deg a(x)b(x)=\deg a(x)+\deg b(x)$ ។ បង្ហាញថាបើ A មិនមែនជាកងអាំងតែក នោះគេអាចរកពហុធា $a(x)$ និង $b(x)$ ដែល $\deg a(x)b(x)<\deg a(x)+\deg b(x)$ ។

១០. ចូររកឫសការេទាំអស់នៃ x^2+x+4 នៅក្នុង $\mathbb{Z}_5[x]$ ។ បង្ហាញថានៅក្នុង $\mathbb{Z}_8[x]$ មានឫសការេជាច្រើនរាប់មិនអស់នៃ 1 ។

១១. តាង A ជាកងអាំងតែក។ បង្ហាញថាបើ A មានលក្ខណៈ3 នោះ $x+2$ ជាកត្តាគុណនៃ x^m+2 ចំពោះគ្រប់ m ។ ជាទូទៅបើ A មានលក្ខណៈ p នោះ $x+(p-1)$ ជាកត្តាគុណនៃ $x^m+(p-1), \forall m$ ។

១២. បង្ហាញថា x^2+2 មិនអាចសម្រួលបាននៅក្នុង $\mathbb{Z}_5[x]$ ។ នោះកត្តាផលគុណ x^4-4 មិនអាចសម្រួលកត្តាផលគុណបាននៅក្នុង $\mathbb{Z}_5[x]$ ។

១៣.តាង F ជាកាយ។ ចូរពន្យល់ថាអ្វីបានជាសំណួរខាងក្រោមពិតនៅក្នុង $F[x]$ ៖

ក. គ្រប់ពហុធាដឺក្រេ 1 មិនអាចសម្រួលបាន។

ខ. បើ $a(x)$ និង $b(x)$ ជាពហុធាម៉ូនិចផ្សេងៗ នោះគេមិនអាចធ្វើឱ្យរួមគ្នា (Associate) បាន។

គ. ពហុធាពីរផ្សេងគ្នាមិនអាចសម្រួលបានជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា។

១៤. តាង F ជាកាយ និង J ជាអ៊ីដេអាល់នៃ $F[x]$ ។ បង្ហាញថា៖

ក. J មានម៉ូនិចតែមួយបង្ក(Generantor)ដោយ $m(x)$។ $a(x)$ ជាពហុធាណាមួយ $a(x)\in F[x]$ គឺនៅក្នុង J លុះត្រាតែ $m(x)|a(x)$។

ខ. ពហុធាបង្កពីរនៃ J ជាAssociate។

គ. បើ $p(x)$ មិនអាចសម្រួលបាននោះ $\langle p(x)\rangle$ ជាអ៊ីដេអាល់អតិបរិមានៃ $F[x]$។

១៥. ចូរពិនិត្យពហុធានៅលើ $\mathbb{Z}_8$ ដែល $a\in[a]$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}_8$ ខាងក្រោម៖

$$f(x)=2x^3+7x+4, g(x)=4x^2+4x+6, h(x)=6x^2+3$$

ចូររកពហុធានីមួយៗជាមួយគ្រប់មេគុណនៅក្នុង $\mathbb{Z}_8$ ខាងក្រោម៖

$a.\ f(x)+g(x)$ $\qquad b.\ g(x)+h(x)$

$c.\ f(x)\cdot g(x)$ $\qquad d.\ g(x)\cdot h(x)$

$e.\ f(x)g(x)+h(x)$ $\qquad f.\ f(x)+g(x)h(x)$

$g.\ f(x)g(x)+f(x)h(x)$ $\qquad h.\ f(x)h(x)+g(x)h(x)$

១៦. ចូរពិនិត្យពហុធានៅលើ $\mathbb{Z}_9$ ដែល $a\in[a]$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}_9$ ខាងក្រោម៖

$f(x)=2x^3+7x+4,\ g(x)=4x^2+4x+6, h(x)=6x^2+3$

ចូររកពហុធានីមួយៗជាមួយគ្រប់មេគុណនៅក្នុង $\mathbb{Z}_9$ ខាងក្រោម៖

$a.\ f(x)+g(x)$ $\qquad b.\ g(x)+h(x)$

$c.\ f(x)\cdot g(x)$ $\qquad d.\ g(x)\cdot h(x)$

$e.\ f(x)g(x)+h(x)$ $\qquad f.\ f(x)+g(x)h(x)$

$g.\ f(x)g(x)+f(x)h(x)$ $\qquad h.\ f(x)h(x)+g(x)h(x)$

១៧. ក. បង្ហាញថា $I[x]=\{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n \mid a_0=2k,\forall k\in\mathbb{Z}\}$ ជាសំណុំនៃពហុធានៅក្នុង $\mathbb{Z}[x]$ ដែលមានតួសេសថេរគឺជាអ៊ីដេអាល់នៅក្នុង $\mathbb{Z}[x]$។

