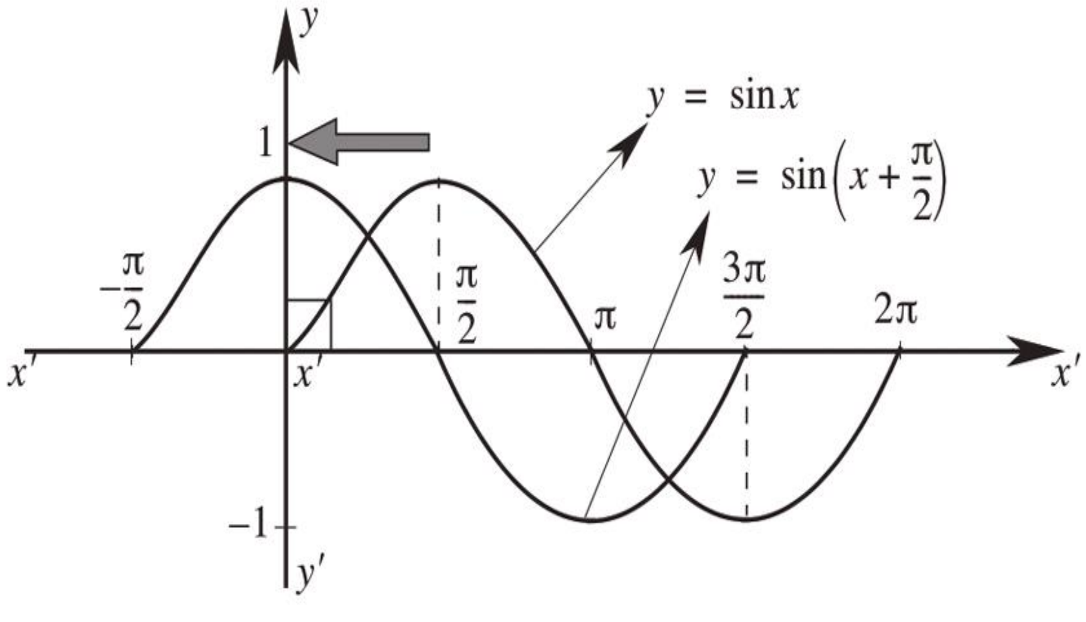
មូលដ្ឋានគ្រឹះគណិតវិទ្យា
បឋមភូមិ១



អ្នកនិពន្ធដោយ សាន ធិតា

គាំទ្រថវិកាលើការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អដោយ

“មូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍”

២០២៣

គណៈកម្មការនិពន្ធ៖

លោក សាង ធិតា គ្រូឧទ្ទេសផ្នែកគណិតវិទ្យា នៃវិទ្យាគរុកោសល្យបាត់ដំបង

គណៈកម្មការរចនាទំព័រ ៖

១. លោកស្រី សំបាត់ អ៊ាត មន្ត្រីនាយកដ្ឋានបណ្តុះបណ្តាល និងវិក្រិតការ
២. លោកស្រី ឈុំ ពៅ មន្ត្រីនាយកដ្ឋានបណ្តុះបណ្តាល និងវិក្រិតការ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យ

១. លោក ហ៊ុន វ៉ារី ព្រឹទ្ធបុរសស្តីទីនៃវិទ្យាស្ថានគរុកោសល្យបាត់ដំបង
២. លោក ឈាន ហាង ប្រធានដេប៉ាតឺម៉ង់គណិតវិទ្យានៃវិទ្យាស្ថានគរុកោសល្យបាត់ដំបង
៣. លោក ឯក លីម ប្រធានដេប៉ាតឺម៉ង់គណិតវិទ្យានៃវិទ្យាស្ថានគរុកោសល្យរាជធានីភ្នំពេញ
៤. លោកស្រី ឡុង ស្រីអូន គ្រូឧទ្ទេសផ្នែកគណិតវិទ្យា នៃវិទ្យាគរុកោសល្យបាត់ដំបង
៥. លោក ឃុត ភា គ្រូឧទ្ទេសផ្នែកគណិតវិទ្យា នៃវិទ្យាគរុកោសល្យបាត់ដំបង
៦. លោក គឹម វិសារ គ្រូឧទ្ទេសផ្នែកគណិតវិទ្យា នៃវិទ្យាគរុកោសល្យបាត់ដំបង
៧. លោក ខាន់ ដារ៉ា គ្រូឧទ្ទេសផ្នែកគណិតវិទ្យា នៃវិទ្យាគរុកោសល្យបាត់ដំបង
៨. លោក ម៉ា រិទ្ធី គ្រូឧទ្ទេសផ្នែកគណិតវិទ្យា នៃវិទ្យាគរុកោសល្យបាត់ដំបង
៩. លោក ជុំ វាសនា គ្រូឧទ្ទេសផ្នែកគណិតវិទ្យា នៃវិទ្យាគរុកោសល្យភ្នំពេញ
១០. លោក ហៃ ប៉ាហិន គ្រូឧទ្ទេសផ្នែកគណិតវិទ្យា នៃវិទ្យាគរុកោសល្យភ្នំពេញ

ជំនួយការនិពន្ធ

១. លោក វ៉ាត់ សារិត គរុនិស្សិតគណិតវិទ្យា ១២+៤ ឆ្នាំទី៣ ជំនាន់ទី៣
២. កញ្ញា ឈឿន ចន្ទី គរុនិស្សិតគណិតវិទ្យា ១២+៤ ឆ្នាំទី៣ ជំនាន់ទី៣
៣. កញ្ញា ហាក់ លីណ្ណា គរុនិស្សិតគណិតវិទ្យា ១២+៤ ឆ្នាំទី៣ ជំនាន់ទី៣
៤. លោក ឈឿង ប៉ូលីន គរុនិស្សិតគណិតវិទ្យា ១២+៤ ឆ្នាំទី៣ ជំនាន់ទី៣
៥. លោក សាក់ អាទិត្យ គរុនិស្សិតគណិតវិទ្យា ១២+៤ ឆ្នាំទី៣ ជំនាន់ទី៣
៦. លោក កុន ណារី គរុនិស្សិតគណិតវិទ្យា ១២+៤ ឆ្នាំទី៣ ជំនាន់ទី៣
៧. កញ្ញា ណាំ ស្រីលាភ គរុនិស្សិតគណិតវិទ្យា ១២+៤ ឆ្នាំទី៣ ជំនាន់ទី៣
៨. កញ្ញា ញឹម ស្រីនាង គរុនិស្សិតគណិតវិទ្យា ១២+៤ ឆ្នាំទី៣ ជំនាន់ទី៣
៩. កញ្ញា សេង ជិញជិញ គរុនិស្សិតគណិតវិទ្យា ១២+៤ ឆ្នាំទី៣ ជំនាន់ទី៣

បុព្វកថា

ដំណើរអភិវឌ្ឍនៃព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជានៅក្នុងយុគសម័យទំនើបនេះ ជាមេរៀនដ៏ជោគជ័យបំផុតមួយដែលចាប់ឫសគល់ចេញពីការបញ្ចប់របបប្រល័យពូជសាសន៍ ការបញ្ចប់សង្គ្រាម ការផ្សះផ្សារជាតិ ការកសាងមូលដ្ឋានរឹងមាំនៃសន្តិភាពនិងស្ថេរភាព និងការអភិវឌ្ឍសេដ្ឋកិច្ច។ នៅក្រោយពេលដែលសន្តិភាពត្រូវបានកើតឡើងដោយបរិបូរណ៍នៅឆ្នាំ១៩៩៨ កម្ពុជាទទួលកំណើនសេដ្ឋកិច្ចខ្ពស់ គឺប្រមាណ៨%ក្នុងមួយឆ្នាំ។ លើសពីនេះទៀតអត្រានៃភាពក្រីក្រត្រូវបានកាត់បន្ថយពីប្រមាណ៥៣% នៅឆ្នាំ២០០៤មកនៅទាបជាង១០% នៅឆ្នាំ២០១៩។ ដំណើរនៃការអភិវឌ្ឍជាតិជាសកម្មភាពដែលបន្តទៅមុខជាប់ជានិច្ច ហើយគោលនយោបាយថ្មីៗដែលមានលក្ខណៈអន្តរវិស័យគ្របដណ្តប់ ក៏កំពុងលេចរូបរាងឡើងដើម្បីតម្រង់ទិសកម្ពុជាឆ្ពោះទៅកាន់ប្រទេសមានប្រាក់ចំណូលមធ្យមកម្រិតខ្ពស់នៅឆ្នាំ ២០៣០ និងឈានឡើងជាប្រទេសមានប្រាក់ចំណូលខ្ពស់ នៅឆ្នាំ២០៥០។ ការប្រែប្រួលឆាប់រហ័សនៃនិម្មាបនកម្មពិភពលោក និងតំបន់រួមទាំងទំនាក់ទំនងភូមិសាស្ត្រនយោបាយ បានផ្តល់កាលានុវត្តភាពសម្រាប់ការអភិវឌ្ឍឧស្សាហកម្មនៅកម្ពុជា ដែលត្រូវបានរាជរដ្ឋាភិបាលចាត់ទុកជាមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃកំណើនសេដ្ឋកិច្ចកម្ពុជា។ រាជរដ្ឋាភិបាលកម្ពុជាបានកំពុងបន្តពង្រឹង និងអភិវឌ្ឍវិស័យអប់រំឆ្ពោះទៅរកការស្រាវជ្រាវ និងនវានុវត្តន៍ដើម្បីពង្រឹងសមត្ថភាពនិងជំនាញរបស់ធនធានមនុស្សនៅកម្ពុជាឱ្យស្របទៅនឹងបរិបទថ្មីនៃការអភិវឌ្ឍ ជាពិសេសការពង្រឹងសហគ្រិនភាពក្នុងការរៀបចំម៉ូដែលធុរកិច្ចថ្មីៗ។ ដើម្បីចាប់យកកាលានុវត្តភាពពីបដិវត្តន៍ឧស្សាហកម្មទី៤ និងសេដ្ឋកិច្ចឌីជីថលដែលកំពុងផុសផុលឡើង ប្រព័ន្ធអេកូឡូហ្ស៊ីដែលបង្កលក្ខណៈអំណោយផលដល់ការបង្កើតថ្មី នវានុវត្តន៍ ការស្រាវជ្រាវ និងអភិវឌ្ឍន៍ ត្រូវតែមានការកែលម្អ។

បណ្តាប្រទេសនៅទ្វីបអាស៊ីកំពុងនាំមុខក្នុងការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍ ដោយមានភាគហ៊ុនប្រមាណ៤៤% នៃការវិនិយោគទាំងមូលរបស់ពិភពលោក។ ប្រទេសចិនកំពុងបន្តកសាងហេដ្ឋារចនាសម្ព័ន្ធនៃការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍ ក៏ដូចជាសមត្ថភាពមនុស្ស។ ផ្ទុយទៅវិញ ប្រទេសនៅទ្វីបអាមេរិកខាងត្បូង និងអាហ្វ្រិក កំពុងស្ថិតនៅឆ្ងាយពីការវិនិយោគនេះ ហើយជាលទ្ធផល ប្រទេសទាំងនោះក៏ពុំមានកំណើនសេដ្ឋកិច្ចគួរឱ្យកត់សម្គាល់ដែរ។ ទុនវិនិយោគសរុបលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍរបស់ប្រទេសនៅទ្វីបអាមេរិកខាងត្បូងនិងអាហ្វ្រិក មានប្រមាណ៥%នៃការវិនិយោគទាំងមូលរបស់ពិភពលោក ក្នុងពេលដែលតំបន់ទាំង២នេះមានប្រជាជនប្រមាណ២០%នៃប្រជាជនពិភពលោក។ ប្រទេសចំនួន៦ដែលមានលំដាប់ខ្ពស់ជាងគេនៅក្នុងការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍ រួមមានសហរដ្ឋអាមេរិក ចិន ជប៉ុន អាល្លឺម៉ង់ ឥណ្ឌា និងកូរ៉េខាងត្បូង ដែលស្មើនឹងប្រមាណ ៧០%នៃទុនវិនិយោគសរុបរបស់ពិភពលោក។

តើចំណេះដឹង ផលិតផល និងសេវាកម្មថ្មីទាំងនេះកើតឡើងពីអ្វី? ហើយកើតឡើងដោយរបៀបណា? ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជាកំពុងតែកសាងមូលដ្ឋានសម្រាប់ការត្រៀមខ្លួនទទួល និងប្រកួតប្រជែងក្នុងយុគសម័យបដិវត្តឧស្សាហកម្មទី៤ នៅក្នុងសេដ្ឋកិច្ចដែលផ្អែកលើពុទ្ធិ ហើយដែលប្រការ

នេះចាំបាច់តម្រូវឱ្យពលរដ្ឋកម្ពុជា ត្រូវក្លាយខ្លួនជាពលរដ្ឋឌីជីថល ពលរដ្ឋសកល និងពលរដ្ឋដែលប្រកបដោយការទទួលខុសត្រូវ ដែលមានសមត្ថភាពក្នុងការផលិត ចែកចាយ និងប្រើប្រាស់ពុទ្ធិដើម្បីទទួលមនុញ្ញផល និងរួមចំណែកក្នុងកំណើន។ ធនាគារពិភពលោកបានធ្វើការកត់សម្គាល់តាំងពីឆ្នាំ ២០០២នូវបម្លាស់ប្តូរនៃមូលដ្ឋានសេដ្ឋកិច្ច ពីសេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើកម្លាំងពលកម្ម និងធនធានអតិកម្ម (Labour and Resource Based Economy) ទៅកាន់សេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើពុទ្ធិ (Knowledge Based-Economy) ដែលក្នុងន័យនេះ ពុទ្ធិគឺជាគន្លឹះនៃការអភិវឌ្ឍ។ អាស្រ័យហេតុនេះ នៅលើគន្លងដែលកម្ពុជាកំពុងធ្វើដំណើរឆ្ពោះទៅកាន់សេដ្ឋកិច្ចឌីជីថល សង្គមកម្ពុជាត្រូវតែមានសមត្ថភាពក្នុងការ ផលិត ជ្រើសរើស បន្សាំ បង្កើតមុខរបរ និងប្រើប្រាស់ពុទ្ធិ ដើម្បីរក្សានិរន្តរភាពនៃកំណើន និងកែលម្អជីវភាពរស់នៅ ។ សមត្ថភាពទាំងនេះ អាចកើតឡើងនៅពេលពលរដ្ឋកម្ពុជាមានឱកាសក្នុងការទទួលបានបទពិសោធន៍ពីការស្រាវជ្រាវ ការបណ្តុះគំនិតច្នៃប្រឌិត និងការស្វែងរកនវានុវត្តន៍។

កំណែទម្រង់វិស័យអប់រំ គឺជាការត្រួសត្រាយមាគ៌ាសម្រាប់ដំណើរឆ្ពោះទៅកាន់សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិ និងប្រជាពលរដ្ឋប្រកបដោយភាពរស់រវើក។ តាមរយៈមូលដ្ឋានអប់រំ សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិនឹងប្រមូលផ្តុំ បង្កើត និងចែករំលែក ទៅកាន់សមាជិកក្នុងសង្គមនូវសម្បទាអប់រំ ពិសេសគឺពុទ្ធិសម្បទាក្នុងបុព្វហេតុនៃមនុស្សជាតិនិងឧត្តមប្រយោជន៍នៃប្រទេស។ សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិ គឺពុំគ្រាន់តែជាសង្គមដែលសម្បូរព័ត៌មានប៉ុណ្ណោះទេ តែជាសង្គមដែលប្រជាពលរដ្ឋអាចធ្វើបរិវត្តកម្មពីព័ត៌មានទៅជាមូលធនប្រកបដោយប្រសិទ្ធភាព។ ការរីកចម្រើនទៅមុខជាលំដាប់នៃបច្ចេកវិទ្យានិងតំណភ្ជាប់ បានពង្រីកព្រំដែននៃការចូលទៅកាន់ និងការទទួលបានព័ត៌មានជាសកល ហើយដែលក្នុងន័យនេះ ការអប់រំនឹងបន្តវិវត្តទៅមុខនិងមានការផ្លាស់ប្តូរ។ សង្គមមួយដែលមានអំណាន និងរបាប់ជាបុរេលក្ខខណ្ឌនៃជីវភាពប្រចាំថ្ងៃនៃប្រជាពលរដ្ឋ ពេលនោះបំណិននៃអំណាន និពន្ធ និងការគណនាលេខនព្វន្ត គឺជាចលករនៃការរៀនរបស់សិស្ស។ ជាតុដ៏ចម្បងមួយដែលស្ថិតនៅក្នុងការកសាងសង្គមដែលប្រកបដោយពុទ្ធិគឺសៀវភៅសិក្សា ហើយការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សាជាប្រចាំ គឺជានវានុវត្តន៍នៃវិស័យអប់រំដែលនាំទៅរកការសិក្សាពេញមួយជីវិត ការអភិវឌ្ឍសម្បទាអប់រំ និងការចែករំលែកចំណេះដឹង។ មូលដ្ឋានអប់រំ ជាពិសេសគឺគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សាត្រូវមានតួនាទីដែលប្រកបដោយការឆ្លើយតបចំពោះតម្រូវការខាងលើនេះ។ សាស្ត្រាចារ្យ អ្នកស្រាវជ្រាវ និងបុគ្គលិកអប់រំត្រូវបន្តសិក្សាជាប់ជានិច្ចតាមរយៈការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ហើយដែលសៀវភៅសិក្សាទាំងនេះនឹងក្លាយជា ស្ពាននៃទំនាក់ទំនងរវាងនវានុវត្តន៍នៃបច្ចេកវិទ្យា និងការរៀននិងបង្រៀននៅក្នុងថ្នាក់រៀន។

សង្គមដែលប្រកបពុទ្ធិ ក៏ជាសង្គមដែលបណ្តុះឱ្យមានរចនាសម្ព័ន្ធទន់នៃសេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើពុទ្ធិដែរ។ ឧទាហរណ៍ជាក់ស្តែងនៃបែបផែននេះរួមមាន Silicon Valley នៃសហរដ្ឋអាមេរិក សួនឧស្សាហកម្មវិស្វកម្មអាកាសយានយន្តនិងយានយន្តនៅទីក្រុង Munich ប្រទេសអាល្លឺម៉ង់ តំបន់ជីវបច្ចេកវិទ្យានៅក្រុង Hyderabad ប្រទេសឥណ្ឌា តំបន់ផលិតគ្រឿងអេឡិចត្រូនិក និងសារគមនាគមន៍ ឌីជីថលនៅទីក្រុង Seoul ប្រទេសកូរេខាងត្បូង ក៏ដូចជាសួនឧស្សាហកម្មថាមពល និង

ឥន្ទនគីមីសាស្ត្រនៃប្រទេសប្រេស៊ីល ហើយក៏នៅមានទីក្រុងនៃប្រទេសជាច្រើនទៀតនៅលើពិភពលោក លក្ខណៈសម្បត្តិនៃទីក្រុងទាំងនេះគឺការប្រើប្រាស់និន្នាការនៃការអភិវឌ្ឍដែលជំរុញ និងតម្រង់ទិស ដោយចំណេះដឹង ហើយដែលចំណេះដឹងទាំងនោះកើតចេញជាដំបូងពីការវិនិយោគទៅលើគ្រឹះស្ថាន ឧត្តមសិក្សា ស្ថាប័នស្រាវជ្រាវ មជ្ឈមណ្ឌលឧត្តមភាពនៃជំនាញជាន់ខ្ពស់ ការប្រកួតប្រជែងដោយ គុណាធិបតេយ្យ និង ជាពិសេសគឺការបណ្តុះវប្បធម៌អំណាននិងនិពន្ធសៀវភៅ។ ល្បឿននៃការរីក ចម្រើនផ្នែកពុទ្ធិ និងបច្ចេកវិទ្យាកំពុងមានសន្ទុះលឿនជាងអ្វីដែលសិស្ស និងនិស្សិតអាចទទួលបាន ពីគ្រូនៅគ្រឹះស្ថានសិក្សា ដែលធ្វើឱ្យគោលដៅនៃការអប់រំនៅពេលបច្ចុប្បន្ននេះ មានការប្រឈមខ្លាំង ជាងពេលណាទាំងអស់។ ឧទាហរណ៍ ក្នុងមួយឆ្នាំ មានសៀវភៅជាង២,២លានចំណងជើង ត្រូវបាន សរសេរ និងបោះពុម្ព ដែលក្នុងនោះប្រទេសចិនមាន៤៤០ពាន់ ចំណែកឯសហរដ្ឋអាមេរិកមាន ៣០៥ ពាន់ និងប្រទេសរុស្ស៊ីមាន ១២០ពាន់ចំណងជើង។

ខណៈពេលដែលបច្ចេកវិទ្យាកំពុងរីកចម្រើនជារៀងរាល់ថ្ងៃ មធ្យោបាយសម្រាប់អំណានក៏មាន ច្រើនជម្រើសសម្រាប់សិស្ស និស្សិត និងសាធារណៈជនរួមមានការអានសៀវភៅ ការអានលើឧបករណ៍ អេឡិចត្រូនិក ការអានដោយប្រើទូរសព្ទវៃឆ្លាត និងការអានលើកុំព្យូទ័រ ដែលសុទ្ធសឹងជាមធ្យោបាយ សំខាន់ៗដែលនាំអ្នកអានទាំងឡាយឱ្យសម្រេចគោលបំណងអានរបស់ខ្លួន។ ម្យ៉ាងវិញទៀត អំណាន ដោយប្រើមធ្យោបាយបច្ចេកវិទ្យាទំនើប ចំណាយពេលតិច ងាយស្រួលអាន និងជួយដល់បរិស្ថានមួយ កម្រិតទៀត។ នាពេលបច្ចុប្បន្ន សិស្ស និស្សិត និងសាធារណៈជនកម្ពុជាដែលស្រឡាញ់អំណានកំពុង តែប្រើប្រាស់មធ្យោបាយអំណានទាំងនេះ។ បើយើងក្រឡេកមើលទៅប្រទេសជឿនលឿន ទោះបីជា បច្ចេកវិទ្យារីកចម្រើនខ្លាំងយ៉ាងណា អំណានតាមរយៈសៀវភៅនៅតែមានសន្ទុះដដែល។ ម្យ៉ាងវិញ ទៀត បច្ចេកវិទ្យាអានបែបទំនើបតាមរយៈឧបករណ៍ទំនើប អាស្រ័យលើលទ្ធភាពនៃធនធានអប់រំ ឌីជីថល និងមាតិកាឌីជីថលគ្រប់គ្រាន់ដែលបានផលិត និងបង្ហោះចែកចាយសម្រាប់អំណាន។

ក្នុងបរិបទកម្ពុជា ជាពិសេសក្នុងបរិការណ៍នៃការផ្ទុះរីករាលដាលនៃជំងឺកូវីដ-១៩ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានជំរុញឱ្យមានបរិវត្តកម្មឌីជីថលនៅក្នុងអេកូស៊ីស្តែមនៃការអប់រំ ជាពិសេសការ អប់រំតាមប្រព័ន្ធអេឡិចត្រូនិកនិងការអប់រំពីចម្ងាយដើម្បីលើកកម្ពស់អំណានតាមរយៈការផលិតមាតិកា ឌីជីថលដែលមានភាពចំរុះ ការកសាងសមត្ថភាពផ្នែកតំណភ្ជាប់និងវេទិកាឌីជីថល ការពង្រីកវិសាល ភាពនៃមជ្ឈមណ្ឌលទិន្នន័យ និងការលើកកម្ពស់គុណភាពនៃការផលិតធនធានអប់រំឌីជីថល គួបផ្សំ ជាមួយការចែកសន្លឹកកិច្ចការឱ្យសិស្សយកទៅរៀននៅផ្ទះ និងការចុះទៅជួបជាមួយសិស្សជាបណ្តុំនៅ តាមសហគមន៍។ ក្នុងន័យលើកកម្ពស់អំណាន និងភាពសម្បូរបែបនៃធនធានសៀវភៅសិក្សាឱ្យកាន់តែ មានប្រសិទ្ធភាពនិងភាពសក្តិសិទ្ធិ និងផ្តល់ឱកាសអំណានកាន់តែច្រើនថែមទៀតដល់សិស្សានុសិស្ស និស្សិត និងសាធារណៈជន ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាលើកទឹកចិត្តនូវចំណុចមួយចំនួនដូចខាង ក្រោម

1. សាស្ត្រាចារ្យ អ្នកស្រាវជ្រាវ និងបុគ្គលិកអប់រំ សូមបន្តនិងបង្កើនការបោះពុម្ពផ្សាយដែលបន្ថែមទៀត ដើម្បីធ្វើឱ្យធនធានសម្រាប់អំណានកាន់តែសម្បូរបែប ជាពិសេសធនធានអំណានជាខេមរភាសា
2. គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា សូមផ្តល់លទ្ធភាពគ្រប់បែបយ៉ាង ដើម្បីឱ្យបុគ្គលិកអប់រំគ្រប់លំដាប់ថ្នាក់ និង និស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សាអាចចូលរួមអាន និងសិក្សាស្រាវជ្រាវតាមគ្រប់លទ្ធភាពជាមួយធនធានអំណាន ជាពិសេសការរៀបចំឱ្យមានពេលវេលាសម្រាប់សហសិក្សា និងអំណានក្នុងបណ្ណាល័យ
3. សាស្ត្រាចារ្យតាមមុខវិជ្ជា និងអ្នកស្រាវជ្រាវតាមជំនាញឬវិស័យ ត្រូវរៀបចំដំណើរការរៀនបង្រៀន និងស្រាវជ្រាវដែលមានដាក់បញ្ចូលកិច្ចការស្វ័យសិក្សា សហសិក្សា ឬការស្រាវជ្រាវបណ្ណាល័យដែលតម្រូវឱ្យនិស្សិត ត្រូវអាននិងស្រាវជ្រាវជាមួយធនធានអំណាន
4. គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងមជ្ឈមណ្ឌលស្រាវជ្រាវ ត្រូវខិតខំឱ្យអស់លទ្ធភាពក្នុងការបង្កើតបណ្ណាល័យ មជ្ឈមណ្ឌលរក្សាឯកសារ ឬមជ្ឈមណ្ឌលអប់រំឌីជីថល ជាដើម ដើម្បីឱ្យបុគ្គលិកអប់រំគ្រប់លំដាប់ថ្នាក់និងនិស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សា អាចទទួលបាន និងស្វែងរកប្រភពសម្រាប់អំណាន កាន់តែសម្បូរបែប និងមានភាពបត់បែន ឆ្លើយតបតាមតម្រូវការអ្នកអាន
5. និស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សា ត្រូវខិតខំនិងចំណាយពេលអាន និងចាត់ទុកវប្បធម៌ និងអកប្បកិរិយាអំណានជាផ្នែកមួយ នៃពេលវេលានិងភាពស៊ីវិល័យនៃជីវិតប្រចាំថ្ងៃ
6. បងប្អូនជនរួមជាតិ ដែលជាមាតាបិតា ឬអ្នកអាណាព្យាបាល សូមជួយជំរុញនិងបង្កលក្ខណៈកាន់តែ ច្រើនថែមទៀត ជាពិសេសការលៃលកចំណាយនៅក្នុងគ្រួសារសម្រាប់ការទិញសម្ភារៈសិក្សា សៀវភៅអាន និងឧបករណ៍សម្រាប់អំណានដល់កូនៗ ដែលចាត់ទុកជាការវិនិយោគមួយដ៏សំខាន់ សម្រាប់ បង្កើនចំណេះដឹង និងអនាគតរបស់ពួកគេ។

ដោយមានការគាំទ្រពីក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ នៅឆ្នាំ២០២០ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានបង្កើតមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ដែលហៅកាត់ថា“មូលនិធិ ស.គ.ន” និងហៅជាភាសាអង់គ្លេសថា The Research Creativity and Innovation Fund ដែលហៅកាត់ជាភាសាអង់គ្លេសថា “RCI Fund”។ គោលដៅចម្បងនៃមូលនិធិនេះ គឺរួមចំណែកលើកកម្ពស់វប្បធម៌នៃការស្រាវជ្រាវ បំផុសគំនិតច្នៃប្រឌិត និងជំរុញការធ្វើនវានុវត្ត ដើម្បីជាប្រយោជន៍ដល់វិស័យអប់រំ យុវជន និងកីឡា ដែលឆ្លើយតបទៅនឹងទីផ្សារពលកម្ម និងសាកលភាវូបនីយកម្ម។ មូលនិធិ ស.គ.ន បានសម្រេចកំណត់ប្រធានបទ ជាអាទិភាពសម្រាប់ការគាំទ្រដោយមូលនិធិចំនួន៣ រួមមាន ឌីជីថលនីយកម្មសម្រាប់បដិវត្តឧស្សាហកម្ម៤.០ (Digitalization for IR.4.0) ការស្រាវជ្រាវអនុវត្តលើវិស័យកសិកម្ម (Applied Agricultural Research) និងការស្រាវជ្រាវគរុកោសល្យសតវត្សទី២១ (21st Century Pedagogy Research)។

ដោយមានការធ្វើអាទិភាពូបនីយកម្មទៅលើទិសដៅនៃការប្រើប្រាស់ថវិកាមូលនិធិសម្រាប់ឆ្នាំ២០២០ ក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ និងក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានផ្តល់ការគាំទ្រ

ដល់ការ**រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អ សៀវភៅសិក្សា(Text book) ដែលនឹងត្រូវប្រើប្រាស់នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា**។ គោលបំណងនៃការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អ សៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា គឺដើម្បីបង្កើនបរិមាណ លើកកម្ពស់គុណភាព និងពង្រីកសមធម៌នៃធនធានសិក្សាជាខេមរភាសា ជូនដល់និស្សិតដែលកំពុងបន្តការសិក្សា និងត្រៀមខ្លួនធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។ លើសពីនេះទៀតការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា មានគោលដៅដូចខាងក្រោម

- ឆ្លើយតបជាបន្ទាន់ចំពោះការខ្វះខាតធនធានសិក្សា ដែលជាតម្រូវការសិក្សារបស់និស្សិតនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា
- លើកកម្ពស់ទំនើបភាវូបនីយកម្ម និងឧត្តមានុវត្តន៍នៃការរៀននិងបង្រៀន និងការស្រាវជ្រាវនៅលើមុខវិជ្ជា កម្មវិធីសិក្សា ឬមុខជំនាញជាក់លាក់
- បង្កើនភាពស៊ីជម្រៅក្នុងការកសាងវិជ្ជាជីវៈនិងបទពិសោធន៍សម្រាប់ឋានៈសាស្ត្រាចារ្យ និងអ្នកស្រាវជ្រាវ
- រួមចំណែកដល់ការកសាងភាពជាសហគមន៍វិជ្ជាជីវៈ ការចែករំលែកបទពិសោធន៍ និងវប្បធម៌នៃការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានវាយតម្លៃខ្ពស់ចំពោះការបោះជំហានប្រកបដោយមនសិការវិជ្ជាជីវៈនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងបុគ្គលិកអប់រំទាំងអស់ ក្នុងការរៀបចំ រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ដើម្បីបង្កើនបរិមាណ លើកកម្ពស់គុណភាព និងពង្រឹងសមធម៌នៃធនធានសិក្សាជាខេមរភាសា ជូននិស្សិតដែលកំពុងបន្តការសិក្សា និងត្រៀមខ្លួនធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។ សៀវភៅសិក្សាជាផ្នែកមួយនៃការទទួលស្គាល់គុណភាពអប់រំនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងជាធនធានសិក្សាដែលជាមូលដ្ឋានមួយដ៏សំខាន់ ក្នុងការគាំទ្រដល់ការបង្រៀន និងរៀន ហើយត្រូវមានបរិមាណគ្រប់គ្រាន់ ឆ្លើយតបទៅនឹងកម្មវិធីអប់រំ និងតម្រូវការសិក្សាស្រាវជ្រាវ។ ជាគោលការណ៍ គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សាទាំងអស់ ត្រូវមានសៀវភៅសិក្សាដែលប្រើជាគោលសម្រាប់មុខវិជ្ជានីមួយៗ។ ចំនួនសៀវភៅសិក្សាដែលគ្រប់គ្រាន់សម្រាប់ការស្រាវជ្រាវ និងការសិក្សារបស់និស្សិត ត្រូវមានយ៉ាងតិចមួយចំណងជើងក្នុងមួយមុខវិជ្ជា ហើយត្រូវតម្កល់យ៉ាងតិច២ច្បាប់ នៅក្នុងបណ្ណាល័យ ឬអាចរកបានតាមប្រព័ន្ធអេឡិចត្រូនិក។ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា លើកទឹកចិត្តបន្ថែមទៀតជូនដល់គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សារដ្ឋ និងឯកជនដែលបានស្នើសុំថវិកាមូលនិធិរួច សូមចូលរួមបន្ថែមទៀតដើម្បីបង្កើនចំនួនចំណងជើងសៀវភៅ។ ចំណែកគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សារដ្ឋនិងឯកជនដែលពុំទាន់បានដាក់ពាក្យស្នើសុំ សូមចូលរួមដើម្បីជាគុណប្រយោជន៍ដល់តម្រូវការដ៏ទទូច និងថ្លៃថ្លានៃនិស្សិតកម្ពុជាក្នុងការសិក្សា និងស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។

សេចក្តីបញ្ជាក់
នៃមូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍

សៀវភៅសិក្សានេះជាលទ្ធផលនៃការស្នើសុំអនុវត្តថវិកាមូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ក្នុងគម្រោង**រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ដែលនឹងត្រូវប្រើប្រាស់នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។** សៀវភៅសិក្សានេះ ត្រូវបានរៀបរៀង និពន្ធ ឬកែលម្អដោយមានការធានាអះអាងថា ជាស្នាដៃរបស់អ្នកនិពន្ធផ្ទាល់ និងបានឆ្លងកាត់ត្រួតពិនិត្យ ផ្តល់យោបល់ និងវាយតម្លៃដោយក្រុមប្រឹក្សាអប់រំ ក្រុមប្រឹក្សាស្រាវជ្រាវ ឬក្រុមប្រឹក្សាដែលមានតម្លៃស្មើនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងតាមរយៈកិច្ចសន្យាដែលបានធ្វើឡើង និងដែលបានតម្កល់ទុកនៅមូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍។ រាល់ខ្លឹមសារ ការបកស្រាយ និងរូបភាព គឺជាជំហរនិងទស្សនៈផ្ទាល់របស់អ្នកនិពន្ធ ហើយ ពុំឆ្លុះបញ្ចាំង ឬជាតំណាងដល់មូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ នៃក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ឡើយ។

មាតិកា

បុព្វកថា i
សេចក្តីបញ្ជាក់ vi
អារម្ភកថា xiii
សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ xiv
ការបរិយាយលើមុខវិជ្ជា xv
មូលន័យសង្ខេប xvi
មេរៀនទី១ ចំនួនគត់ និងចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប 1
១.១. សញ្ញាណចំនួនគត់ និងចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប 1
១.២. ប្រមាណវិធីលើចំនួនគត់ និង ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប 2
១.២.១. ប្រមាណវិធីបូក និងវិធីដកនៃចំនួនគត់ 2
១.២.២. ប្រមាណវិធីគុណ និងវិធីចែកនៃចំនួនគត់ 4
១.៣. លក្ខណៈនៃប្រមាណវិធី 6
១.៣.១. លក្ខណៈនៃវិធីបូក 6
១.៣.២. លក្ខណៈនៃវិធីគុណ 6
១.៤. លំដាប់នៃប្រមាណវិធីលើចំនួនគត់ 8
១.៥. ការបង្គត់ចំនួនគត់ 9
១.៦. ការេ គូប និងឫសការេ ឫសគូប 10
១.៦.១. ការេ និងគូប 10
១.៦.២. ឫសការេ និងឫសគូប 11
១.៧. ភាពចែកដាច់ 11
១.៧.១. ភាពចែកដាច់នឹង **2** និង **5** 11
១.៧.២. ភាពចែកដាច់នឹង **3** និង **9** 12
១.៧.៣. ភាពចែកដាច់នឹង **4** និង **8** 12
១.៧.៤. ភាពចែកដាច់នឹង **6** 13
១.៧.៥. ភាពចែកដាច់នឹង **7** 14
១.៧.៦. លក្ខណៈចែកដាច់នៃផលបូក និងផលដក 15
១.៨. តួចែក និងពហុគុណ 15
១.៩. ចំនួនបឋម 16
១.១០. ការបំបែកជាកត្តាបឋម 16
១.១១. តួចែករួមធំបំផុត និងពហុគុណរួមតូចបំផុត 17

១.១២. អាល់ហ្គោរីតអឺគ្លីត 20
១.១៣. សមីការលីនេអ៊ែរនៃពីរអថេរក្នុងចំណុំ ℤ 22
មេរៀនទី២ ចំនួនសនិទាន 28
២.១. សញ្ញាណចំនួនសនិទាន 28
២.២. ប្រមាណវិធីលើចំនួនសនិទាន 29
២.២.១. ប្រមាណវិធីបូកចំនួនសនិទាន 29
២.២.២. ប្រមាណវិធីដកនៃចំនួនសនិទាន 31
២.២.៣. ប្រមាណវិធីគុណនៃចំនួនសនិទាន 32
២.២.៤. ប្រមាណវិធីចែកនៃចំនួនសនិទាន 34
២.៣. ទំនាក់ទំនងលំដាប់ 34
២.៣.១. ប្រៀបធៀបចំនួនសនិទាន 34
២.៣.២. ការរៀបលំដាប់ចំនួនសនិទាន 35
មេរៀនទី៣ ចំនួនពិត 39
៣.១. សញ្ញាណនៃចំនួនពិត 39
៣.១.១. បន្ទាត់ចំនួន 39
៣.១.២. ការប្រៀបធៀបចំនួនពិត 39
៣.១.៣. តម្លៃដាច់ខាតនៃចំនួនពិត 40
៣.១.៤. ចំណែកថ្នាក់នៃចំនួនពិត 40
៣.២. ចំនួនទសភាគ 41
៣.២.១. តម្លៃលេខតាមខ្ទង់ក្នុងចំនួនទសភាគ 42
៣.២.២. ការប្រៀបធៀបចំនួនទសភាគ 42
៣.២.៣ ការរៀបលំដាប់ចំនួនទសភាគ 43
៣.២.៤. ការប្តូរប្រភាគទៅជាចំនួនទសភាគ 43
៣.២.៥. ការប្តូរចំនួនទសភាគទៅជាប្រភាគ 44
៣.២.៦. វិធីបូកនិងវិធីដកនៃចំនួនទសភាគ 45
៣.២.៧. វិធីគុណនិងវិធីចែកនៃចំនួនទសភាគ 46
៣.២.៨. ការបង្គត់ចំនួនទសភាគ 48
៣.២.៩. ការប៉ាន់ស្មានចម្លើយប្រហែល 48
៣.៣. ចំនួនអសនិទាន 49
៣.៣.១. ឫសការេ 49
៣.៣.២. ឫសគូប 51
៣.៣.៣. ប្រមាណវិធីលើរ៉ាឌីកាល់ 52
៣.៣.៤. ការបញ្ចេញមួយចំនួនពីរ៉ាឌីកាល់ 54

៣.៣.៥ ការបញ្ចូលមួយចំនួនក្នុងរ៉ាឌីកាល់ 55
៣.៣.៦. វិធីបូក-ដកនៃរ៉ាឌីកាល់ 56
៣.៣.៧ វិធីបំបាត់រ៉ាឌីកាល់ពីភាគបែង 58
មេរៀនទី៤ រង្វាស់រង្វាល់ 61
៤.១. រង្វាស់ប្រវែង ម៉ាស ចំណុះ ពេលវេលា 61
៤.១.១. រង្វាស់ប្រវែង 61
៤.១.២. ម៉ាស 62
៤.១.៣ ចំណុះ 63
៤.១.៤ ពេលវេលា 64
៤.២. ផ្ទៃក្រឡានិងមាឌ 65
៤.៣. ម៉ាសធៀបនឹងផ្ទៃក្រឡា 66
៤.៤. ល្បឿនមធ្យម 67
៤.៥. មាត្រដ្ឋាន 68
មេរៀនទី៥ កន្សោមពីជគណិត 71
៥.១. សញ្ញាណកន្សោមពីជគណិត 71
៥.២. ប្រមាណវិធីលើកន្សោមពីជគណិត 71
៥.២.១. សញ្ញាណឯកធា 71
៥.២.២. ឯកធាដូចគ្នា 72
៥.២.៣. ដឺក្រេនៃឯកធា 72
៥.២.៤. ប្រមាណវិធីបូកនិងដកឯកធាដូចគ្នា 73
៥.២.៥. វិធីគុណឯកធា 74
៥.២.៦. វិធីចែកឯកធា 75
៥.៣. ឯកធា និងពហុធា 76
៥.៣.១. សញ្ញាណពហុធា 76
៥.៣.២. ដឺក្រេនៃពហុធា 77
៥.៣.៣. វិធីបូកនិងដកពហុធា 78
៥.៣.៤. វិធីគុណពហុធា 78
៥.៣.៥. វិធីចែកពហុធា 80
៥.៤. កន្សោមសនិទាន 82
៥.៤.១. តម្លៃលេខនៃកន្សោមសនិទាន 82
៥.៤.២. ការសម្រួលកន្សោមសនិទាន 83
៥.៤.៣. វិធីគុណវិធីចែកកន្សោមសនិទាន 85
៥. វិធីបូកនិងវិធីដកកន្សោមសនិទាន 87

៥.១. ករណីមានភាគបែងដូចគ្នា......87
៥.២. ករណីមានភាគបែងមិនដូចគ្នា......87
៥.៣. កន្សោមសនិទានដែលមានទម្រង់ប្រភាគលើប្រភាគ......88
មេរៀនទី៦ សមីការ និងវិសមីការដឺក្រេទី១មានមួយអញ្ញាត......94
៦.១. សមីការដឺក្រេទី១មានមួយអញ្ញាត......94
៦.២. វិសមីការដឺក្រេទី១មានមួយអញ្ញាត......99
៦.២.១. លក្ខណៈនៃវិសមភាព......99
៦.២.២. សញ្ញាណវិសមីការដឺក្រេទី១មានមួយអញ្ញាត......101
៦.២.៣. វិសមីការសមមូល......101
៦.២.៤. ដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី១មានមួយអញ្ញាត......102
៦.៣. ប្រព័ន្ធសមីការការដឺក្រេទី១មានពីរអញ្ញាត......103
៦.៣.១. សមីការដឺក្រេទី១ មានពីរអញ្ញាត......103
៦.៣.២. ចម្លើយរបស់សមីការដឺក្រេទី១ មានពីរអញ្ញាត......103
៦.៣.៣. ប្រព័ន្ធសមីការដឺក្រេទី១ មានពីរអញ្ញាត......104
៦.៣.៤. ដំណោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការដឺក្រេទី១ មានពីរអញ្ញាត......104
៦.៤. ប្រព័ន្ធវិសមីការដឺក្រេទី១មានមួយអញ្ញាត......108
៦.៤.១. ប្រព័ទ្ធវិសមីការដឺក្រេទី១មានមួយអញ្ញាត......108
មេរៀនទី៧ សមីការ និងវិសមីការដឺក្រេទី២មានមួយអញ្ញាត......113
៧.១. សមីការដឺក្រេទី២ មានមួយអញ្ញាត......113
៧.២. សមីការដឺក្រេទី ២ មានមួយអញ្ញាត......115
៧.២.១. និយមន័យ......115
៧.២.២. ដំណោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី 2......116
៧.៣. រូបមន្តសមីកាដឺក្រេទី 2......120
៧.៤. ទំនាក់ទំនងរវាងឫស និងមេគុណ......124
៧.៤.១. គណនាផលបូក និងផលគុណឫស......124
៧.៤.២. អនុវត្តចំពោះផលបូក និងផលគុណឫស......125
៧.៥. អនុវត្តសមីការដឺក្រេទី 2 មានមួយអញ្ញាត......127
៧.៦. ប្រព័ន្ធសមីការដឺក្រេទី1 និងសមីការដឺក្រេទី 2......128
៧.៧. វិសមីការដឺក្រេទី២មានមួយអញ្ញាត......130
៧.៧.១. សញ្ញាណវិសមីការដឺក្រេទី2......130
៧.៧.២. ដោះស្រាយវិសមីការតាមសញ្ញាត្រីធា ដឺក្រេទី2......130
៧.៧.៣. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការដឺក្រេទី2 មានមួយអញ្ញាត......134
៧.៧.៤. អនុវត្តវិសមីការ......135

មេរៀនទី៨ អនុគមន៍ 140
៨.១. សញ្ញាណអនុគមន៍ 140
៨.២. ដែនកំណត់ និងសំណុំរូបភាព 141
៨.៣. អនុគមន៍កើន និងអនុគមន៍ចុះ 143
៨.៤. ក្រាបនៃអនុគមន៍ 143
៨.៥. អនុគមន៍ដឺក្រេទី២ 145
៨.៦. អនុគមន៍សនិទាន និងក្រាប 158
៨.៧. អនុគមន៍ះសនិទានងាយ និងក្រាប 162
៨.៨. ក្រាបនៃអនុគមន៍ច្រាស 167
មេរៀនទី៩ ត្រីកោណមាត្រ 171
៩.១. ផលធៀបត្រីកោណមាត្រ 171
៩.១.១. តង់សង់ 171
៩.១.២. ស៊ីនុស និងកូស៊ីនុស 172
៩.១.៣. តម្លៃផលធៀបត្រីកោណមាត្រ 174
៩.១.៤. ទំនាក់ទំនងរវាងផលធៀបត្រីកោណមាត្រ 176
៩.១.៥. ការពន្លាតនៃផលធៀបត្រីកោណមាត្រ 178
៩.២. សញ្ញាណនៃមុំមានទិសដៅ 185
៩.២.១. រង្វាស់មុំ 185
៩.៣. អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ 187
៩.៣.១. ស៊ីនុស កូស៊ីនុស តង់សង់ និងកូតសង់ 187
៩.៣.២. សញ្ញានៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ 189
៩.៣.៣. លក្ខណៈនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ 190
៩.៣.៣. មុំផ្ទុំ 191
៩.៣.៤. សិក្សាអនុគមន៍ត្រីកោណមាឌ 195
៩.៣.៥. អថិរភាពនិងក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\sin x$ 197
៩.៣.៦. អថិរភាពនិងក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\cos x$ 199
៩.៣.៧. អថិរភាពនិងក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\tan x$ 200
៩.៣.៨. អថិរភាពនិងក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\cot x$ 202
៩.៥. រូបមន្តត្រីកោណមាត្រសំខាន់ៗ 202
៩.៦.សមីការត្រីកោណមាត្រ 208
៩.៦.១. ដោះស្រាយសមីការ $\cos x=a$ 208
៩.៦.២. ដោះស្រាយសមីការ $\sin x=a$ 209
៩.៦.៣. ដោះស្រាយសមីការ $\tan x=a$ 211

៩.៦.៤. ដោះស្រាយសមីការ $\cot x = a$ 212
៩.៧. វិសមីការត្រីកោណមាត្រ 213
ឯកសារយោង 221

អារម្ភកថា

សៀវភៅ មូលដ្ឋានគ្រឹះគណិតវិទ្យា បឋមភូមិ១ នេះត្រូវបានចងក្រងឡើងសម្រាប់គរុនិស្សិតផ្នែកគណិតវិទ្យា និងសាស្ត្រាចារ្យ ក៏ដូចជាអ្នកសិក្សាដែលស្រឡាញ់មុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យា

សៀវភៅនេះអាចជួយឱ្យអ្នកអានទទួលបានចំណេះដឹងខាងទ្រឹស្តី និងការគណនាដែលជាមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃគណិតវិទ្យា ។

ឯកសារគណិតវិទ្យានេះត្រូវបានចងក្រងពី សៀវភៅគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី៧ បោះពុម្ពលើកទី១៤ ឆ្នាំ២០២០ សៀវភៅគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី៨ បោះពុម្ពលើកទី១១ ឆ្នាំ២០២០ សៀវភៅគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី៩ បោះពុម្ពលើកទី១១ ឆ្នាំ២០២០ សៀវភៅគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១០ បោះពុម្ពលើកទី១១ ឆ្នាំ ២០២០សៀវភៅណែនាំសម្រាប់គ្រូបង្រៀន គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី៧ ឆ្នាំ២០១៦ សៀវភៅណែនាំសម្រាប់គ្រូបង្រៀន គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី៨ ឆ្នាំ២០១៦ សៀវភៅណែនាំសម្រាប់គ្រូបង្រៀន គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី៩ ឆ្នាំ២០១៦ សៀវភៅគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១០ ភាគ១ និងភាគ២ បោះពុម្ពឆ្នាំ២០០៨ សៀវភៅគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១១ កម្រិតមូលដ្ឋាន និងកម្រិតខ្ពស់ បោះពុម្ពឆ្នាំ២០១២ សៀវភៅគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២ កម្រិតមូលដ្ឋាន និងកម្រិតខ្ពស់ បោះពុម្ពឆ្នាំ២០១៦ ឯកសារបំប៉នគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន គណិតវិទ្យា ឆ្នាំ២០២០ និងឯកសារបរទេសផ្សេងៗបន្ថែមទៀត ដើម្បីបានជាឯកសារប្រើប្រាស់ជាឯកសារពិគ្រោះ។

យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថាក្រោយពីអាន និងពិចារណាដោយយកចិត្តទុកដាក់គរុនិស្សិតពិតជាទទួលបានចំណេះដឹងលើមូលដ្ឋានគ្រឹះគណិតវិទ្យា បានទូលំទូលាយ និងឈានដល់ការសិក្សាគណិតវិទ្យាកាន់តែស៊ីជម្រៅបន្ថែមទៀត ។

យើងខ្ញុំក៏រីករាយនឹងទទួលមតិកែលម្អ និងអភិវឌ្ឍ គ្រប់បែបយ៉ាងពីសំណាក់គរុនិស្សិត និងអ្នកអានគ្រប់មជ្ឈដ្ឋានដើម្បីកែលម្អសៀវភៅនេះឲ្យបានកាន់តែប្រសើរឡើងនៅពេលបោះពុម្ពផ្សាយលើកក្រោយ។

សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ

ជាការពិតសៀវភៅ«មូលដ្ឋានគ្រឹះគណិតវិទ្យា បឋមភូមិ១» ដែលលេចចេញជារូបរាងនៅពេលនេះគឺបានកើតឡើងពីការខិតខំ និងយកចិត្តទុកដាក់ចូលរួមពីភាគី និងស្ថាប័នពាក់ព័ន្ធជាច្រើន។

ខ្ញុំបាទសូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅបំផុតដល់ភាគី និងស្ថាប័នពាក់ព័ន្ធទាំងអស់ដូចជា

- ក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ ដែលបានគាំទ្រយ៉ាងពេញទំហឹងដល់ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាឱ្យបង្កើតមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ហៅកាត់ថា «មូលនិធិ ស.គ.ន»។

- ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាដែលបានបង្កើតមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ដែលហៅកាត់ថា «មូលនិធិ ស.គ.ន» ដើម្បីរួមចំណែកលើកកម្ពស់វប្បធម៌នៃការស្រាវជ្រាវ បំផុសគំនិតច្នៃប្រឌិត និងជំរុញការធ្វើនវានុវត្ត ដើម្បីជាប្រយោជន៍ដល់វិស័យអប់រំ យុវជន និងកីឡា ដែលឆ្លើយតបទៅនឹងទីផ្សារពលកម្ម និងសាកលភាវូបនីយកម្ម។

- មូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ដែលបានគាំទ្រដល់ការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា (Text book) ដែលនឹងត្រូវប្រើប្រាស់នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា ដើម្បីបង្កើនបរិមាណ លើកកម្ពស់គុណភាព និងពង្រីកសមធម៌នៃធនធានសិក្សាជាខេមរភាសាជូនដល់និស្សិតដែលកំពុងបន្តការសិក្សា និងត្រៀមខ្លួនធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។

- ឯកឧត្តមបណ្ឌិតវិទ្យាស្ថាន ដែលបានចាត់តាំងជាគណៈកម្មការនិពន្ធចូលរួមការរៀបរៀង និ-ពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សានេះ។

- នាយកដ្ឋានបណ្តុះបណ្តាលដែលបានចាត់តាំងជាគណៈកម្មការនិពន្ធ និងគណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យ លើស្នាដៃនៃការចូលរួមការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សានេះ។

- លោកប្រធាន នាយកដ្ឋានបណ្តុះបណ្តាលដែលព្រមព្រៀងទទួលសិទ្ធិជាតំណាងអ្នករៀបរៀងក្នុងការចាត់ចែង និងសម្របសម្រួលជាមួយក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ចុះហត្ថលេខាលើកិច្ចព្រមព្រៀង និងកិច្ចដំណើការទូទាត់ថវិកាតាមរយៈការស្នើសុំ និងទទួលថវិកា បោះពុម្ព និងផ្សព្វផ្សាយបន្តនូវស្នាដៃរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អរបស់អ្នករៀបរៀងក្នុងការរៀន និងបង្រៀនក្នុងគ្រឹះស្ថានសិក្សា និងប្រគល់សិទ្ធិស្របតាមការកំណត់នៃកិច្ចព្រមព្រៀង ស្តីពីការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា ក្រោមការគាំទ្រនៃមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍។

- គ្រូឧទ្ទេសមុខវិជ្ជា គណិតវិទ្យា នៃវិទ្យាស្ថានគរុកោសល្យបាត់ដំបង និងវិទ្យាស្ថានគរុកោសល្យរាជធានីភ្នំពេញ ដែលបានផ្តល់មតិកែលម្អលើខ្លឹមសារ នៃមេរៀននីមួយៗឱ្យកាន់តែមានភាពសុក្រឹត និងមានលក្ខណៈវិទ្យាសាស្ត្រ។

ខ្ញុំបាទសង្ឃឹមថា សៀវភៅនេះនឹងឆ្លើយតបជាបន្ទាន់ចំពោះការខ្វះខាតធនធានសិក្សា ដែលជាតម្រូវការសិក្សារបស់សិស្ស និស្សិត នៅកម្រិតវិទ្យាល័យ និងឧត្តមសិក្សា។

ការបរិយាយលើមុខវិជ្ជា

ខ្លឹមសារមេរៀនដែលបានលើកឡើងក្នុងសៀវភៅនេះអាចជួយដោះស្រាយបញ្ហាក្នុងការបង្រៀន និងរៀនណិតវិទ្យាដែលបង្កលក្ខណៈងាយស្រួលដល់គ្រូឧទ្ទេស គ្រូបង្រៀន គរុនិស្សិត គរុសិស្ស សិស្សានុសិស្សអាចអនុវត្តន៍ និងស្រាវជ្រាវសម្រាប់សាធារណៈជនទូទៅ ។ ជាមូលដ្ឋានគ្រឹះសម្រាប់ហ្វឹកហាត់គរុនិស្សិត សិស្សានុសិស្សបានសិក្សានូវរាល់ខ្លឹមសារស្របតាមកម្មវិធីដែលធ្វើឱ្យមេរៀននីមួយៗមានទំនាក់ទំនងគ្នាពីមួយចំណុចទៅមួយចំណុច។

សិក្សាលម្អិតលើកម្មវិធីដែលអាចឱ្យអ្នកសិក្សាចេះប្រើប្រាស់បានដូចជា៖ មេរៀន ឧទាហរណ៍ លំហាត់អនុវត្ត និងលំហាត់ស្រាវជ្រាវរួមមានវិធីផ្សេងក្នុងការដោះស្រាយដោយវិភាគ ការគិតត្រិះរិះពិចារណា ជាដើម។

មេរៀនមូលដ្ឋានគ្រឹះគណិតវិទ្យាបឋមភូមិ១ នឹងជួយឱ្យគរុនិស្សិតមានចំណេះដឹងមូលដ្ឋានគ្រឹះគណិតវិទ្យាទាំងទ្រឹស្តី និងការអនុវត្តដើម្បីងាយស្រួលក្នុងការសិក្សាមុខវិជ្ជាវិទ្យាសាស្ត្រផ្សេងៗទៀត ។ មុខវិជ្ជានេះរួមមាន៖

១.ចំនួនគត់ និងចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប

២.ចំនួនសនិទាន

៣.ចំនួនពិត

៤.រង្វាស់រង្វាល់

៥.កន្សោមពីជគណិត

៦.សមីការ និងវិសមីការដឺក្រេទី១មានមួយអញ្ញាត

៧.សមីការ និងវិសមីការដឺក្រេទី២មានមួយអញ្ញាត

៨.អនុគមន៍

៩.ត្រីកោណមាត្រ

ដើម្បីឱ្យគរុនិស្សិត និងអ្នកសិក្សាបានយល់ និងចេះកាន់តែច្បាស់ លើមូលដ្ឋានគ្រឹះគណិតវិទ្យា ។

មូលន័យសង្ខេប

សៀវភៅនេះផ្តោតសំខាន់ទៅការសិក្សាពីមូលដ្ឋានគ្រឹះគណិតវិទ្យានៅកម្រិតបឋមភូមិ និង បន្ថែមនូវចំណុចខ្លះៗដែលមាននៅក្នុងកម្រិតទុតិយភូមិ ដែលមានមេរៀនសង្ខេប និយមន័យ ទ្រឹស្តីបទ ឧទាហរណ៍ លំហាត់អនុវត្ត ជាដើម ព្រមទាំងមានទំនាក់ទំនងនៃមេរៀននីមួយៗ។ នៅក្នុងមេរៀនចំនួនគត់ និងចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប ក្នុងគោលបំណងដើម្បីឱ្យសិស្សចេះសញ្ញាណនៃចំនួនគត់ និងចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប និយមន័យ ការគណនាលើប្រមាណវិធីទាំង៤ និងប្រមាណវិធីចម្រុះ ក៏ដូចជាលក្ខណៈនៃប្រមាណវិធី ព្រមទាំងលំដាប់នៃប្រមាណវិធី ផ្សេងៗផងដែរ។ ចំពោះមេរៀនសំនួនសនិទាន ពិតជាសំខាន់ដែលអាចឱ្យគរុនិស្សិត សិស្សានុសិស្ស បានដឹងច្បាស់ពីសញ្ញាណនៃចំនួនសនិទាន មានបំណិនក្នុងការធ្វើប្រមាណវិធីលើចំនួនសនិទាន ប្រៀបធៀបចំនួនសនិទាន និងមានការរៀបលំដាប់ចំនួនសនិទានបានច្បាស់លាស់ ។ ដោយឡែកក្នុងមេរៀនចំនួនពិត មានសារៈប្រយោជន៍សំខាន់ដែលផ្សារភ្ជាប់ជាមួយនឹងមេរៀនផ្សេងៗទៀតក្នុងគណិតវិទ្យាកម្រិតខ្ពស់ ហើយអាចស្វែងយល់ និងមានបំណិនលើការធ្វើប្រមាណវិធីលើចំនួនទសភាគ ការប៉ាន់ស្មានតម្លៃប្រហែល ការគណនាលើឫសការេ ឫសគូប ជាដើម ។ សម្រាប់មេរៀនរង្វាស់រង្វាល់ ជាមេរៀនដែលផ្តោតលើតថភាពរស់នៅប្រចាំថ្ងៃរបស់គរុនិស្សិត សិស្សានុសិស្ស ក៏ដូចជាលោកគ្រូ អ្នកគ្រូ ដែលមាន ការវាស់ប្រវែង ការប្រើប្រាស់ ម៉ាស សិក្សាពីចំណុះ ពេលវេលា ការគណនារកផ្ទៃក្រឡា និងមាឌលើវត្ថុផ្សេងៗក្នុងស្ថានភាពរស់នៅ ការគណនាល្បឿនមធ្យម និងមាត្រដ្ឋានដែលអាចឲ្យសិស្សអាចគណនាផ្ទៃក្រឡាពីផ្ទៃដីពិត ដោយប្រើប្រាស់ផែនទី ។ មេរៀនកន្សោមពីជគណិតក៏អាចឱ្យគរុនិស្សិតមានបំណិនក្នុងការគណនា ដោះស្រាយបញ្ហាជាក់ស្តែងក្នុងកសិដ្ឋានចិញ្ចឹមសត្វ ការគណនាប្រាក់ចំណេញ ... ។ មេរៀនទី៦ គឺជាមេរៀន សមីការ និងវិសមីការដឺក្រេទី១មានមួយអញ្ញាត និងមេរៀនទី៧ សមីការ និងវិសមីការដឺក្រេទី២មានមួយអញ្ញាត វាមានប្រយោជន៍ក្នុងវិស័យជំនួញ ហិរញ្ញវត្ថុ សេដ្ឋកិច្ច ... ។ ចំពោះមេរៀនទី៨ អនុគមន៍ មានប្រយោជន៍ក្នុងជីវភាពប្រចាំថ្ងៃ អាចសិក្សាពីចម្ងាយនៃរថយន្តធ្វើដំណើរជាបណ្តាយ សម្រាប់ក្រុមហ៊ុនដឹកជញ្ជូនរៀបចំបែងចែកការងារដឹកជញ្ជូន ... ។ មេរៀនចុងក្រោយនៃសៀវភៅចំណេះដឹងមូលដ្ឋានគ្រឹះគណិតវិទ្យាបឋមភូមិ១ គឺ មេរៀនទី៩ ត្រីកោណមាត្រ មានគោលបំណងឱ្យគរុនិស្សិត និងសិស្សានុសិស្ស មានបំណិនក្នុងការគណនាកម្ពស់អគារខ្ពស់ៗ ការសិក្សាទិសដៅដោយប្រើប្រាស់ត្រីវិស័យផ្សារភ្ជាប់នឹងមេរៀនត្រីកោណមាត្រនេះ។

មេរៀនទី១ ចំនួនគត់ និងចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប

១.១. សញ្ញាណចំនួនគត់ និងចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប

ប្រព័ន្ធរបាប់ដែលគេប្រើសព្វថ្ងៃនេះហៅថាប្រព័ន្ធ របាប់ហិនឌូអារ៉ាប់។ ប្រព័ន្ធរបាប់នេះមានដប់លេខគឺ $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ និង 9 ។ លេខទាំងដប់នេះអាចសរសេរបានជាចំនួន។

ឧទាហរណ៍១ មួយពាន់ប្រាំបួនរយហាសិបបី តាងដោយ 1953 ។

ចំនួន $0, 1, 2, 3, 4, ...$ ហៅថាចំនួនគត់។

ចំនួនគត់ដែលគ្មាន 0 ហៅថា ចំនួនគត់ធម្មជាតិគឺ : $1, 2, 3, 4, ...$

គេតាងចំនួនគត់ ដោយចំណុចនៅលើបន្ទាត់មួយហៅថា បន្ទាត់ចំនួន។

គេសង្កេតឃើញថា ចំនួនគត់មានច្រើនរាប់មិនអស់ គេពុំអាចរាប់វាអស់បានទេ មានន័យថាបើគេមានចំនួនគត់មួយ គេនឹងមានចំនួនគត់មួយទៀតធំបន្ទាប់។

ឧទាហរណ៍២ ចំនួនគត់ធំបន្ទាប់ពី 10 គឺ 11 ។

តើវិធីដកអាចប្រព្រឹត្តទៅបានគ្រប់ករណីឬទេ ?

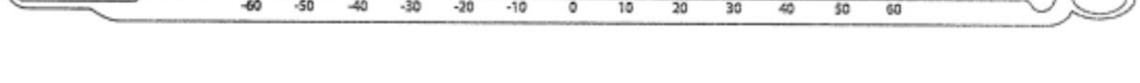
ឧទាហរណ៍៣
$7-2=5$
$7-6=1$
$7-7=0$
$7-8=?$

បើគេមានតែចំនួនគត់ វិធីដកមិនអាចប្រព្រឹត្តទៅបាន កាលណាតួទីមួយតូចជាងតួទីពីរ។ ហេតុនេះ ដើម្បីឱ្យវិធីដកអាចប្រព្រឹត្តទៅបានគ្រប់ករណី គេត្រូវបង្កើតចំនួនគត់ ដែលមានសញ្ញាដកនៅពីមុខហៅថា **ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបអវិជ្ជមាន**។

គេបាន $7-8=-1$, $7-9=-2$, $7-10=-3$

ឧទាហរណ៍៤ អ្នកឧតុនិយមនៅរដ្ឋអាឡាស្កានៃសហរដ្ឋអាមេរិកបានកត់ត្រាឃើញថា សីតុណ្ហភាពដែលត្រជាក់បំផុតក្នុងសហរដ្ឋអាមេរិកកើតឡើងនៅខែ មករា ឆ្នាំ 1971 គឺមានសីតុណ្ហភាព $60^{\circ}C$ ក្រោមសូន្យ។

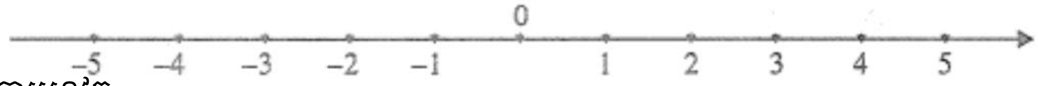
សីតុណ្ហភាព $60^{\circ}C$ ក្រោមសូន្យ តាងដោយ $-60^{\circ}C$ ។ ចំនួនអវិជ្ជមាន -60 ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប។



ជាទូទៅ ចំនួន $..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...$ ហៅថាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប។

សំគាល់ គេអាចសរសេរចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមានដោយគ្មានសញ្ញា + នៅពីមុខក៏បានដែរដូចជា 1,2,3,... ចំណែក 0 ជាចំនួនមិនវិជ្ជមាននិងមិនអវិជ្ជមាន។

គេមានបន្ទាត់មួយដែលមានទិសដៅ។ នៅលើបន្ទាត់នេះគេគ្រិតយកឯកតាស្មើៗគ្នា ហៅថាបន្ទាត់ចំនួន។

បន្ទាត់ចំនួន 

ក្នុងការអនុវត្ត

- គេប្រើចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមានសម្រាប់សំគាល់ប្រាក់ចំណេញ សីតុណ្ហភាពលើសូន្យអង្សា កាលបរិច្ឆេទខាងមុខ ឬទីតាំងនៅខាងស្តាំ...។
- គេប្រើចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបអវិជ្ជមានសម្រាប់សំគាល់ប្រាក់ខាត សីតុណ្ហភាពក្រោមសូន្យអង្សា កាលបរិច្ឆេទកន្លងទៅ ឬទីតាំងនៅខាងឆ្វេង...។

លំហាត់គំរូ តារាងខាងក្រោមបង្ហាញពីតុល្យភាពនៃប្រាក់ខាត និងប្រាក់ចំណេញគិតជាម៉ឺនរៀលក្នុងហាងប្តូរប្រាក់មួយ។

ថ្ងៃ	ចន្ទ	អង្គារ	ពុធ	ព្រហស្បតិ៍	សុក្រ	សៅរ៍	អាទិត្យ
ប្រាក់គិតជាម៉ឺនរៀល	-4	$+2$	$+3$	-2	-3	$+5$	$+7$

ពិពណ៌នាជួរឈរសម្រាប់ថ្ងៃព្រហស្បតិ៍និងថ្ងៃសៅរ៍។

ចម្លើយ

- នៅថ្ងៃព្រហស្បតិ៍បង្ហាញថា ហាងនោះបានខាតអស់ប្រាក់ 2 ម៉ឺនរៀល។
- នៅថ្ងៃសៅរ៍បង្ហាញថា ហាងនោះចំណេញបានប្រាក់ 5 ម៉ឺនរៀល។

ប្រតិបត្តិ ក្នុងចំណោមចំនួន 0.4 , $\frac{1}{2}$, -5 , $+1.2$, -9 , -1 , 0 , 3 , 5 និង 46 តើចំនួនណាជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាននិងចំនួនណាជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបអវិជ្ជមាន។

១.២. ប្រមាណវិធីលើចំនួនគត់ និង ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប

១.២.១. ប្រមាណវិធីបូក និងវិធីដកនៃចំនួនគត់

ឧទាហរណ៍១

ក. រកផលបូកនៃចំនួន 735 និង 196

$$\begin{array}{r} 735 \\ +\ 196 \\ \hline 931 \end{array}$$

ដូចនេះ $735+196=931$។

ខ. រកផលបូកនៃចំនួន 680, 302 និង 96

$$\begin{array}{r} 680 \\ 302 \\ +\ \ 96 \\ \hline 1078 \end{array}$$

ដូចនេះ $680+320+96=1078$ ។

ឧទាហរណ៍២ នៅក្នុងសាលារៀនមួយមានសិស្សថ្នាក់ទី 7 ចំនួន 589 នាក់ សិស្សថ្នាក់ទី 8 ចំនួន 546 នាក់ និងសិស្សថ្នាក់ទី 9 ចំនួន 503 នាក់។ រកចំនួនសិស្សសរុបនៅក្នុងសាលារៀន។

ចំនួនសិស្សសរុបមាន: $589+546+503=1638$ នាក់

ឧទាហរណ៍៣

ក. រកផលដករវាងចំនួន 903 និង 347

$$\begin{array}{r} 9\ 0\ 3 \\ -\ 3\ 4\ 7 \\ \hline 5\ 5\ 6 \end{array}$$

ដូចនេះ $903-347=556$ ។

ខ. ធ្វើវិធីដក $8023-4571$

$$\begin{array}{r} 8\ 0\ 2\ 3 \\ -\ 4\ 5\ 7\ 1 \\ \hline 3\ 4\ 5\ 2 \end{array}$$

ដូចនេះ $8023-4571=3452$ ។

ឧទាហរណ៍៤ ឆ្នាំនេះពូសុខប្រមូលផលសណ្តែកខៀវនិងសណ្តែកសៀងបានចំនួន $3250kg$ ក្នុងនោះគាត់ដឹងថាគាត់បានផលសណ្តែកខៀវចំនួន $1598kg$ ។ តើពូសុខបានផលសណ្តែកសៀងប៉ុន្មានគីឡូក្រាម ?

ផលដករវាងម៉ាសសណ្តែកសរុប និងម៉ាសសណ្តែកខៀវ: $3250-1598=1652$ ។

ដូចនេះ ពូសុខបានផលសណ្តែកសៀងចំនួន $1652kg$ ។

សំគាល់ គេសង្កេតឃើញថា

ផលបូកម៉ាសសណ្តែកខៀវនិងម៉ាសសណ្តែកសៀង $1598+1652=3250$

ផលដកម៉ាសសណ្តែកសរុបនិងម៉ាសសណ្តែកខៀវ $3250-1598=1652$

ផលដកម៉ាសសណ្តែកសរុបនិងម៉ាសសណ្តែកសៀង $3250-1652=1598$ ។

ជាទូទៅ បើ $a+b=c$ នោះ $a=c-b$ និង $b=c-a$

បើ $a-b=c$ នោះ $a=c+b$ និង $b=a-c$

លំហាត់គំរូ តារាងខាងស្តាំបង្ហាញចំនួនភ្ញៀវទេសចរអន្តរជាតិដែលបានទិញសំបុត្រចូលទស្សនាប្រាសាទអង្គរវត្តក្នុងខែកុម្ភៈ មីនានិងមេសា។

ខែ	កុម្ភៈ	មីនា	មេសា
ចំនួនភ្ញៀវ	58930	47650	73280

រកចំនួនភ្ញៀវទេសចរសរុបក្នុងរយៈពេលបីខែ។

ចម្លើយ ចំនួនភ្ញៀវក្នុងរយៈពេលបីខែគឺ $58930+47650+73280=179860$ នាក់

ដូចនេះ ភ្ញៀវទេសចរអន្តរជាតិដែលបានចូលទស្សនាប្រាសាទអង្គរវត្តក្នុងរយៈពេលបីខែមានចំនួន 179860 នាក់។

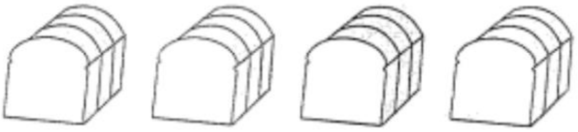
ប្រតិបត្តិ គណនាផលបូកនិងផលដកខាងក្រោម

ក. $46382+6948+164968+1896$ ខ. $1712366-492135-54201$

១.២.២. ប្រមាណវិធីគុណ និងវិធីចែកនៃចំនួនគត់

ឧទាហរណ៍១ បន្ទះនំប៉័ងអាំងមានចំនួន

$$\underbrace{3+3+3+3}_{4 \text{ ដង}}=4\times3=12$$



ឧទាហរណ៍២ ចូររកផលគុណនៃចំនួន 7428×64

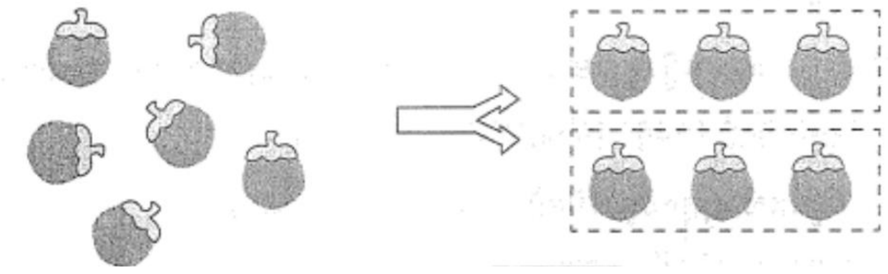
$$\begin{array}{rrrrrrl} & & 7 & 4 & 2 & 8 & \\ & \times & & & 6 & 4 & \\ \hline & 2 & 9 & 7 & 1 & 2 & \leftarrow \boxed{7428\times4} \\ + & 4 & 4 & 5 & 6 & 8 & 0 \leftarrow \boxed{7428\times60} \\ \hline 4 & 7 & 5 & 3 & 9 & 2 & \leftarrow \boxed{\text{ផលគុណនៃ } 7428\times64} \end{array}$$

ឬ

$$\begin{array}{rrrrrr} & & 7 & 4 & 2 & 8 \\ & \times & & & 6 & 4 \\ \hline & 2 & 9 & 7 & 1 & 2 \\ + & 4 & 4 & 5 & 6 & 8 \\ \hline 4 & 7 & 5 & 3 & 9 & 2 \end{array}$$

ដូចនេះ $7428\times64=475392$

ឧទាហរណ៍៣ គេចែកមង្ឃុត 6 ផ្លែឱ្យសុខ និងសៅក្នុងចំណែកស្មើៗគ្នា។ តើម្នាក់ៗទទួលបានប៉ុន្មានផ្លែ?



ដូចនេះ $6 \div 2 = 3$

6 ↓ តំណាងចែក, 2 ↓ តួចែក, 3 ↓ ផលចែក

ដូចនេះ ម្នាក់ៗទទួលបានផ្លែមង្ឃុត 3 ផ្លែ។

ឧទាហរណ៍៤ គេធ្វើវិធីចែកខាងក្រោម

ក. $6645\div15$ ខ. $5406\div128$

ចម្លើយ ក.

តំណាងចែក ⟵ 6645 | 15 ⟶ តួចែក; 443 ⟶ ផលចែក

$$
\begin{array}{r|l}
6\ 6\ 4\ 5 & 15 \\ \cline{2-2}
-\ 6\ 0\ 0\ 0 & 443 \\ \cline{1-1}
6\ 4\ 5 & \\
-\ 6\ 0\ 0 & \\ \cline{1-1}
4\ 5 & \\
-\ 4\ 5 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

$6645 = 15 \times 443 + 0$

ខ.

$$
\begin{array}{r|l}
5\ 4\ 0\ 6 & 128 \\ \cline{2-2}
-\ 5\ 1\ 2\ \ \ & 42 \\ \cline{1-1}
2\ 8\ 6 & \\
-\ 2\ 5\ 6 & \\ \cline{1-1}
3\ 0 &
\end{array}
$$

3 0 ⟶ សំណល់

$5408 = 128 \times 42 + 30$

សំគាល់ បើ $a \times 15 = 450$ នោះ $a = 450 \div 15 = 30$

បើ $a \div 7 = 35$ នោះ $a = 7 \times 35 = 245$ ។

ជាទូទៅ បើ $a \times b = c$ នោះ $a = c \div b$ និង $b = c \div a$

លំហាត់គំរូ១ បណ្ណាគារមួយលក់សៀវភៅក្នុងមួយថ្ងៃបាន 85 ក្បាល។ តើក្នុងរយៈពេលពីរសប្តាហ៍ បណ្ណាគារនោះនឹងលក់សៀវភៅបានប៉ុន្មានក្បាល បើក្នុងមួយថ្ងៃៗលក់បានសៀវភៅស្មើគ្នា ?

ចម្លើយ ចំនួនសៀវភៅសរុបដែលបណ្ណាគារលក់បានទាំងអស់

85 ក្បាល $\times 14$ ក្បាល $= 1190$ ក្បាល

ដូចនេះ ក្នុងរយៈពេលពីរសប្តាហ៍បណ្ណាគារលក់សៀវភៅបានចំនួន 1190 ក្បាល។

លំហាត់គំរូ២ សាលារៀនមួយមាន 32 បន្ទប់ និងមានគុសិស្សចំនួន 1280 ។ បើបន្ទប់រៀននីមួយៗមានចំនួនគុស្មើគ្នា រកចំនួនគុសិស្សសម្រាប់បន្ទប់រៀននីមួយៗ។

ចម្លើយ ចំនួនគុសិស្សក្នុងបន្ទប់រៀននីមួយៗ $1280 \div 32 = 40$

ដូចនេះ ក្នុងបន្ទប់រៀននីមួយៗមានគុសិស្សចំនួន 40 ។

ប្រតិបត្តិ ចូរធ្វើវិធីចែក និងវិធីគុណខាងក្រោម

ក. $669292 \div 122$ ខ. $7769 \times 324 \times 189$

១.៣. លក្ខណៈនៃប្រមាណវិធី

១.៣.១. លក្ខណៈនៃវិធីបូក

ឧទាហរណ៍១ គេដឹងថា $4+5=9$ និង $5+4=9$

ដូចនេះ $4+5=5+4=9$

គេឃើញថាលំដាប់នៃការបូកពីរចំនួនមិនប្រែប្រួលលទ្ធផលទេ។ ក្នុងករណីនេះ គេថាវិធីបូកមានលក្ខណៈត្រឡប់។

ឧទាហរណ៍២ គេដឹងថា $2+3+5=(2+3)+5=5+5=10$

ម្យ៉ាងទៀត $2+3+5=2+(3+5)=2+8=10$

ដូចនេះ $2+3+5=(2+3)+5=2+(3+5)$

គេឃើញថាលំដាប់នៃការផ្តុំពីរចំនួនមិនប្រែប្រួលលទ្ធផលទេ។ ក្នុងករណីនេះ គេថា **វិធីបូកមានលក្ខណៈផ្តុំ**។

ឧទាហរណ៍៣ គេដឹងថា $1+0=1$ និង $0+1=1$

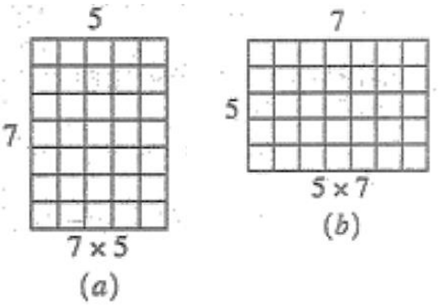
ដូចនេះ $1+0=0+1$ ចំនួន 0 ហៅថា ជាតុណឺតចំពោះវិធីបូក។

ជាទូទៅ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ a,b និង c

- $a+b=b+a$
  $a+(b+c)=(a+b)+c$
- $a+0=0+a=a$, 0 ជា ជាតុណឺតចំពោះវិធីបូក។

១.៣.២. លក្ខណៈនៃវិធីគុណ

ឧទាហរណ៍១



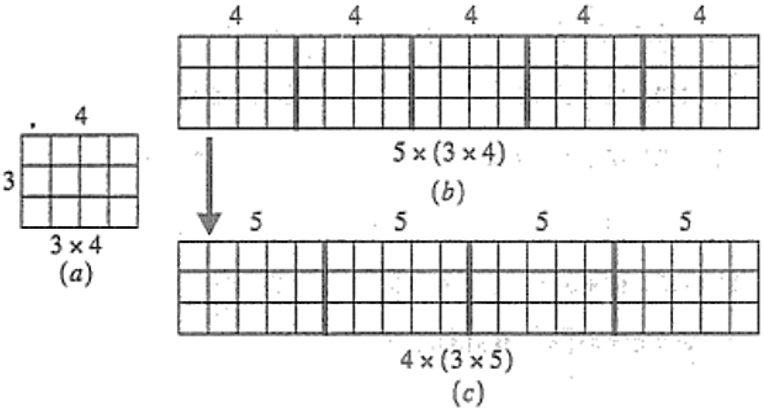
រូប(a) : $7\times5=35$

និងរូប(b): $5\times7=35$

ដូចនេះ $7\times5=5\times7=35$ ។

គេថាវិធីគុណមានលក្ខណៈត្រឡប់។

ឧទាហរណ៍២



រូប(a) : 3×4 ,

រូប(b):$5\times(3\times4)$ និង

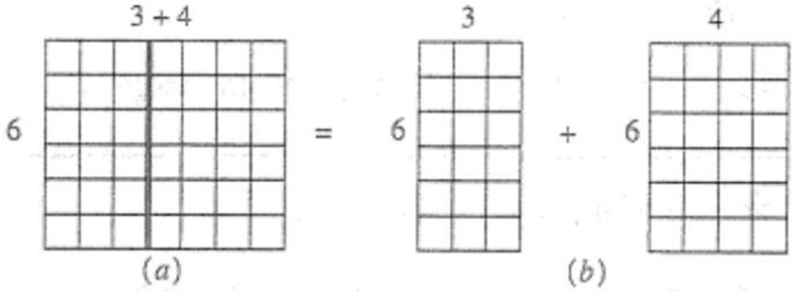
រូប(c): $4\times(3\times5)$

រូប(b): $5\times(3\times4)=5\times12=60$

រូប(b): $4\times(3\times5)=4\times15=60$

ដូចនេះវិធីគុណមានលក្ខណៈផ្តុំ។

ឧទាហរណ៍៣ តាមរូបបង្ហាញ: $6\times(3+4)=(6\times3)+(6\times4)$ និង $(3+4)\times6=(3\times6)+(4\times6)$



គេឃើញថា វិធីគុណមានលក្ខណៈបំបែកចំពោះវិធីបូក។

ឧទាហរណ៍៤ គេដឹងថា $1\times14=14$ និង $14\times1=14$

ចំនួន1 ហៅថា ជាតុណឺតចំពោះវិធីគុណ។

ជាទូទៅ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ a,b និង c

- $a\times b=b\times a$
- $a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$
- $a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$
- $a\times1=1\times a=a$, 1ជា ជាតុណឺតចំពោះវិធីគុណ។

លំហាត់គំរូ ចានមួយមានកូនឃ្លីច្រើនជាង 80 គ្រាប់ ប៉ុន្តែតិចជាង 90 គ្រាប់ ហើយវាស្មើនឹង 7 ដងនៃផលបូកតួលេខនៃចំនួនឃ្លីទាំងអស់។ តើកូនឃ្លីសរុបដែលនៅក្នុងចានមានចំនួនប៉ុន្មានគ្រាប់ ?

ចម្លើយ

តាង n ជាចំនួនគ្រាប់ឃ្លីទាំងអស់ដែល $80<n<90$

បើ $n=81$ នោះ $(8+1)\times7=63<80$ (មិនផ្ទៀងផ្ទាត់)

បើ $n=82$ នោះ $(8+2)\times7=70<80$ (មិនផ្ទៀងផ្ទាត់)

បើ $n=83$ នោះ $(8+3)\times7=77<80$ (មិនផ្ទៀងផ្ទាត់)

បើ $n=84$ នោះ $(8+4)\times7=84, 80<84<90$ (ផ្ទៀងផ្ទាត់)

បើ $n=85$ នោះ $(8+5)\times7=91>90$ (មិនផ្ទៀងផ្ទាត់)

ដូចនេះ នៅក្នុងចានមានឃ្លីទាំងអស់ចំនួន 84 គ្រាប់។

ប្រតិបត្តិ គេដាក់ផ្លែក្រូចក្នុងកេះធំបី ដែលក្នុងមួយកេះផ្ទុកក្រូច 98 ផ្លែ និងដាក់ក្នុងកេះតូចពីរ ដែលក្នុងមួយកេះផ្ទុកផ្លែក្រូច 24 ផ្លែ។ តើក្រូចសរុបមានប៉ុន្មានផ្លែ ?

១.៤. លំដាប់នៃប្រមាណវិធីលើចំនួនគត់

ឧទាហរណ៍១ គណនា $19-3+7$

បើគេធ្វើវិធីបូកមុនគេបាន $19-3+7=19-(3+7)=19-10=9$

បើគេធ្វើវិធីដកមុនគេបាន $19-3+7=(19-3)+7=16+7=23$

ដូចនេះ គេឃើញថា $19-(3+7)\neq(19-3)+7$

គេត្រូវមានវិធានមួយច្បាស់លាស់ក្នុងការធ្វើប្រមាណវិធី ដែលមានតែវិធីបូកនិងដកគឺ $19-3+7=16+7=23$ ដែលជាវិធានត្រឹមត្រូវ។

ឧទាហរណ៍២ គណនា $12-2+10-14$ ។

គេបាន $12-2+10-14=\underbrace{10+10}-14=20-14=6$ ។

ជាទូទៅ	ចំពោះកន្សោមដែលមានតែវិធីបូកនិងវិធីដកគេត្រូវធ្វើប្រមាណវិធីពីឆ្វេងទៅស្តាំ

ឧទាហរណ៍៣ គណនា $6\times12\div4$ ។

គេបាន $6\times12\div4=72\div4=18$

ឧទាហរណ៍៤ គណនា $125\div5\times15$ ។

គេបាន $\underbrace{125\div5}\times15=25\times15=375$

ជាទូទៅ	ចំពោះកន្សោមដែលមានតែវិធីគុណនិងវិធីចែក គេត្រូវធ្វើប្រមាណវិធីពីឆ្វេងទៅស្តាំ។

ឧទាហរណ៍៥ គណនា $52-4\times12+18\div6\times3$ ។

គេបាន $52-4\times12+18\div6\times3=\underbrace{52-48}+3\times3=4+9=13$

ជាទូទៅ	បើកន្សោមមានប្រមាណវិធីទាំងបួន គេត្រូវធ្វើវិធីគុណ ឬវិធីចែកមុនវិធីបូក ដកពីឆ្វេងទៅស្តាំ។

ឧទាហរណ៍៦ គណនា $12-(4\times3-2)+9$ ។

គេបាន $12-\left(4\times3-2\right)+9=12-\left(12-2\right)+9=\underbrace{12-10}+9=2+9=11$

ជាទូទៅ	បើកន្សោមមួយមានវង់ក្រចក គេត្រូវធ្វើប្រមាណវិធីក្នុងវង់ក្រចកជាមុនសិន។

ឧទាហរណ៍៧ គណនា $[(3+6)\div(5-2)+8]\times(19-13)$ ។

គេបាន $\left[\left(3+6\right)\div\left(5-2\right)+8\right]\times\left(\underbrace{19-13}\right)$

$$=\left[\underbrace{9 \div 3} +8\right]\times 6$$

$$=\left[\underbrace{3+8}\right]\times 6$$

$$= 11\times 6$$

$$= 66$$

ជាទូទៅ	បើកន្សោមមួយមានវង់ក្រចកនិងតង្កៀប គេត្រូវធ្វើប្រមាណវិធីក្នុងវង់ក្រចក ដែលនៅក្នុងតង្កៀបជាមុន។

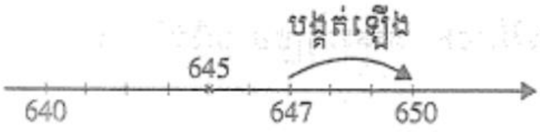
១.៥. ការបង្គត់ចំនួនគត់

ឧទាហរណ៍១ បង្គត់ចំនួន

ក. 647 យកត្រឹមខ្ទង់ដប់

647 នៅជិត 650 ជាង 640

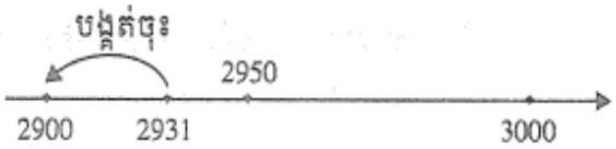
ដូចនេះ $647\approx 650$ (យកត្រឹមខ្ទង់ដប់)



ខ. 2931 យកត្រឹមខ្ទង់រយ

2931 នៅជិត 2900 ជាង 3000

ដូចនេះ $2931\approx 2900$ (យកត្រឹមខ្ទង់រយ)



ក្នុងការបង្គត់ចំនួន គេត្រូវមើលលេខដែលនៅខាងស្តាំបន្ទាប់ពីខ្ទង់ដែលចង់បង្គត់ បើមានតម្លៃលេខពី 0 ដល់ 4 ត្រូវបង្គត់ចុះ និងតម្លៃលេខពី 5 ដល់ 9 ត្រូវបង្គត់ឡើង។

ឧទាហរណ៍២ បង្គត់ចំនួន 15824 យកត្រឹមខ្ទង់រយ រួចហើយយកត្រឹមខ្ទង់ពាន់។

$$15\overset{+0}{\overline{8}}24 = 15800$$ (បង្គត់យកត្រឹមខ្ទង់ 100)

↑ លេខនេះតូចជាង 5

$$1\overset{+1}{\overline{5}}824 = 16000$$ (បង្គត់យកត្រឹមខ្ទង់ 1000)

↑ លេខនេះធំជាង 5

ជាទូទៅ

- ដើម្បីបង្គត់ចំនួនគត់យកត្រឹមខ្ទង់ដប់ គេពិនិត្យលេខខ្ទង់រាយ។ បើវាតូចជាង 5 គេត្រូវជំនួសវាដោយ 0 ។ បើវាធំជាងឬស្មើនឹង 5 គេបន្ថែម 1 ទៅលើខ្ទង់ដប់ ហើយជំនួសខ្ទង់រាយដោយ 0 ។
- ដើម្បីបង្គត់ចំនួនគត់យកត្រឹមខ្ទង់រយ គេពិនិត្យលេខខ្ទង់ដប់។ បើវាតូចជាង 5 គេត្រូវជំនួសខ្ទង់ដប់ និងខ្ទង់រាយដោយ 0 ។ បើវាធំជាងឬស្មើនឹង 5 គេបន្ថែម 1 ទៅលើខ្ទង់រយ ហើយជំនួសលេខខ្ទង់ដប់ និងខ្ទង់រាយដោយ 0 ។ល។

ការប៉ាន់ស្មាន

ក្នុងការប៉ាន់ស្មានចម្លើយ គេអាចប្រើការបង្គត់ចំនួន រួចធ្វើមុធាគណនា។

ឧទាហរណ៍១ គេមានវិធីបូក $732+576+342$ ។

គេត្រូវបង្គត់ចំនួន $732+576+342 \approx 700+600+300$

រួចមុធាគណនាឃើញ 16000

លំហាត់គំរូ ធ្វើការប៉ាន់ស្មានចម្លើយនៃប្រមាណវិធីនេះ $870\times 38\div 95$

ចម្លើយ $870\times 38\div 95 \approx 900\times 40\div 100 \approx 36000\div 100 = 360$

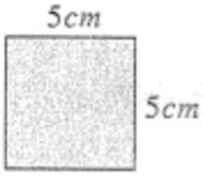
ប្រតិបត្តិ បង្គត់ចំនួនខាងក្រោមយកត្រឹមខ្ទង់ដប់ ខ្ទង់រយ និងខ្ទង់ពាន់។

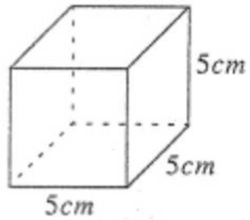
ក. 7663692 ខ. 996972 គ. 3500004

១.៦. ការេ គូប និងឫសការេ ឫសគូប

១.៦.១. ការេ និងគូប

ឧទាហរណ៍១ រកក្រឡាផ្ទៃការេនិងមាឌគូបនៃរូបខាងក្រោម





ក្រឡាផ្ទៃការេ $5\times 5 = 5^2 = 25$

ការេមានផ្ទៃក្រឡា $25cm^2$

មាឌគូប $5\times 5\times 5 = 5^3 = 125$

គូបមានមាឌ $125cm^3$

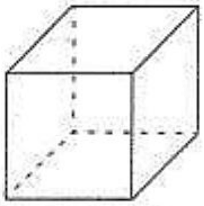
គេសង្កេតឃើញថា $\underbrace{5\times 5}_{2\text{កត្តា}}$ សរសេរជា 5^2 អានថាប្រាំការេ

$\underbrace{5\times 5\times 5}_{3\text{កត្តា}}$ សរសេរជា 5^3 អានថាប្រាំគូប។

១.៦.២. ឫសការេ និងឫសគូប

ឧទាហរណ៍១ រកជ្រុងការេនិងជ្រុងគូបដោយដឹងថា ការេមានផ្ទៃក្រឡា $S=100cm^2$ ហើយគូបមានមាឌ $V=27dm^3$ ដូចរូបខាងស្តាំ។

$S = 100cm^2$



$V = 27dm^3$

ផ្ទៃក្រឡាការេ $S=100cm^2=10cm\times10cm$

10 ហៅថា ឫសការេនៃ 100។ គេសរសេរ $\sqrt{100}=10$

ដូចនេះ ជ្រុងនៃការេគឺ $a=\sqrt{100}=10cm$ ។

មាឌនៃគូប $V=27dm^3=3dm\times3dm\times3dm$

3 ហៅថាឫស គូបនៃ 27 ។ គេសរសេរ $\sqrt[3]{27}=3$

ដូចនេះ ជ្រុងនៃគូបគឺ $a=\sqrt[3]{27}=3dm$ ។

សំគាល់ ចំពោះ $\sqrt{100}$, $\sqrt[3]{27}$

- សញ្ញា $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$ ហៅថារ៉ាឌីកាល់
- 100 និង 27 ហៅថារ៉ាឌីកង់។

១.៧. ភាពចែកដាច់

១.៧.១. ភាពចែកដាច់នឹង 2 និង 5

ឧទាហរណ៍១ $42\div2=21$, $56\div2=28$, $198\div2=99$, $210\div2=105$

ឧទាហរណ៍២ $70\div5=14$, $95\div5=19$, $160\div5=32$, $525\div5=105$

តាមឧទាហរណ៍ខាងលើ គេសង្កេតឃើញថាមួយចំនួនចែកដាច់នឹង 2 កាលណាវាមានលេខខាងចុងជាលេខគូ ហើយមួយចំនួនចែកដាច់នឹង 5 កាលណាវាមានលេខខាងចុង 0 ឬ 5 ។

> **ជាទូទៅ** មួយចំនួនគត់ចែកដាច់នឹង 2 កាលណាវាជាចំនួនគត់គូ។
> មួយចំនួនគត់ចែកដាច់នឹង 5 កាលណាវាមានលេខខាងចុង 0 ឬ 5 ។

លំហាត់គំរូ គេឱ្យផលបូក $9018+1457$, $1995+1329$ ។ ដោយមិនធ្វើវិធីចែក ប្រាប់ផលបូកដែល

ក. ចែកដាច់នឹង 5 ខ.ចែកដាច់នឹង 2

ចម្លើយ ក. $9018+1457=91575$ ចែកដាច់នឹង 5 ព្រោះផលបូកមានលេខខាងចុង 5 ។

ខ. $1995+1329=3324$ ចែកដាច់នឹង 2 ព្រោះផលបូកជាចំនួនគត់គូ។

ប្រតិបត្តិ គេឱ្យចំនួនដែលមានលេខបួនខ្ទង់ $154\square$ ។ បំពេញលេខក្នុងប្រអប់ដើម្បីឱ្យបានចំនួនដែលចែកដាច់នឹង 2 ផង និង 5 ផង។

១.៧.២. ភាពចែកដាច់នឹង 3 និង 9

ឧទាហរណ៍១ $195 \div 3 = 65$, $927 \div 3 = 309$, $1005 \div 3 = 335$

គេសង្កេតឃើញថា

195 ចែកដាច់នឹង 3 ហើយផលបូកលេខតាមខ្ទង់គឺ $1+9+5=15$ ចែកដាច់នឹង 3 ។

927 ចែកដាច់នឹង 3 ហើយផលបូកលេខតាមខ្ទង់គឺ $9+2+7=18$ ចែកដាច់នឹង 3 ។

1005 ចែកដាច់នឹង 3 ហើយផលបូកលេខតាមខ្ទង់គឺ $1+0+0+5=6$ ចែកដាច់នឹង 3 ។

ឧទាហរណ៍២ $216 \div 9 = 24$, $828 \div 9 = 92$, $2106 \div 9 = 234$

គេសង្កេតឃើញថា

216 ចែកដាច់នឹង 9 ហើយផលបូកលេខតាមខ្ទង់គឺ $2+1+6=9$ ចែកដាច់នឹង 9 ។

828 ចែកដាច់នឹង 9 ហើយផលបូកលេខតាមខ្ទង់គឺ $8+2+8=18$ ចែកដាច់នឹង 9 ។

2106 ចែកដាច់នឹង 9 ហើយផលបូកលេខតាមខ្ទង់គឺ $2+1+0+6=9$ ចែកដាច់នឹង 9 ។

ជាទូទៅ មួយចំនួនចែកដាច់នឹង 3 កាលណាផលបូកលេខតាមខ្ទង់នៃចំនួននោះចែកដាច់នឹង 3 ។

មួយចំនួនចែកដាច់នឹង 9 កាលណាផលបូកលេខតាមខ្ទង់នៃចំនួននោះចែកដាច់នឹង 9 ។

លំហាត់គំរូ គេឱ្យចំនួនមានលេខបួនខ្ទង់ 200□ ។ បំពេញលេខក្នុងប្រអប់ដើម្បីឱ្យបានចំនួនចែកដាច់នឹង 3 ផង និង 9 ផង។

ចម្លើយ ផលបូកលេខ $2+0+0+7=9$ ចែកដាច់នឹង 3 ផង និង 9 ផង

ដូចនេះ លេខក្នុងប្រអប់គឺលេខ 7 ។

ប្រតិបត្តិ គេមានមួយចំនួនដែលមានលេខបីខ្ទង់ 7□8 ។

បំពេញលេខក្នុងប្រអប់ដើម្បីឱ្យបានចំនួននោះចែកដាច់នឹង 3 ផង និង 9 ផង។

១.៧.៣. ភាពចែកដាច់នឹង 4 និង 8

ឧទាហរណ៍១ $124 \div 4 = 31$, $832 \div 4 = 208$, $1000 \div 4 = 250$

គេសង្កេតឃើញថា

124 ចែកដាច់នឹង 4 ហើយ 24 ចែកដាច់នឹង 4 ។

832 ចែកដាច់នឹង 4 ហើយ 32 ចែកដាច់នឹង 4 ។

1000 ចែកដាច់នឹង 4 ហើយ 00 ចែកដាច់នឹង 4 ។

ឧទាហរណ៍២ $3128 \div 8 = 391$, $5048 \div 8 = 631$, $7120 \div 8 = 890$

គេសង្កេតឃើញថា

3128 ចែកដាច់នឹង 8 ហើយ 128 ចែកដាច់នឹង 4 ។

5048 ចែកដាច់នឹង 8 ហើយ 048 ចែកដាច់នឹង 8 ។

7120 ចែកដាច់នឹង 8 ហើយ 120 ចែកដាច់នឹង 8 ។

ជាទូទៅ មួយចំនួនចែកដាច់នឹង 4 កាលណាវាមានលេខខាងចុងពីរខ្ទង់ចែកដាច់នឹង 4
មួយចំនួនចែកដាច់នឹង 8 កាលណាវាមានលេខខាងចុងបីខ្ទង់ចែកដាច់នឹង 8 ។

លំហាត់គំរូ១ គេឱ្យចំនួនមានលេខ 6 ខ្ទង់ 11223□ ។ ចូរបំពេញលេខក្នុងប្រអប់ដើម្បីឱ្យចំនួននោះចែកដាច់នឹង 4 ផង និង 8 ផង។

ចម្លើយ

112232 ចែកដាច់នឹង 4 ព្រោះ 32 ចែកដាច់នឹង 4 ហើយចែកដាច់នឹង 8 ព្រោះ 232 ចែកដាច់នឹង 8 ។
ដូចនេះ លេខក្នុងប្រអប់គឺលេខ 2 ។

លំហាត់គំរូ២ ពីឆ្នាំ 1999 ដល់ឆ្នាំ 2010 តើឆ្នាំណាខ្លះចែកដាច់នឹង 4 ផង និង 8 ផង។

ចម្លើយ 2008 ។

ប្រតិបត្តិ គេមានមួយចំនួនដែលមានលេខប្រាំខ្ទង់ 734□0 ។ បំពេញលេខក្នុងប្រអប់ដើម្បីឱ្យចំនួននោះ

ក. ចែកដាច់នឹង 4 ខ. ចែកដាច់នឹង 8

១.៧.៤. ភាពចែកដាច់នឹង 6

ឧទាហរណ៍១ $126 \div 6 = 21$, $1242 \div 6 = 207$, $24156 \div 6 = 4026$

គេសង្កេតឃើញថា

126 ចែកដាច់នឹង 6 ព្រោះវាជាចំនួនគូ និងចែកដាច់នឹង 3 ។

1242 ចែកដាច់នឹង 6 ព្រោះវាជាចំនួនគូ និងចែកដាច់នឹង 3 ។

24156 ចែកដាច់នឹង 6 ព្រោះវាជាចំនួនគូ និងចែកដាច់នឹង 3 ។

ជាទូទៅ មួយចំនួនចែកដាច់នឹង 6 កាលណាវាជាចំនួនគូ និងចែកដាច់នឹង 3 ។

លំហាត់គំរូ គេឱ្យចំនួនមានលេខ 6 ខ្ទង់ 11223□ ។ ចូរបំពេញលេខក្នុងប្រអប់ដើម្បីឱ្យចំនួននោះចែកដាច់នឹង 6 ។

ចម្លើយ

112230 ចែកដាច់នឹង 6 ព្រោះវាជាចំនួនគូ និងចែកដាច់នឹង 3
ហើយ 112236 ចែកដាច់នឹង 6 ព្រោះវាជាចំនួនគូ និងចែកដាច់នឹង 3 ។

ដូចនេះ លេខក្នុងប្រអប់គឺលេខ 0 និង 6 ។

ប្រតិបត្តិ គេឱ្យចំនួនមានលេខ 6 ខ្ទង់ $53542\square$ ។ ចូរបំពេញលេខក្នុងប្រអប់ដើម្បីឱ្យចំនួននោះចែកដាច់នឹង 6 ។

១.៧.៥. ភាពចែកដាច់នឹង 7

ឧទាហរណ៍១ $476\div 7=68$, $945\div 7=135$, $714\div 7=102$

គេសង្កេតឃើញថា

476 ចែកដាច់នឹង 7 ព្រោះ $47-2\times 6=35$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

945 ចែកដាច់នឹង 7 ព្រោះ $94-2\times 5=84$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

714 ចែកដាច់នឹង 7 ព្រោះ $71-2\times 4=63$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

> **ជាទូទៅ**មួយចំនួនមានលេខបីខ្ទង់ចែកដាច់នឹង 7 កាលណាពីរខ្ទង់ខាងដើមដកពីរដងនៃខ្ទង់ខាងចុង ចែកដាច់នឹង 7 ។

ឧទាហរណ៍២ $123459\div 7=17637$, $25347\div 7=362$

គេសង្កេតឃើញថា

123459 ចែកដាច់នឹង 7 ព្រោះ $459-123=336$ ដែល $33-2\times 6=21$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

25347 ទៅជា 025347 ចែកដាច់នឹង 7 ព្រោះ $347-025=322$ ដែល $32-2\times 2=28$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

> **ជាទូទៅ**
> - មួយចំនួនមានលេខប្រាំមួយខ្ទង់(បើតិចជាងប្រាំមួយខ្ទង់ ថែម 0 ខាងមុខបង្គ្រប់)ចែកដាច់នឹង 7 កាលណាបីខ្ទង់ខាងដើមដកបីខ្ទង់ខាងចុងចែកដាច់នឹង 7 ។
> - មួយចំនួនមានលេខច្រើនខ្ទង់ចែកដាច់នឹង 7 កាលណាផលបូកនៃផលគុណរវាង លេខក្នុងខ្ទង់នៃចំនួននោះបីស្តាំមកឆ្វេង ជាមួយនឹងចំនួន $132645\,132645\ldots$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

លំហាត់គំរូ គេឱ្យចំនួនមានលេខ 6 ខ្ទង់ $23112\square$ ។ ចូរបំពេញលេខក្នុងប្រអប់ដើម្បីឱ្យចំនួននោះចែកដាច់នឹង 7 ។

ចម្លើយ

231126 ចែកដាច់នឹង 7 ព្រោះ $231-126=105$ ដែល $10-2\times 5=0$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

ដូចនេះ លេខក្នុងប្រអប់គឺលេខ 6 ។

ប្រតិបត្តិ គេឱ្យចំនួនមានលេខ 6 ខ្ទង់ 45312☐ ។ ចូរបំពេញលេខក្នុងប្រអប់ដើម្បីឱ្យចំនួននោះចែកដាច់នឹង 7 ។

១.៧.៦. លក្ខណៈចែកដាច់នៃផលបូក និងផលដក

ឧទាហរណ៍១ គេមាន 512 ចែកដាច់នឹង 2 និង 326 ចែកដាច់នឹង 2

គេសង្កេតឃើញថា $512+326=838$ ក៏ចែកដាច់នឹង 2 ដែរ

ហើយ $512-326=186$ ក៏ចែកដាច់នឹង 2 ដែរ។

> **ជាទូទៅ** បើតួនីមួយៗនៃផលបូក ឬផលដក ចែកដាច់នឹងចំនួនតែមួយដូចគ្នា នោះផលបូកឬផលដករបស់វា ក៏ចែកដាច់នឹងចំនួននោះដែរ។

លំហាត់គំរូ គេមានបីចំនួនគឺ a , $a+1$, $a+2$ ។ បង្ហាញថាផលបូកចំនួនបីនេះចែកដាច់នឹង 3 ។

ចម្លើយ

គេបាន $a+a+1+a+2=3a+3$

ដោយ $3a$ ចែកដាច់នឹង 3 ហើយ 3 ចែកដាច់នឹង 3 នោះ $3a+3$ ចែកដាច់នឹង 3 ។

ប្រតិបត្តិ បំពេញលេខក្នុងប្រអប់ដើម្បីឱ្យផលបូកនិងផលដកចែកដាច់នឹង 9

ក. 3☐0 +16☐

ខ. 40☐ - 2☐0

១.៨. តួចែក និងពហុគុណ

ឧទាហរណ៍១ 18 ចែកដាច់នឹង $1, 2, 3, 6, 9$ និង 18 ។

គេបាន $18=1\times18$, $18=2\times9$

$18=3\times6$, $18=6\times3$

$18=9\times2$, $18=18\times1$

ដូចនេះ $1, 2, 3, 6, 9$ និង 18 ហៅថាតួចែកនៃ 18 ហើយ 18 ជាពហុគុណនៃ $1, 2, 3, 6, 9$ និង 18 ។

ឧទាហរណ៍២ តួចែកនៃ 100 គឺ $1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50$ និង 100

ហើយ 100 ជាពហុគុណនៃ $1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50$ និង 100 ។

សម្គាល់ គ្រប់ចំនួន មានតួចែក 1 និងខ្លួនឯងជានិច្ច។

លំហាត់គំរូ គេមានចំនួន $12, 16, 28, 32, 41, 96, 104, 126, 144$ ។

ក. តើ 8 ជាតួចែកនៃចំនួនណាខ្លះ ?