ខ. បង្ហាញថា $I[x]=\{x\cdot f(x)+2\cdot g(x) \mid f(x),g(x)\in\mathbb{Z}[x]\}$

១៨. ក. បង្ហាញថា $I[x]=\{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n \mid a_i=2k_i,\forall k_i\in\mathbb{Z}\}$ ជាសំណុំនៃពហុធានៅក្នុង ដែលមានមេគុណសេសគឺជាអ៊ីដេអាល់នៅក្នុង $\mathbb{Z}[x]$។

ខ. បង្ហាញ ឬមិនបង្ហាញថា $I[x]$ ជាអ៊ីដេអាល់ក្នុងកង។

១៩. ក. តាង F ជាកាយ។ បង្ហាញថា៖

$I[x]=\{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n \mid a_i\in F$ និង $a_0+a_1+\ldots+a_n=0\}$ ជាសំណុំពហុធាទាំងអស់នៅក្នុង $F[x]$ ដែលជាផលបូកនៃមេគុណសូន្យគឺជាអ៊ីដេអាល់នៃ $F[x]$។

ខ. បង្ហាញថា ឬមិនបង្ហាញថា $I[x]$ ជាអ៊ីដេអាល់ក្នុងកង។

២០. តាង R ជាកងឯកតាមានលក្ខណៈត្រឡប់។ បង្ហាញថា៖

$\deg[f(x)\cdot g(x)]\le \deg f(x)+\deg g(x)$

ចំពោះគ្រប់ $f(x),g(x)\neq 0$ នៅក្នុង $R[x]$ បី R មិនមែនជាកងអាំងតែក (Integral domain)។

២១. ចំពោះ $f(x),g(x)$ និង $\mathbb{Z}_n[x]$ ចូររក $q(x)$ និង $r(x)$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}_n[x]$ ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ

នៅក្នុងការចែកពហុធាខាងក្រោម៖

1. $f(x)=3x+1,\ g(x)=2x^3+3x^2+4x+1$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}_5[x]$
2. $f(x)=2x+2,\ g(x)=x^3+2x^2+2$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}_3[x]$
3. $f(x)=x^3+x^2+2x+2,\ g(x)=x^4+2x^2+x+1$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}_3[x]$
4. $f(x)=x^3+2x^2+2,\ g(x)=2x^5+2x^4+x^2+2$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}_3[x]$
5. $f(x)=3x^2+2,\ g(x)=x^4+5x^2+2x+2$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}_7[x]$
6. $f(x)=3x^2+2,\ g(x)=4x^4+2x^3+6x^2+4x+5$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}_7[x]$

២២. ចំពោះ $f(x),g(x)$ និង $\mathbb{Z}_n[x]$ ចូររក $GCD\left[d(x)\right]$ នៃ $f(x)$ និង $g(x)$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}_n[x]$

1. $f(x)=x^3+x^2+2x+2, g(x)=x^4+2x^2+x+1$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}_3[x]$
2. $f(x)=x^3+2x^2+2,\ g(x)=2x^5+2x^4+x^2+2$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}_3[x]$
3. $f(x)=3x^2+2, g(x)=x^4+5x^2+2x+2$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}_7[x]$
4. $f(x)=3x^2+2, g(x)=4x^4+2x^3+6x^2+4x+5$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}_7[x]$

២៣. ចំពោះ $f(x),g(x)$ និង $\mathbb{Z}_n[x]$ នៅក្នុងលំហាត់1-7។ ចូររក $s(x)$ និង $t(x)$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}_n[x]$ ដែល $d(x)=f(x)s(x)+g(x)t(x)$ ជា GCD នៃ $f(x)$ និង $g(x)$។

1. $f(x)=2x^3+2x^2+x+1,\ g(x)=x^4+2x^2+x+1$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}_3[x]$
2. $f(x)=3x^2+2,\ g(x)=x^4+5x^2+2x+2$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}_3[x]$
3. $f(x)=3x^2+2, g(x)=x^4+5x^2+2x+2$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}_7[x]$
4. $f(x)=3x^2+2, g(x)=4x^4+2x^3+6x^2+4x+5$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}_7[x]$

5.ក. កត្តាផលគុណ x ជាផលគុណនៃពហុធាពីរនៃដឺក្រេ1នៅក្នុង $\mathbb{Z}_{12}[x]$។

ខ. កត្តាផលគុណ x ជាផលគុណនៃពហុធាពីរនៃដឺក្រេ1នៅក្នុង $\mathbb{Z}_{18}[x]$។

6. កត្តាផលគុណនៃពហុធានីមួយៗជាផលគុណនៃពហុធាពីរនៃដឺក្រេ1នៅក្នុង $\mathbb{Z}_{12}[x]$។

ក. $x+2$ ខ. $x+3$

7. កត្តាផលគុណនៃពហុធានីមួយៗជាផលគុណនៃពហុធាពីរនៃដឺក្រេ1នៅក្នុង $\mathbb{Z}_{10}[x]$។

ក. $x+7$ ខ. $x+9$

២៤. ចូររក $GCD\left(x^3+x^2+x+1,x^4+x^3+2x^2+2x\right)$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}_3[x]$។

២៥. តាង I អ៊ីដេអាល់ក្នុងកងដែលបង្កដោយជាតុតែមួយ $\left(x^2+1\right)=\left\{\left(x^2+1\right)f(x) \mid f(x)\in\mathbb{Z}[x]\right\}$

ចូរកំណត់ពហុធានីមួយៗខាងក្រោមគឺជាជាតុនៃ I ។

ក. $x^4-3x^3+3x^2-3x+2$ ខ. $x^4+x^3-2x^2+x+1$

២៦.តាង I អ៊ីដេអាល់ក្នុងកងដែលបង្កដោយជាតុតែមួយ

$$\left(x^2+1\right)=\left\{\left(x^2+1\right)f(x) \mid f(x)\in\mathbb{Z}_5[x]\right\}$$ ។

ចូរកំណត់ពហុធានីមួយៗខាងក្រោមគឺជាជាតុនៃ I ៖

ក. $2x^4+4x^3+4x+3$ ខ. $3x^5+x^4+2x^3+3x^2+4x+1$

២៧. តាង I អ៊ីដេអាល់ក្នុងកងដែលបង្កដោយធាតុតែមួយ

$$(x+2)=\{(x+2)f(x) \mid f(x)\in\mathbb{Z}_7[x]\}$$ ។

ចូរកំណត់ពហុធានីមួយៗខាងក្រោមគឺជាធាតុនៃ I ៖

ក. $4x^4+x^2+x+2$ ខ. $5x^4+5x^3+3x^2+2x+1$

២៨. តាង I អ៊ីដេអាល់ក្នុងកងដែលបង្កដោយធាតុតែមួយ

$$(2x+7)=\{(2x+7)f(x) \mid f(x)\in\mathbb{Z}_{11}[x]\}$$ ។

ចូរកំណត់ពហុធានីមួយៗខាងក្រោមគឺជាធាតុនៃ I ៖

ក. $4x^4+6x^3+x^2+7x+4$ ខ. $9x^4+x^3+8x^2+2x+10$

២៩. តាង $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0, a_n\neq 0$ ។ ចូររក GCD និងពហុធាសូន្យនៃ $f(x)$ ។

៣០. បង្ហាញថាបើ $f(x)$ និង $g(x)$ ជាធាតុមិនសូន្យនៃ $F[x]$ ដែល $f(x)\mid g(x)$ និង $g(x)\mid f(x)$ នោះ $f(x)=ag(x)$ ចំពោះ $a\neq 0,\ a\in F$ ។

៣១. ចំពោះពហុធា $a(x)$ និង $b(x)$ នៅក្នុង $\mathbb{Q}[x]$ ចូររក $q(x)$ និង $r(x)$ នៅក្នុង $\mathbb{Q}[x]$ ដែល $a(x)=b(x)q(x)+r(x)$ ហើយ $r(x)=0$ ឬបើ $r(x)\neq 0$ នោះ $\deg r(x)<\deg b(x)$ ។