ខ. តើចំនួនណាខ្លះជាពហុគុណនៃ 16 ?

ចម្លើយ

ក. 8 ជាតួចែកនៃចំនួន 16, 32, 96, 104 និង 144 ។

ខ. ពហុគុណនៃ 16 គឺ 16, 32, 96, 144 ។

ប្រតិបត្តិ

ក. គេមានចំនួន 26, 30, 48, 66, 106 ។តើចំនួនណាខ្លះជាពហុគុណនៃ 6 ?

ខ. រកគ្រប់ចំនួនដែលជាតួចែកនៃ 15, 24, 68 និង 120 ។

១.៩. ចំនួនបឋម

តួចែកនៃ 5 គឺ 1 និង 5 ។

តួចែកនៃ 14 គឺ 1, 2, 7 និង 14 ។

តួចែកនៃ 15 គឺ 1, 3, 5 និង 15 ។

តួចែកនៃ 23 គឺ 1 និង 23 ។

តាមឧទាហរណ៍ខាងលើគេសង្កេតឃើញថា 5 និង 23 មានតួចែកតែពីរគត់គឺ 1 និងខ្លួនឯង។

ចំនួន 5 និង 23 ហៅថាចំនួនបឋម។

ចំពោះ 14 និង 15 មានតួចែកច្រើនជាងពីរហៅថា **ចំនួនមិនបឋម**។

ជាទូទៅចំនួនបឋមជាចំនួនគត់ដែលមានតួចែកតែពីរគឺ 1 និងខ្លួនឯង។

ចំនួនមិនបឋមជាចំនួនដែលមានតួចែកច្រើនជាងពីរ។

សំគាល់ តាមនិយមន័យខាងលើ "1" និងមិនមែនជាចំនួនបឋម ហើយក៏មិនមែនជាចំនួនមិនបឋមដែរ។

លំហាត់គំរូ ក. រកចំនួនបឋមនៅចន្លោះ 1 និង 20 ។

ខ. រកចំនួនមិនបឋមដែលជាចំនួនគត់សេសនៅចន្លោះ 1 និង 30 ។

ចម្លើយ ក. រកចំនួនបឋមនៅចន្លោះ 1 និង 20 គឺ : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

ខ. រកចំនួនមិនបឋមដែលជាចំនួនគត់សេសនៅចន្លោះ 1 និង 30 គឺ 9, 15, 21, 25, 27

ប្រតិបត្តិ រកចំនួនបឋមដែលតូចជាង 50 ។

១.១០. ការបំបែកជាកត្តាបឋម

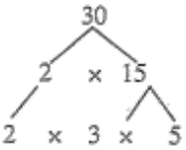
ឧទាហរណ៍១ បំបែកចំនួន 30 ជាផលគុណនៃកត្តាបឋម។

វិធីទី 1 ចាប់ផ្តើមដោយយក 30 ចែកនឹងចំនួនបឋមតូចបំផុត (ដែលអាចចែកដាច់) ហើយបន្តការធ្វើវិធីចែកដាច់រហូតដល់គេទទួលបានផលចែកដាច់រហូតដល់គេទទួលបានផលចែក 1 ដូចខាងក្រោម

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

ដូចនេះ គេបាន $30 = 2\times3\times5$ ។ ចំនួន $2,3$ និង 5 ជាកត្តាបឋមនៃ 30 ។

វិធីទី 2 ប្រើដ្យាក្រាមដើមឈើ



ដូចនេះ គេបាន $30 = 2\times3\times5$ ។

លំហាត់គំរូ ក.បំបែកចំនួន $x = 180$ និង $y = 360$ ជាផលគុណកត្តាបឋម។

ខ. បំបែកផលបូក $x + y$ ជាផលគុណកត្តាបឋម។

ចម្លើយ ក.

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

គេបាន $180 = 2\times2\times3\times3\times5 = 2^2\times3^2\times5$

ដូចនេះ $360 = 2\times2\times2\times3\times3\times5 = 2^3\times3^2\times5$

ខ. $x + y = 180 + 360 = 540$

$$\begin{array}{r|l} 540 & 2 \\ 270 & 2 \\ 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

ដូចនេះ $540 = 2\times2\times3\times3\times3\times5 = 2^2\times3^3\times5$

ប្រតិបត្តិ បំបែកចំនួន 66 និង 273 ជាផលគុណកត្តាបឋម។

១.១១. តួចែករួមធំបំផុត និងពហុគុណរួមតូចបំផុត

ឧទាហរណ៍១ រកតួចែករួមធំបំផុតនៃ 30 និង 36 ។

តួចែកនៃ 30 គឺ $1,2,3,5,6,10,15$ និង 30 ។

តួចែកនៃ 36 គឺ $1,2,3,4,6,9,12,18$ និង 36 ។

តួចែករួមនៃ 30 និង 36 គឺ $1, 2, 3$ និង 6 ។

តួចែករួមធំបំផុតនៃ 30 និង 36 គឺ 6 ។

តួចែករួមធំបំផុតនៃចំនួនទាំងពីរនេះតាងដោយ $PGCD(30,36)=6$ ។

គេអាចធ្វើតាមវិធីម្យ៉ាងទៀតដោយបំបែក 30 និង 36 ជាផលគុណកត្តាបឋមដូចខាងក្រោម

$$30 = \boxed{2} \times \boxed{3} \times 5$$
$$36 = \boxed{2^2} \times \boxed{3^2}$$

កត្តារួម $\rightarrow\ 2 \times 3$

ដូចនេះ៖ $PGCD(30,36)=2\times3=6$

ឧទាហរណ៍២ រកតួចែករួមធំបំផុតនៃ 60 ,180 និង 210

$$60 = \boxed{2^2} \times \boxed{3} \times \boxed{5}$$
$$180 = \boxed{2^2} \times \boxed{3^2} \times \boxed{5}$$
$$210 = \boxed{2} \times \boxed{3} \times \boxed{5} \times 7$$

កត្តារួម $\rightarrow\ 2 \times 3 \times 5$

ដូចនេះ៖ $PGCD(60,180,210)=2\times3\times5=30$

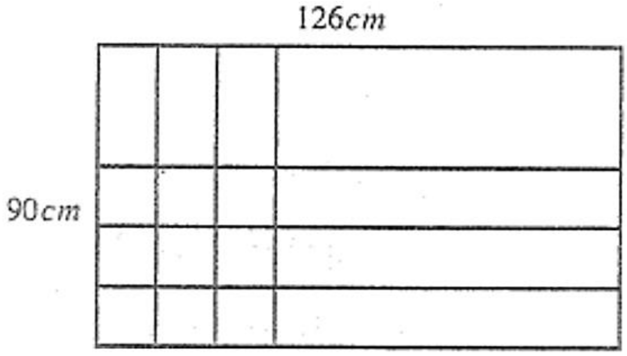
ជាទូទៅ ដើម្បីរកតួចែករួមធំបំផុតនៃពីរ ឬច្រើនចំនួនគេបំបែកចំនួននីមួយៗជាផលគុណកត្តាបឋម រួចគុណកត្តារួមទាំងអស់ដែលមាននិទស្សន្តតូចជាងគេ។

សំគាល់ ពីរចំនួនបឋមរវាងគ្នាកាលណា $PGCD$ របស់វាស្មើនឹង 1 ។

ឧទាហរណ៍៣ ចំនួន 11 និង 13 ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នាព្រោះ $PGCD(11,13)=1$ ។

លំហាត់គំរូ១ គេចង់ក្រាលឥដ្ឋការ៉ូរាងការេមានទំហំប៉ុនៗគ្នាឱ្យពេញលើផ្ទៃនៃបន្ទប់ទឹកមួយរាងចតុកោណកែង ដែលមានទទឹងប្រវែង $90cm$ និងបណ្តោយប្រវែង $126cm$ ។ បើគេចង់ក្រាលឥដ្ឋការ៉ូដែលមានផ្ទៃធំបំផុត តើគេត្រូវប្រើឥដ្ឋការ៉ូប៉ុន្មាន? មានជ្រុងប្រវែងប៉ុន្មាន?

ចម្លើយ កាលណាគេចែកចតុកោណកែងមួយទៅជាការេមានទំហំប៉ុនៗគ្នា នោះប្រវែងជ្រុងរបស់ការេមួយជាតួចែករួមនៃប្រវែងបណ្តោយនិងប្រវែងទទឹងនៃចតុកោណកែងនោះ។ ដើម្បីឱ្យការេមានប្រវែងជ្រុងធំបំផុតត្រូវមានជ្រុងស្មើតួចែករួមធំបំផុត $PGCD$ នៃប្រវែងបណ្តោយនិងទទឹងនៃចតុកោណនោះ។



ដោយ $90=2\times3^2\times5$

$126=2\times3^2\times7$

គេបាន $PGCD(90,126)=2\times3^2=18$

ដូចនេះឥដ្ឋការ៉ូដែលគេត្រូវប្រើមានជ្រុងប្រវែង $18cm$ ។ ហើយចំនួនការ៉ូ $5\times7=35$

ប្រតិបត្តិ គេចែកសៀវភៅ 24 ក្បាលនិងខ្មៅដៃ 36 ដើមឱ្យសិស្សស្មើៗគ្នាដោយគ្មានឱ្យសល់សៀវភៅ ឬខ្មៅដៃ។ គេសម្រេចចិត្តចែកសៀវភៅនិងខ្មៅដៃឱ្យសិស្សបានចំនួនច្រើននាក់បំផុត។ តើគេអាចចែកឱ្យសិស្សបានប៉ុន្មាន ?

ឧទាហរណ៍៤ រកពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃ 6 និង 8

ពហុគុណនៃ 6 គឺ $6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, \ldots$

ពហុគុណនៃ 8 គឺ $8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, \ldots$

ពហុគុណនៃ 6 និង 8 គឺ $24, 48, \ldots$

ពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃ 6 និង 8 គឺ 24 ។ គេកំណត់ពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃ 6 និង 8 ដោយ $PPCM(6,8) = 24$ ។

គេអាចរកពហុគុណរួមតូចបំផុតតាមវិធីងាយដូចខាងក្រោម

$$6 = \boxed{2} \times 3$$
$$8 = 2^3$$

$$2^3 \times 3$$

ដូចនេះ $PPCM(6,8) = 2^3 \times 3 = 24$

ឧទាហរណ៍៥ រកពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃ 18, 24 និង 36 ។

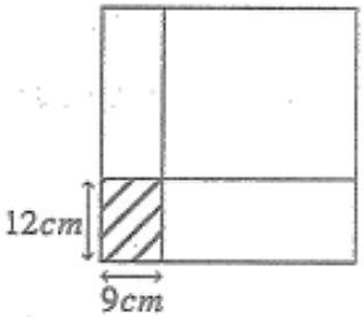
$$18 = 2 \times 3^2$$
$$24 = 2^3 \times 3$$
$$36 = 2^2 \times 3^2$$

$$2^3 \times 3^2$$

ដូចនេះ $PPCM(18, 24, 36) = 2^3 \times 3^2 = 72$

ជាទូទៅ	ដើម្បីរកពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃពីរ ឬច្រើនចំនួនគេត្រូវបំបែកចំនួននីមួយៗជាផលគុណកត្តាបឋម រួចគេគុណកត្តារួមដែលមាននិទស្សន្តធំជាងគេជាមួយនឹងកត្តាមិនរួម ដែលមាននៅក្នុងចំនួនទាំងនោះ។

លំហាត់គំរូ២ គេរៀបសន្លឹកប័ណ្ណតូចៗជារាងចតុកោណកែងមានបណ្ដោយប្រវែង $12cm$ និងទទឹង $9cm$ តាមទិសដៅដូចគ្នាដើម្បីបង្កើតបានការេមួយ។ ចូររកប្រវែងជ្រុងនៃការេតូចបំផុតដែលគេអាចបង្កើតបាន។



ចម្លើយ ប្រវែងជ្រុងមួយនៃការេដែលបានបង្កើតដោយរៀបសន្លឹកប័ណ្ណតូចៗរាងចតុកោណកែងតាមទិសដៅដូចគ្នាជាពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃប្រវែងបណ្ដោយនិងទទឹងរបស់ចតុកោណកែង។

ដើម្បីបានជ្រុងការេមានប្រវែងខ្លីបំផុតគេត្រូវរកពហុគុណរួមតូច

បំផុតនៃ 9 និង 12 ។

$9 = 3^2$

$12 = 3 \times 2^2$

ដូចនេះ $PPCM(9,12) = 3^2 \times 2^2 = 36$

ដូចនេះ ការេតូចបំផុតដែលអាចបង្កើតបានមានជ្រុងប្រវែង $36cm$ ។

ប្រតិបត្តិ x ជាចំនួនមួយមានលេខពីរខ្ទង់។ 58 ចែកនឹង x នៅសល់សំណល់ 2 និង 72 ចែកនឹង x នៅសល់សំណល់ 3 ហើយ 85 ចែកនឹង x នៅសល់សំណល់ 1 ។ រកចំនួន x នោះ។

១.១២. អាល់ហ្គោរីតអឺគ្លីត

$a = bq + r$ នាំឱ្យ $GCD(a,b) = GCD(b,r)$

- បើ b ចែកដាច់នឹង r នោះ r ជា GCD នៃ a និង b
- បើ b ចែកមិនដាច់នឹង r នោះ $b = rq_1 + r_1$

គេបាន $GCD(a,b) = GCD(b,r) = GCD(r,r_1)$

ដោយ $b > r > r_1 > \dots$ វិធីចែកបន្តបន្ទាប់ត្រូវតែចប់ត្រង់កន្លែងណាមួយ។

បើវិធីចែកនៃ r_{n-1} និង r_n ត្រង់តម្លៃ n ណាមួយ បានសំណល់ 0 នោះ r_n ជា GCD នៃ r_{n-1} និង r_n ។

ដូចនេះ r_n ជា GCD នៃ a និង b បានន័យថា

$GCD(a,b) = GCD(b,r) = GCD(r,r_1) = \dots = GCD(r_{n-1},r_n) = r_n$

វិធីចែកបន្តបន្ទាប់នេះហៅថា **អាល់កូរីតអឺគ្លីត**។

ទ្រឹស្តីបទ GCD នៃ a និង b គឺជាសំណល់ចុងក្រោយបំផុតខុសពីសូន្យ ក្នុងវិធីចែកបន្តបន្ទាប់គ្នា ឬអាល់កូរីតអឺគ្លីត។

សម្គាល់ បើ $r_n = 1$ នោះ a និង b ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា។

របៀបរក GCD តាមអាល់កូរីតអឺគ្លីត

លំហាត់គំរូ រក GCD នៃ 5664 និង 984 ។

ចម្លើយ គេយក 5664 ចែកនឹង 984 បាន 5 និងសំណល់ 744 ។ បន្ទាប់មកយក 984 ចែកនឹង 744 បាន 1 សំណល់ 240... ។ គេធ្វើតារាងខាងក្រោម

	5	1	3	10	ផលចែក
5664	984	744	240	24	
744	240	24	0		សំណល់
r_1	r_2	r_3			

តាមតារាង គេបាន $GCD(5664,984) = 24$ ។

ប្រតិបត្តិ

ក. រក GCD តាមអាល់កូរីតអឺគ្លីតនៃ 165 និង 14 ។

ខ. ក្នុងសំណុំចំនួនគត់ធម្មជាតិ គ្រប់តួចែករួមនៃចំនួនគត់ a និង b ជាតួចែកនៃគ្រប់ចំនួនធម្មជាតិ ដែលមានរាង $z = xa + yb$ ដែល x និង y ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប។

ទ្រឹស្តីបទ a និង b ជាពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិ។ សំណុំតួចែករួមនៃ a និង b ស្មើនឹងសំណុំតួចែកនៃតួចែករួមធំបំផុតរបស់វា។

តាមសម្រាយបញ្ជាក់ខាងលើនេះ គេទាញបាន

$$GCD(a,b) = GCD(b,r) = GCD(r,r_1) = ... = GCD(r_{n-1},r_n) = r_n$$

សំណុំតួចែករួមនៃ a និង $b =$ សំណុំតួចែករួមនៃ b និង $r =$ សំណុំតួចែករួមនៃ r និង r_1

$=$សំណុំតួចែករួមនៃ r_{n-1} និង $r_n =$ សំណុំតួចែកនៃ r_n $\left(r_n = GCD(a,b)\right)$ ។

ទ្រឹស្តីបទ គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ a,b,n និងគ្រប់តួចែករួម d នៃ a និង b គេបាន

- $GCD(na,nb) = nGCD(a,b)$
- $GCD\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right) = \frac{GCD(a,b)}{d}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

- ក្នុងអាល់កូរីតអឺគ្លីត បើ a ចែកនឹង b បានសំណល់ r នោះ

$a = bq + r$ នាំឱ្យ $na = nbq + nr$

$b = rq_1 + r_1$ នាំឱ្យ $nb = nrq_1 + nr_1$

....

$r_{n-1} = r_n q_{n-1}$ នាំឱ្យ $nr_{n-1} = nr_n q_{n-1}$

ដូចនេះ $GCD(na,nb) = GCD(nb,nr) = ... = nr_n$ តែ $r_n = GCD(a,b)$

ដូចនេះ $GCD(na,nb) = nGCD(a,b)$ ។

- បើ d ជាតួចែករួមនៃ a និង b នោះតាម1).គេបាន

$$d \cdot GCD\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right) = GCD\left(\frac{da}{d},\frac{db}{b}\right) = GCD(a,b)$$

ដូចនេះ $GCD\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right) = \frac{GCD(a,b)}{d}$ ។

ទ្រឹស្តីបទ a និង b ជាពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិ ហើយ δ ជាតួចែករួមនៃ a និង b ។

δ ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃ a និង b លុះត្រាតែ $\frac{a}{\delta}$ និង $\frac{b}{\delta}$ បឋមរវាងគ្នា។

សម្រាយបញ្ជាក់

- តាមទ្រឹស្តីបទខាងលើ គេបាន $GCD\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=1$ សមមូល $\delta\cdot GCD\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=\delta\cdot 1$

  នាំឱ្យ $GCD(a,b)=\delta$

- ប្រាសមកវិញ $\delta=GCD(a,b)$ នាំឱ្យ $\frac{GCD(a,b)}{\delta}=\delta$ នាំឱ្យ $GCD\left(\frac{a}{\delta},\frac{b}{\delta}\right)=1$

  ដូចនេះ $\frac{a}{\delta}$ និង $\frac{b}{\delta}$ បឋមរវាងគ្នា។

តួចែករួមធំបំផុតនៃច្រើនចំនួនគត់

និយមន័យ

$a_1,a_2,...,a_n$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ។ តួចែករួមធំបំផុតនៃ $a_1,a_2,...,a_n$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិធំជាងគេបណ្តាតួចែករួមនៃ $a_1,a_2,...,a_n$ ។ និមិត្តសញ្ញា: $\delta=GCD(a_1,a_2,...,a_n)$ ។

លក្ខណៈ

- ដើម្បីរក GCD នៃចំនួន $a_1,a_2,...,a_n$ គេរក $GCD(a_1,a_2)=\delta_1$ រួចរក $GCD(\delta_1,a_3)$... ហើយធ្វើបែបនេះរហូតដល់ a_n ។

  $GCD(a_1,a_2,...,a_n)=GCD\{[(a_1,a_2),a_3],...,a_n\}$

- សំណុំតួចែករួមនៃ $a_1,a_2,...,a_n$ ស្មើសំណុំតួចែកនៃ GCD របស់វា។

លំហាត់គំរូ រក GCD នៃ $315, 225$ និង 525 ។

ចម្លើយ គេបាន $GCD(315,225)=45$ ហើយ $GCD(45,525)=15$

ដូចនេះ $GCD(315,225,525)=15$ ។

ប្រតិបត្តិ រក GCD នៃ $210,115$ និង 620 ។

១.១៣. សមីការលីនេអ៊ែរនៃពីរអថេរក្នុងចំណុំ $\mathbb{Z}$

ទ្រឹស្តីបទបឺស៊ូ (*Etienne Bezout* (1730−1783) **គណិតវិទូបារាំង**)

a និង b ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិបឋមរវាងគ្នា លុះត្រាតែមានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប u និង v ដែល $au+bv=1$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

- បើ a និង b ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា នោះ $GCD(a,b)=1$។

គេឃើញថា គ្រប់តួចែករួមនៃ a និង b ជាតួចែករួមនៃ ax ,by និង $z=ax+by$ ដែល x និង y ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ។

$GCD(a,b)=1$ a និង b មានតួចែករួមតែមួយគត់គឺ $d=1$។

ដូចនេះ z មានតួចែកស្មើ1។

ដូចនេះ មានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប u និង v ដែល $ua+vb=1$។

- ច្រាសមកវិញបើមានចំនួនគត់ u និង v ដែល $ua+vb=1$

តួចែករួម d នៃ a និង b គឺជាតួចែកនៃ ua និង vb

ដូចនេះ d ជាតួចែកនៃ $ua+vb$ តែ $ua+vb=1$។

ដូចនេះ d ជាតួចែកនៃ1នាំឱ្យ a និង b មានតួចែករួមតែមួយគត់គឺ1។

ដូចនេះ a និង b ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា។

លំហាត់គំរូ១ រក $GCD(12,18)$ និង $GCD(12,18\times5)$ រួចសន្និដ្ឋាន $GCD(12,18)$ និង $GCD(12,18\times5)$

ចម្លើយ

គេបាន $GCD(12,18)=6$ និង $GCD(12,18\times5)=GCD(12,90)=6$

ដូចនេះ គេអាចសន្និដ្ឋានបានថា $GCD(12,18)=GCD(12,18\times5)$ ។

លំហាត់គំរូ២ បង្ហាញថា c និង a បឋមរវាងគ្នា លុះត្រាតែ $GCD(a,b)=GCD(a,bc)$ ។
ឬនិយាយម្យ៉ាងទៀត តួចែករួមធំបំផុតនៃពីរចំនួន a និង b មិនផ្លាស់ប្តូរ បើគេគុណចំនួនណាមួយនឹងមួយចំនួន c ដែលបឋមរវាងគ្នាជាមួយចំនួនមួយទៀត។

ចម្លើយ

- បើ d ជាតួចែករួមនៃ a និង b នោះ d ជាតួចែកនៃ bc ។ ដូចនេះ d ជាតួចែករួមនៃ a និង bc ។
- ច្រាសមកវិញ បើ d ជាតួចែករួមនៃ a និង bc ។

ដោយ a និង c បឋមរវាងគ្នា នោះ $GCD(a,c)=1$ ហើយតាមទ្រឹស្តីបទ *Bezout*

មានចំនួនគត់ u និង v ដែល $ua+vc=1$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $b: uba+vbc=b$

ដោយ d ជាតួចែកនៃ a នាំឱ្យ d ជាតួចែកនៃ uba

d ជាតួចែកនៃ bc នាំឱ្យ d ជាតួចែកនៃ vbc

ដូចនេះ d ជាតួចែកនៃ $uba+vbc$ នាំឱ្យ d ជាតួចែកនៃ b

ដូចនេះ d ជាតួចែករួមនៃ a និង b ។

តួចែករួមធំបំផុតនៃ a និង b ស្មើតួចែករួមធំបំផុតនៃ a និង bc គឺថា

$GCD(a,c)=GCD(a,bc)$ ។

ប្រតិបត្តិ

ក. រក $GCD(10,16)$ និង $GCD(10,16\times 7)$ រួចសន្និដ្ឋាន $GCD(10,16)$ និង $GCD(10,16\times 7)$

ខ.ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ c និង a បឋមរវាងគ្នា ហើយ c និង b ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា នោះ c និង ab ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា។

ទ្រឹស្តីបទហ្គោស (Carl Friedrich Gauss $(1777-1855)$ **គណិតវិទូអាឡឺម៉ង់**)
បើផលគុណ ab ចែកដាច់នឹង c ហើយ c និង a បឋមរវាងគ្នា នោះ b ចែកដាច់នឹង c ។
បានន័យថា $c|ab$ និង $GCD(a,c)=1$ នាំឱ្យ $c|b$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាមទ្រឹស្តីបទបឺស៊ូ គេបាន

$GCD(a,c)=1$ នាំឱ្យមានចំនួនគត់ u និង v ដែល $ua+vc=1$ នាំឱ្យ $uab+vcb=b$

ab ចែកដាច់នឹង c នាំឱ្យ uab ចែកដាច់នឹង c

ម្យ៉ាងទៀត $(uab+vcb)$ ចែកដាច់នឹង c នាំឱ្យ b ចែកដាច់នឹង c ។

ឧទាហរណ៍១ $600=25\times 24$ ចែកដាច់នឹង 12

25 និង 12 បឋមរវាងគ្នា នាំឱ្យ 24 ចែកដាច់នឹង 12 ។

វិបាក បើមួយចំនួនគត់ n ចែកដាច់នឹង a ផង ចែកដាច់នឹង b ផង ហើយ a និង b បឋមរវាងគ្នា នោះ n ចែកដាច់នឹង ab ។ បានន័យថា $a|n$,$b|n$ និង $GCD(a,b)=1$ នាំឱ្យ $ab|n$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

n ចែកដាច់នឹង a នាំឱ្យមានចំនួនគត់ធម្មជាតិ q ដែល $n=aq$

n ចែកដាច់នឹង b នាំឱ្យ aq ចែកដាច់នឹង b

តាមទ្រឹស្តីបទ *Gauss* $GCD(a,b)=1$ គេបាន q ចែកដាច់ b

ដូចនេះ មាន $q'\in\mathbb{N}$,$q=bq'$

$n=aq=abq'$ នាំឱ្យ n ចែកដាច់នឹង ab ។

ឧទាហរណ៍២ 100 ចែកដាច់នឹង 25 និង 100 ចែកដាច់នឹង 4 ហើយ $GCD(4,25)=1$

នាំឱ្យ 100 ចែកដាច់នឹង 25×4 ។

សម្គាល់ 100 ចែកដាច់នឹង 4 និង 100 ចែកដាច់នឹង 10 តែ 4 និង 10 មិនបឋមរវាងគ្នាទេ

នាំឱ្យ 100 ចែកមិនដាច់នឹង 4×10 ទេ។

1000 ចែកដាច់នឹង 4 និង 1000 ចែកដាច់នឹង 10 ហើយ 4 និង 10 មិនបឋមរវាងគ្នាទេ

តែ 1000 ចែកដាច់នឹង 4×10 ។

ប្រតិបត្តិ

ក. ដោះស្រាយសមីការ $75x+125y=5$ ដែល x និង y ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប។

ខ.ដោះស្រាយសមីការ $40x+80y=4$ ដែល x និង y ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប។

លំហាត់អនុវត្ត

1. គណនាប្រមាណវិធីនៃកន្សោមខាងក្រោម

   ក. $40\times 5+50\times 6-7\times 60$ ខ. $(57+43-7\times 5)\times 20+4\times 90$

   គ. $56\div 8+(47-17)\div 5-13$ ឃ. $\left[4\times 15+72\div 8-(47-23)\div 6\right]\times 2$

   ង. $75-38\div 2+75\div 5\times 7+81\div 3\div 9\times 7-15+6\times 7$

2. គណនាកន្សោមលេខខាងក្រោម

   ក. $28\div\left[7\times(-3+5)\right]$ ខ. $\left[40+3(1-2)\right]\times 6$ គ. $\left[(21+25)\div 7\right]\times(21+28\div 7)$

   ឃ. $\left[5700-43(88+12)\right]\div 2\div(8-2)$ ង. $300\div\left\{\left[150+(40\div 8)\right]\times\left[-7-(9)\right]\right\}$

3. នៅអនុវិទ្យាល័យមួយមានសិស្សប្រុស 679 នាក់និងសិស្សស្រី 578 នាក់។ ក្នុងមួយឆ្នាំសិស្សដែលអានសៀវភៅនៅក្នុងបណ្ណាល័យបាន 4 ក្បាល ឬច្រើនជាង 4 ក្បាល មានចំនួន 824 នាក់។ តើសិស្សដែលបានអានសៀវភៅនៅក្នុងបណ្ណាល័យតិចជាង 4 ក្បាលមានចំនួន ប៉ុន្មាននាក់?

4. ប៊ុនណាបានទិញផ្លែមៀន 5 ចង្កោម ដែលក្នុងមួយចង្កោមមាន 10 ផ្លែ។ គាត់បានញ៉ាំអស់ 8 ផ្លែ ហើយផ្លែមៀននៅសល់បានបែងចែកឱ្យប្អូនៗគាត់ 6 នាក់។
   តើប្អូនគាត់ម្នាក់ៗទទួលបានមៀនប៉ុន្មានផ្លែ?

5. នៅក្នុងថ្នាក់រៀនមួយមានសិស្សប្រុស 18 នាក់និងសិស្សស្រីខ្លះ។ បើសិស្សម្នាក់ៗទទួលបានសៀវភៅលំហាត់ 2 ក្បាល ហើយសៀវភៅលំហាត់ដែលបានទិញទាំងអស់មានចំនួន 76 ក្បាល។ រកចំនួនសិស្សស្រី។

6. បូណាមានគ្រាប់ឃ្លី 5 គ្រាប់ បងគាត់បានឱ្យឃ្លីថែម 3 គ្រាប់ទៀត។ បូណាបានលេងឃ្លីជាមួយសំចាញ់អស់ឃ្លី 10 គ្រាប់។ តើបូណាត្រូវជំពាក់ឃ្លីសំចំនួនប៉ុន្មានគ្រាប់?

7. ទីក្រុងមួយនៃប្រទេសរុស្ស៊ីមានសីតុណ្ហភាព $-15^{o}C$ នៅពេលព្រឹក។ នៅអំឡុងពេលថ្ងៃសីតុណ្ហភាពឡើងបាន $24^{o}C$ ។ តើសីតុណ្ហភាពនៅពេលថ្ងៃមានប៉ុន្មានអង្សា?

8. ប្រវត្តិវិទូនៃប្រទេសរ៉ូម៉ាំង លីត-លីវ កើត 59 ឆ្នាំមុនគ.ស។ គាត់ស្លាប់នៅអាយុ 78 ឆ្នាំ។

   ក. តាងឆ្នាំដែលគាត់កើត ដោយចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបធៀបនឹងគ.ស។

   ខ. តើគាត់ស្លាប់នៅឆ្នាំណា?

9. ព្រះពុទ្ធកើតមុន ព.ស 80 ឆ្នាំ។ ព.ស កើតមុន គ.ស 544 ឆ្នាំ។

   ក. សរសេរឆ្នាំកំណើតព្រះពុទ្ធជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបធៀបនឹង ព.ស។

ខ. សរសេរឆ្នាំកំណើតព្រះពុទ្ធជាចំនួនគត់រ៉ូម៉ាំងទីបធៀបនឹង គ.ស។

គ. តើព្រះពុទ្ធកើតមុន គ.ស ប៉ុន្មានឆ្នាំ?

10. បង្គត់ចំនួននីមួយៗខាងក្រោមយកត្រឹមខ្ទង់ដប់ ខ្ទង់រយនិងខ្ទង់ពាន់

ក. 149905 ខ. 384000 គ. 2990346 ឃ. 6754550

11. ធ្វើការប៉ាន់ស្មានតម្លៃនៃ

ក. $398+527$ ខ. 3648×999 គ. $4201\div 58$

12. គណនាតម្លៃនៃ

ក. $2^2\times 5^3$ ខ. 5^3+3^2 គ. 8^2-3^3 ឃ. 3×5^2

13. សម្រួល

ក. $\sqrt{9}\times\sqrt{16}$ ខ. $4^2-\sqrt{4}$ គ. $\sqrt{100}\times\sqrt{196}$ ឃ. $\dfrac{5^3+\sqrt[3]{64}-\sqrt[3]{8}}{3^3}$

14. ចូរបញ្ជាក់ថា

ក. ផលបូក $78+120$ ចែកដាច់នឹង 2 ខ. ផលដក $4140-720$ ចែកដាច់នឹង 3

គ. ផលបូក $165+270$ ចែកដាច់នឹង 5 ឃ. ផលដក $5130-342$ ចែកដាច់នឹង 9 ។

15. គេមានមួយចំនួនមានលេខប្រាំខ្ទង់ 734□0 ។

បំពេញលេខក្នុងប្រអប់ ដើម្បីឱ្យចំនួននោះចែកដាច់

ក. នឹង 2 ផង និង 5 ផង ខ. នឹង 3 ផង និង 9 ផង។

16. គេមានចំនួន 660, 540 , 645 និង 610 ។ តើចំនួនណាខ្លះជាពហុគុណនៃ 30 ?

17. គេមានចំនួន 11,15,17,18,19, 20, 21, 22, 23 និង 29 ។

ក. ចូររកតួចែកនៃចំនួននីមួយៗ ខ. តើចំនួនណាខ្លះជាចំនួនបឋម?

18. បំបែកចំនួន 63,100,129, 225,567,1980, 2097, 50336 និង 127008 ជាផលគុណកត្តាបឋម។

19. រកតួចែករួមធំបំផុត *PGCD* នៃចំនួនខាងក្រោម

ក. 9 និង 15 ខ. 10 និង 108 គ. 128 និង 324

ឃ. 192 , 160 និង 96 ង. 48 ,72 និង 132 ច. 36 ,168 ,144 និង 252

20. រកពហុគុណរួមតូចបំផុត (*PPCM* ឬ *LCM*) នៃចំនួនខាងក្រោម

ក. 81 និង 225 ខ. 120 និង 35 គ. 34 ,420 និង 245

ឃ. 70 ,21 និង 28 ង. 512 ,18 និង 20 ច. 88 ,220 និង 528

21. រកចំនួន x និង y ដោយដឹងថា $PGCD(x,y)=12$ និង $x+y=72$ ដែល $0<x<y$ ។

22. រកចំនួន x ដែលតូចជាងគេបំផុតដោយដឹងថា $PPCM(6,x)=24$ ។

23. កញ្ញាវត្តីចង់កាត់ក្រណាត់មួយផ្ទាំងរាងចតុកោណកែងមានទទឹងប្រវែង 24*cm* និងបណ្តោយ 56*cm* ដើម្បីធ្វើកូនកន្សែងដៃរាងការេប៉ុនៗគ្នាដោយមិនឱ្យសល់ចម្រៀកក្រណាត់។ បើនាងចង់បានកូនកន្សែងដៃដែលមានទំហំធំបំផុត ដែលអាចធ្វើបាន។ តើជ្រុងនៃកូនកន្សែងដៃនោះមានប្រវែងប៉ុន្មាន?

24. នាឡិកាបីរោទិ៍ក្នុងរយៈពេលខុសគ្នា នាឡិកាទី 1 រោទិ៍រៀងរាល់ 10 នាទីម្តង នាឡិកាទី 2 រោទិ៍រៀងរាល់ 15 នាទីម្តងនិងនាឡិកាទី 3 រោទិ៍រៀងរាល់ 20 នាទីម្តង។ រករយៈពេលខ្លីបំផុតដែលនាឡិកាទាំងបីរោទិ៍ព្រុំគ្នាម្តងទៀត បន្ទាប់ពីវាបានរោទិ៍ព្រមគ្នាម្តងហើយ។

25. ប្រើទ្រឹស្តីបទហ្គោស $(Gauss)$ កំណត់ពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិ a និង b ដែល $\frac{a}{b}$ ជាប្រភាគមិនអាចសម្រួលបាននិង $\frac{a+21}{b+15}=\frac{a}{b}$ ។

26. កំណត់គូចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប (x,y) ជាចម្លើយនៃសមីការខាងក្រោម

ក. $5x+16y=1$

ខ. $44x-40y=4$

គ. $44x-20y=4$

មេរៀនទី២ ចំនួនសនិទាន

២.១. សញ្ញាណចំនួនសនិទាន

- បើគេដកពីរចំនួនគត់ ផលដកមិនមែនជាចំនួនគត់គ្រប់ករណីទេ។

ឧទាហរណ៍១ $6-3=3$ ប៉ុន្តែ $3-6=-3$ គេថា -3 ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទិបអវិជ្ជមាន។

- បើគេចែកពីរចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប ផលចែកមិនមែនជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបគ្រប់ករណីទេ។

ឧទាហរណ៍២ $6\div 2=3$ ប៉ុន្តែ $2\div 6=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ នោះគេបានផលចែក $\frac{1}{3}$ ដែលមានទម្រង់ជាប្រភាគ ហៅថា **ចំនួនសនិទាន**។

ជាទូទៅ៖ ចំនួនសនិទានជាចំនួនដែលមានទម្រង់ $\frac{a}{b}$ ដែល a និង b ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $(b\neq 0)$

- ចំនួនសនិទានដែលមានភាគបែងស្មើនឹង 1 អាចតាងដោយចំនួនគត់។

ឧទាហរណ៍៣ $\frac{2}{1}=2\quad ,\frac{-3}{1}=-3\quad ,\frac{8}{1}=8\ \ldots$

- ចំនួនសនិទានដែលមានភាគបែងស្មើនឹង 10, 100, 1000, ... អាចតាងដោយចំនួនទសភាគ។

ឧទាហរណ៍៤ $\frac{2}{10}=0.2\ \ ,\frac{2}{100}=0.02\ \ ,\frac{2}{1000}=0.002\ \ldots$

- ចំនួនសនិទានដែលមានភាគយកនិងភាគបែងជាចំនួនបឋមនឹងគ្នា អាចតាងដោយចំនួនទសភាគខួប។

ឧទាហរណ៍៥ $\frac{4}{3}=1.33333...=1.\bar{3}\ ,\frac{1}{3}=0.3333...=0.\bar{3}\ \ldots$

- ចំនួនសនិទានដែលមានភាគយកធំជាងភាគបែង អាចតាងដោយចំនួនចំរុះ។

ឧទាហរណ៍៦ $\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}\ ,\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}\ ,\frac{-11}{2}=-5\frac{1}{2}\ \ldots$

ដូចនេះ ចំនួនសនិទានអាចមានទម្រង់ជា **ចំនួនគត់ ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប ចំនួនទសភាគ ចំនួនចំរុះ**។

ឧទាហរណ៍៧ គេមានចំនួនសនិទានដូចខាងក្រោម

$\frac{5}{10}\quad ,\frac{4}{8}\quad ,\frac{3}{6}\quad ,\frac{1}{2}\quad ,0.5$

ចូរបង្ហាញថាចំនួនសនិទានទាំងអស់ខាងលើនេះ ជាចំនួនសនិទានស្មើគ្នា។

ចម្លើយ បង្ហាញថាចំនួនសនិទានទាំងអស់ខាងលើនេះ ជាចំនួនសនិទានស្មើគ្នា

ដោយ $\frac{5}{10}$ មានផលចែកស្មើនឹង 0.5

$\frac{4}{8}$ មានផលចែកស្មើនឹង 0.5

$\frac{3}{6}$ មានផលចែកស្មើនឹង 0.5

$\frac{1}{2}$ មានផលចែកស្មើនឹង 0.5

នោះគេអាចសន្និដ្ឋានបានថា ចំនួនសនិទាន $\frac{5}{10}=\frac{4}{8}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=0.5$ ជាចំនួនសនិទានស្មើគ្នា។

ជាទូទៅ៖ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ នោះ $ad=bc$ ។

លំហាត់គំរូ១ ក្នុងចំណោមចំនួនសនិទានខាងក្រោម ចូរផ្គុំចំនួនសនិទានដែលស្មើគ្នា

$\frac{1}{2}\ ,\frac{2}{5}\ ,0.5\ ,-\frac{-1}{2}\ ,\frac{3}{6}\ ,\frac{-4}{-8}$

ចម្លើយ ផ្គុំចំនួនសនិទានដែលស្មើគ្នា

$$\frac{1}{2}=-\frac{-1}{2}=\frac{3}{6}=-\frac{-4}{-8}=0.5$$

លំហាត់គំរូ២ ចូរកំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យបានចំនួនសនិទាន $\frac{25}{x}$ ស្មើនឹង $7\frac{1}{2}$ ។

ចម្លើយ កំណត់តម្លៃ x

ដោយ $7\frac{1}{2}=\frac{15}{2}$ នោះ $\frac{25}{x}=\frac{15}{2}$

$$15x=25\times 2$$

$$x=\frac{50}{15}=\frac{10}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{x=\frac{10}{3}}$ ។

ប្រតិបត្តិ ចូរកំណត់តម្លៃ x,y ដើម្បីឱ្យចំនួនសនិទានខាងក្រោមស្មើគ្នា

ក. $\frac{4}{x}=\frac{2}{9}$ ខ. $\frac{y}{7}=2\frac{1}{3}$ គ. $0.5x=\frac{4}{8}$ ឃ. $\frac{3}{y}=-0.5$ ង. $7x=4\frac{2}{7}$

២.២. ប្រមាណវិធីលើចំនួនសនិទាន

២.២.១. ប្រមាណវិធីបូកចំនួនសនិទាន

ឧទាហរណ៍ គណនាផលបូកខាងក្រោម

ក. $\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{2+5}{3}=\frac{7}{3}$ ខ. $\frac{3}{5}+\frac{2}{6}=\frac{18+10}{30}=\frac{28}{30}=\frac{14}{15}$

ជាទូទៅ៖ គេមាន $\frac{a}{b}$ និង $\frac{c}{d}$ ជាពីរចំនួនសនិទាន គេបាន $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ ។

សម្គាល់ $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$ ។

លំហាត់គំរូ១ ចូរគណនាផលបូកខាងក្រោម

ក.$\frac{3}{7}+\frac{-5}{7}$ ខ.$\frac{-3}{5}+\frac{4}{7}$ គ.$\left(-3\frac{3}{5}\right)+\left(3\frac{1}{4}\right)$ ឃ.$\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{6}+\frac{4}{7}$ ង.$0.27+\frac{3}{4}$

ចម្លើយ គណនាផលបូក

ក. $\frac{3}{7}+\frac{-5}{7}=\frac{3-5}{7}=\frac{-2}{7}$

ខ. $\frac{-3}{5}+\frac{4}{7}=\frac{-21+20}{35}=\frac{-1}{35}$

គ. $\left(-3\frac{3}{5}\right)+\left(3\frac{1}{4}\right)=\frac{-18}{5}+\frac{13}{4}=\frac{-72+65}{20}=\frac{-7}{20}$

ឃ. $\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{6}+\frac{4}{7}=\frac{-42+70+48}{84}=\frac{74}{84}=\frac{37}{42}$

ង. $0.27+\frac{3}{4}=0.27+0.75=1.02$

ប្រតិបត្តិ ចូរគណនាផលបូកខាងក្រោម

ក.$\frac{3}{5}+\frac{-4}{5}$ ខ.$\left(\frac{-1}{4}\right)+\left(-\frac{-3}{6}\right)$ គ.$4\frac{1}{2}+\left(-5\frac{1}{4}\right)$ ឃ.$2\frac{1}{2}+\frac{3}{7}+\left(-\frac{5}{4}\right)+0.5$ ។

លក្ខណៈ

គេមាន $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ និង $\frac{e}{f}$ ជាចំនួនសនិទាន ។ គេបាន

1) ផលបូក $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$ ជាចំនួនសនិទាន

2) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$ (លក្ខណៈត្រឡប់)

3) $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)$ (លក្ខណៈផ្តុំ)

4) $0+\frac{a}{b}=\frac{a}{b}+0=\frac{a}{b}$

5) គ្រប់ចំនួនសនិទាន $\frac{a}{b}$ មានចំនួនផ្ទុយតែមួយគត់គឺ $-\frac{a}{b}$ ដោយ

$\frac{a}{b}+\left(-\frac{a}{b}\right)=\left(-\frac{a}{b}\right)+\frac{a}{b}=0$

6) $\frac{a}{b}+\frac{e}{f}=\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$ នោះ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

7) $-\left(-\frac{a}{b}\right)=\frac{a}{b}$ ។

លំហាត់គំរូ ២ ចូរគណនាផលបូកខាងក្រោមដោយប្រើលក្ខណៈផ្តុំ

ក. $\left(\frac{5}{6}+\frac{7}{3}\right)+\frac{5}{3}$ ខ. $\left(\frac{5}{6}+\frac{7}{3}\right)+\left(-1\frac{5}{7}\right)$ គ. $\left(\frac{5}{7}+\frac{3}{8}\right)+\left(\frac{17}{8}+\frac{5}{-7}\right)$

ចម្លើយ គណនាផលបូកដោយប្រើលក្ខណៈផ្តុំ

ក. $\left(\frac{5}{6}+\frac{7}{3}\right)+\frac{5}{3}=\frac{5}{6}+\left(\frac{7}{3}+\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{6}+\frac{12}{3}=\frac{5+24}{6}=\frac{29}{6}$

ខ. $\left(\frac{5}{6}+\frac{7}{3}\right)+\left(-1\frac{5}{7}\right)=\frac{5+14}{6}-\frac{12}{7}=\frac{19}{6}-\frac{12}{7}=\frac{133-72}{42}=\frac{61}{42}$

គ. $\left(\frac{5}{7}+\frac{3}{8}\right)+\left(\frac{17}{8}+\frac{5}{-7}\right)=\left(\frac{5}{7}-\frac{5}{7}\right)+\left(\frac{3}{8}+\frac{17}{8}\right)=0+\frac{20}{8}=\frac{5}{2}$

ប្រតិបត្តិ ចូរគណនាផលបូកខាងក្រោមដោយប្រើលក្ខណៈផ្តុំ

ក. $\left(\frac{7}{4}+\frac{8}{3}\right)+\frac{10}{3}$ ខ. $\left(\frac{5}{4}+\frac{3}{8}\right)+\frac{15}{4}$

២.២.២. ប្រមាណវិធីដកនៃចំនួនសនិទាន

ឧទាហរណ៍ គណនាផលដកខាងក្រោម

ក. $\frac{9}{10}-\frac{7}{10}=\frac{9-7}{10}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

ខ. $\frac{5}{4}-\frac{7}{8}=\frac{10-7}{8}=\frac{3}{8}$

គ. $-\frac{5}{6}-\left(-\frac{7}{3}\right)=\frac{-5}{6}+\frac{7}{3}=\frac{-5+14}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$

> ជាទូទៅ៖ គេមាន $\frac{a}{b}$ និង $\frac{c}{d}$ ជាបីរចំនួនសនិទាន គេបាន $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$ ។

សម្គាល់ $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$ ។

លំហាត់គំរូ១ ចូរគណនាផលដកខាងក្រោម

ក. $\frac{3}{5}-\frac{7}{10}$ ខ. $\frac{9}{12}-\frac{2}{3}$

ចម្លើយ គណនាផលដក

ក. $\frac{3}{5}-\frac{7}{10}=\frac{6-7}{10}=\frac{-1}{10}$

ខ. $\frac{9}{12}-\frac{2}{3}=\frac{9-8}{12}=\frac{1}{12}$

លំហាត់គំរូ២ ក្នុងសិក្ខាសាលាមួយមានការចូលរួមពីតន្ត្រីករ $\frac{1}{4}$ សិល្បករ $\frac{2}{5}$ អ្នករបាំ $\frac{1}{10}$ និងអ្នកដែលនៅសល់ជាអ្នកនិពន្ធ។ តើប្រភាគតាងអ្នកនិពន្ធស្មើនឹងប៉ុន្មាន ?