(i) $a(x)=x^3+3x^2+1, b(x)=x^4+1$

(ii) $a(x)=3x^3+3x^2+2x+1, b(x)=3x^2+2$

(iii) $a(x)=2x^2+5x+1,\ b(x)=5x-1$

(iv) $a(x)=x^3+4x^2+4x+1, b(x)=x+3$

(v) $a(x)=x^4+3x^2+1, b(x)=2x^2+1$

៣២. ចូរកំណត់សំណល់ r នៅពេលដែល $f(x)$ ចែកដោយ $x-c$ លើកាយ F ចំពោះ $f(x), c$ និង F ដែល $\mathbb{R}$ កំណត់ដោយកាយនៃចំនួនពិត និងកាយ $\mathbb{C}$ នៃចំនួនកុំផ្លិច។

$a)$. $f(x)=x^4-7x^2-3x+9, c=2, F=\mathbb{R}$

$b)$. $f(x)=3x^5-2x^4+5x^2-3ix, c=-1, F=\mathbb{R}$

$c)$. $f(x)=x^4-ix^3+3x^2-3ix, c=i, F=\mathbb{C}$

$d)$. $f(x)=x^4-ix^3+3x^2-3ix, c=-i, F=\mathbb{C}$

$e)$. $f(x)=x^5+x^3+x+1, c=1, F=\mathbb{Z}_3$

$f)$. $f(x)=x^4+x^3+2x^2+1, c=2, F=\mathbb{Z}_3$

$g)$. $f(x)=x^3+4x^2+2x+1, c=2, F=\mathbb{Z}_5$

$h)$. $f(x)=2x^4+3x^3+4x^2+3, c=2, F=\mathbb{Z}_5$

$i)$. $f(x)=x^4+5x^3+2x^2+6x+2, c=4, F=\mathbb{Z}_7$

$j)$. $f(x)=x^3+6x^2+2x+2, c=5, F=\mathbb{Z}_7$

៣៣. ចំពោះពហុធា $a(x)$ និង $b(x)$ នៅក្នុង $\mathbb{Q}[x]$ ចូររក $GCD(d(x))$ និងសរសេរ $d(x)$ នៅក្នុងទម្រង់ $d(x)=a(x)f(x)+b(x)g(x)$ ដែលត្រូវនឹងពហុធា $f(x)$ និង $g(x)$ នៅក្នុង $\mathbb{Q}[x]$ ។

$(i)\quad a(x)=x^4+x^3+x+1,\ b(x)=x^2+x+1$

$(ii)\quad a(x)=2x^3+10x^2+2x+10,\ b(x)=x^3-2x^2+x-2$

$(iii)\quad a(x)=x^4-4x^3+2x-4,\ b(x)=x^3+2$

$(iv)\quad a(x)=x^3+5x^2+x+2,\ b(x)=x^3+2x^2-2x-1$

ឯកសារពិគ្រោះ

Frank Ayres, J., Ph.D, & Jaisingh, L. R. (2004). *Schaum's outline of theory and problems of abstract algebra* (2 ed.). McGraw-Hill.

Gilbert, L. (2014). *Elements of modern algebra*. Cengage Learning.

Khanna, V. K., & Bhambri, S. K. (2013). *A course in abstract algebra* (4 ed.). Vikas.

Malik, D. S., Mordeson, J. M., & Sen, M. K. (1997). *Fundamentals of abstract algebra*. Mcgraw-Hill College.

Meng, C. (2011). *ពីជគណិតទូទៅ (General algebra)*. Royal University Of Phnom Penh.

Pinter, C. C. (2010). *A book of abstract algebra*. Courier Corporation.

Silverman, J. H. (2022). *Abstract algebra an integrated approach* (1 ed., Vol. 55). American Mathematical Society.

Smith, D., Eggen, M., & Andre, R. S. (2011). *A transition to advanced mathematics* (7 ed.). Brooks/Cole

Vasishtha, A. R., & Vasishtha, A. K. (2017). *Advanced algebra*. Kumaun University.

Wallace, D. A. R. (1998). *Groups rings and fields*. Spinger.

Yim, A. V., & Evans, A. (2000). *គណិតវិទ្យា ២ (Mathematics 2)*. Royal University of Phnom Penh.

សន្ទានុក្រម

[1] សន្ទានុក្រមគណិតវិទ្យាសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ

[2] សន្ទានុក្រមគណិតវិទ្យារាជបណ្ឌិតសភាកម្ពុជា