ចម្លើយ ប្រភាគតាងតន្ត្រីករ សិល្បករ និងអ្នករបាំ គឺ $\frac{1}{4}+\frac{2}{5}+\frac{1}{10}$

$PPCM(4,5,10)=20$

$\frac{1}{4}+\frac{2}{5}+\frac{1}{10}=\frac{5+8+2}{20}=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$

ប្រភាគតាងអ្នកចូលរួមសិក្ខាសាលាស្មើ 1

ប្រភាគតាងអ្នកនិពន្ធគឺ $1-\frac{3}{4}=\frac{4-3}{4}=\frac{1}{4}$

ដូចនេះ ប្រភាគតាងអ្នកនិពន្ធស្មើនឹង $\frac{1}{4}$ ។

ប្រតិបត្តិ ចូរគណនាផលដកខាងក្រោម

ក. $\frac{-5}{24}-\frac{7}{30}$ ខ. $\frac{1}{5}-\frac{27}{50}$ គ. $3\frac{1}{5}-\left(-\frac{2}{6}\right)$

២.២.៣. ប្រមាណវិធីគុណនៃចំនួនសនិទាន

ឧទាហរណ៍១ គណនាផលគុណ

$$\frac{3}{8}\times 3.8=\frac{3}{8}\times\frac{38}{10}=\frac{114}{80}=\frac{57}{40} \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍២ គណនាផលគុណ

$$\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{7}{15}\right)=\frac{(-2)(-7)}{3\times 15}=\frac{14}{45} \text{ ។}$$

ជាទូទៅ៖ គេមាន $\frac{a}{b}$ និង $\frac{c}{d}$ ជាបីរចំនួនសនិទាន គេបាន $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ ។

លំហាត់គំរូ១ ចូរគណនាផលគុណខាងក្រោម

ក. 0.25×48 ខ. 245.4×5.3 គ. $(-3.2)(7.4)(-0.1)(-0.5)$

ចម្លើយ គណនាផលគុណ

ក. $0.25\times 48=\frac{25}{100}\times 48=\frac{1}{4}\times 48=12$

ខ. $245.4\times 5.3=\frac{2454}{10}\times\frac{53}{10}=\frac{130062}{100}=1300.62$

គ. $(-3.2)(7.4)(-0.1)(-0.5)=\left[(-3.2)(7.4)\right]\left[(-0.1)(-0.5)\right]=(1.6)(-0.74)=-1.184$ ។

សម្គាល់

- ផលគុណនៃពីរចំនួនសនិទានដែលមានសញ្ញាដូចគ្នាជាចំនួនវិជ្ជមាន ។
- ផលគុណនៃពីរចំនួនសនិទានដែលមានសញ្ញាផ្ទុយគ្នាជាចំនួនអវិជ្ជមាន ។

ប្រតិបត្តិ ចូរគណនាផលគុណខាងក្រោម

ក. $0.75\times\frac{13}{125}$ ខ. $5\frac{3}{4}\times\frac{12}{125}$ គ. $\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{5}\right)(0.5)(0.2)$

លក្ខណៈ

គេមាន $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ និង $\frac{e}{f}$ ជាចំនួនសនិទាន ។ គេបាន

1) ផលគុណ $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ ជាចំនួនសនិទាន

2) $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{c}{d}.\frac{a}{b}$ (លក្ខណៈត្រឡប់)

3) $\left(\frac{a}{b}.\frac{c}{d}\right).\frac{e}{f}=\frac{a}{b}.\left(\frac{c}{d}.\frac{e}{f}\right)$ (លក្ខណៈផ្តុំ)

4) $\frac{a}{b}.1=1.\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$

5) គ្រប់ចំនួនសនិទាន $\frac{a}{b}$ មានចំនួនសនិទាន $\frac{b}{a}$ តែមួយគត់ដែល $\frac{a}{b}.\frac{b}{a}=1$

6) $\frac{a}{b}.\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}.\frac{c}{d}+\frac{a}{b}.\frac{e}{f}$ (លក្ខណៈបំបែកប្រមាណវិធីគុណចំពោះប្រមាណវិធីបូក) ។

លំហាត់គំរូ២ គណនាផលគុណខាងក្រោមដោយប្រើលក្ខណៈខាងលើ

ក. $\frac{7}{5}.\frac{9}{4}+\frac{7}{5}.\frac{11}{4}$ ខ. $\frac{4}{5}.\frac{9}{4}-\frac{7}{8}.\frac{4}{5}$ គ. $\frac{-3}{5}\left(\frac{7}{8}.\frac{10}{-3}\right)$

ចម្លើយ គណនាផលគុណ

ក. $\frac{7}{5}.\frac{9}{4}+\frac{7}{5}.\frac{11}{4}=\frac{7}{5}\left(\frac{9}{4}+\frac{11}{4}\right)=\frac{7}{5}.\frac{20}{4}=\frac{7}{5}.5=7$ ។

ខ. $\frac{4}{5}.\frac{9}{4}-\frac{7}{8}.\frac{4}{5}=\frac{4}{5}\left(\frac{9}{4}-\frac{7}{8}\right)=\frac{4}{5}\left(\frac{18-7}{8}\right)=\frac{4}{5}.\frac{11}{8}=\frac{11}{10}$ ។

គ. $\frac{-3}{5}\left(\frac{7}{8}.\frac{10}{-3}\right)=\frac{7}{8}\left(\frac{-3}{5}.\frac{10}{-3}\right)=\frac{7}{8}.2=\frac{7}{4}$ ។

ប្រតិបត្តិ ចូរគណនាផលគុណខាងក្រោមដោយប្រើលក្ខណៈខាងលើ

ក. $\frac{9}{5}.\frac{3}{4}-\frac{9}{5}.\frac{11}{4}$ ខ. $\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}-\frac{7}{8}\right)$ គ. $\left(-\frac{3}{7}.\frac{10}{12}\right).\frac{6}{10}$

២.២.៤. ប្រមាណវិធីចែកនៃចំនួនសនិទាន

ឧទាហរណ៍១ គណនាផលចែក

ក. $\frac{4}{5}\div\frac{1}{10}=\frac{4}{5}\times\frac{10}{1}=8$ ។

ខ. $-\frac{3}{5}\div 2\frac{3}{10}=-\frac{3}{5}\div\frac{23}{10}=-\frac{3}{5}\times\frac{10}{23}=-\frac{6}{23}$ ។

ជាទូទៅ៖ គេមាន $\frac{a}{b}$ និង $\frac{c}{d}$ ជាពីរចំនួនសនិទានដែល $b\neq 0\ \ ,c\neq 0\ \ ,d\neq 0$

គេបាន $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$ ។

លំហាត់គំរូ គណនាផលចែកខាងក្រោម

ក. $\frac{24}{-25}\div\frac{6}{15}$ ខ. $\frac{28}{27}\div\frac{-4}{51}$ គ. $\frac{-18}{65}\div\frac{-6}{25}$

ចម្លើយ គណនាផលចែក

ក. $\frac{24}{-25}\div\frac{6}{15}=\frac{24}{-25}\times\frac{15}{6}=\frac{4\times 3}{-5}=-\frac{12}{5}$ ។

ខ. $\frac{28}{27}\div\frac{-4}{51}=\frac{28}{27}\times\frac{51}{-4}=\frac{7\times 17}{-9}=-\frac{119}{9}$ ។

គ. $\frac{-18}{65}\div\frac{-6}{25}=\frac{-18}{65}\times\frac{25}{-6}=\frac{3\times 5}{13}=\frac{15}{13}$ ។

ប្រតិបត្តិ ចូរគណនាផលចែកខាងក្រោម

ក. $\frac{8}{3}\div\frac{-6}{5}$ ខ. $\frac{40}{-27}\div\frac{-10}{9}$ គ. $154.63\div 4.7$ ។

២.៣. ទំនាក់ទំនងលំដាប់

២.៣.១. ប្រៀបធៀបចំនួនសនិទាន

ឧទាហរណ៍១ ចំនួនសនិទាន -5 តូចជាងចំនួនសនិទាន -1 តាងដោយ $-5<-1$ ព្រោះចំនួនសនិទាន -1 នៅខាងស្តាំនសចំនួនសនិទាន -5 នៅលើបន្ទាត់ចំនួន ។

ចំនួនសនិទាន $\frac{1}{4}$ តូចជាងចំនួនសនិទាន $\frac{3}{4}$ តាងដោយ $\frac{1}{4}<\frac{3}{4}$ ព្រោះ $1<3$ ។

គេអាចរៀបលំដាប់នៃចំនួនសនិទានតាមៈ

- $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ លុះត្រាតែ $\frac{a}{b}$ ស្ថិតនៅខាងឆ្វេងនៃ $\frac{c}{d}$ នៅលើបន្ទាត់ចំនួន
- $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ លុះត្រាតែ $\frac{c}{d}-\frac{a}{b}>0$
- $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ លុះត្រាតែ $a<c, b>0$ ។

ឧទាហរណ៍២ ចំនួនសនិទាន $\frac{6}{11}$ និង $\frac{7}{12}$ មានផលគុណខ្វែងដូចខាងក្រោម

ចម្លើយៈ

$\frac{6}{11}\times\frac{7}{12}$

$6\times12<7\times11$

$72<77$

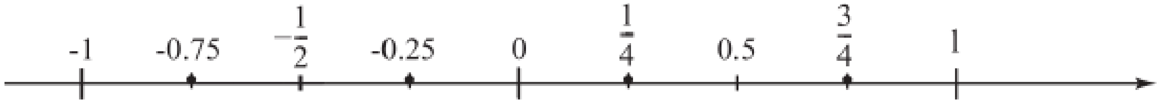
ដូចនេះ គេសន្និដ្ឋានបានថា $\frac{6}{11}<\frac{7}{12}$ ។

ជាទូទៅៈ ចំពោះចំនួនសនិទាន $\frac{a}{b}$ និង $\frac{c}{d}$ ដែល $b>0$ និង $d>0$

- បើ $\frac{a}{b}$ នោះ $ad<bc$
- បើ $ad<bc$ នោះ $\frac{a}{b}$ ។

២.៣.២. ការរៀបលំដាប់ចំនួនសនិទាន

ឧទាហរណ៍១ លំដាប់ចំនួនសនិទាននៅលើបន្ទាត់ចំនួន



ឧទាហរណ៍២ សរសេរចំនួនសនិទានខាងក្រោមពីតូចទៅធំ

$\frac{1}{8}$,-1 ,$\frac{-9}{7}$,0.28 ,$1\frac{2}{5}$

គេបាន $\frac{-9}{7}<-1<\frac{1}{8}<0.28<1\frac{2}{5}$ ។

ឧទាហរណ៍៣ រកចំនួនសនិទាននៅចន្លោះ $\frac{3}{4}$ និង $\frac{6}{7}$ ។ មានន័យថាគេត្រូវរកមធ្យមនៃចំនួនសនិទាន

ទាំងពីរគឺ $\frac{\frac{3}{4}+\frac{6}{7}}{2}$ ឬ $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{6}{7}\right)=\frac{1}{2}.\left(\frac{21+24}{28}\right)=\frac{45}{56}=0.804$ ។

លក្ខណៈ

1. តាង $\frac{a}{b}$ និង $\frac{c}{d}$ ជាពីរចំនួនសនិទាន នោះ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ លុះត្រាតែ $ad=bc$ ។
2. តាង $\frac{a}{b}$ ជាចំនួនសនិទាន និង n ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $n\neq 0$ នោះ $\frac{a}{b}=\frac{na}{nb}$ ។
3. តាង $\frac{a}{b}$ ជាចំនួនសនិទាន នោះ $-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}$ ។
4. ចំពោះចំនួនសនិទាន $\frac{a}{b}$ និង $\frac{c}{d}$ ដែល $b>0$ និង $d>0$

   បើ $\frac{a}{b}$ នោះ $ad<bc$

   បើ $ad<bc$ នោះ $\frac{a}{b}$ ។

ដូចនេះ ចំនួនសនិទាននៅចន្លោះ $\frac{3}{4}$ និង $\frac{6}{7}$ គឺ $\frac{45}{56}$ ឬ 0.804 ។

លំហាត់គំរូ បញ្ជាក់ថា គូនៃចំនួនសនិទានខាងក្រោមស្មើគ្នា រួចសសេរជាទម្រង់បង្រួមរួច

ក. $\frac{6}{-13}$, $\frac{-6}{13}$ ខ. $\frac{-25}{-35}$, $\frac{5}{7}$ គ. $\frac{-15}{36}$, $\frac{20}{-48}$

ចម្លើយ

ក. $\frac{6}{-13}=\frac{-6}{13}$ ព្រោះ $6\times 13=(-6)(-13)=78$ ទម្រង់បង្រួមរួចគឺ $\frac{-6}{13}$ ។

ខ. $\frac{-25}{-35}=\frac{(-5)\times 5}{(-5)\times 7}=\frac{5}{7}$ ទម្រង់បង្រួមរួចគឺ $\frac{5}{7}$ ។

គ. $\frac{-15}{36}=\frac{20}{-48}$ ព្រោះ $36\times 20=(-15)\times(-48)=720$ ទម្រង់បង្រួមរួចគឺ $\frac{-5}{12}$ ។

ប្រតិបត្តិ បញ្ជាក់ថា គូនៃចំនួនសនិទានខាងក្រោមស្មើគ្នា រួចសសេរជាទម្រង់បង្រួមរួច

ក. $\frac{16}{-30}$, $\frac{-8}{15}$ ខ. $\frac{-15}{-35}$, $\frac{21}{49}$

<u>លំហាត់អនុវត្ត</u>

1. ក្នុងចំណោមចំនួនខាងក្រោម តើចំនួនណាខ្លះដែលស្មើ -5?

$\frac{-5}{1}$, $\frac{5}{1}$, $\frac{5}{-1}$, $-\frac{5}{1}$, $\frac{-5}{-1}$, $-\frac{-5}{1}$, $-\frac{-5}{-1}$

2. ចូរសរសេរចំនួនខាងក្រោមជាចំនួនទសភាគ

ក. $(2\times 10)+4+(2\times 0.1)+(8\times 0.01)$

ខ. $(4\times 100)+4+(2\times 0.01)+(8\times 0.0001)$

គ. $(8\times 1000)+(2\times 10)+(8\times 0.001)$

ឃ. $(7\times 100)+(6\times 10)+4+(2\times 0.1)+(7\times 0.01)$

ង. $(5\times 100)+4(10)+8+6\left(\frac{1}{10}\right)+9\left(\frac{1}{100}\right)+3\left(\frac{1}{1000}\right)$

3. ចូរសរសេរចំនួនខាងក្រោមជាប្រភាគ

ក. 28.45 ខ. $1.37\overline{8}$ គ. $1\frac{19}{50}$ ឃ. $0.\overline{13}$ ង. $0.34\overline{7}$

4. ចូរសរសេរចំនួនសនិទានខាងក្រោមជាចំនួនទសភាគ

ក. $\frac{7}{100}$ ខ. $\frac{13}{10{,}000}$ គ. $\frac{3}{2^4}$ ឃ. $\frac{7}{2^3.5}$ ង. $\frac{17}{652}$

5. ចូរបំពេញចន្លោះដោយប្រើសញ្ញា $(<,>)$ ឱ្យបានត្រឹមត្រូវ

ក. $\frac{4}{7}.....\frac{3}{7}$ ខ. $-21.....-3$ គ. $0.54.....0.5398$

ឃ. $\frac{7}{12}.....\frac{7}{13}$ ង. $1\frac{10}{12}.....2\frac{7}{13}$ ច. $-1\frac{10}{12}.....-1\frac{9}{13}$

6. ចូរតម្រៀបចំនួនសនិទាន $\frac{3}{4},\frac{5}{6},\frac{11}{12},\frac{8}{9},\frac{9}{11}$ តាមលំដាប់កើន ។

7. ចូរតម្រៀបចំនួនសនិទាន $\frac{2}{5},\frac{1}{4},\frac{3}{8},\frac{1}{3}$ តាមលំដាប់ចុះ ។

8. ចូរតម្រៀបចំនួនសនិទាន $\frac{-2}{3},-4,\frac{7}{8},\frac{5}{6},\frac{8}{13},3,3\frac{1}{4}$ តាមលំដាប់កើន និងចុះ ។

9. ក. តើចំនួនសនិទាន $\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{7},\frac{4}{9}$ មួយណាដែលធំជាងគេ ?

ខ. តើចំនួនសនិទាន $\frac{5}{6},\frac{3}{5},\frac{3}{10},\frac{2}{9}$ មួយណាដែលតូចជាងគេ ?

10. ចូរគណនា រួចសម្រួល ។

ក. $\left(-\frac{1}{8}\right)+\left(2\frac{5}{9}\right)$ ខ. $\left(-3\frac{1}{8}\right)-\left(-2\frac{5}{9}\right)$ គ. $\left(\frac{12}{25}\right)+\left(-2\frac{5}{7}\right)$

ឃ. $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\div\frac{5}{8}$ ង. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\div\left(\frac{5}{8}-\frac{1}{4}\right)$ ច. $\dfrac{3\frac{2}{5}-\frac{25}{8}}{\frac{-7}{12}+5\frac{4}{9}}$

11. ចូរគណនា

ក. $-\frac{4}{5}.\left(\frac{11}{17}.\frac{10}{16}\right)$ ខ. $-\left(\frac{11}{13}.\frac{17}{16}\right).\frac{26}{51}$ គ. $\left(-\frac{11}{13}+\frac{17}{16}\right).\frac{26}{22}$

ឃ. $-\frac{11}{18}.\frac{21}{22}+\frac{17}{16}.\frac{21}{22}$ ង. $-\frac{11}{8}+\frac{21}{4}-\frac{17}{16}$

ច. $\left(-\frac{11}{21}\right).\frac{3}{7}+\left(\frac{-3}{7}\right).\left(-\frac{11}{21}\right)$

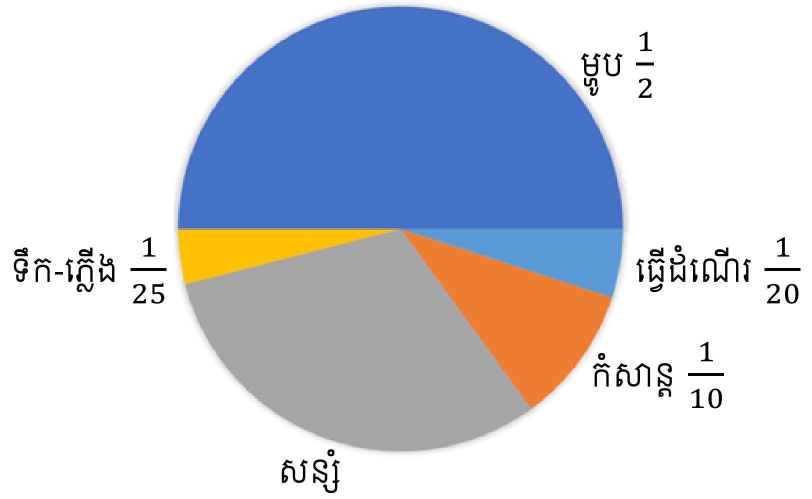
12. បង្ហាញថា $\frac{13}{4}+\frac{13}{9}=\frac{13}{4}\times\frac{13}{9}$ ។

13. គេមាន $\frac{a}{b}.\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}.\frac{c}{d}+\frac{a}{b}.\frac{e}{f}$ ។ ចូរបង្ហាញថា $\frac{a}{b}.\left(\frac{c}{d}-\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}.\frac{c}{d}-\frac{a}{b}.\frac{e}{f}$ ។

14. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា បើ $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ នោះ $\frac{a}{b}+\frac{e}{f}<\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$ ។

15. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា បើ $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ នោះ $\frac{a}{b}-\frac{e}{f}<\frac{c}{d}-\frac{e}{f}$ ។

16. រូបខាងក្រោមនេះបង្ហាញពីបំណែងចែកនៃប្រាក់ខែ ។ រកប្រភាគដែលតាងឱ្យប្រាក់សន្សំ ។

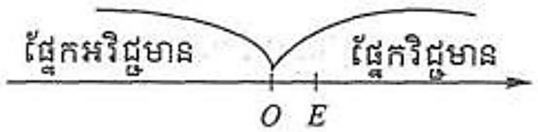


មេរៀនទី៣ ចំនួនពិត

៣.១. សញ្ញាណនៃចំនួនពិត

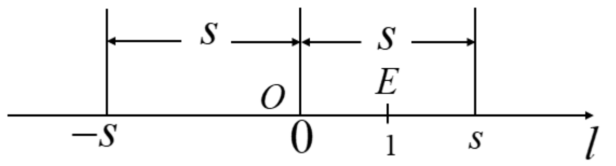
៣.១.១. បន្ទាត់ចំនួន

គេឲ្យចំណុច O និងចំណុច E មួយផ្សេងទៀតនៅលើបន្ទាត់ l ។ បើគេមិនរាប់បញ្ចូលចំណុច O ទេ នោះគេអាចចែកបន្ទាត់ l ជាពីរផ្នែកនៅសងខាងនៃចំណុច O ។ ផ្នែកដែលមានចំណុច E ហៅថា **ផ្នែកវិជ្ជមាន** និងផ្នែកដែលគ្មានចំណុច E ហៅថា **ផ្នែកអវិជ្ជមាន** ។



ចំពោះគ្រប់ចំណុចនៅលើបន្ទាត់ l ដែលមានអង្កត់ OE ជាឯកតាប្រវែង ត្រូវគ្នានឹងចំនួនតាមរបៀបដូចខាងក្រោម

- ចំណុច O ត្រូវនឹងចំនួន 0 ។
- គ្រប់ចំណុចនៅផ្នែកវិជ្ជមាន ហើយមានចម្ងាយ s ពីចំណុច O ត្រូវគ្នានឹងចំនួនវិជ្ជមាន s ។
- គ្រប់ចំណុចនៅផ្នែកអវិជ្ជមាន ហើយមានចម្ងាយ s ពីចំណុច O ត្រូវនឹងចំនួនអវិជ្ជមាន $(-s)$ ។



តាមរបៀបនេះ គ្រប់ចំណុច M នៅលើ l ត្រូវគ្នានឹងចំនួនតែមួយគត់ មានន័យថា ចំណុចផ្សេងគ្នាត្រូវគ្នានឹងចំនួនផ្សេងគ្នា ។ ចំនួន x ដែលត្រូវនឹងចំណុច M ហៅថា **កូអរដោនេ** នៃចំណុច M ។ គេកំណត់សរសេរ $M(x)$ ។

ក្នុងករណីនេះបន្ទាត់ l ហៅថាបន្ទាត់ចំនួនដែលមានចំណុច O ជាគល់និង E ជាចំណុចឯកតា ។ កូអរដោនេនៃចំណុចគល់ស្មើនឹង 0 និងកូអរដោនេនៃចំណុចឯកតាស្មើនឹង 1 ។

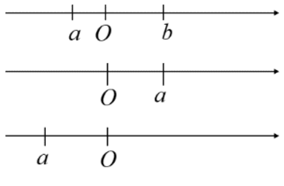
គ្រប់ចំនួនដែលត្រូវគ្នានឹងគ្រប់ចំណុចនៅលើបន្ទាត់ចំនួន ហៅថា **ចំនួនពិត** ។ បើគេគូសបន្ទាត់ចំនួនជាបន្ទាត់ដេក នោះផ្នែកវិជ្ជមានត្រូវនៅខាងស្តាំ និងផ្នែកអវិជ្ជមាននៅខាងឆ្វេង ។

៣.១.២. ការប្រៀបធៀបចំនួនពិត

គេដៅចំនួនវិជ្ជមាននៅលើបន្ទាត់ចំនួនដោយចំណុចជាច្រើននៅផ្នែកខាងស្តាំនៃគល់ និងគេដៅចំនួនអវិជ្ជមានដោយចំណុចជាច្រើនទៅផ្នែកខាងឆ្វេងនៃគល់ ។ បើគេនិយាយថា ចំនួនពិត b ធំជាងចំនួនពិត a ឬ a តូចជាង b នោះគេនិយាយថាចំណុច b នៅខាងស្តាំនៃចំណុច a ។

គេកំណត់សរសេរ $a<b$ ឬ $b>a$ ។

- បើ a វិជ្ជមាន គេសរសេរ $a>0$ ។
- បើ a អវិជ្ជមាន គេសរសេរ $a<0$ ។



គេអាចប្រៀបធៀបចំនួនពិតតាមលក្ខណៈខាងក្រោម

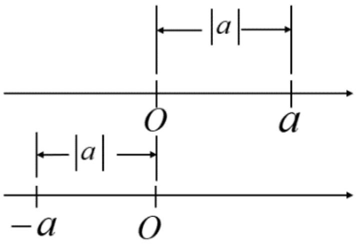
ក. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a និង b គេអាចបានទំនាក់ទំនងមួយក្នុងចំណោមទំនាក់ទំនង

$a<b$, $a=b$, $a>b$ ។

ខ. $(a<b)$ និង $(b<c)\Rightarrow a<c$ ។ គ. $a>b\Leftrightarrow a-b>0$ ។

៣.១.៣. តម្លៃដាច់ខាតនៃចំនួនពិត

ចម្ងាយពីគល់ O ទៅចំណុច a នៅលើបន្ទាត់ចំនួន ហៅថា **តម្លៃដាច់ខាត** នៃចំនួន a ។ តម្លៃដាច់ខាតនៃចំនួនពិត a គំណត់ដោយ $|a|$ ។



ឧទាហរណ៍១ $|3|=3$, $|-3|=3$, $|0|=0$ ។

ប្រតិបត្តិ១ គណនាតម្លៃខាងក្រោម

ក. $|8|$ ខ. $|-10|$ គ. $|2\times 5|$ ឃ. $\left|-\frac{1}{3}\right|$ ។

ប្រតិបត្តិ២ កំណត់ចំនួនពិត x ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $|x|=7$ ។

តាមនិយមន័យនៃតម្លៃដាច់ខាត គេទាញបានលក្ខណៈខាងក្រោម

- $|a|=a$ បើ $a\geq 0$
- $|a|=-a$ បើ $a<0$
- ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a គេបាន $|a|\geq 0$
- $|a|=0$ លុះត្រាតែ $a=0$ ។

ឧទាហរណ៍១ បង្ហាញថាសមភាព $|-a|=|a|$ ពិត ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a ។

ចម្លើយ ពិនិត្យសមភាពនេះចំពោះ $a\geq 0$ និង $a<0$

(1) . ចំពោះ $a\geq 0$ គេបាន $|a|=a$ និង $-a\leq 0$ នោះ $|-a|=-(-a)=a=|a|$

(2) . ចំពោះ $a<0$ គេបាន $|a|=-a$ និង $-a>0$ នោះ $|-a|=-a=|a|$

តាម (1) និង (2) ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតនៃ a គេបាន $|-a|=|a|$ ។

ប្រតិបត្តិ៣ បង្ហាញថា $a^2=|a|^2$ ពិត ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a ។

៣.១.៤. ចំណែកថ្នាក់នៃចំនួនពិត

គេតាងសំណុំចំនួនគត់ធម្មជាតិ 1, 2, 3, ... ដោយ $\mathbb{N}$ ។ គេបាន $\mathbb{N}=\{1, 2, 3, ...\}$ ។ ផលបូក និងផលគុណនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។ គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន 1, 2, 3, ... គ្រប់

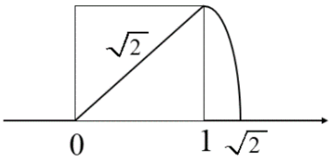
ចំនួនគត់អវិជ្ជមាន $-1,\ -2,\ -3,\ ...$ និងសូន្យបង្កើតបានជាសំណុំនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបដែលតាងដោយ $\mathbb{Z}$ ។ ផលបូក ផលដក និងផលគុណនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប ។

គ្រប់ចំនួនដែលមានទម្រង់ $\frac{m}{n}$ ដែល m និង n ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប ហើយ $n \neq 0$ ហៅថា ចំនួនសនិទាន ។ គេតាងសំណុំនៃចំនួនសនិទានដោយ $\mathbb{Q}$ ។

គ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប m អាចសរសេរជាទម្រង់ $\frac{m}{1}$ នោះវាក៏ជាចំនួនសនិទានដែរ ។ ផលបូក ផលដក ផលគុណ និងផលចែកនៃចំនួនសនិទាន ក៏ជាចំនួនសនិទានផងដែរ ។

មានចំណុចជាច្រើននៅលើបន្ទាត់ចំនួន ដែលមិនមែនជាចំនួនសនិទាន ។

ឧទាហរណ៍១ ការេដែលមានប្រវែងជ្រុងស្មើនឹង 1 មានប្រវែងអង្កត់ទ្រូងស្មើនឹង $\sqrt{2}$ ។ គេអាចដៅចំនួន $\sqrt{2}$ នៅលើបន្ទាត់ចំនួនបាន ។ ចំនួន $\sqrt{2}$ មិនមែនជាចំនួនសនិទានទេ ។



ចំនួនពិតដែលមិនមែនជាចំនួនសនិទានហៅថា **ចំនួនអសនិទាន** ។ $\sqrt{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន ។ ចំនួនថេរ π ក៏ជាចំនួនអសនិទានដែរ ។

សំគាល់ គេអាចសរសេរចំនួនសនិទាន ដែលមិនមែនជាចំនួនគត់ឲ្យទៅជាចំនួនទសភាគកំណត់ ឬ ចំនួនទសភាគខួប ។

ឧទាហរណ៍២ $\frac{1}{8} = 0.125$ ជាចំនួនទសភាគកំណត់ ។

$-\frac{4}{3} = -1.333...$ ជាចំនួនទសភាគខួបដែលមាន 3 ជាខួប ។

$\frac{9}{74} = 0.1216216216...$ ជាចំនួនទសភាគខួប ដែលមាន 216 ជាខួប ។

គេអាចសរសេរចំនួនអសនិទានឲ្យទៅជាចំនួនទសភាគអនន្តដែលគ្មានខួប ។

ឧទាហរណ៍៣ $\sqrt{2} = 1.41421356237....$ ជាចំនួនទសភាគអនន្តដែលគ្មានខួប ។

$\pi = 3.14159....$ ជាចំនួនទសភាគអនន្តដែលគ្មានខួប ។

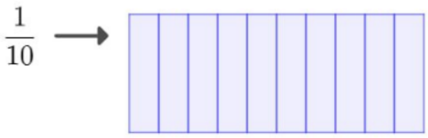
ប្រតិបត្តិ តើចំនួនណាខ្លះជាចំនួនសនិទាន ចំនួនអសនិទាន ក្នុងចំណោមចំនួនទាំងនេះ

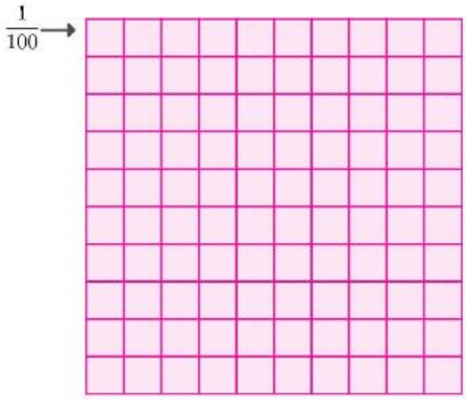
$$0,\ 3,\ \pi,\ -5,\ \frac{2}{7},\ -\frac{9}{4},\ \sqrt{8},\ \sqrt{0.16},\ \sqrt{3+1}\quad ?$$

៣.២. ចំនួនទសភាគ

ឧទាហរណ៍១ គេចែកបន្ទះមួយជា 10 ផ្នែកស្មើៗគ្នា ។

ផ្នែកនីមួយៗស្មើនឹង $\frac{1}{10}$ ។





$\frac{1}{10}$ អាចសរសេរជា 0.1 (អានថា សូន្យចុចមួយ) មានន័យថា $\frac{1}{10}=0.1$ និងច្រាសមកវិញ ។

$$\begin{array}{r|l} 1.0 & 10 \\ \hline -\ 10 & 0.1 \\ \hline 0 & \end{array}$$

គេចែកការេមួយជា 100 ផ្នែកស្មើៗគ្នា ។ ផ្នែកនីមួយៗស្មើនឹង $\frac{1}{100}$ ។

ដូចនេះ $\frac{1}{100}=0.01$ (អានថា សូន្យចុចសូន្យមួយ) និងច្រាសមកវិញ ។

ចំនួនដូចជា 0.1 និង 0.01 ហៅថាចំនួនទសភាគ ។ សញ្ញាចុចហៅថា ចំណុចទសភាគ ។

> ចំនួនទសភាគ ជាចំនួនតាងប្រភាគដែលមានភាគបែងស្មើ 10, 100, 1000, ...

៣.២.១. តម្លៃលេខតាមខ្ទង់ក្នុងចំនួនទសភាគ

ដូចចំនួនគត់ដែលលេខនីមួយៗនៅក្នុងចំនួនទសភាគមានតម្លៃជាក់លាក់មួយទៅតាមខ្ទង់របស់វា ខ្ទង់រាយ ខ្ទង់ភាគដប់ ខ្ទង់ភាគរយ ខ្ទង់ភាគពាន់ .... ។

ឧទាហរណ៍១ 2 7 0 2 5

- 5 ភាគពាន់ $=\frac{5}{1000}=0.005$
- 2 ភាគរយ $=\frac{2}{100}=0.02$
- 0 ភាគដប់ $=\frac{0}{10}=0.0$
- 7 ខ្ទង់រាយ $=7\times1=7$
- 2 ខ្ទង់ដប់ $=2\times10=20$

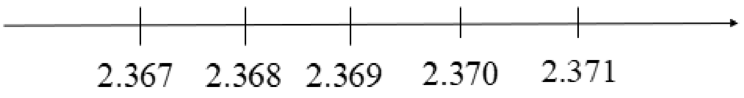
សរុបទាំងអស់ $=27.025$

៣.២.២. ការប្រៀបធៀបចំនួនទសភាគ

ឧទាហរណ៍១ ប្រៀបធៀបចំនួន 2.367 និង 2.371   រួចប្រៀបធៀប 3.135 និង 3.162 ។

ដូចនេះ $2.367 < 2.371$ ។ ដូចនេះ $3.135 < 3.162$ ។

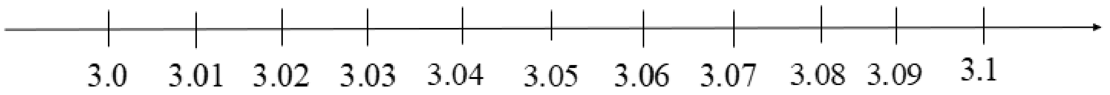
គេក៏អាចប្រើបន្ទាត់ចំនួនដើម្បីប្រៀបធៀបចំនួនទសភាគដែរ ។



៣.២.៣ ការរៀបលំដាប់ចំនួនទសភាគ

ឧទាហរណ៍ រៀប 3.09 , 3.07 និង 3.07 តាមលំដាប់កើន ។

គេចែកបន្ទាត់ចំនួននៅចន្លោះ 3.0 និង 3.1 ជា 10 ផ្នែកស្មើគ្នា ។ ផ្នែកនីមួយៗស្មើនឹង 0.01 ។



ដូចនេះ ចំនួនទសភាគដែលបានរៀបតាមលំដាប់កើនគឺ 3.04 , 3.07 , 3.09 ។

លំហាត់គំរូ ស៊ីណាមានម៉ាស $45.73kg$ សំមានម៉ាស $36.76kg$ និងនារីមានម៉ាស $45.70kg$ ។ តើអ្នកណាមានម៉ាសធំជាងគេបំផុត ? អ្នកណាមានម៉ាសតូចជាងគេ ?

ចម្លើយ គេបាន $45.73 > 45.70 > 36.76$ ។ ស៊ីណាមានម៉ាសធំជាងគេបំផុត ។ សំមានម៉ាសតូចជាងគេ ។

ប្រតិបត្តិ១ សរសេរតម្លៃលេខតាមខ្ទង់នសចំនួនទសភាគនីមួយៗខាងក្រោម

ក. 0.785 ខ. 16.301 គ. 2.0397 ។

ប្រតិបត្តិ២ រៀបចំនួន -6.245 , -5.867 , -0.045 , -3.243 , -0.127 តាមលំដាប់កើននឹងចុះ។

៣.២.៤. ការប្តូរប្រភាគទៅជាចំនួនទសភាគ

ឧទាហរណ៍១ សរសេរប្រភាគនីមួយៗជាចំនួនទសភាគ

ក. $\frac{9}{10} = 0.9$ ខ. $\frac{27}{100} = 0.27$ គ. $-\frac{5}{100} = -0.05$ ឃ. $-\frac{329}{100} = -3.29$

(100: សូន្យ2 ; .29: 2លេខ)

ឧទាហរណ៍២ នៅពេលគេយក 2 ចែកនឹង 3 គេបាន $\frac{2}{3}=0.6666...$ ។ បើគេនៅតែបន្តវិធីចែកគេនៅតែបានលេខ 6 ជានិច្ច ។

$$\begin{array}{r|l} 2.0000 & 3 \\ -18 & \overline{0.6666...} \\ \hline 20 & \\ -18 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

ឬ $2\div 3=0.6666...$

ដោយវាមានការពិបាកក្នុងការសរសេរឲ្យបានគ្រប់លេខ 6 ទាំងអស់ គេអាចប្រើរបារ ដើម្បីបង្ហាញថា 6 មានច្រំដែលៗ ។

ក្នុងករណីនេះ គេថាវិធីចែកគ្មានទីបញ្ចប់

$0.6666...=0.\bar{6}$ ហៅថា ចំនួនទសភាគខួបដែលមាន6 ជាខួប ។

ឧទាហរណ៍៣ ចូរសរសេរប្រភាគដូចខាងក្រោមជាចំនួនទសភាគ

$\frac{4}{5}=4\div 5=0.8$ ឬ $\frac{4}{5}=\frac{4\times 2}{5\times 2}=\frac{8}{10}=0.8$ ← ប្តូរទៅជាប្រភាគដែលមានភាគបែងស្មើនឹង 10

៣.២.៥. ការប្តូរចំនួនទសភាគទៅជាប្រភាគ

ឧទាហរណ៍ សរសេរចំនួនទសភាគនីមួយៗខាងក្រោមជាប្រភាគ ឬចំនួនចម្រុះក្នុងទម្រង់ដែលមិនអាចសម្រួលបាន

ក. $0.28 = \frac{28}{100} = \frac{7}{25}$

(28 ក្នុង 0.28: 2លេខបន្ទាប់ចំណុចទសភាគ; 00 ក្នុង 100: សូន្យ2នៅក្នុងភាគបែង)

ខ. $0.\bar{2}$ តាង $N=0.\bar{2}...$ ឬ $0.222...$ នោះ $10N=2.222...$

ដោយដក $N=0.222$ ពី $10N$ $\quad 10N=2.222...$

ដើម្បីបំបាត់ផ្នែកច្រំដែល $0.222...$ នោះគេបាន

$10N-N=(2.222...)-(0.222...)$

$9N=2$ នាំឲ្យ $N=\frac{2}{9}$ ដូចនេះ $0.\bar{2}=\frac{2}{9}$ ។

លំហាត់គំរូ១ សរសេរចំនួនទសភាគខួបនីមួយៗដោយប្រើសញ្ញារបារនៅលើខួប

ក. $0.363636...$ ខ. $10.0456456...$ គ. $-7.074747...$

ចម្លើយ ក. $0.363636...=0.\overline{36}$ ខ. $10.0456456...=10.0\overline{456}$ គ. $-7.074747...=-7.0\overline{74}$ ។

លំហាត់គំរូ ២ សរសេរចំនួនទសភាគខាងក្រោមជាប្រភាគ

ក. 0.065 ខ. $-1.\bar{7}$

ចម្លើយ ក. $0.065=\frac{65}{1000}=\frac{13}{200}$

ខ. តាង $N=-1.\bar{7}$ នោះ $10N=-17.\bar{7}$

$$\begin{array}{r} -N=-1.\bar{7} \\ \hline 9N=-16 \end{array}$$

នោះ $N=-\frac{16}{9}=-1\frac{7}{9}$ ។ ដូចនេះ $-1.\bar{7}=-1\frac{7}{9}$

ប្រតិបត្តិ១ សរសេរប្រភាគនីមួយៗខាងក្រោមជាចំនួនទសភាគ

ក. $\frac{3}{10}$ ខ. $-\frac{13}{100}$ គ. $\frac{407}{1000}$ ឃ. $-\frac{13786}{1000}$ ។

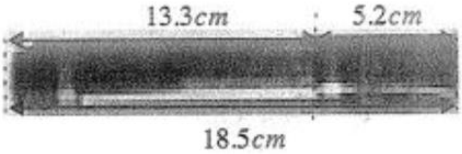
៣.២.៦. វិធីបូកនិងវិធីដកនៃចំនួនទសភាគ

ក. វិធីបូកចំនួនទសភាគ

ឧទាហរណ៍១ គណនា $13.3cm+5.2cm$

$$\begin{array}{r} 13.3 \\ +\ 5.2 \\ \hline 18.5 \end{array}$$

ចំណុចទសភាគត្រូវដាក់ឲ្យត្រង់ជួរតាមបន្ទាត់ឈរ



ឧទាហរណ៍២ គណនា ក. $3.49+18.753$ ខ. $101.51+13.31$

ក.
$$\begin{array}{r} 3.49 \\ 18.753 \\ \hline 22.243 \end{array}$$

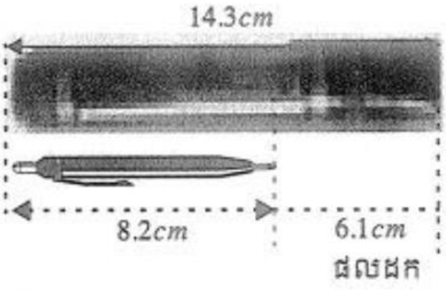
ដូចនេះ $3.49+18.753=22.243$

ខ.
$$=\frac{10151}{100}+\frac{1331}{100}$$
$$=\frac{11482}{100}=114.82$$

ដូចនេះ $101.51+13.31=114.82$

ខ. វិធីដកចំនួនទសភាគ

ឧទាហរណ៍១ គណនា $14.3cm-8.2cm$



$$\begin{array}{r} 14.3 \\ -8.2 \\ \hline 6.1 \end{array}$$

ដូចនេះ $14.3cm-8.2cm=6.1cm$ ។

លំហាត់គំរូ គណនា ក. $-2.34+(-16.5)+3.56$ ខ. $-8.245-(-5.113)-(-0.456)$

ចម្លើយ ក. $-2.34+(-16.5)+3.56=-2.34-16.5+3.56=-15.28$

ខ. $-8.245+5.113+0.456=-2.676$

ប្រតិបត្តិ គណនា $4.235+(-6.563)-(-10.999)$

៣.២.៧. វិធីគុណនិងវិធីចែកនៃចំនួនទសភាគ

ក. វិធីគុណចំនួនទសភាគ

ឧទាហរណ៍១ គណនាផលគុណនីមួយៗខាងក្រោម

ក. 2.56×8

$=\frac{256}{100}\times 8=\frac{2048}{100}=20.48$

ដូចនេះ $2.56\times 8=20.48$ ។

2.56 ← ផ្នែកទសភាគមាន 2ខ្ទង់

$\times$

8

20.48 ← ផ្នែកទសភាគមាន 2ខ្ទង់

ខ. -1.482×2.9

$-\frac{1482}{1000}\times\frac{29}{10}=-\frac{42978}{10000}$

$=-4.2978$

ដូចនេះ $-1.482\times 2.9=-4.2978$ ។

-1.482 ← ផ្នែកទសភាគមាន 3ខ្ទង់

$\times$

2.9 ← ផ្នែកទសភាគមាន 1ខ្ទង់

-13338 ← -1482×9

-29640 ← -1482×20

-4.2978 ← ផ្នែកទសភាគមាន 4ខ្ទង់

ឧទាហរណ៍២ គណនាផលគុណនីមួយៗខាងក្រោម

ក. $0.387\times 10=3.87$

រំកិលចំណុចទសភាគ 1 ខ្ទង់ទៅខាងស្តាំ។

ខ. $0.387\times 100=38.7$

រំកិលចំណុចទសភាគ 2 ខ្ទង់ទៅខាងស្តាំ។

គ. $0.387\times 100=387$

រំកិលចំណុចទសភាគ 3 ខ្ទង់ទៅខាងស្តាំ។

គ. $-2.754\times 10000=-27540$

រំកិលចំណុចទសភាគ 4 ខ្ទង់ទៅខាងស្តាំ។

ជាទូទៅ ដើម្បីគុណមួយចំនួនទសភាគនិង $10,\ 100,\ 1000.....$
គេរំកិលចំណុចទសភាគ $1,\ 2,\ 3,...$ ខ្ទង់ទៅខាងស្តាំរៀងគ្នា ។

ខ. ចែកចំនួនទសភាគនឹងចំនួនគត់

ឧទាហរណ៍១ មីងណារីបានផ្តល់ទឹកដោះគោ $0.4kg$ ឲ្យកូនពីរនាក់ ។ កូនម្នាក់ៗទទួលបាន $0.2kg$ ។ អ្នកទាំងពីរបានទឹកដោះគោស្មើៗគ្នា

គេបាន $0.4\div 2$

$$\begin{array}{r|l} 0.4 & 2 \\ \cline{2-2} -0.4 & 0.2 \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\frac{4}{10}\div 2=\frac{4}{20}=0.2$$

ដូចនេះ $0.4\div 2=0.2kg$

ឧទាហរណ៍២ គណនាផលចែកក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម

ក. $47.3\div 10=4.73$ ខ. $47.3\div 100=0.473$ គ. $4.73\div 100=0.0473$

> **ជាទូទៅ** ដើម្បីចែកចំនួនទសភាគនិង $10,\ 100,\ 1000.....$
> គេរំកិលចំណុចទសភាគ $1,\ 2,\ 3,...$ ខ្ទង់ទៅខាងឆ្វេងរៀងគ្នា ។

គ. ការចែកចំនួនទសភាគនឹងចំនួនទសភាគ

ឧទាហរណ៍១ គណនាផលចែកនីមួយៗខាងក្រោម

ក. $1.272\div 0.03=\frac{1.272}{0.03}=\frac{1.272\times 100}{0.03\times 100}=\frac{127.2}{3}=42.2$

ខ. $\frac{-0.0084}{-1.2}\div(-0.028)=-\left(\frac{0.0084}{1.2}\div 0.028\right)=-(0.007\div 0.028)=-(7\div 28)=0.25$

> **ជាទូទៅ** -ដើម្បីចែកចំនួនទសភាគមួយនឹងចំនួនទសភាគមួយទៀត គេធ្វើតំណាងចែកនិងតួចែកឲ្យទៅជាចំនួនគត់ដោយគុណតំណាងចែកនិងតួចែកនឹង$10,\ 100,\ 1000.....$
> -បន្ទាប់មកគេប្រើវិធីចែកនៃចំនួនគត់នឹងចំនួនគត់ ។

ឧទាហរណ៍២ ក. $0.0796\div 0.1=0.796$ ខ. $0.0796\div 0.01=7.96$

គ. $-0.796\div(-0.001)=796$ ឃ. $-13.652\div 0.001=-13652$

គេឃើញថា ផលចែកបានមកដោយរំកិលចំណុចទសភាគក្នុងតំណាងចែកទៅខាងស្តាំចំនួន 1 ខ្ទង់ 2 ខ្ទង់ 3 ខ្ទង់... បើតួចែកស្មើ .01, .001, 0.001,... ។

> **ជាទូទៅ** ដើម្បីចែកចំនួនទសភាគមួយនឹង .01, .001, 0.001 គេរំកិលចំណុចទសភាគ
> 1, 2, 3,..... ខ្ទង់ទៅខាងស្តាំរៀងគ្នា ។

ឃ. ការចែកចំនួនទសភាគនឹងប្រភាគ

ឧទាហរណ៍១ ចូរគណនា

ក. $1.42 \div \frac{5}{6} = 1.42 \times \frac{6}{5}$ ← ប្តូរ $\div$ ទៅជា $\times$ និង $\frac{5}{6}$ ទៅជា $\frac{6}{5}$

$= \frac{8.52}{5} = 1.704$

ខ. $2.5 \div \left(-\frac{12.5}{3}\right) = 2.5 \times \left(-\frac{3}{12.5}\right) = -\frac{7.5}{12.5} = -0.6$ ។

លំហាត់គំរូ១ ចូរគណនា ក. $-0.16 \times (-0.1) \times 4.5$ ខ. $-3.6 \div (-0.0006)$ ។

ចម្លើយ ក. $-0.16 \times (-0.1) \times 4.5 = +(0.16 \times 0.1 \times 4.5)$

$= 0.016 \times 4.5 = 0.072$ ។

ខ. $-3.6 \div (-0.0006) = +\left(\frac{3.6}{0.0006}\right) = \frac{36000}{6} = 6000$ ។

ប្រតិបត្តិ សៀវភៅ 5 ក្បាលថ្លៃ 8050.175៛ ។ ណារ៉ុងបានទិញសៀវភៅ 15 ក្បាល ហើយបានឲ្យប្រាក់ទៅគេចំនួន 30000៛ ។ តើគេត្រូវអាប់ប្រាក់ឲ្យគេវិញចំនួនប៉ុន្មានរៀល ?

៣.២.៨. ការបង្គត់ចំនួនទសភាគ

ការបង្គត់ចំនួនទសភាគក៏ដូចគ្នានឹងការបង្គត់ចំនួនគត់ដែរ ។ គេត្រូវដឹងថា ពេលដែលចំនួនណាមួយនៅចន្លោះកណ្តាលរវាងចំនួនពីរទៀតត្រូវបង្គត់ឡើង ។

ឧទាហរណ៍១ បង្គត់ចំនួន 2.85 យកត្រឹមភាគដប់ ។

ពេលបង្គត់ត្រឹមខ្ទង់ភាគដប់ គេត្រូវមើលលេខក្រោយបន្ទាប់ខ្ទង់ភាគដប់ 1 ខ្ទង់ គឺ 5 គេត្រូវបង្គត់ឡើង ។ ដូចនេះ $2.85 \approx\sim 2.9$ ។

គេអាចបង្ហាញបានលើបន្ទាត់ចំនួនខាងក្រោម

ឧទាហរណ៍២ បង្គត់ចំនួន 0.2198 យកត្រឹមភាគរយ ។

គេត្រូវមើលលេខ 9 ត្រូវបង្គត់ឡើងគឺ 0.22 ។

ឧទាហរណ៍៣ បង្គត់ចំនួន 1.92049 យកត្រឹមភាគពាន់ ចំនួន 1.920 <u>49</u> ត្រូវបង្គត់ចុះ ។

ដូចនេះ $1.92049 \approx 1.920$ ។

៣.២.៩. ការប៉ាន់ស្មានចម្លើយប្រហែល

គេអាចប្រើការបង្គត់ចំនួនត្រឹមខ្ទង់ភាគដប់ ខ្ទង់ភាគរយ ខ្ទង់ភាគពាន់ ..... ដើម្បីជួយក្នុងការប៉ាន់ស្មានចម្លើយប្រហែល ។

ឧទាហរណ៍១ គណនា $29.8+39.9-20.4$ ។

គេបាន $29.8 \approx\sim 30$, $39.9 \approx\sim 40$, $20.4 \approx\sim 20$ ។

ដូចនេះ $29.8+39.9-20.4 \approx 30+40-20 \approx 50$ ។

លំហាត់គំរូ ធ្វើការប៉ាន់ស្មានដើម្បីរកចម្លើយដែលត្រឹមត្រូវ $12.9+12.89+13.21+13.4$ មានតម្លៃប្រហែលនឹង

ក. 40.86 ខ. 52.37 គ. 29.286

ចម្លើយ គេបាន $12.9+12.89+13.21+13.4 \approx 4\times 13 \approx 52$ ។

ដូចនេះ ចម្លើយដែលត្រូវគឺ ខ. $52.37 \approx 52$ ។

ប្រតិបត្តិ បង្គត់ចំនួនខាងក្រោមត្រឹមខ្ទង់ភាគពាន់

ក. 0.004681 ខ. 0.000604 គ. 5.9845 ។

៣.៣. ចំនួនអសនិទាន

៣.៣.១. ឬសការេ

រំលឹក 1. រក x ដែល $x+5=3$

$$x=3-5=-2$$

2. រក x ដែល $2x=5$

$$x=\frac{5}{2}=2.5$$

ចំនួន $-2,\ \frac{5}{2},\ 2.5$ ហៅថាចំនួនសនិទាន ។

មានករណីខ្លះចំនួនសនិទានពុំអាចបំពេញលក្ខខណ្ឌនៃសមីការបាន ។

ឧទាហរណ៍ទី១ រក x ដែល $x^2=9$

ដោយ $3^2=9$, $(-3)^2=9$

ដូចនេះ $x=3$, $x=-3$

ចំនួន 3 និង -3 ជាឫសការេនៃ 9 ហេតុនេះការរកឫសការេនៃ 9 គឺរក x ដែល $x^2=9$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២ រក x ដែល $x^2=\frac{25}{4}$

ដោយ $\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$, $\left(-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$

ដូចនេះ $x=\frac{5}{2}$, $x=-\frac{5}{2}$

ចំនួន $\frac{5}{2}$, $-\frac{5}{2}$ ជាឫសការេនៃ $\frac{25}{4}$

គេអាចថា $\frac{25}{4}$ មានឫសការេពីរផ្ទុយគ្នាគឺ $\frac{5}{2}$ និង $-\frac{5}{2}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៣ រក x ដែល $x^2=3$

បើឲ្យ $x=1$ $1^2=1<3$

បើឲ្យ $x=\frac{3}{2}=1.5$ $\left(\frac{3}{2}\right)^2=2.25<3$

បើឲ្យ $x=\frac{5}{3}=1.66$ $\left(\frac{5}{3}\right)^2=2.77<3$

បើឲ្យ $x=2$ $2^2=4>3$

យើងឃើញថាគ្មានចំនួនសនិទានណាដែលការេវាស្មើនឹង 3 ទេ ។

ក្នុងករណីនេះគេសន្មតតាង $\sqrt{3}$ ជាចំនួនមួយដែល $\left(\sqrt{3}\right)^2=3$

មានន័យថាបើ $x^2=3$ ឫសការេនៃ 3 គឺ $\sqrt{3}$ និង $-\sqrt{3}$

$\sqrt{3}$ ជាឫសការេវិជ្ជមាន ហើយ $-\sqrt{3}$ ជាឫសការេអវិជ្ជមាន ។

ចំនួន $\sqrt{3}$ ហៅថាចំនួនអសនិទានដែល $\sqrt{3}\approx 1.7320$

ចំពោះចំនួន $\sqrt{3}$ សញ្ញា $\sqrt{\ }$ ហៅថារ៉ាឌីកាល់មានសន្ទស្សន៍ស្មើនឹង 2 ។

តាមពិតគេត្រូវសរសេរ $\sqrt[2]{3}$ ដើម្បីសម្គាល់សន្ទស្សន៍នៃរ៉ាឌីកាល់ ហើយ 3 ហៅថារ៉ាឌីកង់។

ឧទាហរណ៍ទី៤ រក x ដែល $x^2=-3$

គេដឹងថាគ្មានតម្លៃ x ណាដែលនាំឲ្យ x^2 ជាចំនួនអវិជ្ជមានទេ

ដូចនេះចំនួនអវិជ្ជមានគ្មានឫសការេទេ ។

ជាទូទៅ បើ $a>0$, $x^2=a$ គេបាន $x=\sqrt{a}$ និង $x=-\sqrt{a}$ ។

លំហាត់គំរូ រកឫសការេនៃសមីការខាងក្រោម ។

ក. $x^2=16$ ខ. $x^2=7$

គ. $x^2=\frac{25}{4}$ ឃ. $x^2=-81$

ង. $x^2=1$ ច. $x^2=0$ ។

ចម្លើយ

ក. $x^2=16$, $(-4)^2=16$ បើ $x^2=16$

ដូចនេះ $x=\sqrt{16}=4$, $x=-\sqrt{16}=-4$ ។

ខ. ពុំមានចំនួនសនិទានណាដែលការេវាស្មើនឹង 7

ដូចនេះឫសការេវាជាចំនួនអសនិទាន $x=\sqrt{7}$ និង $x=-\sqrt{7}$ ។

គ. $\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$, $\left(-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$

ដូចនេះ $x=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$, $x=-\sqrt{\frac{25}{4}}=-\frac{5}{2}$ ។

ឃ. គ្មានចំនួនណាដែលការេវាជាចំនួនអវិជ្ជមាន

ដូចនេះ -81 គ្មានឫសការេ ។

ង. $1^2=1$, $(-1)^2=1$

ដូចនេះ $x=\sqrt{1}=1$, $x=-\sqrt{1}=-1$ ។

ច. $0^2=0$ ដូចនេះ $x=0$ ជាឫសការេនៃការេ 0 ។

ប្រតិបត្តិ រកឫសការេនៃចំនួន

0.04 , 0.01 , 5 , -1 , $\frac{25}{36}$, 0.1 ។

៣.៣.២. ឫសគូប

ឧទាហរណ៍ទី១ រក x ដែល $x^3=64$

$4^3=64$, $(-4)^3=-64$ ដូចនេះ $x=4$ ជាឫសគូបនៃ 64

គេថា 64 មានឫសគូបតែមួយគត់គឺ $x=4$

រកឫសគូបនៃ 64 គឺរក x ដែល $x^3=64$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២ រក x ដែល $x^3=-27$

$3^3=27$, $(-3)^3=-27$ ដូចនេះ $x=-3$ ជាឫសគូបនៃ -27

-27 មានឫសគូបតែមួយគត់គឺ $x=-3$ ។

គេសង្កេតឃើញថាគ្រប់ចំនួនវិជ្ជមានឬអវិជ្ជមាន មានឫសគូបតែមួយគត់ ។ ឫសគូបនៃចំនួនវិជ្ជមានជាចំនួនវិជ្ជមាន ហើយឫសគូបនៃចំនួនអវិជ្ជមានជាចំនួនអវិជ្ជមាន ។

ឧទាហរណ៍ទី៣ រក x ដែល $x^3=17$

$$2^3=8\ ,\ (2.5)^3=15.6\ ,\ (2.6)^3=17.5$$

យើងឃើញថាគ្មានចំនួនសនិទានណាដែលឫសគូបវាស្មើនឹង 17

ក្នុងករណីនេះ គេសន្មតតាង $\sqrt[3]{17}$ ជាឫសគូបនៃ 17

$\sqrt[3]{17}$ ជាចំនួនអសនិទាន

ចំពោះ $\sqrt[3]{17}$ សញ្ញា $\sqrt[3]{\ }$ ជារ៉ាឌីកាល់ដែលមានសន្ទស្សន៍ស្មើនឹង 3 ហើយ 17 ជារ៉ាឌីកង់ ។

ឧទាហរណ៍ទី៤ រក x ដែល $\sqrt[3]{17}$

ឫសគូបនៃចំនួនអវិជ្ជមានជាចំនួនអវិជ្ជមាន ហេតុនេះឫសគូបនៃ -17 គឺ $-\sqrt[3]{17}$ ។

ជាទូទៅ បើ $x^3=a$ គេបាន $x=\sqrt[3]{a}$ a អាចវិជ្ជមាន ឬ អវិជ្ជមាន

លំហាត់គំរូ រកឫសគូបនៃចំនួនខាងក្រោម ។

ក. $x^3=-64$	ខ. $x^3=-1$	គ. $x^3=1$
ឃ. $x^3=-8$	ង. $x^3=4$	ច. $x^3=0$
ឆ. $x^3=\frac{1}{8}$	ជ. $x^3=\frac{27}{125}$	ឈ. $x^3=-\frac{1}{1000}$ ។

ចម្លើយ

ក. $(-4)^3 = -64$

ដូចនេះ $x = \sqrt[3]{-64} = -4$ ។

ខ. $(-1)^3 = -1$

ដូចនេះ $x = \sqrt[3]{-1} = -1$ ។

គ. $1^3 = 1$

ដូចនេះ $x = \sqrt[3]{1} = 1$ ។

ឃ. $(-2)^3 = -8$

ដូចនេះ $x = \sqrt[3]{-8} = -2$ ។

ង. គ្មានចំនួនសនិទានណាដែលឫសគូបវាស្មើនឹង 4

ហេតុនេះ $x = \sqrt[3]{4}$ ជាឫសគូបនៃ 4 ។

ច. $0^3 = 0$

ដូចនេះ $x = 0$ ។

ឆ. $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

ដូចនេះ $x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$ ។

ជ. $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$

ដូចនេះ $x = \sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{3}{5}$ ។

ឈ. $\left(-\frac{1}{10}\right)^3 = -\frac{1}{1000}$

ដូចនេះ $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{1000}} = -\frac{1}{10}$ ។

ប្រតិបត្តិ រកឫសគូបនៃចំនួន 0.008 , -0.001 , 0.08 , -0.4 ។

៣.៣.៣. ប្រមាណវិធីលើរ៉ាឌីកាល់

ក. វិធីគុណ

ឧទាហរណ៍ទី១ គេអាចប្រៀបធៀប $\sqrt{4}\times\sqrt{9}$ និង $\sqrt{4\times 9}$ ដូចខាងក្រោម

$\sqrt{4}\times\sqrt{9} = 2\times 3 = 6$ ហើយ $\sqrt{4\times 9} = \sqrt{36} = 6$

ដូចនេះ $\sqrt{4}\times\sqrt{9} = \sqrt{4\times 9}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២ គេអាចប្រៀបធៀប $\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{27}$ និង $\sqrt[3]{8\times 27}$ ដូចខាងក្រោម

$\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{27} = 2\times 3 = 6$ ហើយ $\sqrt[3]{8\times 27} = \sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{6^3} = 6$

ដូចនេះ $\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{8\times 27}$ ។

ជាទូទៅ ផលគុណនៃរ៉ាឌីកាល់ដែលមានសន្ទស្សន៍ដូចគ្នាស្មើនឹងរ៉ាឌីកាល់នៃផលគុណ

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab} \qquad a\geq 0\ ,\ b\geq 0$$

$$\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{ab} \qquad a\ ,\ b$$ អាចវិជ្ជមានឬអវិជ្ជមាន ។

លំហាត់គំរូ គណនាផលគុណនៃរ៉ាឌីកាល់ខាងក្រោម ។

ក. $\sqrt{2}\times\sqrt{8}$ ខ. $\sqrt{3}\times\sqrt{27}$

គ. $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}$ ឃ. $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$

ង. $\sqrt{2}\times\sqrt{32}$ ច. $\sqrt{50}\times\sqrt{2}$ ។

ចម្លើយ

ក. $\sqrt{2}\times\sqrt{8}=\sqrt{2\times8}=\sqrt{16}=\sqrt{4^2}=4$

ខ. $\sqrt{3}\times\sqrt{27}=\sqrt{3\times27}=\sqrt{81}=\sqrt{9^2}=9$

គ. $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2\times4}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$

ឃ. $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{\frac{1}{16}}=\sqrt[3]{2\times\frac{1}{16}}=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{1}{2}$

ង. $\sqrt{2}\times\sqrt{32}=\sqrt{2\times32}=\sqrt{64}=\sqrt{8^2}=8$

ច. $\sqrt{50}\times\sqrt{2}=\sqrt{50\times2}=\sqrt{100}=\sqrt{10^2}=10$ ។

ប្រតិបត្តិ គណនា $\sqrt{10}\times\sqrt{0.1}$, $\sqrt[3]{10}\times\sqrt[3]{0.1}$ ។

ខ. វិធីចែករ៉ាឌីកាល់

ឧទាហរណ៍ទី១ គេអាចប្រៀបធៀប $\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{4}}$ និង $\sqrt{\frac{36}{4}}$ ដូចខាងក្រោម

$\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{6^2}}{\sqrt{2^2}}=\frac{6}{2}=3$ ហើយ $\sqrt{\frac{36}{4}}=\sqrt{9}=3$ ហេតុនេះ $\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{4}}=\sqrt{\frac{36}{4}}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២ គេអាចប្រៀបធៀប $\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}}$ និង $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$ ដូចខាងក្រោម

$\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}}=\frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{3}{2}$ ហើយ $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^3}=\frac{3}{2}$ ហេតុនេះ $\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}}=\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$ ។

ជាទូទៅ ផលចែកនៃរ៉ាឌីកាល់ដែលមានសន្ទស្សន៍ដូចគ្នាស្មើនឹងរ៉ាឌីកាល់នៃផលចែក

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}} \qquad a\geq 0\ ,\ b>0$$ ។

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{\frac{a}{b}} \qquad b\neq 0$$ ។

លំហាត់គំរូ គណនាផលចែកនៃរ៉ាឌីកាល់ខាងក្រោម ។

ក. $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ ខ. $\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{6}}$

គ. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$ ឃ. $\frac{\sqrt{288}}{\sqrt{2}}$

ង. $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$ ច. $\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{4}}$

ឆ. $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{0.1}}$ ជ. $\frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{0.2}}$ ។

ចម្លើយ

ក. $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$ ខ. $\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[3]{\frac{48}{6}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

គ. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}} = \sqrt{\frac{3}{27}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}$ ឃ. $\frac{\sqrt{288}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{288}{2}} = \sqrt{144} = \sqrt{12^2} = 12$

ង. $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$ ច. $\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{\frac{1}{2}}{4}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{2}$

ឆ. $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{0.1}} = \sqrt{\frac{10}{0.1}} = \sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10$ ជ. $\frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{0.2}} = \sqrt[3]{\frac{25}{0.2}} = \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$ ។

៣.៣.៤. ការបញ្ចេញមួយចំនួនពីរ៉ាឌីកាល់

ឧទាហរណ៍ទី១ រក x បើ $x^2 = 9$, តាមរូបមន្ត $x = \sqrt{a}$, $x = -\sqrt{a}$, 9 មានឫសការេពីរគឺ $x = \sqrt{9}$ និង $x = -\sqrt{9}$

ម្យ៉ាងទៀត $3^2 = 9$, $(-3)^2 = 9$ ដូចនេះ 3 ; -3 ក៏ជាឫសការេនៃ 9

យើងទាញបាន $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{9} = -3$

គេសំគាល់ឃើញថា $\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$ មានន័យថាគេបានបញ្ចេញ 9 ពីរ៉ាឌីកាល់។

ឧទាហរណ៍ទី២ រក x បើ $x^3 = 8$, តាម $x^3 = a$, $x = \sqrt[3]{a}$

ម្យ៉ាងទៀត $2^3 = 8$ យើងទាញបាន $\sqrt[3]{8} = 2$

គេសំគាល់ឃើញថា $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$ មានន័យថាគេបានបញ្ចេញ 8 ពីរ៉ាឌីកាល់។

> **ជាទូទៅ** ដើម្បីបញ្ចេញមួយចំនួនពីរ៉ាឌីកាល់ គេត្រូវបំប្លែងរ៉ាឌីកង់ជាស្វ័យគុណដែលមាននិទស្សន្តស្មើនឹងសន្ទស្សន៍នៃរ៉ាឌីកាល់។

ករណីរ៉ាឌីកង់ជាចំនួនអថេរ

ដោយ $\sqrt{5^2} = 5$, $\sqrt{(-5)^2} = 5$ ដូចនេះ $\sqrt{x^2} = |x|$ ជាចំនួនវិជ្ជមាន

បើ $x \ge 0$ នោះ $\sqrt{x^2} = x$ បើ $x \le 0$, $\sqrt{x^2} = -x$

ដោយ $\sqrt[3]{5^3} = 5$, $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$ ដូចនេះ $\sqrt[3]{x^3} = x$ ។

លំហាត់គំរូទី១ បញ្ចេញមួយចំនួនពីរ៉ាឌីកាល់

ក. $\sqrt{121}$ ខ. $\sqrt{\frac{4}{9}}$ គ. $\sqrt[3]{125}$

ឃ. $\sqrt{16\times 81}$ ង. $\sqrt[3]{-27}$ ច. $\sqrt[3]{\frac{2}{2000}}$ ។

ចម្លើយ

ក. $\sqrt{121} = \sqrt{11^2} = 11$ ខ. $\sqrt{\frac{4}{9}} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}$

គ. $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$ ឃ. $\sqrt{16\times 81} = \sqrt{(4\times 9)^2} = 36$

ង. $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -\sqrt[3]{3^3} = -3$ ច. $\sqrt[3]{\frac{2}{2000}} = \sqrt[3]{\frac{1}{1000}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{10}\right)^3} = \frac{1}{10}$ ។

លំហាត់គំរូទី២ បញ្ចេញចំនួន $\sqrt{32}$ និង $\sqrt[3]{16}$ ពីរ៉ាឌីកាល់។

ចម្លើយ តាមលក្ខណៈនៃវិធីគុណ $\sqrt{32} = \sqrt{16\times 2} = \sqrt{16}\times\sqrt{2} = \sqrt{4^2}\times\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8\times 2} = \sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$ ។

ប្រតិបត្តិ បញ្ចេញមួយចំនួនពីរ៉ាឌីកាល់

$\sqrt{\frac{2}{8}}$, $\sqrt[3]{\frac{81}{3}}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt[3]{81}$, $\sqrt{50}$, $\sqrt{\frac{2}{25}}$ ។

៣.៣.៥ ការបញ្ចូលមួយចំនួនក្នុងរ៉ាឌីកាល់

ការបញ្ចូលមួយចំនួនទៅក្នុងរ៉ាឌីកាល់ ជាវិធីច្រាសនៃការបញ្ចេញមួយចំនួនពីរ៉ាឌដីកាល់។

ឧទាហរណ៍ទី១ គេមាន $4\sqrt{2}$ បញ្ចូល 4 ទៅក្នុងរ៉ាឌីកាល់

$4\sqrt{2} = \sqrt{4^2}\times\sqrt{2} = \sqrt{16\times 2} = \sqrt{32}$, $\left(4 = \sqrt{4^2}\right)$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២ គេមាន $3\sqrt[3]{2}$ បញ្ចូល 3 ទៅក្នុងរ៉ាឌីកាល់

$3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^3}\times\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{27\times 2} = \sqrt[3]{54}$, $\left(3 = \sqrt[3]{3^3}\right)$ ។

ជាទូទៅ ដើម្បីបញ្ចូលមួយចំនួនទៅក្នុងរ៉ាឌីកាល់ គេត្រូវលើកចំនួននោះជាស្វ័យគុណដោយឱ្យនិទស្សន្តនៃស្វ័យគុណស្មើនឹងសន្ទស្សន៍នៃរ៉ាឌីកាល់។

លំហាត់គំរូ បញ្ចូលមួយចំនួនក្នុងរ៉ាឌីកាល់

ក. $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{12}{5}}$ ខ. $5\sqrt{\frac{3}{50}}$ គ. $-7\sqrt{5}$

ឃ. $-5\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$ ង. $2\sqrt[3]{\frac{5}{12}}$ ច. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$ ។

ចម្លើយ

ក. $\frac{2}{3}=\sqrt{\frac{4}{9}}$ ដូចនេះ $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{12}{5}}=\sqrt{\frac{4}{9}}\times\sqrt{\frac{12}{5}}=\sqrt{\frac{4\times12}{9\times5}}=\sqrt{\frac{4\times4}{3\times5}}=\sqrt{\frac{16}{15}}$

ខ. $5=\sqrt{25}$ ដូចនេះ $5\sqrt{\frac{3}{50}}=\sqrt{25}\times\sqrt{\frac{3}{50}}=\sqrt{\frac{25\times3}{50}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$

គ. $7=\sqrt{49}$ ដូចនេះ $-7\sqrt{5}=-\sqrt{49}\times\sqrt{5}=-\sqrt{49\times5}=-\sqrt{245}$

ឃ. $5=\sqrt[3]{5^3}$ ដូចនេះ $-5\sqrt[3]{\frac{4}{25}}=-\sqrt[3]{5^3}\times\sqrt[3]{\frac{4}{25}}=-\sqrt[3]{\frac{4\times5^3}{25}}=-\sqrt[3]{20}$

ង. $2=\sqrt[3]{2^3}$ ដូចនេះ $2\sqrt[3]{\frac{5}{12}}=\sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[3]{\frac{5}{12}}=\sqrt[3]{\frac{2^3\times5}{12}}=\sqrt[3]{\frac{10}{3}}$

ច. $\frac{1}{2}=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ ដូចនេះ $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}\times\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{\frac{4}{8}}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ ។

ប្រតិបត្តិ បញ្ចូលមួយចំនួនក្នុងរ៉ាឌីកាល់

$\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$, $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, $5\sqrt[3]{\frac{2}{25}}$, $\frac{2}{11}\sqrt[3]{\frac{121}{7}}$ ។

៣.៣.៦. វិធីបូក-ដកនៃរ៉ាឌីកាល់

ដូចគ្នានឹងវិធីបូកនិងដកលើឯកធាដែរ $3x+4x=(3+4)x=7x$

ឧទាហរណ៍ទី១

$2\sqrt{3}+6\sqrt{3}=(2+6)\sqrt{3}=8\sqrt{3}$

$7\sqrt{6}-5\sqrt{6}=(7-5)\sqrt{6}=2\sqrt{6}$

$\sqrt[3]{7}+4\sqrt[3]{7}=(1+4)\sqrt[3]{7}=5\sqrt[3]{7}$

$12\sqrt[3]{5}-7\sqrt[3]{5}=(12-7)\sqrt[3]{5}=5\sqrt[3]{5}$

សំគាល់ $\sqrt{3}+\sqrt{7}$ មានរ៉ាឌីកាល់ខុសគ្នាមិនអាចបូកបានទេ។

ក្នុងករណីមានរ៉ាឌីកង់ខុសគ្នា គេបំប្លែងឱ្យមានរ៉ាឌីកង់ដដូចគ្នាសិន។

ឧទាហរណ៍ទី២

$$3\sqrt{2}+\sqrt{8}=3\sqrt{2}+2\sqrt{2}=(3+2)\sqrt{2}=5\sqrt{2}$$

$$5\sqrt{12}-\sqrt{27}=5\sqrt{4\times 3}-\sqrt{9\times 3}$$
$$=10\sqrt{3}-3\sqrt{3}=(10-3)\sqrt{3}=7\sqrt{3}$$

$$3\sqrt[3]{16}+5\sqrt[3]{2}=3\sqrt[3]{8\times 2}+5\sqrt[3]{2}$$
$$=6\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{2}=(6+5)\sqrt[3]{2}=11\sqrt[3]{2}$$

ជាទូទៅ ដើម្បីគណនាផលបូកនិងផលដករ៉ាឌីកាល់ដែលមានសន្ទស្សន៍ដូចគ្នា គេត្រូវបំប្លែងរ៉ាឌីកង់ដូចគ្នា។ដើម្បីគណនាផលបូកនិងផលដករ៉ាឌីកាល់ដែលមានរ៉ាឌីកង់ដូចគ្នា និងមានសន្ទស្សន៍ដូចគ្នា គេបូក-ដកមេគុណនឹងមេគុណ ហើយរ៉ាឌីកាល់ទុកដដែល។

លំហាត់គំរូទី១ គណនា

$A=3\sqrt{11}+5\sqrt{44}-3\sqrt{99}$, $B=3\sqrt{18}-\sqrt{12}+\sqrt{75}+\sqrt{2}$

$C=3\sqrt[3]{24}+6\sqrt[3]{81}$, $D=6\sqrt[3]{8x^2}-2\sqrt[3]{27x^2}$

$E=\sqrt{20}+\sqrt{80}-\sqrt{45}$, $F=14\sqrt{3}+6\sqrt{2}-11\sqrt{3}$

ចម្លើយ

$$A=3\sqrt{11}+5\sqrt{4\times 11}-3\sqrt{9\times 11}=3\sqrt{11}+10\sqrt{11}-9\sqrt{11}=4\sqrt{11}$$

$$B=3\sqrt{9\times 2}-\sqrt{4\times 3}+\sqrt{25\times 3}+\sqrt{2}$$
$$=9\sqrt{2}-2\sqrt{3}+5\sqrt{3}+\sqrt{2}=10\sqrt{2}+3\sqrt{3}$$

$$C=3\sqrt[3]{8\times 3}+6\sqrt[3]{27\times 3}=6\sqrt[3]{3}+18\sqrt[3]{3}=24\sqrt[3]{3}$$

$$D=12\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt[3]{x^2}=6\sqrt[3]{x^2}$$

$$E=\sqrt{4\times 5}+\sqrt{16\times 5}-\sqrt{9\times 5}=2\sqrt{5}+4\sqrt{5}-3\sqrt{5}=3\sqrt{5}$$

$$F=3\sqrt{3}+6\sqrt{2}$$

លំហាត់គំរូទី២ សម្រួល

$A=\sqrt{128y}-\sqrt{2y}\ (y>0)$, $B=5\sqrt{18x}+2\sqrt{8x}\ (x>0)$

$C=\sqrt{8n+8}+\sqrt{2n+2}\ (n>0)$, $D=\sqrt{200k^2}-\sqrt{98k^2}\ (k>0)$

$E=\sqrt{8x^2}+\sqrt{2x^2}\ (x>0)$, $F=2\sqrt{45x^3}-\sqrt{20x^3}\ (x>0)$

ចម្លើយ

$$A=\sqrt{128y}-\sqrt{2y}=\sqrt{64\times 2y}-\sqrt{2y}=8\sqrt{2y}-\sqrt{2y}=7\sqrt{2y}$$
$$B=5\sqrt{18x}+2\sqrt{8x}=5\sqrt{9\times 2x}+2\sqrt{4\times 2x}=15\sqrt{2x}+4\sqrt{2x}=19\sqrt{2x}$$
$$C=\sqrt{8n+8}+\sqrt{2n+2}=\sqrt{4(2n+2)}+\sqrt{2n+2}=2\sqrt{2n+2}+\sqrt{2n+2}=3\sqrt{2n+2}$$
$$D=\sqrt{200k^2}-\sqrt{98k^2}=\sqrt{2\times 100k^2}-\sqrt{2\times 49k^2}=10k\sqrt{2}-7k\sqrt{2}=3k\sqrt{2}$$
$$E=\sqrt{8x^2}+\sqrt{2x^2}=\sqrt{8x^2}+\sqrt{2x^2}=\sqrt{2\times 4x^2}+\sqrt{2x^2}=2x\sqrt{2}+x\sqrt{2}=3x\sqrt{2}$$
$$F=2\sqrt{45x^3}-\sqrt{20x^3}=2\sqrt{5\times 9x^3}-\sqrt{5\times 4x^3}=6x\sqrt{5x}-2x\sqrt{5x}=4x\sqrt{5x}$$

ប្រតិបត្តិ សម្រួល

$5\sqrt{50}-8\sqrt{32}$, $\sqrt{48x}-\sqrt{27x}$, $\sqrt{5P}+3\sqrt{45P^3}$ $(P>0)$

$\sqrt{12x+12}+\sqrt{27x+27}$, $\sqrt{72a}-3\sqrt{98a}$

៣.៣.៧ វិធីបំបាត់រ៉ាឌីកាល់ពីភាគបែង

ជាទូទៅគេមិនទុកឱ្យចំនួនដែលមានរ៉ាឌីកាល់នៅភាគបែងទេ។ ខាងក្រោមនេះជាវិធីបំបាត់រ៉ាឌីកាលពីភាគបែង។

ឧទាហរណ៍ទី១ $\frac{3}{\sqrt{2}}$ ជាចំនួនដែលមានរ៉ាឌីកាល់នៅភាគបែងជាហេតុធ្វើឱ្យពិបាកស្គាល់មេគុណរបស់វា។

ក្នុងករណីនេះគេអាចសរសេរ $\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ធ្វើយ៉ាងណានេះទើបស្គាល់ $\frac{3}{2}$ ជាមេគុណរបស់វា។

ដូចគ្នានេះដែរ ចំពោះចំនួន $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4}}$

$$\frac{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{8}}=\frac{\sqrt[3]{6}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{6}$$

ក្នុងករណីដែលភាគបែងមានរ៉ាឌីកាល់ពីរតួ គេត្រូវគុណនឹងកន្សោមឆ្លាស់។

ឧទាហរណ៍ទី២ បំបាត់រ៉ាឌីកាល់ពីភាគបែងនៃ $\frac{2}{\sqrt{7}-2}$

កន្សោមឆ្លាស់នៃ $\sqrt{7}-2$ គឺ $\sqrt{7}+2$ ដោយប្រើ $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

ដូចនេះ $\frac{2}{\sqrt{7}-2}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{7}+2\right)}{\left(\sqrt{7}-2\right)\left(\sqrt{7}+2\right)}=\frac{2\left(\sqrt{7}+2\right)}{7-4}=\frac{2\left(\sqrt{7}+2\right)}{3}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៣ បំបាត់រ៉ាឌីកាល់ពីភាគបែងនៃ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{10}-2}{5-2}=\frac{\sqrt{10}-2}{3}\text{ ។}$$

លំហាត់គំរូទី១ សម្រួល

$$A=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \quad , \quad B=\frac{1+\sqrt{2}}{3-\sqrt{3}}$$

$$C=\frac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{5}} \quad , \quad D=\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{20}-\sqrt{18}}$$

$$E=\frac{2}{\sqrt[3]{7}} \quad , \quad F=\frac{3}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}$$

ចម្លើយ

$$A=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}{3-2}$$

$$=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=3+2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+2=5+2\sqrt{6}$$

$$B=\frac{1+\sqrt{2}}{3-\sqrt{3}}=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)}{\left(3-\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)}=\frac{3+\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{9-3}=\frac{3+\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6}$$

$$C=\frac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{5}}=\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)}{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)}=\frac{2-\sqrt{5}+2\sqrt{3}-\sqrt{15}}{4-5}=-2+\sqrt{5}-2\sqrt{3}+\sqrt{15}$$

$$D=\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{20}-\sqrt{18}}=\frac{8\sqrt{2}\left(\sqrt{20}+\sqrt{18}\right)}{\left(\sqrt{20}-\sqrt{18}\right)\left(\sqrt{20}+\sqrt{18}\right)}=\frac{8\sqrt{40}+8\sqrt{36}}{20-18}$$

$$=\frac{16\sqrt{10}+48}{2}=8\sqrt{10}+24$$

$$E=\frac{2}{\sqrt[3]{7}}=\frac{2\left(\sqrt[3]{7}\right)^2}{\sqrt[3]{7}\left(\sqrt[3]{7}\right)^2}=\frac{2\sqrt[3]{49}}{7}$$

ចំពោះ $F=\dfrac{3}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}$ ប្រើរូបមន $(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3+b^3$

$$\frac{3}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}=\frac{3\left[\left(\sqrt[3]{5}\right)^2+\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{2}+\left(\sqrt[3]{2}\right)^2\right]}{\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}\right)\left[\left(\sqrt[3]{5}\right)^2+\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{2}+\left(\sqrt[3]{2}\right)^2\right]}$$

$$=\frac{3\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right)}{5-2}=\frac{3\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right)}{3}=\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}$$

ប្រតិបត្តិ សម្រួល

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \quad , \quad \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{\sqrt{12}-\sqrt{18}} \quad , \quad \frac{3}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}} \quad , \quad \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}$$ ។

លំហាត់អនុវត្ត

1. បញ្ជាក់តម្លៃនៃចំនួនពិត x ដោយប្រើសញ្ញាវិសមភាគដោយដឹងថា x ជាចំនួនដែលមានផ្នែកគត់មានលេខពីរខ្ទង់ កាលណាគេសរសេរវាជាចំនួនទសភាគ ។

2. គណនាកន្សោម $\sqrt{48}-\dfrac{\sqrt{27}}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{12}}$ ។

3. រកតម្លៃនៃកន្សោមខាងក្រោម ចំពោះ $x=\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ និង $y=\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

   ក. $x+y$ ខ. xy គ. x^2y+xy^2 ឃ. $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$ ។

4. ក. សម្រួលកន្សោម $\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$ ។

   ខ. បំបាត់រ៉ាឌីកាល់ពីភាគបែង $\dfrac{1}{\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}$ ដោយប្រើលទ្ធផលនៃសំនួរ ក. ។

5. ចូរបំបាត់រ៉ាឌីកាល់ពីភាគបែង

   ក. $\dfrac{5}{3-\sqrt{12}}$ ខ. $\dfrac{3}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ គ. $\dfrac{3}{\sqrt{3-6x}}$

6. ចូរសម្រួលរ៉ាឌីកាល់

   ក. $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$ ខ. $\dfrac{1}{\sqrt{7-\sqrt{24}}}$ គ. $-\dfrac{2}{\sqrt{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}}$

   ឃ. $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ ង. $\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{4+\sqrt{12}}}$ ច. $\dfrac{4}{\sqrt{6+2\sqrt{8}}}$

7. ចូរគណនាកន្សោមខាងក្រោម

   ក. $\sqrt{125}-\sqrt{\dfrac{8}{9}}-2\sqrt{\dfrac{5}{4}}+\sqrt{18}$ ខ. $\sqrt{48}-\dfrac{\sqrt{27}}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{12}}$

   គ. $\dfrac{\sqrt{\dfrac{5}{4}}-\sqrt{\dfrac{1}{4}}}{\dfrac{5}{3+\sqrt{5}}}$ ឃ. $\left(7\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)\left(5\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)$

8. គណនាតម្លៃកន្សោមចំពោះ $A=\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ និង $B=\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

   ក. $A+B$ ខ. AB គ. A^2B+AB^2 ឃ. $\dfrac{A}{B}+\dfrac{B}{A}$

មេរៀនទី៤ រង្វាស់រង្វាល់

៤.១. រង្វាស់ប្រវែង ម៉ាស ចំណុះ ពេលវេលា

៤.១.១. រង្វាស់ប្រវែង

ឧទាហរណ៍១ *ឯកតាសំខាន់នៃរង្វាស់ប្រវែងគឺ ម៉ែត្រ (m)។ បើប្រវែងមួយមិនស្មើនឹងចំនួនគត់* នៃម៉ែត្រ គេប្រើ ឯកតាបន្ទាប់ដែលមាន

ក. ឯកតាតូចបន្ទាប់មាន

- ដេស៊ីម៉ែត្រ $(1dm)=0.1m$
- សង់ទីម៉ែត្រ $(1cm)=0.01m$
- មីលីម៉ែត្រ $(1mn)=0.001m$

ខ. ឯកតាធំបន្ទាប់មាន

- ដេកាម៉ែត្រ $(1dam)=10m$
- ហិចតូម៉ែត្រ $(1hm)=100m$
- គីឡូម៉ែត្រ $(1km)=1000m$

ឧទាហរណ៍២ ដើម្បីវាស់ប្រវែងពីទីក្រុងមួយទៅទីក្រុងមួយទៀត គេប្រើខ្នាតគីឡូម៉ែត្រ ។ ចំនួនគីឡូម៉ែត្រពីកន្លែងមួយទៅកន្លែងមួយ គេសរសេរនៅលើបង្គោលគីឡូម៉ែត្រនៅតាមដងផ្លូវជាតិធំៗ ។ ឧទាហរណ៍ បង្គោលគីឡូម៉ែត្រមួយតាំងនៅតាមដងផ្លូវជាតិលេខ 2 មានចម្ងាយ $60km$ ពីទីក្រុងភ្នំពេញមកទល់ទីតាំងបង្គោល ហើយនៅសល់ $16km$ ទៀតពីបង្គោលទៅដល់ទីរួមខេត្តតាកែវ ។ តើភ្នំពេញទៅតាកែវមានមានចម្ងាយប៉ុន្មានគីឡូម៉ែត្រ ?

សម្គាល់	• ដើម្បីប្តូរឯកតាមួយទៅឯកតាតូចបន្ទាប់រៀងគ្នា គេត្រូវរំកិលចំណុចក្បៀសទៅខាងស្តាំ ម្តងមួយខ្ទង់ៗ ។ • ដើម្បីប្តូរឯកតាមួយទៅឯកតាធំបន្ទាប់រៀងគ្នា គេត្រូវរំកិលចំណុចក្បៀសទៅខាងឆ្វេង ម្តងមួយខ្ទង់ៗ ។

នេះជាតារាងបញ្ជាក់ពីរបៀបបំបែក $503.16km$

km	*hm*	*dam*	*m*	*dm*	*cm*	*mm*
0	5	0	3	1	6	0

លំហាត់គំរូ សុខានិងចាន់ធីធ្វើដំណើរពីភ្នំពេញទៅលេងខេត្តសៀមរាប នៅពេលឈប់សម្រាកអ្នកទាំងពីរឃើញនៅលើបង្គោលគីឡូម៉ែត្រសរសេរថា (សៀមរាប 105 ជ 6) ។ តើអ្នកទាំងពីរធ្វើដំណើរបានចម្ងាយផ្លូវប៉ុន្មាន km ?

ចម្លើយ បង្គោលគីឡូម៉ែត្រសរសេរថា (សៀមរាប 105 ជ 6) មានន័យថាពីកន្លែងឈប់ទៅនិងទីរួមខេត្តសៀមរាបចម្ងាយផ្លូវ $105km$ ដោយចម្ងាយផ្លូវពីភ្នំពេញទៅសៀមរាបមានចម្ងាយ $314km$ ។

ដូចនេះ ចម្ងាយផ្លូវដែលសុខា និងចាន់ធីធ្វើដំណើរពីភ្នំពេញទៅដល់កន្លែងឈប់គឺ

$314km - 105km = 209km$

ប្រតិបត្តិ គេវាស់ចម្ងាយពីភូមិ A ទៅភូមិ B ដោយប្រើខ្នាតដេកាម៉ែត្រមានប្រវែង $9.8m$ ។ រួចគេវាស់ចម្ងាយដដែលដោយប្រើខ្នាតដេកាម៉ែត្រដែលមានប្រវែង $10.10m$ ។ គេឃើញថារង្វាស់ទាំងពីរខុសគ្នា $1dam$ ។ រកចម្ងាយពិតប្រាកដរវាងពីភូមិ A ទៅភូមិ B ។

៤.១.២. ម៉ាស

ឧទាហរណ៍១ បើគេលើថ្មមួយដុំ នោះត្រូវការប្រើកម្លាំង តែបើគេលេងដៃនោះដុំថ្មនឹងធ្លាក់មកដីវិញ។ នេះបង្ហាញមានកម្លាំងអ្វីមួយដែលទាញដុំថ្មនោះឆ្ពោះទៅរកដី ។

ដូចនេះ គេសន្និដ្ឋានថា ទម្ងន់វត្ថុមួយជាកម្លាំងទំនាញផែនដីនៃវត្ថុនោះ ។

ឧទាហរណ៍២ បើគេចងព្យួរវត្ថុពីរ A និង B ម្តងមួយៗទៅនឹងរ៉ឺស័រមួយ។ បើវត្ថុ A ពន្លារ៉ឺស័របានវែងជាងវត្ថុ B នេះគេថាម៉ាស A ធំជាងម៉ាស B។ បើ A និង B ពន្លារ៉ឺស័របានប្រវែងស្មើគ្នានោះម៉ាស A ស្មើនឹងម៉ាស B។

ដូចនេះ គេថា ម៉ាសជាទំហំប្រដូចគ្នាបាន ឬទំហំប្រមាណបាន ។

ចំណាំ ឯកតាសំខាន់ៗនៃម៉ាសគឺ គីឡូក្រាម (kg)។

គីឡូក្រាម	(1kg)=1000 g	ហិចតូក្រាម	(1hg)=100 g
ដេកាក្រាម	(1dag)=10 g	ក្រាម	(g)
ដេស៊ីក្រាម	(1dg)=0.1 g	សង់ទីក្រាម	(1cg)=0.01 g
មីលីក្រាម	(1mg)=0.001 g		

សម្គាល់ រង្វាស់ខ្នាតបុរាណខ្មែរមាន :

- មួយហាប = 60 kg
- មួយចុង ស្មើកន្លះហាប = 30 kg
- មួយថាំង ស្មើនឹងពីរតៅ (មួយតៅស្មើនឹង 15 kg)
- មួយនាឡិ ស្មើនឹង 16 តម្លឹង = 600 g
- មួយតម្លឹងស្មើនឹង 10 ជី = 37.5 g
- មួយជីស្មើនឹង 10 ហ៊ុន = 3.75 g
- មួយហ៊ុនស្មើនឹង 10 លី = 0.375 g ។

លំហាត់គំរូ១ កសិករធ្វើស្រែ 8 ហិចតា បានទិន្នផល 200 ហាប 5 ចុងក្នុងមួយហិចតា ។ គណនាទិន្នផលស្រូវជាគីឡូក្រាម និងតោន ។

ចម្លើយ ទិន្នផលស្រូវជាគីឡូក្រាម និងតោន

$8(200 \times 60\ kg + 5 \times 30\ kg) = 97200\ kg = 97.2\ t$ ។

ប្រតិបត្តិ គេថ្លឹងជំឡូងជ្វាមួយបាវដោយជញ្ជីងប៉ុង ។ គេប្រើកូនជញ្ជីង 2 kg , 5 hg , 2 hg , 2 dag , 1 dag ។ រកម៉ាសជំឡូងជ្វា បើសំបកបាវមានម៉ាស 1.5 kg ហើយគេថ្លឹងដោយជញ្ជីងប៉ុង ដោយដាក់លើថាសមួយនូវកូនជញ្ជីងដែលមានម៉ាសស្មើនិង $\frac{1}{10}$ នៃម៉ាសវត្ថុថ្លឹង ។

៤.១.៣ ចំណុះ

ឧទាហរណ៍១ រូបធាតុដូចជាទឹក ប្រេង ឧស្ម័ន .... គ្មានរាងជាក់លាក់ទេ វាមានរាងអាស្រ័យលើវត្ថុផ្ទុកវា ។

ដូចនេះ ចំណុះជាទំហំប្រមាណបានព្រោះវាមានមាឌ ។

ឧទាហរណ៍២ គេអាចវាស់ចំណុះដោយប្រើ ឯកតាមមាឌ ដូចជាអាងទឹកមួយមានចំណុះ $3dm^3$ ដបមួយមានចំណុះ $1dm^3$ ។ ឯកតាមាឌធំតូចជាងគ្នា 1000 ដង តែឯកតាចំណុះវិញធំតូចជាងគ្នា10 ដង

ចំណាំ ឯកតាសំខាន់ៗ នៃរង្វាស់ចំណុះ គឺ (l) ហើយ$1l$ មានចំណុះស្មើនឹង $1dm^3$ ។

-ហិចតូលីត$(hl): 1hl = 100l$ -ដេកាលីត$(dal): 1dal = 10l$

-លីត(l) -ដេស៊ីលីត$(dl): 1dl = 0.1l$

-សង់ទីលីត$(cl): 1cl = 0.01l$ -មីលីលីត$(ml): 1ml = 0.001$

សម្គាល់

- ដើម្បីផ្លាសប្តូរឯកតា គេធ្វើដូចឯកតារង្វាស់ប្រវែងដែរ
  - គេត្រូវរំកិលចំណុចទៅខាងស្តាំម្តងមួយខ្ទង់ កាលណាគេប្តូរទៅឯកតាតូចបន្ទាប់ ។
  - គេត្រូវរំកិលចំណុចទៅខាងឆ្វេងម្តងមួយខ្ទង់ កាលណាគេប្តូរទៅឯកតាធំបន្ទាប់ ។
- ដើម្បីប្តូរឯកតាចំណុះទៅឯកតាមាឌ ឬឯកតាមាឌទៅឯកតាចំណុះ គេសរសេរមាឌ ជា dm^3 ចំនួននេះប្រាប់ចំណុះជាលីត ព្រោះ $1dm^3 = 1l$
- ចំណុះតិចដូចជា ទឹកក្រូច ទឹកអប់ ប្រេង គេដាក់ក្នុងដបដែលមានកម្រិតស្រាប់ $20cl, 75cl, 100cl.....$
- ចំណុះច្រើនដូចជា ប្រេងកាត សាំង ម៉ាស៊ូត គេវាស់ជាលីត ។

លំហាត់គំរូ១ បំបែក $72.83dm^3$ ជា dm^3 និងជា dl ។

ចម្លើយ $72.83m^3 = 72830dm^3 = 72830l = 72830dl$

លំហាត់គំរូ២ បំបែក $357.65dl$ ជា l, dm^3, cm^3 ។

ចម្លើយ $357.65dl = 35.765l = 35.765dm^3 = 35765cm^3$

ប្រតិបត្តិ ឪពុកផល្លីទិញប្រេងម៉ាស៊ូត 8 ធុង មានចំណុះ 255L ក្នុងមួយធុងៗ ហើយថ្លៃ 15000៛ ក្នុងមួយហិចតូលីត ។ គាត់បញ្ចូលប្រេងទាំងអស់ទៅក្នុងដបដែលមានចំណុះ 75cl ។

ក. គេដឹងថាក្នុងធុងនីមួយៗមានកករ 3L ប្រើការមិនបាន ។ តើគាត់ច្រកប្រេងម៉ាស៊ូតបានប៉ុន្មានដប?

ខ. បើថ្លៃឈ្នួលច្រកដបអស់ 2600៛ ។ តើថ្លៃដើមប្រេងម៉ាស៊ូតមួយដបប៉ុន្មាន ?

គ. ដើម្បីចំណេញបាន 12% ។ តើត្រូវលក់ប្រេងម៉ាស៊ូតថ្លៃប៉ុន្មានក្នុងមួយដប ?

៤.១.៤ ពេលវេលា

ក. សញ្ញាណរយៈពេល

ឧទាហរណ៍១ ធីតាបើកក្បាលរ៉ូប៊ីណេបង្ហូរទឹកដាក់ពាងមួយ។ បើរយៈពេលទឹកហូរបំពេញពាងស្មើនិងរយៈពេលដែលធីតាធ្វើលំហាត់រួច នេះគេថារយៈពេលទាំងពីរស្មើគ្នា ។

ឧទាហរណ៍២ បើគេដាំទឹកមួយកំសៀវពុះដំណាលគ្នានិងរយៈពេលធ្វើកិច្ចការមួយ រួចបន្តធ្វើកិច្ចការមួយទៀតចប់សព្វគ្រប់ នោះគេថារយៈពេលនៃការដាំទឹកមួយកំសៀវពុះជាផលបូកនៃរយៈពេលធ្វើកិច្ចការទាំងពីរ ។

ខ. ឯកតាពេល

ឧទាហរណ៍ ថ្ងៃសុរិយគតិទាំងអស់ស្មើគ្នាទេ រយៈពេលវាមានការកែប្រែទៅតាមរដូវ ។ ដោយយកមធ្យមភាគថ្ងៃទាំងអស់នេះ គេបានថ្ងៃសុរិយគតិមធ្យមដែលស្មើនិង 86400 វិនាទី ។

ចំណាំ ឯកតាសំខាន់ៗនៃរយៈពេលគឺ វិនាទី (s)

- 1 វិនាទី (s)
- 1 នាទី (mn) = 60s
- 1 ម៉ោង (h) = 60mn = 3600 s
- 1 ថ្ងៃ (j) = 24h = 86 400 s

គ. ប្រមាណវិធីលើរង្វាស់វេលា

ឧទាហរណ៍១ សៅចាប់ផ្តើមធ្វើលំហាត់នៅម៉ោង 8h16mn12s គាត់ធ្វើលំហាត់ចប់នៅម៉ោង 9h20mn32s ។ រករយៈពេលដែលធ្វើចប់ ។

$$\begin{array}{r} 9h \quad 20mn \quad 32s \\ - \; 8d \quad 16mn \quad 12s \\ \hline 1h \quad 04mn \quad 20s \end{array}$$

រយៈពេលដែលធ្វើលំហាត់គឺ 1h04mn20s ។

ឧទាហរណ៍២ ប្តូរ $2j\ 3h\ 27mn\ 15s$ ជាវិនាទី

$2j = 86400\times 2 = 172800s$

$3h = 3600\times 3 = 10800s$

$27mn = 60\times 1620s$

$15s$

$2j\ 3h\ 27mn\ 15s = 185235s$

លំហាត់គំរូ សុខាធ្វើដំណើរអស់រយៈពេល 259 248s ។ រករយៈពេលដែលសុខាធ្វើដំណើរគិតជាថ្ងៃ ម៉ោង នាទី និងវិនាទី ។

ចម្លើយ រយៈពេលគិតជាថ្ងៃ ម៉ោង នាទី និងវិនាទី

$259248s$	60		
192	$4320mn$	60	
124	120	$72h$	24
048	$00mn$	$00h$	$3j$

ដូចនេះ រយៈពេលដែលសុខាធ្វើដំណើរគឺ 3j00h00mn48s។

ប្រតិបត្តិ នាឡិការបស់ចាន់ធីដើរលឿន1mn35s ក្នុងមួយថ្ងៃ ឯនាឡិការបស់ស៊ីណាដើរយឺត 2mn10s ក្នុងមួយថ្ងៃ ។ នាឡិកាទាំងពីនេះបានផ្ទៀងឲ្យត្រូវនៅម៉ោង 20 ថ្ងៃចន្ទ ។

ក. រំលងច្រើនថ្ងៃក្រោយមកស៊ីណាឃើញនាឡិការបស់គាត់ដើរយឺត 17mn30s ជាងនាឡិការបស់ចាន់ធី ។ តើថ្ងៃនេះជាថ្ងៃអ្វី ?

ខ. តើម៉ោងពិត្យត្រូវនិងម៉ោងប៉ុន្មាន ?

៤.២. ផ្ទៃក្រឡានិងមាឌ

ខ្នាតនៃរង្វាស់ប្រវែងដែលគេនិយមប្រើគឺ mm , cm , dm , m , dam , hm , km ។ ក្នុងជីវភាពរស់នៅសម្ភារៈប្រើប្រាស់ដែលមានវិមាត្រតូចៗដូចជា

- មុខកាត់ខ្សែភ្លើងរាងស៊ីឡាំង ដែលមានអង្កត់ផ្ចិតស្មើនិង 1mm , 2mm ,… ។
- មុខកាត់នៃសសៃដែកសម្រាប់សាងសង់ដែលមានអង្កត់ផ្ចិតស្មើនឹង 6mm , 8mm , 10mm…

ប៉ុន្តែក្នុងការគណនាផ្ទៃក្រឡានិងមាឌ គេគិតជា m^2 និងជា m^3 វិញ។

ក្នុងករណីនេះគេអាចសរសេរ

$$1mm = 0.001m = 10^{-3}m$$
$$1cm = 0.01m = 10^{-2}m$$
$$1dm = 0.1m = 10^{-1}m$$

លំហាត់គំរូទី១ ខ្សែភ្លើងមានរាងស៊ីឡាំងដែលមានអង្កត់ផ្ចិតស្មើនឹង 2mm ។ គណនាផ្ទៃក្រឡាមុខកាត់វាគិតជា $m^2 \left(\pi = 3.14\right)$

ចម្លើយ ផ្ទៃក្រឡាមុខកាត់ខ្សែភ្លើង

$$S = \pi \times \frac{d^2}{4}$$

$$d = 2mm = 2 \times 10^{-3} m$$

$$S = 3.14 \times \frac{4 \times 10^{-6}}{4}$$

$$S = 314 \times 10^{-8} m^2$$

ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡាមុខកាត់ខ្សែភ្លើង $S = 314 \times 10^{-8} m^2$

ប្រតិបត្តិ គណនាមាឌខ្សែភ្លើងដែលមានអង្កត់ផ្ចិត 2cm ហើយមានប្រវែង 200m ។

៤.៣. ម៉ាសធៀបនឹងផ្ទៃក្រឡា

ចំពោះម៉ាសនៃវត្ថុស្រាលៗគេតែងធៀបម៉ាសវាទៅនឹងផ្ទៃក្រឡា ។

ឧទាហរណ៍ ចំពោះម៉ាសក្រដាសរាមបើគេចង់ដឹងកម្រាសវាមានន័យថា គេចង់ដឹងកម្រាសនោះមានម៉ាសប៉ុន្មានក្នុងផ្ទៃក្រឡា $1m^2$? ប្រភេទក្រដាសដែលយើងប្រើសព្វថ្ងៃមានកម្រាសច្រើនប្រភេទ ។

ចំពោះសៀវភៅក្រាសគេប្រើក្រដាសប្រភេទ $50g/m^2$ មានន័យថាក្នុង $1m^2$ ក្រដាសមានម៉ាស $50g$ ។

ចំពោះសៀវភៅស្តើងគេច្រើនប្រើក្រដាស $80g/m^2$

ចំពោះក្របសៀវភៅគេច្រើនប្រើក្រដាស $200g/m^2$

លំហាត់គំរូ ក្រដាសមួយរ៉ាមចំនួន 500 សន្លឹក ជាក្រដាសដែលមានខ្នាត 210mm×297mmនិងម៉ាសធៀបនឹងផ្ទៃក្រឡា $80g/m^2$ ។ ចូរគណនាម៉ាសក្រដាសនោះ ។

ចម្លើយ គណនាម៉ាសក្រដាស

ផ្ទៃក្រឡាគិតជា m^2 និងម៉ាសធៀបនឹងផ្ទៃក្រឡា kg/m^2

$m = S \times d$

$S = 210mm \times 297mm = 62370mm^2 = 62370 \times 10^{-6} m^2$

$d = 80g / m^2 = 80 \times 10^{-3} kg / m^2$

$m = 62370 \times 10^{-6} m^2 \times 80 \times 10^{-3} kg / m^2$

$m = 49896 \times 10^{-7} kg$

ក្រដាសមួយរ៉ាម $500 \times 49896 \times 10^{-7} kg = 2.4948kg \approx 2.5kg$

ដូចនេះ ក្រដាសមួយរ៉ាមមានម៉ាស $m \approx 2.5kg$ ។

ប្រតិបត្តិ សិប្បកម្មខ្នាតតូចមួយបានទិញក្រដាសខ្នាតធំដែលមានម៉ាសធៀបនឹងផ្ទៃក្រឡា $80g / m^2$ ដើម្បីមកកាត់ជាក្រដាសរ៉ាមខ្នាត $210mm \times 297mm$ នៅពេលកាត់គេត្រូវខាតអស់ចំនៀរ 4% ។ ដើម្បីបានក្រដាស 95340រ៉ាម តើគេត្រូវប្រើក្រដាសអស់ប៉ុន្មាន kg ?

៤.៤. ល្បឿនមធ្យម

យើងធ្លាប់បានស្គាល់ល្បឿនមធ្យមនៃមធ្យោបាយធ្វើដំណើរមួយចំនួនរួចមកហើយដូចជា

- ល្បឿនម៉ូតូ 40km/h
- ល្បឿនរថយន្ត 80km/h
- ល្បឿនយន្តហោះ 800km/h ។

ល្បឿនដែលបានរៀបរាប់ខាងលើគិតជា km/h ។ ក៏ប៉ុន្តែនៅក្នុងរូបវិទ្យាគេប្រើឯកតាល្បឿនជា m/sវិញដូចជា

- ល្បឿនសម្លេង 343m/s
- ល្បឿនខ្យល់បក់ខ្លាំង 100m/s
- ល្បឿនខ្យល់បក់មធ្យម 6m/s ។

ដោយខ្យល់មានល្បឿនដូច្នេះហើយទើបគេ អាចយកវាមកប្រលបក់កង្ហារឌីណាម៉ូ ដើម្បីបម្លែងជាថាមពលអគ្គិសនីសម្រាប់ប្រើប្រាស់ ។

ឧទាហរណ៍ទី១ ទោចក្រយានយន្តមួយរត់បាន 180km ក្នុងរយៈពេល 2h 15mn ។ រកល្បឿនមធ្យមនៃទោចក្រយានយន្តនោះ ។

$v = \frac{d}{t}$

$d = 108km$

$t = 2h15mn = \frac{9}{4}h$

$v = \frac{108}{\frac{9}{4}} = 48km / h$

រូបមន្ត ៖ ល្បឿនមធ្យម = ចម្ងាយចរ × រយៈពេល
បើ d ជាចម្ងាយចរ v ជាល្បឿនមធ្យម ហើយ t ជារយៈពេល យើងបានរូបមន្ត $v=\frac{d}{t}$ ។

លំហាត់គំរូ គេបាញ់កាំភ្លើងធំឡើងដើម្បីប្រារព្ធពិធីបុណ្យនៅទីក្រុង A ដោយណាត់គ្នាបាញ់នៅម៉ោង 0 កណ្ដាលយប់។ បន្ទាប់ពីការបាញ់ 1mn ក្រោយមកទើបប្រជាជននៅទីក្រុង B បានឮសម្លេងបាញ់។ រកចម្ងាយរវាងទិក្រុង A និង B ដោយដឹងថាល្បឿនសម្លេង 343m/s ។

ចម្លើយ រកចម្ងាយរវាងទិក្រុង A និង B

$d=vt$

$v=343m/s$

$t=1mn=60s$

$d=343\times 60=20580m$

ដូចនេះ ចម្ងាយរវាងទិក្រុង A និង B គឺ $d=20580m$ ។

ប្រតិបត្តិ ពពកកើតមកពីរំហួតទឹកសមុទ្រ ។ ឥឡូវគេដឹងថាមានពពកមួយផ្ទាំងធំកំពុង តែរសាត់ពី សមុទ្រនៃខេត្តព្រះសីហនុ មកកាន់រាជធានីភ្នំពេញដែលមានចម្ងាយប្រមាណ 230km ហើយខ្យល់មានល្បឿន 6m/s ។ តើរយៈពេលប៉ុន្មានម៉ោងទៀតទើបនៅភ្នំពេញសង្ឃឹមមានភ្លៀង ?

៤.៥. មាត្រដ្ឋាន

ឧទាហរណ៍១ បើប្រវែង 1cm នៅលើផែនដីតាងឲ្យប្រវែងពិតនៅលើផ្ទៃដី 1 000cm នោះ គេថាផែនដីនេះមានមាត្រដ្ឋាន $\frac{1}{1000}$ ឬគេ សរសេរ $1/1000$ ។

ឧទាហរណ៍២ បើប្រវែង 1cm នៅលើផែនដីតាងឲ្យប្រវែងពិតនៅលើផ្ទៃដី 10 000cm នោះ គេថាផែនដីនេះមានមាត្រដ្ឋាន $\frac{1}{10000}$ ឬគេ សរសេរ $1/10000$ ។

សំគាល់ ផែនទីយុទ្ធសាស្ត្រគេនិយមប្រើ មានមាត្រដ្ឋាន $1/50000$ ឬ $1/20000$ ។ ផែនទីក្រុមសូរិយោដីគេកំរិតមាត្រដ្ឋាន $1/20000$ ។

លំហាត់គំរូទី១ នៅពេលកំពុងធ្វើដំណើរសាម៉ុល បានឃើញផែនទីផ្លូវមួយខ្សែដែលកំពុងជួសជុលមានដាក់មាត្រដ្ឋាន $1/80000$ និងប្រវែងនៅលើផែនទី $150mm$ ។ តើផ្លូវនេះមានប្រវែងប៉ុន្មានគីឡូម៉ែត្រ ?

ចម្លើយ ចំពោះមាត្រដ្ឋាន $1/80000$ មានន័យថាប្រវែង $1mm$ នៅលើផែនទីមានប្រវែងពិតនៅលើផ្ទៃដីប្រវែង $80000mm$ ឬ $80m$ ។ ប្រវែងពិតនៅលើផ្ទៃដីគឺ $80m\times 150=12000m$ ឬ $12km$ ។

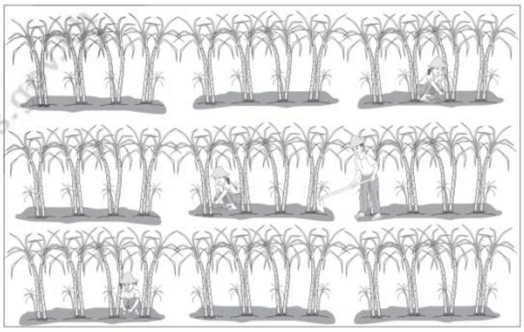
ដូចនេះ ប្រវែងផ្លូវគឺ $12km$ ។

លំហាត់គំរូ២ ផ្លូវជាតិពីភ្នំពេញទៅស្ទឹងត្រែងមានប្រវែងពិត $455km$ តាមផ្លូវជាតិលេខ 6A លេខ 7 និងលេខ 13 ។ តើនៅលើផែនទីដែលមានមាត្រដ្ឋាន $1/200000$ មានចម្ងាយប៉ុន្មាន ?

ចម្លើយ ចំពោះមានមាត្រដ្ឋាន $1/200\,000$ មានន័យថាប្រវែង $1cm$ នៅលើផែនទីមានប្រវែងពិតនៅលើផ្ទៃដីប្រវែង $200\,000cm$ ឬ $2km$ ។ ប្រវែងពិតនៅលើផែនទីគឺ $455\div 2=227.5cm$ ។

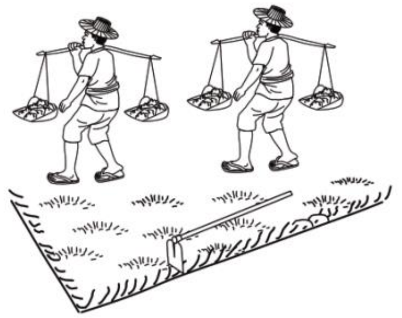
ដូចនេះ ប្រវែងផ្លូវនៅលើផែនទីគឺ $227.5cm$ ។

ប្រតិបត្តិ នៅលើប្លង់ផែនទីរបស់សូរិយោដី បណ្តោយចំការអំពៅមួយមានប្រវែង 3.5cm បើបណ្តោយពិតមានប្រវែង 70 m ។ តើផែនទីនេះមានមាត្រដ្ឋានប៉ុន្មាន ?



លំហាត់អនុវត្ត

1. ពូផលធ្វើម្ជុលដេរមួយដើមមានប្រវែង 35mm ។
   ក. បើគាត់មានដែកប្រវែង 4 620mm តើគាត់ធ្វើម្ជុលបានប៉ុន្មានដើម ?
   ខ. បើ 20% នៃដែកត្រូវខាតពេលធ្វើ តើគាត់ធ្វើម្ជុលបានប៉ុន្មានដើម ?
2. មនុស្សពេញវ័យម្នាក់មានឈាម $5.5l$ ។ បើគេដឹងថាឈាម $1mm^3$ មានគោលលិកាក្រហម 5 លាន។ រកចំនួនគោលលិកាក្រហមទាំងអស់ ។
3. គណនាប្រមាណវិធីខាងក្រោម
   $a.\ 4h14mn45s + 5h43mn20s + 2h18mn15s$
   $b. 3h33mn42s - 1h55mn3s + 11h22mn12s$
   $c. 15h11mn20s - 13h30mn30s$
   $d. 1j3h19mn23s - 23h30mn15s$
   $e. 3h2mn42s \times 7$
4. ស្ត្រីម្នាក់ដេរអាវ 7 ប្រើរយៈពេលអស់ $1h24mn$ ។តើគាត់ដេរបានអាវប៉ុន្មានក្នុងរយៈពេល $6h$?
5. កម្មករ 8 នាក់ជិកស្រះមួយហើយក្នុងរយៈពេល ។



   ក. តើកម្មករម្នាក់ជីកស្រះក្នុងរយៈពេលប៉ុន្មាន ?
   ខ. បើគេប្រើកម្មករ 12 នាក់វិញ តើប្រើរយៈពេលប៉ុន្មាន ?
6. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃមុខកាត់ស៊ីឡាំង ដែលមានអង្កត់ផ្ចិតគិតជា m^2
   $a.\ 1.5mm \quad b.\ 2.5mm \quad c.\ 0.2mm \quad d.\ 0.03mm \quad e.\ 0.004mm$
7. ឈើជ្រុងមួយដើមមានមុខកាត់ 4cm × 8cm និងប្រវែង 4.5m ។បើគេទិញឈើនោះចំនួន 50 ដើម តើត្រូវចំណាយប្រាក់អស់ប៉ុន្មាន បើដើមឈើមួយម៉ែត្រគូបថ្លៃ 1 200 000៛ ?
8. គេដឹងថាដែក 10 លីមួយដើមមានម៉ាស 7.4kg ។ ចូររកម៉ាសនៃដែក 16 លីវិញ ។
9. ផែនទីមួយមានមាត្រដ្ឋាន $1/80000$ ។ គណនាចម្ងាយពិតនៅលើដី បើគេវាស់ចម្ងាយទីក្រុងពីរលើផែនទី $343mm$ ។
10. ចំការដូងមួយមានរាងត្រីកោណដែលមានជ្រុង 6km , 4.5km និង 3.9km ។ ចូរគោងចំការនោះលើផែនទីដែលមានមាត្រដ្ឋាន 1 750 ។

មេរៀនទី៥ កន្សោមពីជគណិត

៥.១. សញ្ញាណកន្សោមពីជគណិត

ឧទាហរណ៍១ គេមានកន្សោមលេខ $5-3\times 7$ បើគេប្រើអក្សរ x និង y ជំនួសឱ្យ 7 និង 5 នោះគេបាន កន្សោម $y-3x$ ហៅថាកន្សោមពិជគណិត ដែលមានពីរអថេរ x និង y ។

ឧទាហរណ៍២ ដីមួយកន្លែងមានរាងចតុកោណកែង ដែលមានបណ្ដោយស្មើនិង 15 ម៉ែត្រនិងទទឹងស្មើ និង x ម៉ែត្រ ។ កំណត់បរិមាត្រនៃដីនោះ ។

តាមរូបមន្ត បរិមាត្រ $=$ (ទទឹង $+$ បណ្ដោយ) $\times 2$

$$= (x+15)\times 2 = 2x+30$$

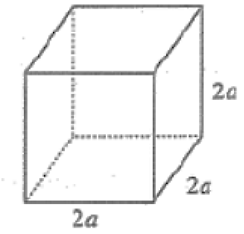
កន្សោម $2x+30$ ហៅថាកន្សោមពិជគណិត ដែលមាន x ជាអថេរ ។

សម្គាល់ $2x$, $3x$ ឬ xy មានន័យថា $2\times x$, $3\times x$ ឬ $x\times y$ ។

៥.២. ប្រមាណវិធីលើកន្សោមពីជគណិត

៥.២.១. សញ្ញាណឯកធា

ឧទាហរណ៍១ គូបមួយមានទ្រនុងប្រវែង $2a$ ។



- បើគេគណនាផ្ទៃក្រឡានៃមុខខាងនីមួយៗគេបាន $4a^2$ ។
- បើគេគណនាមាឌនៃគូបនេះគេបាន $8a^3$ ។
- រង្វាស់ $2a$, $4a^2$, $8a^3$ ដែលតាងដោយចំនួននិង អថេរហៅថា កន្សោមពិជគណិត ។
- កន្សោមនីមួយៗខាងលើមានតែវិធីគុណនិងស្វ័យគុណដែលមានិទស្សន្តជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហៅថា ឯកធា ។

ឧទាហរណ៍២ ឯកធាផ្សេងទៀតដូចជា $7x^2y$, $-\frac{3}{4}a^2b^4$, $\sqrt{3}x^2yt$

សម្គាល់: ចំនួនថេរក៏អាចជាឯកធាបានដែរដូចជា 8 ព្រោះគេអាចសរសេរ $8=8x^0$,$(x\neq 0)$ ហើយ $x^0=1$ ។

> **និយមន័យ** ឯកធាគឺជាកន្សោមពិជគណិតដែលមានតែប្រមាណវិធីគុណ និងស្វ័យគុណ ដែលនិទស្សន្តជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ឬសូន្យ ។

ចំពោះឯកធា $7x^2y$ មាន 7 ហៅថា មេគុណ និង x,y ហៅថា អថេរ ។

លំហាត់គំរូ គេមានឯកធា $-\frac{3}{4}ab^2x$ ចូរបញ្ជាក់អថេរនិងមេគុណ ។

ចម្លើយ ឯកធា $-\frac{3}{4}ab^2x$ មានអថេរ a , b , x និងមេគុណ $-\frac{3}{4}$ ។

ប្រតិបត្តិ១ ចូរបញ្ជាក់មេគុណនិងអថេរនៃឯកធា $2\sqrt{3}yt^3$

ប្រតិបត្តិ២ តើកន្សោមពីជគណិតខាងក្រោមមួយណាជាឯកធា ?

$\frac{1}{5}x^2y$, $3x^2+2$, $25-\frac{2}{3}a^4bc^2$, $zx^2a^3b^4$

៥.២.២. ឯកធាដូចគ្នា

ឧទាហរណ៍ គេមានឯកធា $-3xbc^2$ និង $\frac{2}{3}xbc^2$ ។ ឯកធាទាំងពីរមានផ្នែកអថេរ xbc^2 ដូចគ្នានិងមានមេគុណ -3 និង $-\frac{2}{3}$ ។

ឯកធាទាំងពីរខាងលើនេះមានផ្នែកអថេរ xbc^2 ដូចគ្នាហៅថា ឯកធាដូចគ្នា

និយមន័យ ឯកធាដូចគ្នា គឺជាឯកធាដែលមានផ្នែកអថេរដូចគ្នា។

លំហាត់គំរូ បណ្តោកកន្សោមខាងក្រោម តើមួយណាជាឯកធាដូចគ្នា ។

$5x^2yz^3$, $\frac{7}{2}x^2cy^3$, $5a^2bc^3$, $\frac{1}{2}x^2yz^3$ ។

ចម្លើយ កន្សោម $5x^2yz^3$ និង $\frac{1}{2}x^2yz^3$ ជាឯកធាដូចគ្នា ព្រោះឯកធាទាំងពីរមានផ្នែកអថេរ x^2yz^3 ដូចគ្នា

ប្រតិបត្តិ ចូរជ្រើសរើសឯកធាដូចគ្នាក្នុងចំណោមុំឯកធាខាងក្រោម ។

$\frac{1}{2}xy$, $-2x^2y$, ax , $2xy^2$, xy

៥.២.៣. ដឺក្រេនៃឯកធា

ឧទាហរណ៍ ឯកធា $3x$ មានដឺក្រេ 1 ព្រោះនិទស្សន្តនៃអថេរ x ស្មើនិង 1។

ឯកធា $2xy$ មានដឺក្រេ 2 ព្រោះនិទស្សន្តនៃអថេរ x , y ស្មើនិង $1+1=2$ ។

ឯកធា ax^2y មានដឺក្រេ 4 ព្រោះនិទស្សន្តនៃអថេរ a , x , y ស្មើនិង $1+2+1=4$ ។

ចំណាំ: ដឺក្រេឯកធា គឺជាផលបូកនិទស្សន្តនៃអថេរទាំងអស់ ។

និយមន័យ ដឺក្រេឯកធា គឺជាផលបូកនិទស្សន្តនៃអថេរនីមួយៗនៃឯកធា ។

លំហាត់គំរូ ចូរប្រាប់អថេរនិងដឺក្រេនៃឯកធា x^2yb^3 , $\frac{3}{4}a^2bc$, x^3y^2 , $-3az^2y^3$

ចម្លើយ

ឯកធា	អថេរ	និទស្សន្ត
x^2yb^3	x , y , b	$2+1+3=6$
$\frac{3}{4}a^2bc$	a , b , c	$2+1+1=4$
x^3y^2	x , y	$3+2=5$
$-3ax^2y^3$	a , x , y	$1+2+3=6$

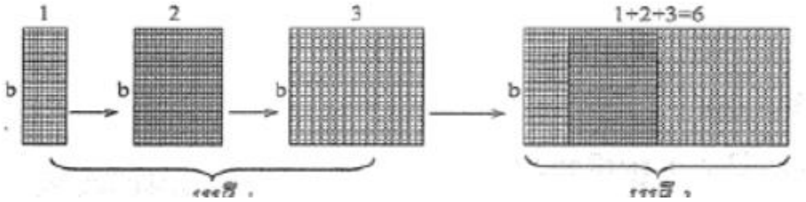
ប្រតិបត្តិ ចូរកំណត់អថេរនិងរកដឺក្រេនៃឯកធាខាងក្រោម

ក. $\frac{1}{2}xyz$ ខ. $8x^3yz^2$ គ. 14

ឃ. $21ab^4c$ ង. $3x^2y^3z^4$ ច. $axyz$

៥.២.៤. ប្រមាណវិធីបូកនិងដកឯកធាដូចគ្នា

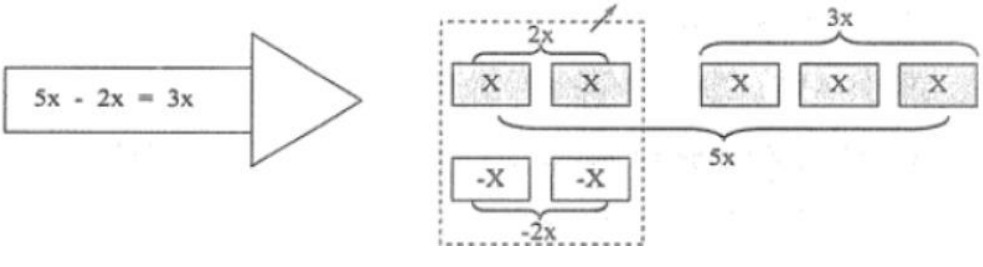
ឧទាហរណ៍១ ផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណកែង គឺ b , $2b$ និង $3b$ ។



មផលបូកផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណកែងរូបទី1 ស្មើនិងផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណកែងរូបទី 2 គឺ

$b+2b+3b=(1+2+3)b=6b$ (បូកមេគុណនិងមេគុណ ហើយគុណលទ្ធផលនិងផ្នែកអថេរ)

ឧទាហរណ៍២ សរសេរផលដកឯកធា $5x-2x$



ជាទូទៅ ដម្បើគណនាផលបូក ឬផលដកឯកធាដូចគ្នា គេត្រូវធ្វើប្រមាណវីធីបូកដកតែផ្នែកមេគុណ រួចយកលទ្ធផលទៅគុណនិងផ្នែកអថេរ ។

លំហាត់គំរូ គណនា

ក. $2xy+5xy$ ខ. $3ab^2+7ab^2+ab^2$

គ. $8x^2y^3x-3x^2y^3z-7x^2y^3z$ ឃ. $10x^2y+x^2y-5x^2y$

ចម្លើយ

ក. $2xy+5xy=(2+5)xy=7xy$

ខ. $3ab^2+7ab^2+ab^2=(3+7+1)ab^2=11ab^2$

គ. $8x^2y^3x-3x^2y^3z-7x^2y^3z=(8-3-7)x^2y^3z=-2x^2y^3z$

ឃ. $10x^2y+x^2y-5x^2y=(10+1-5)x^2y=6x^2y$

ប្រតិបត្តិ ចូរគណនា

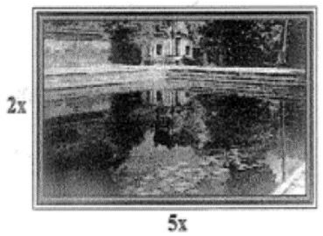
ក. $5x^2y-3x^2y$ ខ. $3ac^2b^3+(-4ac^2b^3)+7ac^2b^3$

គ. $ax^2y^2+3ax^2y^3$ ឃ. $y^3c^2b^3+(-3y^3c^2b^3)+8y^3c^2b^3$

ង. $5x^2y+(-3x^2y)$ ច. $\frac{1}{2}ac^2b^3+\left(-\frac{1}{2}ac^2b^3\right)+7ac^2b^3$

៥.២.៥. វិធីគុណឯកធា

ឧទាហរណ៍ទី 1 ស្រះទឹកមួយមានរាងចតុកោណកែង ដែលមានបណ្ដោយប្រវែង $5x$ ឯកតានិងទទឹងប្រវែង $2x$ ឯកតា ។ គេបានផ្ទៃក្រឡាស្រះទឹកនេះជាផលគុណរវាង $5x$ និង $2x$ (បណ្ដោយ $\times$ ទទឹង)



$$(5x)(2x)=(5)(x)(2)(x)=10x^2$$

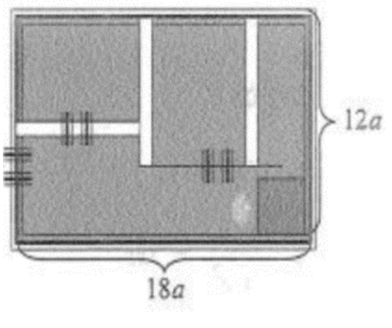
ឧទាហរណ៍ទី 2 គណនា $(4x^2yc^4)(3xy^3c)$

$$(4x^2yc^4)(3xy^3c)=(4)(3)(x^2)(x)(y)(y^3)(c^4)(c)=12x^3y^4c^5$$

ជាទូទៅ៖ ដើម្បីគុណឯកធានិងឯកធា គេផ្គុំមេគុណនិងមេគុណ ផ្នែកអថេរនិងអថេរ រួចធ្វើប្រមាណវិធីគុណមេគុណនិងផ្នែកអថេរ ។

លំហាត់គំរូ គណនាផ្ទៃក្រឡាប្លង់ភូមិគ្រឹះមួយតាម រូបខាងស្ដាំ ។

ចម្លើយ ផ្ទៃក្រឡាប្លង់ភូមិគ្រឹះ



$$A=(18a)(12a)=(18)(a)(12)(a)=(18)(12)(a)(a)=216a^2$$

នៅក្នុងការប្រតិបត្តិគេអាចគណនាដោយខ្លី

$$A=(18a)(12a)=216a^2$$

ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡាប្លង់ភូមិគ្រឹះមាន $A=216a^2$ ឯកតាផ្ទៃ ។

ប្រតិបត្តិៈ គណនា

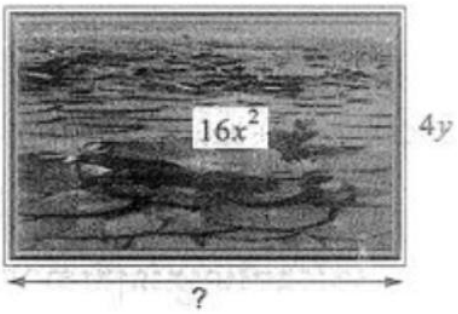
ក. $(5xy^3)(x^2y)$ ខ. $(ab^2c^3)(-4ac^2b)(acb)$

គ. $\left(\frac{1}{2}ab^3\right)(3a^2b^2)$ ឃ. $(-4y^3c^2b^3)(8yc^2b)$

ង. $(\sqrt{5}x^2)\left(\frac{1}{4}x^27\right)$ ច. $\left(\frac{1}{2}ac^2b^3\right)\left(-\frac{1}{2}ac^2b^3\right)(ac^2b^3)$

៥.២.៦. វិធីចែកឯកធា

ឧទាហរណ៍ទី១ ស្រះទឹកមួយមានចតុកោណកែង មានផ្ទៃក្រឡាស្មើនិង $16xy^2$ ។ គណនាបណ្តោយនៃស្រះទឹកនេះបើទទឹងមានប្រវែងស្មើនិង $4y$ ។



បណ្តោយ $=$ ផ្ទៃក្រឡា $\div$ ទទឹង

គេបានបណ្តោយស្រះទឹកស្មើនិង

$$\frac{16xy^2}{4y}=\frac{(16)(x)(y)(y)(y)}{4y}=4xy$$

ឧទាហរណ៍ទី២ គណនាផលចែក $(8x^4y5)\div(16x^2y^3)$

$$(8x^4y^5)\div(16x^2y^3)=\frac{8(x)(x)(x)(x)(x)(y)(y)(y)(y)(y)}{16(x)(x)(y)(y)(y)}$$

$$=\frac{1(x)(x)(y)(y)(y)}{2}=\frac{1}{2}x^2y^2$$

ក្នុងការប្រតិបត្តិគេអាចគណនាដោយខ្លី

គេបានផលចែកឯកធា គឺ $(8x^4y5)\div(16x^2y^3)=\frac{8}{16}(x^{4-2})(y^{5-3})=\frac{1}{2}x^2y^2$

> **ជាទូទៅ** ដើម្បីចែកឯកធានិងឯកធា គេត្រូវសរសេរភាគយកនិងភាគបែងជាផលគុណកត្តា ហើយចែកមេគុណនិងមេគុណ ផ្នែកអថេរនិងផ្នែកអថេរ ។

លំហាត់គំរូ គណនា

ក. $(5xy^3)\div(xy)$ ខ. $\frac{18xyz^3}{9yz^2}$ គ. $1a^2b^3\div 2ab$

ចម្លើយ

ក. $(5xy^3)\div(xy)=\frac{5xy^3}{xy}=5y^2$

ខ. $\frac{18xyz^3}{9yz^2}=2xz$

គ. $1a^2b^3 \div 2ab = \frac{1a^2b^3}{2ab} = \frac{1}{2}ab^2$

ប្រតិបត្តិ គណនាផលចែក

ក. $x^{3n} \div x^{2n}$ ខ. $xy^{4n} + xy^m$ គ. $\sqrt{3}ab^{12} + 2ab^4$

ឃ. $\frac{xyz^3}{yz^2}$ ង. $\frac{ax^7b^5}{ax^5b^3}$ ច. $81z^{12}b^3 + 3x^{12}b$

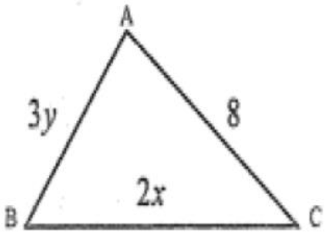
៥.៣. ឯកធា និងពហុធា

៥.៣.១. សញ្ញាណពហុធា

ឧទាហរណ៍ទី១ គេមានឯកធា $-8x^2$ និង $3xy$ បើគេធ្វើប្រមាណវិធីបូកឯកធាទាំងពីរនោះ

គេបាន $-8x^2 + 3xy$ ។

ផលបូកនៃពីរឯកធាមិនដូចគ្នាហៅថា ពហុធា ។



ឧទាហរណ៍ទី២ គេមានត្រីកោណ ABC ដូចរូបខាងស្តាំ។

ប្រវែងបរិមាត្រនៃត្រីកោណ គឺជាផលបូកជ្រុងតាំងបី

នោះគេបាន $AB + BC + CA = 3y + 2x + 8$

ដូចនេះ បរិមាត្រនៃត្រីកោណ ABC ស្មើនិង $3y + 2x + 8$ ជាផលបូកបីឯកធាមិនដូចគ្នាហៅថាពហុធា ។

ឧទាហរណ៍ទី២ គេមានកន្សោមពីជគណិត

ឯកធា	ទ្វេធា	ត្រីធា
$5x^2$	$3x+1$	$5x^2 - 2x + 7$
$3abc$	$2x+3y$	$a^2 + 2ab^2 + b^2$
9	$4x^2 + 3xy$	$3a + 2b^2 - 3c$

និយមនន័យៈ ពហុធាជាផលបូកនៃពីរ ឬ ច្រើនឯកធាមិមនដូចគ្នា ។ ពហុធាដែលមានពីរតួហៅថា **ទ្វេធា** ហើយពហុធាដែលមានបីតួហៅថា **ត្រីធា** ។

សម្គាល់ កន្សោម $x + \frac{3}{b^2}$ មិនមែនជាពហុធាទេ ព្រោះ $\frac{3}{b^2}$ មិនមែនជាឯកធា ។

លំហាត់គំរូៈ គេមានពហុធា $3x - 8, \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4, -2x^3y - 3y + 5$ ។

ចូរកំណត់អថេរនិងចំនួនតួនៃពហុធា ។

ចម្លើយ

ពហុធា	អថេរ	ចំនួនពហុធា
$3x-8$	x	2 គឺ $3x$ និង 8
$\frac{1}{2}x^2-3a+4$	x, a	3 គឺ $\frac{1}{2}x^2$, $3a$ និង 4
$-2x^3y-3y+5$	x, y	3 គឺ $-2x^3y$, $3y$ និង 5

ប្រតិបត្តិ ចូរកំណត់អថេរនិងចំនួនតួនៃពហុធា

ក. $6x^3+2xy-4$ ខ. $\sqrt{3}ab+3x+3$ គ. $-3x^2y+\frac{1}{2}y-2$

៥.៣.២. ដឺក្រេនៃពហុធា

ឧទាហរណ៍ទី១ កន្សោម $2x+1$ មានដឺក្រេខ្ពស់នៃ x ស្មើនិង 1

$5x^2-2x+1$ មានដឺក្រេខ្ពស់នៃ x ស្មើនិង 2

$-x^2-2x^2y-1$ មានដឺក្រេខ្ពស់ ស្មើនិង 3 ចំពោះអថេរ x និង y

ឧទាហរណ៍ទី២

ក. $2x^2-4x+3$ ជាពហុធាដឺក្រេទី 2 សរសេរតាមលំដាប់ចុះស្វ័យគុណនៃ x ។

ខ. $1+2x^2+3x^3$ ជាពហុធាដឺក្រេទី 3 សរសេរតាមលំដាប់កើនស្វ័យគុណនៃ x ។

ជាទូទៅ ដឺក្រេនៃពហុធា គឺជាដឺក្រេរបស់តួដែលមានដឺក្រេខ្ពស់ជាងគេ ។

លំហាត់គំរូ ចូរសរសេរអថេរ ដឺក្រេ និងរៀបតាមលំដាប់កើន ចុះនៃពហុធាខាងក្រោម

$11+5x^2-3x, y^3+4y^4x+7+y, 2k^2-4+k^2-k$ ។

ចម្លើយ

ពហុធា	អថេរ	ដឺក្រេ	រៀបតាមលំដាប់កើន	រៀបតាមលំដាប់ចុះ
$11+5x^2-3x$	x	2	$11-3x+5x^2$	$5x^2-3x+11$
$2k^3-4+k^2-k$	K	3	$-4-k+k^2+2k^3$	$2k^3+k^2-k-4$
y^3+4y^4x+7+y	x និង y	5	$7+y+y^3x+4y^4x$	$4y^4x+y^3x+y+7$

ប្រតិបត្តិ ប្រាប់ដឺក្រេនៃពហុធាខាងក្រោម

ក. x^2+x-3 ខ. $-\frac{3}{4}x+3$

គ. $a^2+2ab+c^2d$ ឃ. $\sqrt{2}x^2-4x$

៥.៣.៣. វិធីបូកនិងដកពហុធា

ឧទាហរណ៍ទី១ គេមានពហុធា $A=2a^2+3a-4$ និង $B=5a^2-7a+6$

គណនា $A+B$

គេបាន $A+B=\left(2a^2+3a-4\right)+\left(5a^2-7a+6\right)$

ដើម្បីគណនាផលបូកពហុធាគេត្រូវផ្តុំតួ $A+B=\left(2a^2+5a^2\right)+\left(3a-7a\right)+\left(-4+6\right)$

$=\left(7a^2\right)+\left(-4a\right)+\left(2\right)$ (បូកឯកធាដូចគ្នា)

$=7a^2-4a+2$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២ គេឱ្យពហុធា $E=3x^2-2x+7$ និង $F=x^2+4x+5$ ។ គណនា $E-F$

គេបាន $E-F=\left(3x^2-2x+7\right)-\left(x^2+4x+5\right)$

$=\left(3x^2-x^2\right)+\left(-2x-4x\right)+\left(7-5\right)$ (ដកឯកធាដូចគ្នា)

$=2x^2-6x+3$ ។

> **ជាទូទៅ** ដើម្បីបូក ឬដកពីរឯកធា គេត្រូវបូក ឬដកឯកធាដូចគ្នា

សំគាល់ គេអាចធ្វើប្រមាណវិធីបូក ឬដកពីរពហុធាតាមរបៀបដូចខាងក្រោម ។

លំហាត់គំរូ គេឱ្យពហុធា $A=5x^3-2x^2+7x+4$ និង $B=2x^3+4x^2-6$ ។

គណនា $A+B$ និង $A-B$ ។

ចម្លើយ

គណនា $A+B$

$$\begin{array}{rl} & 5x^3-2x^2+7x+4 \\ + & \\ & 2x^3+4x^2\qquad -6 \\ \hline & 7x^3+2x^2+7x-2 \end{array}$$

គណនា $A-B$

$$\begin{array}{rl} & 5x^3-2x^2+7x+4 \\ - & \\ & 2x^3+4x^2\qquad -6 \\ \hline & 3x^3-6x^2+7x+10 \end{array}$$

ប្រតិបត្តិ គណនា $M+N$ និង $M-N$ ដែល

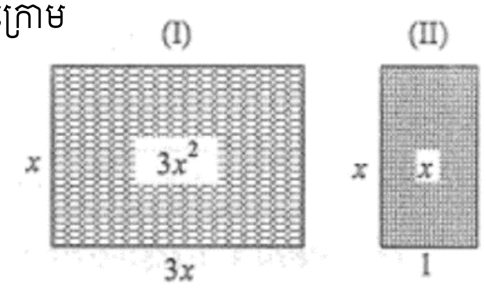
ក. $M=2x^2+3x+1$ និង $N=-x^2+2x+4$

ខ. $M=12a^2+2ab+54$ និង $N=9a^2-4ab-25$

គ. $M=\frac{1}{2}xy^2+2xy-3$ និង $N=\frac{3}{2}xy^2-12xy-16$

៥.៣.៤. វិធីគុណពហុធា

ឧទាហរណ៍ទី១ គណនាផ្ទៃក្រឡាចតុកោណកែងតាមរូបខាងក្រោម



ផ្ទៃក្រឡាចតុកោណកែង (J) គឺ $x\times 3x=3x^2$

ផ្ទៃក្រឡាចតុកោណកែង (JJ) គឺ $x\times 1=x$

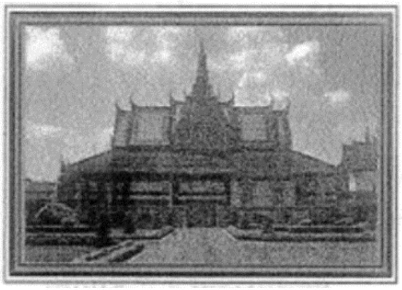
ផ្ទៃក្រឡាចតុកោណកែងទាំងពីរ គឺ $3x^2+x$

ផលគុណ $x(3x+1)$ គឺជាផ្ទៃក្រឡារបស់ចតុកោណ

កែងដែលមានជ្រុង x និង $(3x+1)$ គឺ

$x(3x+1)=3x^2+x$

> **ជាទូទៅ** ដើម្បីគុណឯកធានិងពហុធា គេគុណឯកធានិងតួនីមួយៗនៃពហុធា រួចបង្រួមលទ្ធផល។



ឧទាហរណ៍ទី២ រូបថតមួយផ្ទាំងមានរាងចតុកោណកែង ដែលមានវិមាត្រ $3x+2$ និង $x+1$ គិតជាម៉ែត្រ។
គេបាន ផ្ទៃក្រឡារូបថត $=$ បណ្តោយ $\times$ ទទឹង
គេបាន $(3x+2)(x+1)=3x^2+3x+2x+2=3x^2+5x+2$
គេគុណគ្រប់តួនៃពហុធានីមួយៗទៅគ្រប់តួនៃពហុធាទីពីរ រួចបង្រួមលទ្ធផល ។

> **ជាទូទៅ** ដើម្បីគុណពហុធានិងពហុ គេយកតួនីមួយៗនៃពហុធាទី១ គុណគ្រប់តួនៃពហុធាទី២ រួចបង្រួមលទ្ធផល ។

លំហាត់គំរូទី១ គណនាផលគុណនៃពហុធា $3x^2$ និង $4x^2+xy-5y^2$ ។
ចម្លើយ $3x^2\left(4x^3+xy-5y^2\right)=3x^2\left(4x^3\right)+3x^2\left(xy\right)+3x^2\left(-5y^2\right)$

$$=12x^{3+2}+3x^{1+3}y-15x^2y^2$$

$$=12x^5+3x^4y-15x^2y^2$$

លំហាត់គំរូទី២ គណនាផលគុណនៃពហុធា $1+x^2-3x$ និង $2x-3$ ។
ចម្លើយ ដើម្បីគណា គេត្រូវរៀបពហុធាតាមលំដាប់ដឺក្រេកើន ឬចុះ

គេបាន

$$\begin{array}{rl}
 x^2-3x+1 & \\
\times\quad 2x-3 & \\
\hline
2x^3-6x^2+2x & \longleftarrow (2x)(x^2-3x+1)\\
+\quad -3x^2+9x-3 & \longleftarrow (-3)(x^2-3x+1)\\
\hline
2x^3-9x^2+11x-3 &
\end{array}$$

លំហាត់គំរូទី៣ សរសេរចំនួនគត់ 7368 ជាពហុធា ហើយរៀបតាមលំដាប់ចុះនៃដឺក្រេ 10 ។
ចម្លើយ $7368=7000+300+60+8=7\times10^3+3\times10^2+6\times10+8$ ។
ប្រតិបត្តិ គណនាផលគុណ រួចបង្រួមលទ្ធផលបើអាចធ្វើបាន
ក. $2x^2\left(2x^2+3x-1\right)$ ខ. $ab^2\left(a^2+2ab+a\right)$ គ. $\left(a^2+2ab\right)(a-b)$

ឃ. $\left(9a^2-25\right)\left(a^2+ab\right)$ ង. $\frac{1}{2}xy^2\left(\frac{2}{3}xy-3\right)$ ច. $\left(xy^2-12xy-16\right)\left(x^2y-7+y^2\right)$

៥.៣.៥. វិធីចែកពហុធា

ឧទាហរណ៍ទី១ ក្នុងវិធីចែករវាងចំនួន 21 និង 7 គេអាចសរសេរ $21\div 7=\frac{21}{7}=3$ ។

ដូចនេះ $21=3\times 7$ នោះគេថា 21 ចែកដាច់និង 7 ។ ហើយ 7 ជាតួចែកនៃ 21 ។ 21 ជាផលគុណរវាង 7 និង 3 ។

ឧទាហរណ៍ទី២ គណនា $\left(15x^4-30x^6\right)\div 5x^2$

គេបាន $\left(15x^4-30x^6\right)\div 5x^2=\frac{15x^4-30x^6}{5x^2}$

$$\frac{15x^4-30x^6}{5x^2}=\frac{15x^4}{5x^2}-\frac{30x^6}{5x^2}=3x^2-6x^4$$

> ជាទូទៅៈ ដើម្បីចែកពហុធានិងឯកធា គេចែកតួនីមួយៗនៃពហុធានិងឯកធានោះ។

ឧទាហរណ៍ទី៣ គណនាផលចែក $\left(x^2-7x+10\right)\div(x-2)$

	$x^2-7x+10$	$x-2$	
$x(x-2)$ ⟶	$-(x^2-2x)$	$x-5$	
	$0-5x+10$		⟵ សំណល់ទី 1
$-5(x-2)$ ⟶	$-(-5x+10)$		
	$0+0$		⟵ សំណល់ទី 2

ឧទាហរណ៍ទី៤ គណនាផលចែក $\left(x^2-2x+4\right)\div(x-1)$

គេធ្វើចែកតាមរៀបមួយទៀត

	$x-1$	
$x-1$	$\overline{)x^2-2x+4}$	
	x^2-x	⟵ ផលគុណ $x(x-1)$
	$-x+4$	គេធ្វើផលដក រួចទំលាក់ 4 ចុះ
	$-x+1$	⟵ ផលគុណ $-1(x-1)$ រួចធ្វើផលដក
	3	⟵ សំណល់

ដោយផលចែកពហុធានិងពហុធា
មានសំណល់នោះគេអាចសរសេរ

$$\overbrace{\frac{x^2-2x+4}{\underbrace{x-1}_{\text{តួចែក}}}}^{\text{តំណាងចែក}} = \overbrace{x-1}^{\text{ផលចែក}} + \frac{\overbrace{3}^{\text{សំណល់}}}{\underbrace{x-1}_{\text{តួចែក}}}$$

សំគាល់ បើសំណល់នៃវិធីចែកស្មើនិងសូន្យ គេថាពហុធាទី១ ចែកដាច់និងពហុធាទី២។
បើសំណល់នៃវិធីចែកមិនស្មើនិងសូន្យ គេថាពហុធាទី១ ចែកដាច់និងពហុធាទី២។
ក្នុងករណីនេះ គេសរសេរផលចែកជាផលបូកនៃពហុធានិងកន្សោមប្រភាគមួយ។

លំហាត់គំរូទី១ គណនាផលចែក $\left(8y^3+4y^2-7\right)\div\left(2y+3\right)$

ចម្លើយៈ គេបាន

$$\begin{array}{r|l}
8y^3+4y^2-7 & 2y+3 \\ \cline{2-2}
-(8y^3+12y^2) & 4y^2-4y+6 \\ \cline{1-1}
0-8y^2-7 & \longleftarrow \text{សំណល់ទី } 1 \\
-(-8y^2-12y) & \\ \cline{1-1}
0+12y-7 & \longleftarrow \text{សំណល់ទី } 2 \\
-(12y+18) & \\ \cline{1-1}
0-25 & \longleftarrow \text{សំណល់ទី } 3
\end{array}$$

ដូចនេះ $\left(8y^3+4y^2-7\right)\div\left(2y+3\right)=4y^2-4y+6-\dfrac{25}{2y+3}$

លំហាត់គំរូទី២ ធ្វើប្រមាណវិធីចែកពហុធា $\left(x^3-2\right)\div\left(x-1\right)$

ចម្លើយ គេអាចសរសេរពហុធា $x^3-2=0x^2+0x-2$ (ព្រោះ $0x=0$)

គេបាន

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+x+1 \\ \cline{2-2}
x-1 & x^3+0x^2+0x-2 \\
 & x^3-x^2 \\ \cline{2-2}
 & x^2+0x \\
 & x^2-x \\ \cline{2-2}
 & x-2 \\
 & x-1 \\ \cline{2-2}
 & -1
\end{array}$$

ដូចនេះ $\frac{x^3-2}{x-1}=x^2+x+1-\frac{1}{x-1}$

ប្រតិបត្តិៈ ធ្វើប្រមាណវិធីចែកខាងក្រោម

ក. $(a^2b^3+2ab)\div(ab)$ ខ. $(5x^2y^4+2x^3y^5-12x^2y^2)\div(x^2y^2)$

គ. $(6x^2+5x-4)\div(2x-1)$ ឃ. $(a^2+6a-55)\div(a-5)$

៥.៤. កន្សោមសនិទាន

ចំនួនសនិទានដែលយើងបានស្គាល់ដូចជា $\frac{2}{3}$, $\frac{-21}{5}$, $\frac{5}{1}$, $\frac{0}{9}$ មានទម្រង់ $\frac{a}{b}$ ដែល a និង b ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបហើយ $b\neq 0$ ។

យើងនិងសិក្សាបន្តនូវចំនួនសនិទានដែលមានភាគយកនិងភាគបែងជាពហុធាដូចជា $\frac{x}{y}$, $\frac{a+b}{b}$, $\frac{1+x}{x^2-1}$ ហៅថាកន្សោមសនិទាន ។

ជាទូទៅ កន្សោមសនិទានជាកន្សោមមានទម្រង់ $\frac{A}{B}$ ដែល A និង B ជាពហុធាហើយ $B\neq 0$ ។

សំគាល់ កន្សោម $\frac{x}{\sqrt{y}}$ ពុំមែនជាកន្សោមសនិទាន ព្រោះ $\sqrt{y}$ ពុំមែនជាពហុធា ។

លំហាត់គំរូ បកស្រាយឃ្លាគណិតវិទ្យាខាងក្រោមជាកន្សោមសនិទាន

ក. ផលធៀបនៃពីរចំនួនគត់តគ្នា

ខ. ផលធៀបរវាងផ្ទៃក្រឡានិងបរិមាត្រនៃចតុកោណកែងដែលមានវិមាត្រ x និង y ។

ចម្លើយ

ក. បើ n ចំនួនគត់នោះចំនួនបន្ទាប់គឺ $n+1$ ។ ដូចនេះផលធៀបនៃពីរចំនួននោះគឺ $\frac{n}{n+1}$ ។

ខ. ផ្ទៃក្រឡាចតុកោណកែងគឺ xy និងបរិមាត្រនៃចតុកោណកែងគឺ $2(x+y)$

ដូចនេះផលធៀបរវាងផ្ទៃក្រឡានៃនិងបរិមាត្រគឺ $\frac{xy}{2(x+y)}$ ។

ប្រតិបត្តិៈ រកផលធៀបរវាងផ្ទៃក្រឡានៃរង្វង់ដែលមាន r កាំនិងការេដែលមានជ្រុង x ។

៥.៤.១. តម្លៃលេខនៃកន្សោមសនិទាន

ឧទាហរណ៍ យើងមានកន្សោមសនិទាន $\frac{3x}{x-2}$ ។ គណនាតម្លៃលេខនៃកន្សោមនេះចំពោះ $x=-1$, $x=0$, $x=2$

យើងបានតម្លៃលេខនៃកន្សោមដោយជំនួសតម្លៃនៃអថេរ x ទៅក្នុងកន្សោមសនិទានដែលឱ្យៈ

- ចំពោះ $x=-1$,យើងបាន $\frac{3(-1)}{-1-2}=\frac{-3}{-3}=1$ ។

- ចំពោះ $x=0$, យើងបាន $\frac{3\times 0}{0-2}=\frac{0}{-2}$ ភាគយកស្មើនិង 0 នាំឱ្យកន្សោមស្មើនិង 0 ។
- ចំពោះ $x=2$, ភាគបែង $x-2=0$ ក្នុងករណីនេះកន្សោមគ្មានន័យ ។

លំហាត់គំរូ យើងមានកន្សោមសនិទាន $\frac{a-5}{2a+6}$ ។ ចូរកំណត់តម្លៃនៃអថេរ a ដើម្បីឱ្យកន្សោមសនិទានៈ

ក. គ្មានន័យ ខ. ស្មើនិងសូន្យ

ចម្លើយ

ក. កន្សោមសនិទានគ្មានន័យលុះត្រាតែភាគបែងស្មើនិង 0

$2a+6=0$ នាំឱ្យ $a=\frac{-6}{2}=-3$ ។

ខ. កន្សោមសនិទានស្មើនិង 0 លុះត្រាតែភាគយកស្មើនិង 0

$a-5=0$ នាំឱ្យ $a=5$

ប្រតិបត្តិ យើងមានកន្សោមសនិទាន $\frac{4}{x^2+1}$ ។

ក. គណនាតម្លៃលេខនៃកន្សោចំពោះ $x=-1$, $x=1$ ។

ខ. តើមានតម្លៃ x ដែលនៃឱ្យកន្សោមស្មើនិងសូន្យឬទេ ? គ្មានន័យ ?

៥.៤.២. ការសម្រួលកន្សោមសនិទាន

ដូចគ្នានិងចំនួនសនិទានដែរ គេសម្រួលប្រភាគដោយចែកភាគយកនិងភាគបែងនិងកត្តារួម

ឧទាហរណ៍ទី១ សម្រួល $\frac{2x-6}{5x-15}$

$$\frac{2x-6}{5x-15}=\frac{2(x-3)}{5(x-3)} \quad \left\{ \text{ចែកភាគយកនិងភាគបែងជាផលគុណកត្តារួមចែកនិងកត្តារួម} \right\}$$

$$=\frac{2}{5}$$

កន្សោមអាចសម្រួលបានលុះត្រាតែមានលក្ខខណ្ឌឬ។ដើម្បីងាយសម្រួលក្នុងការធ្វើប្រមាណវិធី យើងចាត់ទុករាល់ការសម្រួលកន្សោមសនិទានចំពោះតែតម្លៃនៃអថេរដែលធ្វើឱ្យប្រភាគមានន័យតែប៉ុណ្ណោះ។ ហេតុនេះគេមិនចាំបាច់បញ្ជាក់អមពីរលក្ខខណ្ឌនោះទេ ។

ឧទាហរណ៍ទី២ សម្រួល $\frac{12a^2b^3}{15a^5b}$

$$\frac{12a^2b^3}{15a^5b}=\frac{3a^2 4b^2b}{3a^2 5a^3b} \quad \left\{ \text{ចែកភាគយកនិងភាគបែងនិងកត្តារួម } 3a^2b \right\}$$

$$=\frac{4b^2}{5a^3} \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី៣ សម្រួល $\frac{3x^2+4x}{9x^2-16}$

$$\frac{3x^2+4x}{9x^2-16}=\frac{x(3x+4)}{(3x-4)(3x+4)} \quad \left\{ \text{ចែកភាគយកនិងភាគបែងជាផលគុណកត្តារួមចែកនិងកត្តារួម} \right\}$$

$$= \frac{x}{(3x-4)}$$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៤ សម្រួល $\frac{1-x}{x^2+x-2}$

$$\frac{1-x}{x^2+x-2} = \frac{1-x}{(x-1)(x+2)}$$ $\left\{ \begin{array}{l} x-1 \text{ និងគឺ } x-1 \text{ ផ្ទុយគ្នា} \\ 1-x = -(x-1) \end{array} \right\}$

$$\frac{1-x}{(x-1)(x+2)}$$ { ចែកភាគយកនិងភាគបែងនិងកត្តារួម $x-1$ }

$$= -\frac{1}{(x+2)}$$ ។

ជាទូទៅៈ ដើម្បីសម្រួលកន្សោមសនិទានគេត្រូវ

- ដាក់ភាគយកនិងភាគបែងជាផលគុណកត្តា
- ចែកភាគយកនិងភាគបែងនិងកត្តារួមខុសពីសូន្យ

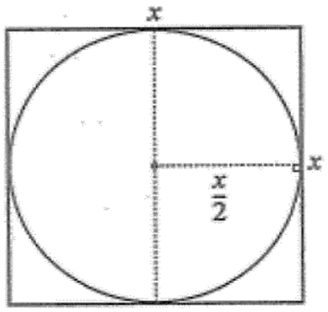
  បើ $\frac{A}{B}$ ជាកន្សោមសនិទាននោះ $\frac{AK}{BK} = \frac{A}{B}$, $K \neq 0$ ។

លំហាត់គំរូ១ សម្រួលកន្សោមសនិទាន $\frac{(x-3)(3x-1)-(2x-6)(x+1)}{1-x^2}$

ចម្លើយ $\frac{(x-3)(3x-1)-(2x-6)(x+1)}{1-x^2} = \frac{(x-3)(3x-1)-2(x-3)(x+1)}{-(x^2-1)}$

$$\frac{(x-3)[3x+1-2(x+1)]}{-(x-1)(x+1)} = \frac{(x-3)(x-1)}{-(x-1)(x+1)} = -\frac{x-3}{x+1}$$ ។

លំហាត់គំរូ២ រង្វង់មួយចារិកក្នុងការេដែលជ្រុងមានរង្វាស់ស្មើនិង x។ គណនាផលធៀបរវាងផ្ទៃក្រឡានៃរង្វង់និងការេ ។



ចម្លើយ រង្វង់មានកាំស្មើនិង $\frac{x}{2}$

ផ្ទៃក្រឡារង្វង់គឺ $\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}$ ។ ផ្ទៃក្រឡាការេគឺ x^2

ផលធៀបនោះគឺ $\frac{\frac{\pi}{4}x^2}{x^2} = \frac{\pi}{4}$ ។

ប្រតិបត្តិ សម្រួលកន្សោមសនិទានខាងក្រោម

ក. $\frac{a-b}{b^2-a^2}$

ខ. $\frac{5(a-1)-a(a-1)}{5(a+2)-a^2-2a}$

គ. $\frac{x+y}{x^2+xz-xy-zy}$

ឃ. $\frac{3a^3-3a^2-6a}{6a^3-12a^2-18a}$

៥.៤.៣. វិធីគុណវិធីចែកកន្សោមសនិទាន

ក. វិធីគុណកន្សោមសនិទាន

ដូចគ្នានិងវិធីគុណចំនួនសនិទានដែរ

$\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{3\times2}{2\times2\times5}$ $\left\{ \text{ចែកភាគយកនិងភាគបែងនិងកត្តារួម} \right\}$

$=\frac{3}{2\times5}=\frac{3}{10}$ ។

ឧទាហរណ៍១ រកផលគុណរួចសម្រួល $\frac{7b}{10a}\times\frac{5a^2}{8b}$

$\frac{7b}{10a}\times\frac{5a^2}{8b}=\frac{7b\cdot5a^2}{10a\cdot8b}=\frac{35a^2b}{80ab}$

$=\frac{5ab\cdot7a}{5ab\cdot16}$ (ចែកភាគយកនិងភាគបែងនិងកត្តារួម)

$=\frac{7a}{16}$ ។

ឧទាហរណ៍២ រកផលគុណរួចសម្រួល $\frac{5x}{4x-12}\times\frac{2x^2-16x}{3}$

$\frac{5x}{4x-12}\times\frac{2x^2-16x}{3}=\frac{5x}{4(x-3)}\times\frac{2x(x-3)}{3}$

$=\frac{10x^2(x-3)}{12(x-3)}$ (ចែកភាគយកនិងភាគបែងនិងកត្តារួម)

$=\frac{5x^2}{6}$ ។

> **ជាទូទៅ** ដើម្បីគុណកន្សោមសនិទានគេត្រូវ
> - ដាក់ភាគយកនិងភាគបែងជាផលគុណកត្តាបើអាច
> - គុណភាគយកនិងភាគយកហើយភាគបែងគុណនិងភាគបែង
> - សម្រួលភាគយកនិងភាគបែងនិងកត្តារួម ។
>
> បើ $\frac{A}{B}$ និង $\frac{C}{D}$ ជាពីរកន្សោមសនិទាន គេបាន $\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}$ ។

លំហាត់គំរូ១ គណនាផលគុណ

ក. $\frac{a^2-2a+1}{a^2-1}\times\frac{a^2+a}{a^2-2a}$ ខ. $\frac{m^2+6m+9}{(a+2b)^2}\times\frac{7a+14b}{m+3}$

ចម្លើយ

ក. $\frac{a^2-2a+1}{a^2-1}\times\frac{a^2+a}{a^2-2a}=\frac{(a-1)^2}{(a-1)(a+1)}\times\frac{a(a+1)}{a(a-2)}$

$=\frac{a(a-1)^2(a+1)}{a(a-1)(a+1)(a-2)}$

$$= \frac{a-1}{a-2}$$ ។

ខ. $\frac{m^2+6m+9}{(a+2b)^2}\times\frac{7a+14b}{m+3} = \frac{(m+3)^2}{(a+2b)^2}\times\frac{7(a+2b)}{m+3}$

$$= \frac{7(m+3)^2(a+2b)}{(a+2b)^2 m+3}$$

$$= \frac{7(m+3)}{a+2b}$$ ។

ប្រតិបត្តិ គណនាផលគុណ

ក. $\frac{9a^2-6a+1}{5-a}\times\frac{5(a-2)-a(a-2)}{a^2+4}$ ខ. $(3x+3)\times\frac{x+4}{x^2+5x+4}$

ខ. វិធីចែកកន្សោមសនិទាន

ដូចគ្នានិងវិធីចែកចំនួនសនិទាន

$$\frac{3}{2}\div\frac{2}{5}=\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}=\frac{15}{4}$$

ឧទាហរណ៍: រកផលចែកកន្សោមសនិទានខាងក្រោម

ក. $\frac{4x}{15y}\div\frac{3x}{10y^2}=\frac{4x}{15y}\times\frac{10y^2}{3x}$

$$=\frac{40x^2y^2}{45xy}=\frac{8xy}{9}$$

ខ. $\frac{a^2-9}{3a}\div\frac{a+3}{a-3}=\frac{(a-3)(a+3)}{3a}\times\frac{(a-3)}{a+3}=\frac{(a-3)^2(a-3)}{3a(a+3)}=\frac{(a-3)^2}{3a}$

ជាទូទៅ: ដើម្បីចែកកន្សោមសនិទាន គេគុណប្រភាគតំណាងចែកនិងចម្រាស់នៃប្រភាគតួចែករួចធ្វើតាមវិធីគុណនៃកន្សោមសនិទាន ។

បើ $\frac{A}{B}$ និង $\frac{C}{D}$ ជាពីរកន្សោមសនិទានដែល B , C , $D\neq 0$ នោះ $\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{A\cdot D}{B\cdot C}$ ។

លំហាត់គំរូ គណនាផលចែកកន្សោមសនិទានខាងក្រោម

ក. $\frac{a+3}{b^2+4b+4}\div\frac{2a+6}{b+2}$ ខ. $\frac{4x^2+8x}{x^2-9}\div\frac{6x^2+12x^2}{x^2-2x-3}$

ចម្លើយ

ក. $\frac{a+3}{b^2+4b+4}\div\frac{2a+6}{b+2}=\frac{a+3}{b^2+4b+4}\times\frac{b+2}{2a+6}$ $=\frac{(a+3)(b+2)}{2(b+2)^2(a+3)}=\frac{1}{2(b+2)}$ ។

ខ. $\frac{4x^2+8x}{x^2-9}\div\frac{6x^2+12x^2}{x^2-2x-3}=\frac{4x^2+8x}{x^2-9}\times\frac{x^2-2x-3}{6x^2+12x^2}=\frac{4x(x-2)}{(x-3)(x+3)}\times\frac{(x-3)(x+1)}{6x^2(x+2)}$

$$=\frac{4x(x-2)(x-3)(x+1)}{6x^2(x+2)(x-3)(x+3)}=\frac{2(x+1)}{3x(x+3)}$$ ។

ប្រតិបត្តិ គណនាផលចែកកន្សោមសនិទានខាងក្រោម

ក. $\frac{4x+8}{x+3}\div(x+2)$ ខ. $\frac{x-y}{x^2-y^2}\div\frac{x+y}{x^2+2xy+y^2}$

គ. $\frac{3p-5q}{4p^2-q^2}\div\frac{5p-3q}{8p^2-4pq}$ ឃ. $\frac{4a^3b^2}{3a^2+5a}\div\frac{6a^5b^7}{3a^2+17a+20}$

៥. វិធីបូកនិងវិធីដកកន្សោមសនិទាន

៥.១. ករណីមានភាគបែងដូចគ្នា

ឧទាហរណ៍ រកផលបូកនិងផលដកកន្សោមសនិទានខាងក្រោម

ក. $\frac{5}{a}+\frac{7}{a}=\frac{5+7}{a}=\frac{12}{a}$

ខ. $\frac{3y-2}{y-5}+\frac{8y+7}{y-5}=\frac{3y+8y-2+7}{y-5}=\frac{11y+5}{y-5}$

គ. $\frac{3x}{(x-1)(x-2)}-\frac{6}{(x-1)(x-2)}=\frac{3x-6}{(x-1)(x-2)}=\frac{3}{(x-1)}$ ។

ជាទូទៅ $\frac{A}{B}+\frac{C}{B}=\frac{A+C}{B}$ និង $\frac{A}{B}-\frac{C}{B}=\frac{A-C}{B}$ ដែល $B\neq 0$

លំហាត់គំរូ គណនា

ក. $\frac{2}{x-3}+\frac{7}{3-x}$ ខ. $\frac{a}{2a+3}-\frac{a-3}{2a+3}$

ចម្លើយ

ក. $\frac{2}{x-3}+\frac{7}{3-x}=\frac{2}{x-3}-\frac{7}{x-3}=\frac{2-7}{x-3}$

ខ. $\frac{a}{2a+3}-\frac{a-3}{2a+3}=\frac{2-(a-3)}{2a+3}=\frac{2-a+3}{2a+3}=\frac{-a+5}{2a+3}$

ប្រតិបត្តិ គណនា ក. $\frac{t^2}{t+4}+\frac{4t}{t+4}$ ខ. $\frac{5x}{x-y}-\frac{5y}{y-x}$

៥.២. ករណីមានភាគបែងមិនដូចគ្នា

ដើម្បីឱ្យវិធីបូកនិងដកអាចប្រព្រឹត្តទៅបាន គេត្រូវធ្វើឱ្យមានភាគបែងដូចគ្នា ។

ឧទាហរណ៍ គណនាផលបូកនិងដកនៃកន្សោមសនិទាន

ក. $\frac{y}{2x}+\frac{x}{3y}=\frac{y\cdot 3y}{2x\cdot 3y}+\frac{x\cdot 2x}{3y\cdot 2x}=\frac{3y^2+2x^2}{6xy}$ (ភាគបែងរួមតូចបំផុតគឺ $6xy$)

ខ. $\frac{4}{n}-\frac{2}{n+1}=\frac{4(n+1)}{n(n+1)}-\frac{2n}{n(n+1)}=\frac{4(n+1)-2n}{n(n+1)}=\frac{4n+4-2n}{n(n+1)}=\frac{2(n+2)}{n(n+1)}$ ។

(ភាគបហែងរួមតូចបំផតគឺ $n(n+1)$)

ជាទូទៅ ដើម្បីបូក ឬដកកន្សោមសនិទានដែលមានភាគបែងមិនដូចគ្នាគេត្រូវ

- រកភាគបែងរួមតូចបំផុត
- ប្តូរប្រភាគនីមួយៗដោយប្រភាគសមមូលដែលមានភាគបែងរួមតូចបំផុត
- បូក ឬដកភាគយកដោយរក្សាភាគបែងរួមតូចបំផុតឱ្យនៅដដែល
- សម្រួលលទ្ធផលបើអាច ។

លំហាត់គំរូ១ គណនា $\frac{t+1}{t^2+5t}+\frac{8}{t^2-25}$

ចម្លើយ $\frac{t+1}{t^2+5t}+\frac{8}{t^2-25}=\frac{t+1}{t(t+5)}+\frac{8}{(t-5)(t+5)}=\frac{(t+1)(t-5)}{t(t+5)(t-5)}+\frac{8t}{t(t-5)(t+5)}$

$=\frac{t^2-5t+1-5+8t}{t(t-5)(t+5)}=\frac{t^2+4t-5}{t(t-5)(t+5)}=\frac{(t+5)(t-1)}{t(t-5)(t+5)}=\frac{t-1}{t(t-5)}$ ។

លំហាត់គំរូ២ បញ្ជាក់ថា $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$

រួចគណនាផលបូក $S=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}$ ។

ចម្លើយ $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}-\frac{n}{n(n+1)}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}$

តាមរូបមន្ត $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n(n+1)}$

$$\frac{1}{1\times 2}=1-\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2\times 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{3\times 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{4\times 5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$$

$$S=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$ ។

ប្រតិបត្តិ គណនា

ក. $\frac{2m}{m-5}+\frac{12}{m^2-25}$ ខ. $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{3x}-\frac{1}{x^2(x-1)}$

គ. $\frac{a^2-1}{a^2-2a-15}-\frac{a+2}{a+3}$ ឃ. $\frac{x^2+6x+9}{x^2+3x}+\frac{x^2-x-2}{x^2-4}$

៥.៣. កន្សោមសនិទានដែលមានទម្រង់ប្រភាគលើប្រភាគ

ឧទាហរណ៍ សម្រួលកន្សោម $\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}{\dfrac{b}{2a}-\dfrac{a}{2b}}$

គេអាចសម្រួលកន្សោមសនិទានតាមវិធីខាងក្រោម

$$\frac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}{\dfrac{b}{2a}-\dfrac{a}{2b}}=\frac{\dfrac{b+a}{ab}}{\dfrac{b^2-a^2}{4ab}}$$ ធ្វើប្រមាណវិធីចំពោះភាគយកនិងភាគបែងសិន

$$=\frac{a+b}{ab}\times\frac{2ab}{b^2-a^2}$$ ប្រភាគតំណាងចែកគុណចម្រាសប្រភាគតួចែក

$$=\frac{a+b}{ab}\times\frac{2ab}{(a+b)(b-a)}=\frac{2}{(b-a)}$$

ជាទូទៅ: $\dfrac{\dfrac{A}{B}}{\dfrac{C}{D}}=\dfrac{A}{B}\times\dfrac{C}{D}=\dfrac{A\cdot C}{B\cdot D}$ ដែល B , C , $D\neq 0$ ។

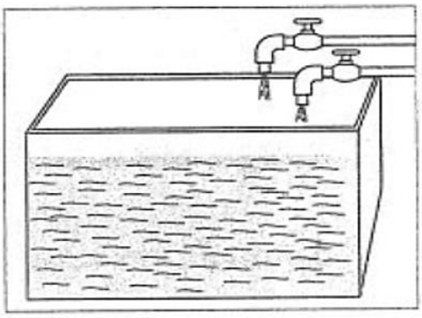
លំហាត់គំរូ១ សម្រួលកន្សោម $\dfrac{x-\dfrac{x+5}{x-3}}{x+1}$

ចម្លើយ

$$\frac{x-\dfrac{x+5}{x-3}}{x+1}=\frac{\dfrac{x(x-3)}{x-3}-\dfrac{x+5}{x-3}}{\dfrac{x+1}{1}}=\frac{\dfrac{x(x-3)-(x+5)}{x-3}}{\dfrac{x+1}{1}}$$

$$\frac{x^2-4x-5}{x-3}\times\frac{1}{x+1}=\frac{(x-5)(x+1)}{x-3}\times\frac{1}{x+1}=\frac{x-5}{x-3}$$ ។

លំហាត់គំរូ២ គេដឹងថាបំពង់ទឹកទី១ អាចបង្ហូរទឹកដាក់អាងមួយតែឯងពេញប្រើអស់រយៈពេល t_1 ម៉ោង ហើយបំពង់ទឹកទី២ អាចបង្ហូរទឹកដាក់អាងមួយតែឯងពេញប្រើអស់រយៈពេល t_2 ម៉ោង ។ ចូរបញ្ជាក់ថាបំពង់ទឹកទាំងពីរបង្ហូរទឹកដាកអាងនោះរួមគ្នាប្រើអស់រយៈពេល ។



ចម្លើយ បើ c ជាចំណុះនៃអាងទឹកដែលបំពង់ទឹកទី១ បង្ហូរចូលអាងគឺ $\dfrac{c}{t_1}$ ។

ជាចំណុះនៃអាងទឹកដែលបំពង់ទឹកទី២ បង្ហូរចូលអាងគឺ $\dfrac{c}{t_2}$ ។

ទឹកដែលបំពង់ទាំងពីរបង្ហូរចូលអាងរួមគ្នា គឺ $\dfrac{c}{t_1}+\dfrac{c}{t_2}=c\left(\dfrac{1}{t_1}+\dfrac{1}{t_1}\right)$

ដើម្បីបង្ហូរទឹកឱ្យបានពេញអាងគេត្រូវប្រើពេលអស់ $\dfrac{c}{c\left(\dfrac{1}{t_1}+\dfrac{1}{t_1}\right)}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{t_1}+\dfrac{1}{t_1}\right)}=\dfrac{t_1t_2}{t_1+t_2}$

អនុវត្តន៍ជាលេខ៖ បើ $t_1=5$ ម៉ោងនិង $t_2=20$ ម៉ោង

នោះបំពង់ទាំងពីររួមគ្នាប្រើពេលត្រឹមតែ $\dfrac{t_1t_2}{t_1+t_2}=\dfrac{5\times 20}{5+20}=\dfrac{100}{25}=4$ ម៉ោង ។

ប្រតិបត្តិ៖ សម្រួលកន្សោមខាងក្រោម

ក. $\dfrac{1-\dfrac{1}{3}}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}}$ ខ. $\dfrac{\dfrac{5}{n+1}-\dfrac{1}{n-1}}{\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{2}{n-1}}$

លំហាត់អនុវត្ត

1. តើកន្សោមខាងក្រោម មួយណាជាឯកធា ?

$\frac{x^3}{3}$, $\sqrt{5}ax^2$, $\frac{7xy^2}{3}$, $x+2y$, $\frac{a}{x^2}$, $x(x+y)$ ។

2. ចូរសរសេរចំនួនគត់ខាងក្រោមជាពហុធា ហើយរៀបតាមលំដាប់ចុះដឺក្រេនៃ 10

1997 , 2674 , 20011 , 82470 , 872036 , 973248 , 881722

3. គណនា

ក. $3x^2+7x^2-5x^2$　　ខ. $\frac{2}{3}x^4y^4t+2x^4y^4t-x^4y^2t$

គ. $(x^2+2y)(x+1)$　　ឃ. $(x^2-y)(y-4)$

4. គណនាផលបូកខាងក្រោម

ក. $3x^2y^2+2x^2y^2$

ខ. $(5a^3b^2-3ab)+(2a^3b^2-ab)$

គ. $(4x^4-3y^3+z)+(3x^3+2y^2-4z)$

ឃ. $(5t^3+t-3b)+(4t^3-2t^2+4)+(3t^3+4t^2-5)$

5. ដាក់កន្សោមខាងក្រោមជាផលគុណកត្តា

ក. $9(2x+1)-16(2x+1)^2$　　ខ. $(3a^2-12a)-5(a-4)$

គ. $(a-3b)^2-9(a-3b)^2$　　ឃ. $x(4x-8y)+y(x-2y)$

ង. $8(x-1)^2-27(x+2)^3$　　ច. $(2a-2b+10)+(a-b)(a-b+5)$

ឆ. $(2x-3)(5x-1)-(2x-3)(x+1)$　　ជ. $(7a-1)^2-(7a-1)(3a+2)$

ឈ. $(2x+3)^2-(2x+3)(5x-7)$　　ញ. $(y-8)(4y-1)+y^2-8y$

ដ. $8ax-bx+8ay-by$　　ឋ. $ax+ay-2bx-2by$

ឌ. a^2-25　　ឍ. $4b^2-1$

ណ. $9x^2-4$　　ត. x^2-4y^2

ថ. $25x^2-16y^2$　　ទ. $a^2x^2-b^2c^2$

ធ. $5x^2-80x$　　ន, $4t^3-a^2x^2$

ប. $49b^2-25$　　ផ. $25x^2b^2-4t^2z^2$

ព. $(x+1)^2-4$　　ភ. $9a^2-(a+2)^2$

ម. $8x^2-24x+32x^3$　　យ. $15x^3+5x^2-35x^5$

រ. $12abx-6ax^2+3a^2x$　　ល. $16x^2y^2+4x^2y-2xy$

វ. $a^2c-2acx+cx^2$　　ស. $8ab^4-16a^2b^2+4a^4b^4$

ហ. x^2+3x+2　　ឡ. $3x^2+14x+8$

អ. x^2-4x-2

6. ដាក់កន្សោមខាងក្រោមជាផលគុណកត្តា

ក. x^2-4x+5

ខ. x^2-3x-2

គ. x^2-5x+6

ឃ. x^2-8x+9

ង. x^2+4x+3

ច. $4x^2-8x+3$

ឆ. $14a^2+18a-20$

ជ. $9a^2+3a+2$

ឈ. $24x^2-71x-35$

ញ. $6x^2+5x+1$

ដ. $6x^2-x+1$

ឋ. $14x^2+32x+8$

ឍ. $3x^2+2x^2-x-2$

ណ. x^3+x^2-2x-1

ត. x^2+6x+9

ថ. $10x-x^2-25$

ទ. $x^3-\frac{8}{125}$

ធ. $8x^3-\frac{1}{8}$

ន. $25x^2-9$

ប. x^3+27

ផ. $x^2+5x-14$

ព. $4x^2-7x-11$

ភ. $x^2-12x+35$

ម. $2x^2-20x+42$

យ. $2x^2-4x-77$

រ. $5x^2-26x-5$

7. គណនាតម្លៃលេខនៃកន្សោមសនិទានខាងក្រោម

ក. $\frac{x-3(x+1)}{x-3}$ ចំពោះ $x=-1$, $x=\frac{1}{2}$ និង $x=-\frac{2}{3}$

ខ. $\frac{-a^2+4}{2a^2-a-1}$ ចំពោះ $a=-2$, $a=-\frac{1}{2}$ និង $a=1$

គ. $\frac{y-3}{y^2-5y+4}$ ចំពោះ $y=0$, $y=1$ និង $y=-\frac{1}{2}$

ឃ. $\frac{3x+4y}{x^2-xy}$ ចំពោះ $x=-1$ និង $y=\frac{1}{4}$

ង. $\frac{b^3-b}{(1+ab)^2-(a+b)^2}$ ចំពោះ $a=-56$ និង $b=125$

8. សម្រួលកន្សោមសនិទានខាងក្រោម

ក. $\frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}$

ខ. $\frac{6-\frac{5}{2}+\frac{3}{8}}{3-\frac{5}{2}-\frac{7}{4}}$

គ. $\frac{\frac{5}{6}-\frac{5}{7}}{\frac{5}{6}+\frac{5}{7}}$

ឃ. $\frac{\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{3x}}$

ង. $\frac{14x^3}{7x^2y}$

ច. $\frac{-8a^2b^4x}{(-2abx)^3}$

ឆ. $\frac{x(a-b)^2}{(a-b)^3}$

ជ. $\frac{9ab(x-3)}{18a^2b(x^2-9)}$

ឈ. $\frac{x^2y+xy^3}{xy^2}$

ញ. $\frac{1-25x^2}{5x-1}$

ដ. $\frac{(1-x)(3-x)+(5+x)(1-x)}{x^2-9}$

ឋ. $\frac{a^2+am-an-mn}{a^2+am+an+mn}$

ឌ. $\frac{a^2-ab-ac+bc}{a^2+ab-ac-bc}$

ឍ. $\frac{ax-ay-x+y}{3x-3y}$

ណ. $\frac{-a^2+a}{a^2+a-2}$

ត. $\frac{4x^2+8x+4}{5x^2+10x+5}$ ថ. $\frac{3x^2+5xy+y^2}{4x^2+7xy-2y^2}$ ទ. $\frac{2y^2-17y+21}{y^2-6y-7}$

9. រកផលគុណនិងផលចែកនៃកន្សោមសនិទានខាងក្រោម

ក. $\frac{4x^3y}{3xy^4}\times\frac{-6x^2y^2}{10x^5}$ ខ. $\frac{72x^2y}{54xy^2}\div\frac{-4xy}{-15x^2y^3}$

គ. $\frac{a^2b}{4c^2d}\times\frac{2c^4d^5}{3ab^2}$ ឃ. $\frac{-64a^3b^3}{28a^2b}\div\frac{40a^2b^2}{90b}$

ង. $\frac{b(b+4)}{b-3}\times\frac{(b+3)(b-3)}{b+4}$ ច. $\frac{(3x-4)(2x+3)}{(3x+5)(3x-5)}\times\frac{(2x+3)(2x-3)}{(2x+5)(2x-1)}$

ឆ. $\frac{y^2-3y}{(y-3)^2}\times\frac{y^2-9}{y^2+3y}$ ជ. $\frac{x-y}{x^2-y^2}\div\frac{x+y}{x^2+2xy+y^2}$

ឈ. $\frac{a^2-49}{(a+7)}\times\frac{49-a^2}{(7-a)^2}$ ញ. $\frac{xu-yu+xv-yv}{xu+yu-xv-yv}\div\frac{xu-yu-xv+yv}{xu+yu+xv_yv}$

ដ. $\frac{b^2-1}{b^2+3b+2}\times\frac{b^2-2b+8}{b^2-4b+3}$ ឋ. $\frac{2m^2+3mn-2n^2}{2m^2-3mn-2n^2}\div\frac{2m-n}{2m+n}$

11. រកផលបូក ឬផលបូកកន្សោមសនិទានខាងក្រោម

ក. $\frac{12a}{7}+\frac{2a}{7}$ ខ. $\frac{y}{14}-\frac{3y}{14}$ គ. $\frac{x}{x-1}+\frac{1}{x-1}$

ឃ. $\frac{y}{b+6}+\frac{2y}{b+6}$ ង. $\frac{6x}{x+y}+\frac{6y}{x+y}$ ច. $\frac{a+b}{x-3}-\frac{a+b}{3-x}$

ឆ. $\frac{a^2}{a-b}+\frac{-b^2}{a-b}$ ជ. $\frac{a}{2a-2b}-\frac{b}{2a-2b}$ ឈ. $\frac{x^2}{x^2-1}+\frac{2x+1}{x^2-1}$

ញ. $\frac{a^2-9a+20}{a^2-16}-\frac{a^2-25}{a^2+12a+35}$ ដ. $\frac{3x-y}{2}+\frac{2x-y}{4}$

ឋ. $\frac{2x+y}{3}-\frac{x-5y}{6}$ ឌ. $\frac{5}{xy}+\frac{6}{yz}$ ឍ. $\frac{3c}{2ab}-\frac{a}{4bc}$

ណ. $\frac{4a}{2a+6}+\frac{3}{a+3}$ ត. $\frac{a-b}{(a+b)^2}-\frac{a-b}{(a-b)^2}$ ថ. $\frac{b-c}{bc}+\frac{c-a}{ca}+\frac{a-b}{ab}$

ទ. $\frac{4a}{10c-5b}+\frac{2b}{6c-3d}$ ធ. $\frac{a+1}{2a-8}-\frac{a+2}{(a-b)^2}$

ន. $\frac{4a}{a^2-4}+\frac{5a}{a^2+5a}+\frac{a+1}{1-a^2}$ ម. $\frac{a-2}{a^2+4a+4}+\frac{a+2}{a-2}$ រ. $\frac{p^2+4p+3}{p^2+7p+12}-\frac{p^2-6p+5}{p^2-2p+1}$

ល. $\frac{x-3}{x^2-x-6}-\frac{x+2}{x^2-4}-\frac{x+4}{x^2+8x+16}$ វ. $\frac{a^2-9a+20}{a^2-16}-\frac{a^2-25}{a^2+12a+35}$

ស. $\frac{20x^2-23x-7}{30x^2-17x-35}-\frac{42x^2-5x-2}{30x^2-15x-3}$ ហ. $\frac{56y^2+5y-6}{49y^2+14y+8}+\frac{24y^2-2y-15}{12y^2+37y+21}$

ឡ. $\frac{xy}{ab}+\frac{(x-a)(y-b)}{a(a-b)}+\frac{(x-b)(y-b)}{b(b-a)}$

មេរៀនទី៦ សមីការ និងវិសមីការដឺក្រេទី១មានមួយអញ្ញាត

៦.១. សមីការដឺក្រេទី១មានមួយអញ្ញាត

ក. សមីការដឺក្រេទី១មានមួយអញ្ញាត

ឧទាហរណ៍១ សមីការ $3x + 4 = 5$ ជាសមីការដឺក្រេទី១ មានមួយអញ្ញាត ដែលមាន x ជាអញ្ញាត

$5x - 6 = 4x + 7$ ជាសមីការដឺក្រេទី១ មានអញ្ញាត

សន្និដ្ឋាន

សមីការដឺក្រេទី១ មានមួយអញ្ញាត គឺជាសមីការទាំងឡាយ ដែលបន្ទាប់ពីសម្រួលហើយ អាចដាក់ជារាង $ax + b = 0$ ដែល $a \neq 0$ ។

ខ. ដំណោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី១មានមួយអញ្ញាត

ឧទាហរណ៍១ ដោះស្រាយសមីការ $2x + 12 = 24$

តាមលក្ខណៈសមីការសមមូល យើងអាចថែម -12 លើអង្គទាំងពីរនៃសមីការ

យើងបាន $2x + 12 - 12 = 24 - 12$

$2x = 24 - 12$

$2x = 12$

តាមលក្ខណៈសមីការសមមូល យើងចែកអង្គទាំងពីរនឹង 2

យើងបាន $\frac{2x}{12} = \frac{12}{2}$

$x = 6$

ក្នុងការប្រតិបត្តិ យើងអាចគណនាដោយខ្លីដូចខាងក្រោម

$2x + 12 = 24$

គេអាចលើកតួពីអង្គម្ខាងទៅអង្គម្ខាងទៀត ដោយប្តូរសញ្ញា

$2x + 12 = 24$

$2x = 24 - 12$

$2x = 12$

$x = \frac{12}{2} = 6$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $2x + 12 = 24$

យកតម្លៃ $x = 6$ ជំនួសក្នុងសមីការ

យើងបាន $2(6) + 12 = 24$

$24 = 24$ ពិត

ដូចនេះ $x = 6$ ជាឫសនៃសមីការ ។

ឧទាហរណ៍២ ដោះស្រាយសមីការ $2x + 14 = 14$

យើងបាន $2x + 12 = 24$

$2x = 14 - 14$

$2x = 0$

$x=0$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $2x+14=14$

យកតម្លៃ $x=0$ ជំនួសក្នុងសមីការ

យើងបាន $2(0)+14=14$

$14=14$ ពិត

ដូចនេះ $x=0$ ជាឫសនៃសមីការ ។

ឧទាហរណ៍៣ ដោះស្រាយសមីការ $2x-4(x-5)=2(10-x)$

យើងបាន $2x-4(x-5)=2(10-x)$

$2x-4x+20=20-2x$

$2x-4x+2x=20-20$

$0x=0$

ក្នុងករណីនេះ សមីការផ្ទៀងផ្ទាត់គ្រប់តម្លៃ x ។ គេថាសមីការមានឫសរាប់មិនអស់ ។

ឧទាហរណ៍៤ ដោះស្រាយសមីការ $105x+(24-2x)=80x+(15+23x)$

យើងបាន $105x+(24-2x)=80x+(15+23x)$

$105x-2x-80x-23x=15-24$

$0x=-9$ ជាករណីមិនអាចមាន

ក្នុងករណីនេះគ្មានតម្លៃ x គុណនឹងសូន្យស្មើ -9 បានទេ ។ គេថាសមីការគ្មានឫស ។

ជាទូទៅ

សមីការ $ax+b=0$

បើ $a\neq 0$ និង $b\neq 0$ សមីការមានឫសតែមួយគត់គឺ $x=-\frac{b}{a}$ ។

បើ $a\neq 0$ និង $b=0$ សមីការមានឫសតែមួយគត់គឺ $x=0$ ។

បើ $a=0$ និង $b=0$ សមីការមានឫសរាប់មិនអស់ ។

បើ $a=0$ និង $b\neq 0$ សមីការគ្មានឫស ។

ក. ដំណោះស្រាយសមីការដែលអង្គទី១ជាផលគុណកត្តាមានអញ្ញាតដឺក្រេទី១ និងអង្គទី២ស្មើសូន្យ

ឧទាហរណ៍១ ដោះស្រាយសមីការ $(x-1)(x-2)=0$

យើងបាន $(x-1)(x-2)=0$ ដើម្បីឲ្យផលគុណស្មើសូន្យ លុះត្រាកត្តាណាមួយស្មើសូន្យ ។

ដូចនេះ យើងបាន $x-1=0$ នោះ $x=1$

$x-2=0$ នោះ $x=2$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $(x-1)(x-2)=0$

យក $x=1$ ជំនួសក្នុងសមីការ

យើងបាន $(1-1)(1-2)=0$

$0(-1)=0$

$0=0$ ពិត

យក $x=2$ ជំនួសក្នុងសមីការ

យើងបាន $(2-1)(2-2)=0$

$1(0)=0$

$0=0$ ពិត

ដូចនេះ សមីការមានឫស $x=1$ និង $x=2$ ។

ឧទាហរណ៍២ ដោះស្រាយសមីការ $(x+1)^2-4=0$

យើងបាន $(x+1)^2-4=0$

$(x+1)^2-2^2=0$

$(x+1-2)(x+1+2)=0$

$(x-1)(x+3)=0$

$x-1=0$ នោះ $x=1$

$x+3=0$ នោះ $x=-3$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $(x+1)^2-4=0$

យក $x=1$ ជំនួសក្នុងសមីការ

យើងបាន $(1+1)^2-4=0$

$4-4=0$

$0=0$ ពិត

យក $x=-3$ ជំនួសក្នុងសមីការ

យើងបាន $(-3+1)^2-4=0$

$4-4=0$

$0=0$ ពិត

ដូចនេះ សមីការមានឫស $x=1$ និង $x=-3$

សន្និដ្ឋាន

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការ ដែលអង្គទី១ជាផលគុណកត្តាមានអញ្ញាតដឺក្រេទី១ និងអង្គទី២ស្មើសូន្យគេត្រូវ ៖

- ឲ្យកត្តានីមួយៗ ស្មើសូន្យ
- រកតម្លៃ x ធ្វើឲ្យកត្តានីមួយៗស្មើសូន្យ
- ផ្ទៀងផ្ទាត់លទ្ធផលក្នុងសមីការ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការដែលមានភាគបែងជាលេខ

ឧទាហរណ៍១ ដោះស្រាយសមីការ $4x-\frac{x-1}{7}=\frac{3x}{5}+49$

គេបាន $4x-\frac{x-1}{7}=\frac{3x}{5}+49$

តម្រូវភាគបែងរួម នៃអង្គទាំងពីររបស់សមីការ

យើងបាន $\frac{140x-5x+5}{35}=\frac{21x+1715}{35}$

លុបភាគបែងរួម គេបាន $140x-5x+5=21x+1715$

$140x-5x-21x=1715-5$

$114x=1710$

$x=\frac{1710}{114}=15$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $4x-\frac{x-1}{7}=\frac{3x}{5}+49$

យក $x=15$ ជំនួសក្នុងអង្គទាំងពីរនៃសមីការ

យើងបាន $4(15)-\frac{15-1}{7}=\frac{3(15)}{5}+49$

$60-2=9+49$

$58=58$ ពិត

ដូចនេះ $x=15$ ជាឫសរបស់សមីការ ។

ឧទាហរណ៍២ ដោះស្រាយសមីការ $\frac{8}{11}x+\frac{3}{4}+x-1=\frac{19}{11}x-\frac{1}{4}$

គេបាន $\frac{8}{11}x+\frac{3}{4}+x-1=\frac{19}{11}x-\frac{1}{4}$

តម្រូវភាគបែងរួមនៃអង្គទាំងពីររបស់សមីការ

យើងបាន $\frac{32x+33+44x-44}{44}=\frac{76x-11}{44}$

លុបភាគបែងរួមចេញពីអង្គទាំងពីរ

គេបាន $32x+33+44x-44=76x-11$

$76x-76x=11-11$

$0x=0$

សមីការផ្ទៀងផ្ទាត់គ្រប់តម្លៃ x។ ដូចនេះសមីការមានឫសរាប់មិនអស់ ។

សន្និដ្ឋាន

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី១មានមួយអញ្ញាត ដែលមានភាគបែងជាលេខគេត្រូវៈ

- តម្រូវភាគបែងរួម($PPCM$) នៃអង្គទាំងពីររបស់សមីការរួចលុបភាគបែងចោល
- លើកតួមានអញ្ញាតទៅអង្គម្ខាង និងតួគ្មានអញ្ញាតទៅអង្គម្ខាងទៀត ។ តួណាប្តូរអង្គត្រូវប្តូរសញ្ញារួចធ្វើប្រមាណវិធី ។
- ផ្ទៀងផ្ទាត់លទ្ធផលក្នុងសមីការដើម ។

យើងបាន $\frac{1(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{3(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

លុបភាគបែងរួមចោល $x+1=3(x-1)$

$x+1=3x-3$

$x-3x=-3-1$

$-2x=-4$

$x=\frac{-4}{-2}=2$ ខុសពីលក្ខខ័ណ្ឌខាងលើ

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{1}{x-1}=\frac{3}{x+1}$

យក $x=2$ ជំនួសក្នុងអង្គទាំងពីរនៃសមីការ

យើងបាន $\frac{1}{2-1}=\frac{3}{2+1}$

$1=1$ ពិត

ដូចនេះ សមីការមានឫស $x=2$ ។

ឧទាហរណ៍២ ដោះស្រាយសមីការ $\frac{x+4}{x-2}+\frac{x+1}{x-3}=2$

គេបាន $\frac{x+4}{x-2}+\frac{x+1}{x-3}=2$ សមីការមានន័យ លុះត្រាតែ $x\neq 2$ និង $x\neq 3$

ភាគបែងរួមគឺ $(x-2)(x-3)$ ។ តម្រូវភាគបែងនៃអង្គទាំងពីរ

យើងបាន $\frac{(x+4)(x-3)}{(x-2)(x-3)}+\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x-3)}=\frac{2(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)}$

លុបភាគបែងរួមចោល $(x+4)(x-3)+(x+1)(x-2)=2(x-2)(x-3)$

$x^2-3x+4x-12+x^2-2x+x-2=2x^2-6x-4x+12$

$2x^2-2x^2+10x=12+14$

$10x=26$

$x=\frac{26}{10}=\frac{13}{5}$ ខុសពីលក្ខខ័ណ្ឌខាងលើ

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{x+4}{x-2}+\frac{x+1}{x-3}=2$

យក $x=\frac{13}{5}$ ជំនួសក្នុងអង្គទាំងពីរនៃសមីការ

យើងបាន $\frac{\frac{13}{5}+4}{\frac{13}{5}-2}+\frac{\frac{13}{5}+1}{\frac{13}{5}-3}=2$

$2=2$ ពិត

ដូចនេះ សមីការមានឫស $x=\frac{13}{5}$ ។

សន្និដ្ឋាន ដើម្បីដោះស្រាយសមីការ ដែលមានអញ្ញាតនៅភាគបែងគេត្រូវ

– ដាក់លក្ខខណ្ឌឱ្យភាគបែង ដែលមានអញ្ញាតខុសពីសូន្យ

- ដោះស្រាយសមីការដូចសមីការធម្មតា
- ផ្ទៀងផ្ទាត់លទ្ធផល នឹងលក្ខខណ្ឌ រួចនឹងអង្គទាំងពីរនៃសមីការដើម ។

សមីការដឺក្រេទី១ មានមួយអញ្ញាត គឺជាសមីការទាំងឡាយ ដែលបន្ទាប់ពីសម្រួលហើយអាចដាក់ជារាង $ax+b=0$ ដែល $a\neq 0$ ។

ឃ. សមីការដឺក្រេទី១មានមួយអញ្ញាតដែលមានប៉ារ៉ាម៉ែត

ឧទាហរណ៍១ ដោះស្រាយសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត $(1-m)x=2m-1$

យើងបាន $(1-m)x=2m-1$

ពិភាក្សា

បើ $1-m\neq 0$ និង $2m-1\neq 0$ ឬ $m\neq 1$ និង $m\neq\frac{1}{2}$

សមីការមានឫសមួយគឺ $x=\frac{2m-1}{1-m}$

បើ $1-m=0$ ឬ $m=1$ សមីការមានរាង $0x=1$ មិនអាចមានគេថាសមីការគ្មានឫស

បើ $2m-1=0$ ឬ $m=\frac{1}{2}$ សមីការមានរាង $\frac{1}{2}x=0$ នោះសមីការមានឫស $x=0$ ។

ឧទាហរណ៍២ ដោះស្រាយសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត $m^2x-m^2+3mx=m^2x+3x-1$

យើងបាន $m^2x-m^2+3mx=m^2x+3x-1$

$$m^2x+3mx-m^2x-3x=m^2-1$$
$$3mx-3x=m^2-1$$
$$3x(m-1)=(m-1)(m+1)$$

ពិភាក្សា

បើ $m-1\neq 0$ ឬ $m\neq 1$ សមីការមានឫសតែមួយគត់គឺ $x=\frac{m+1}{3}$

បើ $m-1=0$ ឬ $m=1$ សមីការមានរាង $0x=0$ ជាសមីការមានចម្លើយរាប់មិនអស់ ។

សន្និដ្ឋាន ឫសរបស់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតប្រែប្រួលទៅតាមតម្លៃនៃប៉ារ៉ាម៉ែត ដូចនេះគេត្រូវពិភាក្សាតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត ដើម្បីបញ្ជាក់ឫសរបស់សមីការឲ្យបានច្បាស់លាស់ ។

៦.២. វិសមីការដឺក្រេទី១មានមួយអញ្ញាត

៦.២.១. លក្ខណៈនៃវិសមភាព

ឧទាហរណ៍១ $4>3$,$4+6>3+6$, $4-2>3-2$

ជាទូទៅ បើគេបូក ឬដកចំនួនតែមួយលើអង្គទាំងពីរនៃវិសមភាព គេបានវិសមភាពថ្មីដែលមានទិសដៅដូចវិសមភាពដើម ។

បើ $a > b$ នោះ $\begin{cases} a+c > b+c \\ a-c > b-c \end{cases}$

ឧទាហរណ៍២

$7 > 5$, $7 \times 3 > 5 \times 3$ គុណនឹង $3 > 0$

$7 > 5$, $7 \times (-3) < 5 \times (-3)$ គុណនឹង $-3 < 0$

ជាទូទៅ បើគេគុណ ឬចែកអង្គទាំងពីរនៃវិសមភាពនិងចំនួនវិជ្ជមានតែមួយ គេបានវិសមភាពថ្មីដែលមានទិសដៅដូចសមភាពដើម។

បើគេគុណ ឬចែកអង្គទាំងពីរនៃវិសមភាពនិងចំនួនអវិជ្ជមានតែមួយ គេបានវិសមភាពថ្មីមានទិសដៅផ្ទុយពីវិសមភាពដើម។

$a > b$ $\begin{cases} ac > bc \\ a \div c > b \div c \end{cases}$ បើ $c > 0$, $a > b$ $\begin{cases} ac < bc \\ a \div c < b \div c \end{cases}$ បើ $c < 0$

លំហាត់គំរូ គេឲ្យ a និង b ជាចំនួនខុសពីសូន្យ

ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^2 + b^2 \geq 2ab$

ខ. បើ a និង b មានសញ្ញាដូចគ្នា ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

គ. បើ a និង b មានសញ្ញាផ្ទុយគ្នា ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq 2$ ។

ចម្លើយ

ក. $(a-b)^2$ ជាចំនួនវិជ្ជមាន ឬស្មើនឹង 0

យើងបាន $(a-b)^2 \geq 0$ ឬ $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$ បូកអង្គទាំងពីរនឹង $2ab$

$$a^2 + b^2 - 2ab + 2ab \geq 2ab$$

ដូចនេះ $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ។

ខ. ដោយប្រើ $a^2 + b^2 \geq 2ab$ បើ a និង b មានសញ្ញាដូចគ្នានោះ $ab > 0$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $ab > 0$ វិសមភាពមិនប្តូរទិសដៅ

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} \geq \frac{2ab}{ab}$$

$$\frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{ab} \geq 2$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

ដូចនេះ $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ ។

គ. ដោយប្រើ $a^2 + b^2 \geq 2ab$ បើ a និង b មានសញ្ញាផ្ទុយគ្នានោះ $ab < 0$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $ab < 0$ វិសមភាពប្តូរទិសដៅ

$$\frac{a^2+b^2}{ab} \le \frac{2ab}{ab}$$

$$\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{ab} \le 2$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \le 2$$

ដូចនេះ $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \le 2$ ។

៦.២.២. សញ្ញាណវិសមីការដឺក្រេទី១មានមួយអញ្ញាត

ឧទាហរណ៍ រកចំនួនដែលថែមនឹង 3 តូចជាង5

គេតាង x ជាចំនួនដែលត្រូវរក $3 + x < 5$ (1) ជាវិសមីការ

បើយើងឱ្យ

$x = 1$ នោះតាម (1) យើងបាន $3 + 1 < 5$ ពិត

$x = 0$ នោះតាម (1) យើងបាន $3 + 0 < 5$ ពិត

$x = -1$ នោះតាម (1) យើងបាន $3 - 1 < 5$ ពិត

បើយើងចេះតែឱ្យតម្លៃ x តូចជាង 1 តទៅទៀត យើងនៅតែបានវិសមភាពពិតជានិច្ច មានន័យថា វិសមីការមានចម្លើយច្រើន ។

សន្និដ្ឋាន

1. វិសមីការដឺក្រេទី 1 មានមួយអញ្ញាត ជាពីរកន្សោមពីជគណិតដឺក្រេទី១ មានមួយអថេរដូចគ្នា ញែកពីគ្នា ដោយសញ្ញា > ឬ < ។
2. វិសមីការ មានចម្លើយច្រើន ។
3. វិសមីការមានទម្រង់ប្រហាក់ប្រហែល នឹងវិសមភាពគ្រាន់តែវិសមីការមានអថេរ នឹងវិសមភាពគ្មានអថេរ ។

៦.២.៣. វិសមីការសមមូល

ពីរវិសមីការមានចម្លើយដូចគ្នា ជាវិសមីការសមមូលគ្នា។ មានន័យថា គ្រប់ចម្លើយនៃវិសមីការទី1 ជាចម្លើយរបស់វិសមីការទី2 និងច្រាសមកវិញ គ្រប់ចម្លើយរបស់វិសមីការទី២ ជាចម្លើយរបស់វិសមីការទី 1 ។ ដោយវិសមភាព និង វិសមីការមានទម្រង់ប្រហាក់ប្រហែលគ្នា នោះយើងអាច អនុវត្តលក្ខណៈរបស់វិសមភាពនៅក្នុងវិសមីការដែរ ។

ក. បើគេថែមមួយចំនួន ឬមួយពហុធាលើអង្គទាំងពីរនៃវិសមីការ គេបានវិសមីការមួយសមមូលនឹងវិសមីការដើម ឬ តួណាប្តូរអង្គ តួនោះត្រូវប្តូរសញ្ញា ។

ខ. បើគេគុណឬចែកអង្គទាំងពីរនៃវិសមីការនឹងមួយចំនួនវិជ្ជមានដូចគ្នា គេបានវិសមីការមួយសមមូល និងវិសមីការដើម។

គ. បើគេគុណឬចែកអង្គទាំងពីរនៃវិសមីការនឹងមួយចំនួនអវិជ្ជមាន ហើយប្តូរទិសដៅវិសមីការនោះគេ

បានវិសមីការមួយសមមូលនឹងវិសមីការដើម។

៦.២.៤. ដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី១មានមួយអញ្ញាត

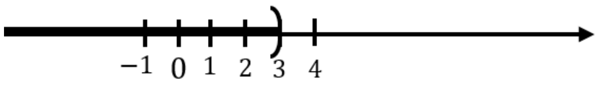
ឧទាហរណ៍១ ដោះស្រាយវិសមីការ $3x+1<x+7$

គេបាន $3x+1<x+7$

$$3x-x<7-1$$

$$2x<6 \text{ ហើយ } x<\frac{6}{2}=3$$

កំណាកស្រាយចម្លើយអ័ក្សនៃចំនួន



ចម្លើយរបស់វិសមីការជាអាប់ស៊ីសនៃចំណុចនៅលើផ្នែកដិតនៃអ័ក្សចំនួន ។

ឧទាហរណ៍២ ដោះស្រាយវិសមីការ $2x+\frac{2}{3}>3x+\frac{5}{2}$

គេបាន $2x+\frac{2}{3}>3x+\frac{5}{2}$ តម្រូវភាគបែង គេបាន $\frac{12x}{6}+\frac{4}{6}>\frac{18x}{6}+\frac{15}{6}$

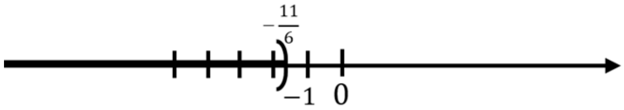
លុបភាគបែង គេបាន $12x+4>18x+15$

$12x-18x>15-4$

$-6x>11$ ចែកអង្គទាំងពីរនិង -6 ហើយប្តូរទិសដៅ

គេបាន $x=-\frac{11}{6}$

បំណាកស្រាយលើអ័ក្សនៃចំនួន



ចម្លើយរបស់វិសមីការជាអាប់ស៊ីសនៃចំណុចនៅលើផ្នែកដិតនៃអ័ក្សចំនួន។

ឧទាហរណ៍៣ ដោះស្រាយវិសមីការ $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{5}{9}<x-\frac{x}{6}+\frac{1}{2}$

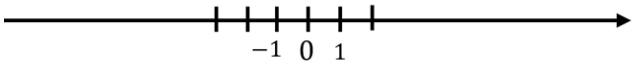
គេបាន $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{5}{9}<x-\frac{x}{6}+\frac{1}{2}$ តម្រូវភាគបែង

លុបភាគបែង គេបាន $9x+6x+10<18x-3x+9$

$15x+10<15x+9$

$0x<-1$ គ្មានតម្លៃ x ណាផ្ទៀងផ្ទាត់

បំណាកស្រាយលើអ័ក្សនៃចំនួន



សមីការនេះ គឺជាករណីមិនអាចមាន

ដូចនេះ វិសមីការគ្មានចម្លើយ ។

ឧទាហរណ៍៤ ដោះស្រាយវិសមីការ $(2x-5)(3x+1)+15x<2(x+3)+6x^2+10$

គេបាន $(2x-5)(3x+1)+15x<2(x+3)+6x^2+10$

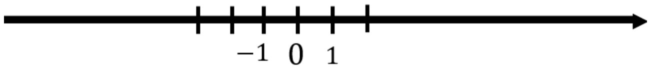
$6x^2+2x-15x-5+15x<2x+6+6x^2+10$

$6x^2+2x-5<6x^2+2x+16$

$0x<21$ វិសមីការផ្ទៀងផ្ទាត់គ្រប់តម្លៃ x

គេថា វិសមីការមានចម្លើយរាប់មិនអស់

បំណាកស្រាយលើអ័ក្សនៃចំនួន



ចម្លើយរបស់វិសមីការ គឺជាអ័ក្សអាប់ស៊ីសនៃគ្រប់ចំនុចនៅលើអ័ក្សនៃចំនួន ។

ប្រតិបត្តិដោះស្រាយវិសមីការ

ក. $3x-1>4$ ខ. $3x+2x+5<8x+4-3$

គ. $\frac{1}{3}+2x>3-\frac{x}{2}$ ឃ. $3x-\frac{x}{2}+\frac{x}{-2}<1$

៦.៣. ប្រព័ន្ធសមីការការដឺក្រេទី១មានពីរអញ្ញាត

៦.៣.១. សមីការដឺក្រេទី១ មានពីរអញ្ញាត

ឧទាហរណ៍១ $3x+4y=12$ ជាសមីការដឺក្រេទី១មានពីរអញ្ញាត x និង y

ឧទាហរណ៍២ $2x+3y-16=0$ ជាសមីការដឺក្រេទី១មានពីរអញ្ញាត x និង y

សន្និដ្ឋាន

សមីការការដឺក្រេទី១មានពីរអញ្ញាត ដែលក្រោយពីបង្រួមរួច ហើយមានរាង $ax+by+c=0$

ក្នុងនោះ x,y ជាអញ្ញាតហើយ a,b,c ជាលេខមេគុណដែលជាចំនួនសនិទាន និង $a\neq 0\,,b\neq 0$ ។

៦.៣.២. ចម្លើយរបស់សមីការដឺក្រេទី១ មានពីរអញ្ញាត

ឧទាហរណ៍ ចំពោះសមីការ $3x+2y-12=0$

នាំឲ្យ $x=\frac{12-2y}{3}$

ដូចនេះ បើយើងឲ្យតម្លៃណាមួយទៅ x យើងនឹងបានតម្លៃ y ជាគូនៃ x ដូចក្នុងតារាងខាងក្រោម

x	-3	0	2	3	5...
y	$\frac{21}{2}$	6	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{-3}{2}$....

៦.៣.៣. ប្រព័ន្ធសមីការដឺក្រេទី១ មានពីរអញ្ញាត

គេមានសមីការពីរ $3x-5y=4\quad(1)$

$2x+7y=13\ (2)$

សមីការនីមួយៗ មានគូចម្លើយរាប់មិនអស់ ។ បើសមីការទាំងពីរមានគូចម្លើយរួម គេហៅគូចម្លើយរួម នោះជាគូចម្លើយនៃប្រព័ន្ធ (A) ដែលគេសរសេរ

$$(A)\begin{cases}3x-5y=4 & (1)\\ 2x+7y=13 & (2)\end{cases}$$

បើ $(x=3, y=1)$ ជាគូចម្លើយនៃប្រព័ន្ធ(A) គេបាន

$3\times3-5\times1=4\qquad(1)$

$2\times3+7\times1=13\qquad(2)$

គូចម្លើយនៃប្រព័ន្ធនេះ ជាចម្លើយនៃសមីការ(1) និងសមីការ(2) ផង ។

៦.៣.៤. ដំណោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការដឺក្រេទី១ មានពីរអញ្ញាត

ក. វិធីតាមក្រាភិច

ឧទាហរណ៍១ ដោះស្រាយសមីការ $\begin{cases}x-y=4 & (1)\\ 2x+y=3 & (2)\end{cases}$

ចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការជាចម្លើយរួមនៃសមីការ (1) និងសមីការ(2) ។

ដោយសមីការ(1) និងសមីការ(2) តាំងដោយបន្ទាត់រៀងគ្នា $x-y=4$ និង $2x+y=2$

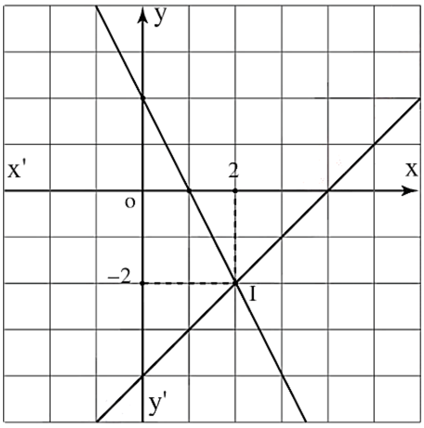
ក្នុងករណីនេះគេត្រូវសង់បន្ទាត់ទាំងពីរ

ចំពោះសមីការ $x-y=4\quad(2)$

x	0	4
y	–4	0

ចំពោះសមីការ $2x+y=2$

x	0	1
y	2	0



ដោយសារប្រព័ន្ធសមីការគឺរកគោឲ្យដាណៅនៃចំណុចដែលស្ថិតនៅលើបន្ទាត់(1)ផង និងបន្ទាត់(2)ផង មានន័យថាជាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ទាំងពីរ។

I ជាចំណុចប្រសព្វ ដើម្បីរកកូអរដោនេរបស់វា គេគូសចំណោលកែងពីរ I មកលើអាកទាំងពីរតាមក្រាប គេបាន $x = 2\,, y = -2$

ដូចនេះ $(-2,2)$ ជាគូរចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការ ។

ផ្ទៀងផ្ទាត់

ជំនួស$(-2,2)$ ក្នុងសមីការ (1) និង (2)

ចំពោះសមីការ (1) $\quad 2-(-2) = 2+2 = 4$

ចំពោះសមីការ (2) $\quad 2(2)+(-2) = 4-2 = 2$ ។

លំហាត់គំរូទី១ ចូលដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} x+3y=6 & (1) \\ x-3y=-3 & (2) \end{cases}$

ចម្លើយ

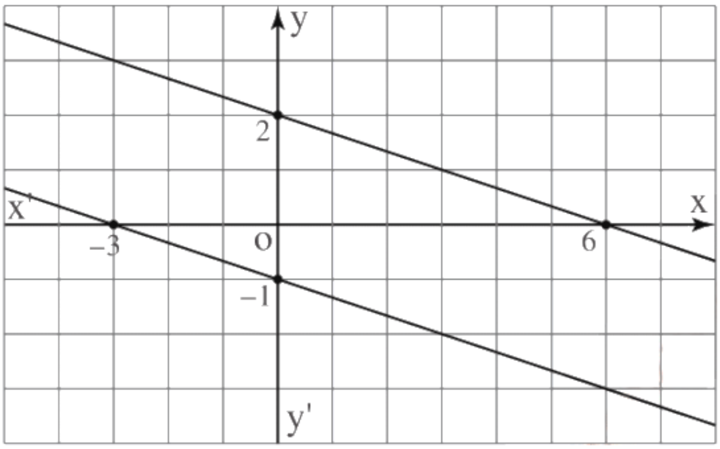
សង់បន្ទាត់ (1) និង (2) រួចដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការតាមក្រាប។ ក្នុងករណីនេះគេរកគូរឲ្យដឹងនៃរនៃចំណុចប្រសព្វរបៀបបន្ទាត់ទាំងពីរ ដោយធ្វើចំណោលកែងនៃចំណុចប្រសព្វមកលើអ័ក្សទាំងពីរ ។

ចំពោះសមីការ $x+3y=6 \qquad (1)$

x	0	6
y	2	0

ចំពោះសមីការ $x-3y=-3 \qquad (2)$

x	0	-3
y	-1	0



តាមក្រាប បន្ទាប់ទាំងពីរស្របគ្នាគឺគ្មានចំណុចប្រសព្វទេ ។ ក្នុងករណីនេះ គេថាប្រព័ន្ធសមីការគ្មានចម្លើយ ។

បើគេពិនិត្យមេគុណាប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ទាំងពីរក៏ឃើញថាវាស្របគ្នាដែរ។

$(1) \quad x+3y=6$

$(2) \quad x+3y=-3$

ឬ

$(1) \quad y=-\dfrac{x}{3}+2$

$(2) \quad y=-\dfrac{x}{3}-1$

ឃើញថា $a=a'=-\dfrac{1}{3}$

លំហាត់គំរូទី២ ចូលដោះស្រាយប្រពន្ធសមីការ $\begin{cases} y=4-x & (1) \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}=2 & (2) \end{cases}$ ។

ចម្លើយ

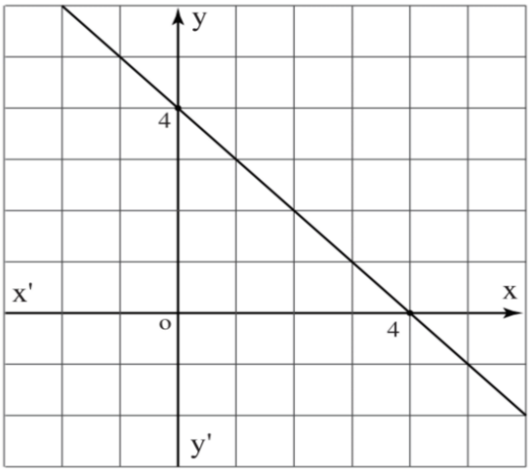
សង់បន្ទាត់នៃសមីការ (1) និង (2)

ចំពោះសមីការ(1) $\quad y=4-x$

x	0	4
y	4	0

ចំពោះសមីការ (2) $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=2$

x	0	4
y	4	0



តាមក្រាបបន្ទាត់ (1) និងបន្ទាត់(2) ត្រួតស៊ីគ្នា មានន័យថាវាមានចំណុចរួមច្រើនរាប់មិនអស់ ។ ក្នុងករណីនេះ គេថាប្រពន្ធសមីការមានគូចម្លើយរាប់មិនអស់ ។

ខ. វិធីបំបាត់ដោយជំនួស

ក្នុងប្រព័ន្ធសមីការមានពីរអញ្ញាត គេអាចចរនាតម្លៃនៃអញ្ញាតណាមួយក្នុងសមីការទី(1) រួចយកទៅជំនួសក្នុងសមីការទី(2) ធ្វើយ៉ាងនេះគេនឹងបានសមីការមួយដែលមានតែមួយអញ្ញាត។

ឧទាហរណ៍ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} y=7-3x & (1) \\ 2x-3y=12 & (2) \end{cases}$$

ជំនួសតម្លៃ $y=7-3x$ ក្នុងសមីការ(2)

$2x-3(7-3x)=12$

$2x-21+9x=12$

$11x=12+21$

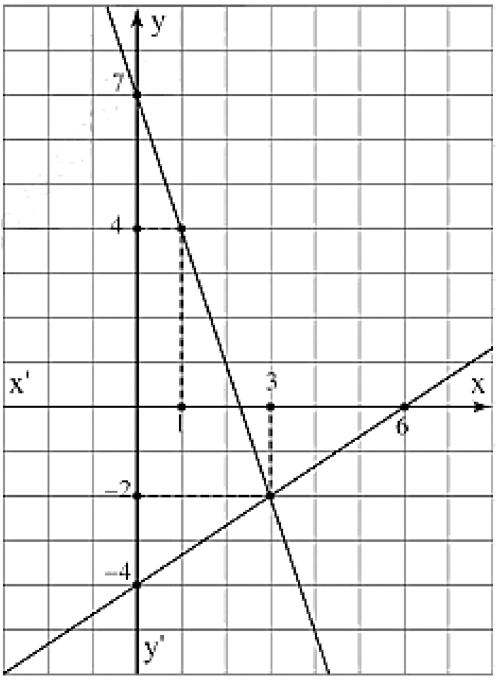
$11x=33 \Rightarrow x=\frac{33}{11}=3$

ជំនួសតម្លៃ $x=3$ ក្នុងសមីការ(1)

$y=7-3(3)=7-9=-2$

ដូចនេះ $(3,-2)$ ជាគូចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការ។

គេអាចផ្ទៀងផ្ទាត់តាមក្រាប



សមីការ $y=7-3x$ (1)

x	0	1
y	7	0

សមីការ $2x-3y=12$ (2)

x	0	6
y	-4	0

ធ្វើចំណោល់កែងនៃចំណុចប្រសព្វ គេបាន$(3,-2)$ ។

គ. វិធីបំបាត់ដោយបូក

ឧទាហរណ៍ទី១ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases}-2x+y & (1)\\ 5x-y=26 & (2)\end{cases}$

គេសង្កេតឃើញថាអញ្ញាត y មានសញ្ញាផ្ទុយគ្នា ហើយមានមេគុណស្មើគ្នាទៀត។ បើគេបូកអង្គនៃសមីការ (1) និងសមីការ (2) នឹងត្រូវបាត់ក្នុងករណីនេះគេបានសមីការមួយមានតែមួយអញ្ញាត ។

$$\begin{cases}-2x+y & (1)\\ 5x-y=26 & (2)\end{cases}$$

$3x = 15\,, x = 5$ ជំនួស $x = 5$ ក្នុង (1)

$-2(5)+y=-11,-10+y=-11, y-11+10=-1$ ។

ហេតុនេះ $(5,-1)$ ជាគូរចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការ ។

ផ្ទៀងផ្ទាត់ ជំនួស $(5\,,-1)$ ក្នុងសមីការ (1) និង (2)

$$\begin{cases}-2(5)+(-1)=-10-1=-11 & (1)\\ 5(5)-(-1)=25+1=26 & (2)\end{cases}$$

ឧទាហរណ៍ទី២ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases}2x+3y=21 & (1)\\ 3x+2y=19 & (2)\end{cases}$ ។

ដើម្បីបំបាត់អញ្ញាត y គេត្រូវធ្វើវាឲ្យមានមេគុណស្មើគ្នាហើយមានសញ្ញាផ្ទុយគ្នា។

ក្នុងករណីនេះ គេត្រូវគុណ (1) នឹង -2 ហើយគុណ(2)នឹង3

គេបាន $\begin{cases}2x+3y=21 & \times(-2)\\ 3x+2y=19 & \times(3)\end{cases}$, $\begin{cases}-4x-6y=-42\\ 9x+6y=57\end{cases}$

$5x = 15\ ,\ x = 3$

ជំនួស $x = 3$ ក្នុងសមីការ(1)

$2(3)+3y=21\,, 6+3y=21\,, 3y=15 \Rightarrow y=5$

ដូចនេះ(3,5)ជាគូចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការ ។

ឃ. វិធីបំបាត់ដោយផ្ទឹម

ឧទាហរណ៍ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases}2x+3y=52 & (1)\\ 5x-3y=36 & (2)\end{cases}$

ក្នុងសមីការនីមួយៗ នៃប្រព័ន្ធសមីការ យើងគណនាអញ្ញាតមួយ ធៀបនឹងអញ្ញាតមួយទៀតដូចជា

ពី(1) យើងបាន $y=\dfrac{52-3x}{2}$ (3)

ពី(2) យើងបាន $y=\dfrac{5x-36}{3}$ (4)

ផ្ទឹមតម្លៃ y នៃ(3) និង(4) យើងបាន $\dfrac{52-3x}{2}=\dfrac{5x-36}{3}$

នោះ $x = 12$ ។ យក $x = 12$ ជំនួសក្នុងសមីការណាមួយនៃសមីការដើមយើងបាន $y = 8$ ។
ដូចនេះប្រព័ន្ធសមីការមានគូរចម្លើយ $(x = 12\,,\ y = 8)$ ។

៦.៤. ប្រព័ន្ធវិសមីការដឺក្រេទី១មានមួយអញ្ញាត

៦.៤.១. ប្រព័ន្ធវិសមីការដឺក្រេទី១មានមួយអញ្ញាត

ឧទាហរណ៍១ គេមានមួយចំនួនគត់ដែល ២ដងនៃចំនួននោះថែម ១ ធំជាង ៩ តែតូចជាង ១៥ ។ រកចំនួននោះ ។ តាង x ជាចំនួនត្រូវរក ។ គេបាន

$\begin{cases} 2x+1>9 & (1) \\ 2x+1<15 & (2) \end{cases}$ ជាប្រព័ន្ធវិសមីការដឺក្រេទី១មានមួយអញ្ញាត

តាមវិសមីការ (1) $\quad 2x+1>9$

គេបាន $x>\dfrac{8}{2}=4$

តាមវិសមីការ (2) $\quad 2x+1<15$

គេបាន $x<\dfrac{14}{2}=7$

បើ $x=5 \quad (4<5<7)$

តាមវិសមីការ (1): $\quad 2(5)+1>9$

$11 > 9$ ពិត

តាមវិសមីការ (2): $\quad 2(5)+1<15$

$11 < 15$ ពិត

បើ $x = 6$ នោះ $(4 < 6 < 7)$

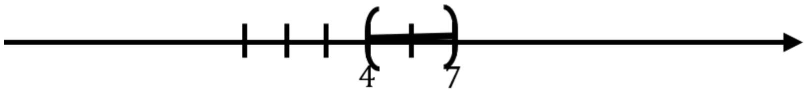
តាមវិសមីការ (1): $\quad 2(6)+1>9$

$11 > 9$ ពិត

តាមវិសមីការ (2): $\quad 2(6)+1<15$

$13 < 15$ ពិត

ដូចនេះ តម្លៃx ផ្ទៀងផ្ទាត់ព្រមគ្នា ក្នុងវិសមីការទាំងពីរគឺ $4 < x < 7$
បំណាកស្រាយចម្លើយលើអ័ក្សចំនួន



ដូចនេះ x ត្រូវយកចន្លោះពី 4 ទៅ 7 គឺ $4 < x < 7$ ។

ឧទាហរណ៍២ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការ

$$\begin{cases} 2x+10>20 & (1) \\ 5x<50 & (2) \end{cases}$$

តាមវិសមីការ (1) $2x+10>20$ គេបាន $2x>10 \Rightarrow x>\frac{10}{2}=5$

តាមវិសមីការ (2) $5x<50$ គេបាន $x<\frac{50}{5}=10$

បើ $x=6$ $(5<6<10)$

តាមវិសមីការ (1): $2(6)+10>20$

$22>20$ ពិត

តាមវិសមីការ (2): $5(6)<50$

$30<50$ ពិត

បើ $x=9$ នោះ $(5<9<50)$

តាមវិសមីការ (1): $2(9)+10>20$

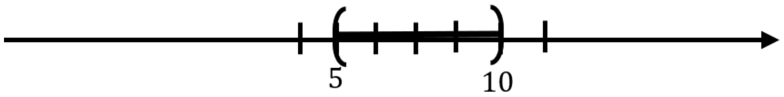
$28>20$ ពិត

តាមវិសមីការ (2): $5(9)<50$

$45<50$ ពិត

ដូចនេះ តម្លៃx ផ្ទៀងផ្ទាត់ព្រមគ្នា ក្នុងវិសមីការទាំងពីរគឺ $5<x<10$

បំណកស្រាយចម្លើយលើអ័ក្សចំនួន



ដូចនេះ x ត្រូវយកចន្លោះពី 5 ទៅ 10 គឺ $5<x<10$ ។

ឧទាហរណ៍៣ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការ$\begin{cases} 2x+5\geq 5x-4 & (1) \\ x-7\geq 2x-3 & (2) \end{cases}$

តាមវិសមីការ (1) $2x+5\geq 5x-4$

គេបាន $2x-5x\geq -4-5$

$-3x\geq -9$ នោះ $x\leq \frac{9}{3}=3$

តាមវិសមីការ (2) $x-7<2x-3$

គេបាន $x-2x\geq -3+7$

$-x\geq 4 \Rightarrow x\leq -4$

បើ $x=2$ $(2<3)$

តាមវិសមីការ (1): $2(2)+5\geq 5(2)-4$

$9\geq 6$ ពិត

តាមវិសមីការ (2): $2-7<2(2)-3$

$-5 \geq 1$ មិនពិត

បើ $x = -4$

តាមវិសមីការ (1): $2(-4)+5 \geq 5(-4)-4$

$-5 \geq -29$ ពិត

តាមវិសមីការ (2): $-4-7 < 2(-4)-3$

$-11 < -11$ ពិត

បើ $x = -5$ $(-5 < -4 < 3)$

តាមវិសមីការ (1): $2(-5)+5 \geq 5(-5)-4$

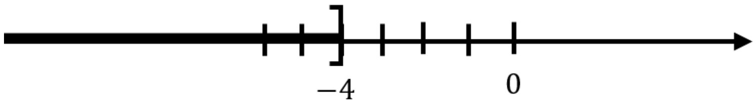
$-5 \geq -29$ ពិត

តាមវិសមីការ (2): $-5-7 < 2(-5)-3$

$-12 < -13$ ពិត

គេពិនិត្យឃើញថា មានតែ $x \leq -4$ ទេដែលផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមីការទាំងពីរព្រមគ្នា ។

បំណកស្រាយចម្លើយលើអ័ក្សចំនួន



ដូចនេះ ប្រព័ន្ធវិសមីការមានចម្លើយ គឺ $x \leq -4$ ។

លំហាត់អនុវត្ត

1. ដោះស្រាយសមីការ

ក. $2x+3=0$ ខ. $5x+18=67$ គ. $5a-12=35$

ឃ. $3x+5=2x-3$ ង. $2n+5=25$ ច. $a+40=6a$

2. ដោះស្រាយវិសមីការ

ក. $-3x+5\geq x-1$ ខ. $10x+7<2x-5$ គ. $5x-6<5x-1$

ឃ. $7+6x<6x-1$ ង. $x+5\leq x+7$ ច. $2.3m+0.75\geq 4.2$

3. ដោះស្រាយសមីការ

ក. $\frac{3}{5}x-4=14$ ខ. $\frac{3}{2}b+\frac{1}{3}=8$ គ. $2x+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$

ឃ. $\frac{3a}{2}=9$ ង. $\frac{3m}{4}=15$ ច. $\frac{x}{4}=9-\frac{3x}{4}$

4. ដោះស្រាយវិសមីការ រួចបកស្រាយចម្លើយលើបន្ទាត់ចំនួន

ក. $7a>-21$ ខ. $-3x-6<0$ គ. $3x-1\geq 5$

ឃ. $6-\frac{5x-2}{4}<7x+12$ ង. $3x-20<7x+4$ ច. $\frac{m-1}{3}\geq 6$

5. ដោះស្រាយសមីការ

ក. $x(x-3)=0$ ខ. $12(x-27)=0$ គ. $(x-3)(2x-8)=0$

ឃ. $x^2-9=0$ ង. $x^2+64=16x$ ច. $(x-3)^2-4=0$

6. ដោះស្រាយវិសមីការ រួចបកស្រាយចម្លើយលើបន្ទាត់ចំនួន

ក. $\frac{m}{2}+\frac{m}{3}+2m>3$ ខ. $\frac{m-1}{4}-3<\frac{3(m+1)}{8}$

គ. $\frac{5(x+1)}{6}-1<\frac{9x+1}{3}-\frac{8x+1}{4}$ ឃ. $\frac{3x-1}{4}-\frac{13-x}{2}<\frac{7x}{3}-\frac{11(x+3)}{6}$

ង. $\frac{2x}{25}-\frac{9}{25}<\frac{13}{21}+\frac{5x}{7}-\frac{x}{15}$

7. ផលបូកប្រាំចំនួនគត់តគ្នាស្មើនឹង *520*។ រកចំនួនគត់ទាំងប្រាំនោះ ។

8. ផលដករវាង *2* និងមួយចំនួនធំជាងផលបូករវាង *3* និងពីរដងនៃចំនួននោះ។ ចូលរកចំនួនទាំងអស់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់បម្រាប់ខាងលើ ។

9.អាយុមីងសំស្មើបីដងនៃអាយុស៊ីណាដែលជាកូនរបស់គាត់។ កាលណាស៊ីណាមានអាយុស្មើនឹងអាយុម្តាយនាងសព្វថ្ងៃនេះ ផលបូកនៃអាយុទាំងពីរនាក់ស្មើនឹង 112 ឆ្នាំ។ រកអាយុរបស់នាងសំ ។

10. ក្រុមហ៊ុនទេសចរណ៍មួយបាននាំភ្ញៀវទៅទស្សនានៅប្រាសាទអង្គរវត្តចំនួន *3* លើក។ លើកទីមួយមានចំនួន *120* នាក់ និងលើកទី *2* មានចំនួន *210* នាក់។ តើក្រុមហ៊ុនទេសចរណ៍នោះ ត្រូវនាំភ្ញៀវទេសចរណ៍លើកទី *3* ប៉ុន្មាននាក់ទៀត ដើម្បីឲ្យបានមធ្យមនៃការនាំភ្ញៀវយ៉ាងតិចបានចំនួន *140* នាក់។

11. សុផាតមានអាយុ *51* ឆ្នាំ ហើយរស្មីមានអាយុ *21* ឆ្នាំ។ តើរយៈពេលប៉ុន្មានឆ្នាំទៀតទើបសុផាតមាន

អាយុស្មើពីរដងនៃអាយុវស្មី។

12. ហាងលក់មួកសុវត្ថិភាពមួយកន្លែងបានទិញមួកនីមួយៗថ្លៃ 55,000៛ និងថ្លៃដឹកជញ្ជូនអស់ប្រាក់ 250,000រៀល។ បើហាងនោះលក់មួកចេញវិញមួយថ្ងៃ 80,000រៀល តើហាងនោះត្រូវការទិញមួកចំនួនប៉ុន្មាន ដើម្បីឲ្យបានប្រាក់ចំណេញយ៉ាងតិចបំផុត 800,000រៀល ?

13. អេក្រង់កុំព្យូទ័រមួយមានទទឹងប្រវែង 20 សង់ទីម៉ែត្រ ខ្លីជាងពីរដងនៃប្រវែងបណ្តោយ។ រកប្រវែងវិមាត្រអាប៊ិបរមាគិតជាសង់ទីម៉ែត្រនៃអេក្រង់កុំព្យូទ័រនោះ ។

14. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការខាងក្រោម៖

ក. $\begin{cases} -4x-5\ge 0 \\ 3x-2\ge 0 \end{cases}$ ខ. $\begin{cases} 2x+>5x-9 \\ x-8\le 4x-3 \end{cases}$

គ. $\begin{cases} y+1\ge \frac{1}{3}(y+5) \\ \frac{1}{2}(3y+7)-1<0 \end{cases}$ ឃ. $\begin{cases} 6(x+1)>2x-5 \\ 25-\frac{6-x}{2}\le 3x \end{cases}$

15. គេឲ្យសំណុំពីរ A និង Bដូចខាងក្រោម ៖

$A=\{x / x^2-7x-5>0\}$, $B=\{x / x^2-2x-8<0\}$

ចូររកចំនួនគត់ក្នុងចំណោមធាតុនៃ $A\cap B$ ។

មេរៀនទី៧ សមីការ និងវិសមីការដឺក្រេទី២មានមួយអញ្ញាត

៧.១. សមីការដឺក្រេទី២ មានមួយអញ្ញាត

ក. ឯកតានិមិត្ត

យើងបានសិក្សារួចមកហើយចំពោះការ គណនា $x^2 = 2$ នាំឲ្យ $x = \pm\sqrt{2}$ ជាចម្លើយក្នុងសំណុំចំនួនពិត ។ ចំពោះ $x^2 = -2$ គ្មានចម្លើយក្នុង សំណុំចំនួនពិតទេ ព្រោះការេនៃមួយចំនួនពិតមិន អាចស្មើចំនួនអវិជ្ជមាន ។

ដើម្បីគណនាតម្លៃ x បែបនេះ គេបង្កើតចំនួនថ្មីមួយតាងដោយនិមិត្តសញ្ញា i ។

> i ហៅថា "**ឯកតានិមិត្ត**" **ដែល**
>
> $i = \sqrt{-1}$ ហើយ $i^2 = -1$ ។

ខ. ឫសការេនៃចំនួនអវិជ្ជមាន

ឫសការេនៃ $-a$ ដែល $a > 0$ គឺជាចំនួន x ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម

$x^2 = -a$ (1)

ដោយ $(\sqrt{ai})^2 = ai^2 = -a$

សមីការ (1) អាចសរសេរជា $x^2 = (\sqrt{ai})^2$

ដូចនេះ $x^2 - (\sqrt{ai})^2 = 0$

យើងបាន $(x - \sqrt{ai})(x + \sqrt{ai}) = 0$

$x - \sqrt{ai} = 0$, $x + \sqrt{ai} = 0$

នាំឲ្យ $x = \sqrt{ai}$ ឬ $x = -\sqrt{ai}$ ។

ឧទាហរណ៍១ គណនា $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-\frac{1}{16}}$ ។

ចម្លើយ $\sqrt{-3} = \sqrt{3}i$, $\sqrt{-9} = 3i$, $\sqrt{-\frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{1}{16}}\,i = \frac{1}{4}i$

ឧទាហរណ៍២ គណនា ក. $\sqrt{-9} + \sqrt{-49}$ ខ. $\sqrt{-10} \times \sqrt{-90}$

គ. $\frac{\sqrt{-64}}{\sqrt{-4}}$ ឃ. $\sqrt{-5}(\sqrt{-45} - \sqrt{-4})$ ។

ចម្លើយ ក. $\sqrt{-9} + \sqrt{-49} = \sqrt{9}\,i + \sqrt{49}\,i = 3i + 7i = 10i$

ខ. $\sqrt{-10} \times \sqrt{-90} = \sqrt{10}\,i \times \sqrt{90}\,i = \sqrt{10 \times 90}\,i^2$

$= \sqrt{900}\,i^2 = -30$

គ. $\frac{\sqrt{-64}}{\sqrt{-4}}=\frac{\sqrt{64}\,i}{\sqrt{4}\,i}=\frac{8i}{2i}=4$

ឃ. $\sqrt{-5}(\sqrt{-45}-\sqrt{-4})=\sqrt{5}\,i(3\sqrt{5}\,i-2i)$

$=(\sqrt{5}i)(3\sqrt{5}\,i)-(\sqrt{5}i)(2i)$

$=3\sqrt{5}^2 i^2-2\sqrt{5}i^2=-15+2\sqrt{5}$ ។

សំគាល់ $\sqrt{-10}\times\sqrt{-90}=-30\neq\sqrt{(-10)\times(-90)}=\sqrt{900}=30$ ។

ដូចនេះ រូបមន្ត $\sqrt{-10}\times\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ មិនពិតចំពោះ $a\langle 0$, $b\langle 0$ ។

ប្រតិបត្តិ គណនា

ក. $\sqrt{-36}$ ខ. $\sqrt{-54}$ គ. $\sqrt{-\frac{16}{25}}$ ឃ. $\sqrt{-50}-\sqrt{-8}$

ង. $\sqrt{-18}\times\sqrt{-3}$ ច. $\sqrt{-5}(\sqrt{-16}-\sqrt{-10})$ ។

គ. និយមន័យចំនួនកុំផ្លិច

ចំនួន $2+3i$, $1-4i$ ដែលមាន 2 , 3 , 1 , −4 ជាចំនួនពិតហៅថា ចំនួនកុំផ្លិច ។

និយមន័យ ចំនួនកុំផ្លិច គឺជាចំនួនដែលមានទម្រង់ $a+bi$ ដែល a និង b ជាចំនួនពិត ។

- បើ $b=0$ នោះចំនួន $a+bi=a+0\times i=a$ **ជាចំនួនពិត** ។
- បើ $b\neq 0$ នោះចំនួន $a+bi$ ជា **ចំនួននិម្មិត** ។

សំណុំចំនួនកុំផ្លិច តាងដោយអក្សរ $\mathbb{C}$ ។ទម្រង់ស្តង់ដានៃចំនួនកុំផ្លិចសរសេរ $a+bi$ ដែលមាន a ជា " **ផ្នែកពិត** " និង b ជា "**ផ្នែកនិមិត្ត**" ។

ឧទាហរណ៍១ $3i$, $-2i$, $1+4i$, $3-5i$, $-\frac{1}{2}-\frac{7}{4}i$ ចំនួនទាំងអស់នេះជាចំនួនកុំផ្លិច ។

ឧទាហរណ៍២ បំប្លែងចំនួនខាងក្រោមជាទម្រង់ស្តង់ដានៃចំនួនកុំផ្លិច រួចកំណត់ផ្នែកពិត និង ផ្នែកនិមិត្ត ។

ក. $\sqrt{-40}$ ខ. $-\sqrt{-25}$ គ. 5

ចម្លើយ ក. $\sqrt{-40}=\sqrt{4\times 10}\,i=2\sqrt{10}\,i=0+2\sqrt{10}\,i$ មាន 0 ជាផ្នែកពិតនិង $2\sqrt{10}$ ជាផ្នែកនិមិត្ត ។

ខ. $2-\sqrt{-25}=2-\sqrt{25}\,i=2-5i$ មាន 2 ជាផ្នែកពិតនិង −5 ជាផ្នែកនិមិត្ត

គ. $5=5+0i$ មាន 5 ជាផ្នែកពិតនិង 0 ជាផ្នែកនិមិត្ត ។

ប្រតិបត្តិ បំប្លែងចំនួនខាងក្រោមជាចំនួនកុំផ្លិច រួចកំណត់ផ្នែកពិតនិងផ្នែកនិមិត្ត ។

ក. $3-\sqrt{-16}$

ខ. $\sqrt{-45}+\sqrt{25}$

គ. $-\sqrt{-9}$

ឃ. និយមន័យចំនួនកុំផ្លិចស្មើគ្នា

> ចំនួនកុំផ្លិចពីរ $a+bi$ និង $c+di$ ស្មើគ្នា
> លុះត្រាតែ $a=c$ និង $b=d$ ។
> ក្នុងករណី $a+bi=0$ ពិត លុះតាត្រាតែ $a=b=0$ ។

ឧទាហរណ៍១ គណនាតម្លៃចំនួនពិត x និង y ដែលធ្វើឲ្យសមភាពខាងក្រោមពិត ។

ក. $(x+5)+8yi=0$ ខ. $(3x+1)+(y-1)i=7-3i$ ។

ចម្លើយ តាមនិយមន័យចំនួនកុំផ្លិចស្មើគ្នា យើងបាន

ក. $(x+5)=0\Rightarrow x=-5$ ខ. $3x+1=7\Rightarrow x=2$

$8y=0\Rightarrow y=0$ $y-1=-3\Rightarrow y=-2$

ដូចនេះ $x=5$, $y=0$ ។ ដូចនេះ $x=2$, $y=-2$ ។

ឧទាហរណ៍២ តើចំនួនកុំផ្លិច $\sqrt{4}+\sqrt{-45}$ និង $2-3\sqrt{-5}\,i$ ស្មើគ្នាឬទេ?

ចម្លើយ $\sqrt{4}+\sqrt{-45}=2+\sqrt{45}\,i=2+3\sqrt{5}\,i$ ។

ដូចនេះ ចំនួនកុំផ្លិច $2+3\sqrt{5}\,i$ និង $2-3\sqrt{5}\,i$ មិនស្មើគ្នាទេ ព្រោះផ្នែកនិមិត្ត មានសញ្ញាផ្ទុយគ្នា ។

ប្រតិបត្តិ រកតម្លៃចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យសមភាពចំនួនខាងក្រោមពិត

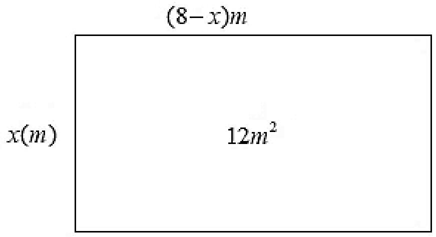
ក. $(5-\sqrt{-4})-(a+bi)=6$ ខ. $(6+5i)(a+bi)=38-9i$

៧.២. សមីការដឺក្រេទី ២ មានមួយអញ្ញាត

៧.២.១. និយមន័យ

ឧទាហរណ៍១ ទីធ្លាមួយមានរាងចតុកោណកែង ដែលមានផ្ទៃក្រឡាស្មើនិង $12cm^2$ ហើយ បរិមាត្រស្មើនឹង$16m$ ។ ចូលរកប្រវែងទទឹងនៃទីធ្លានោះ ។

ចម្លើយ តាង $x(m)$ ជាទទឹងរបស់ទីធ្លានោះប្រវែង បណ្ដោយទីធ្លាស្មើនឹង $\frac{16-2x}{2}=8-x(m)$



តាមបម្រាប់នៃចំណោទ យើងបានសមីការ $x^2-8x+12=0$ ដែលមានដឺក្រេទី 2 នៃអញ្ញាត x សមីការនេះហៅថា **សមីកាដឺក្រេទី 2 នៃ x** ។

ឧទាហរណ៍២ សមីការ $x^2-3x^2-4=0$, $x^2+8x=0$, $3x^2-4x+4=0$, $x^2-4=0$ ជា**សមីការដឺក្រេទី 2 មានមួយអញ្ញាត x** ។

> **និយមន័យ** សមីការដឺក្រេទី 2 មានមួយអញ្ញាត x មានរាង $ax^2+bx+c=0$ ដែលមានមេគុណ a , b និង c ជាចំនួនពិត ហើយ $a\neq 0$ ។

តម្លៃ x ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការហៅឫសនៃសមីការ ។ ដោះស្រាយសមីការ គឺរកឫសនៃសមីការ ។

ឧទាហរណ៍៣ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា 2 និង 6 ជាឫសនៃសមីការ $x^2+8x+12=0$ ។

ចម្លើយ ចំពោះ $x=2$: $2^2-8\times 2+12=0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ចំពោះ $x=6$: $6^2-8\times 6+12=0$

$0=0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

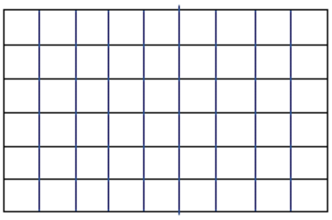
ប្រតិបត្តិ១ តើសមីការណាខ្លះជាសមីការដឺក្រេទី 2 ក្នុងចំណោមសមីការខាងក្រោម

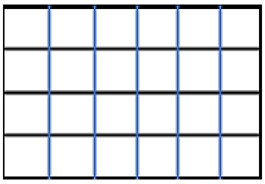
ក. $x(x-2)=3$ ខ. $3x^2+x-2=x(3x-2)$ គ. $x^2-6=2x(1-x)$ ។

ប្រតិបត្តិ២ ចំពោះ $x=-2$, $x=3$ តើតម្លៃមួយណាជាឫសនៃសមីការ ខាងលើ ?

៧.២.២. ដំណោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី 2

ក. ដោះស្រាយសមីការតាមផលគុណកត្តា





នារីមានរូបទេសភាពមួយរាងចតុកោណកែងមានបណ្ដោយ $16cm$ និងទទឹង$12cm$ ។ នាងចង់បង្រួមរូបភាពនោះឲ្យត្រូវនឹងស៊ុម ដែលមានផ្ទៃក្រឡាស្មើនឹងពាក់កណ្ដាលផ្ទៃក្រឡារូបភាពដើម ។ តើនារីត្រូវថតបង្រួមបណ្ដោយ និងទទឹងប៉ុន្មានដើម្បីឲ្យរូបភាពថ្មីត្រូវនឹងស៊ុម ។

តាង x ជាប្រវែងដែលត្រូវបង្រួមលើបណ្ដោយ និងទទឹង ។

រូបភាពថ្មីមានបណ្ដោយ $16-x$ និងទទឹង $12-x$ ។

ផ្ទៃក្រឡារូបទេសភាពដើមគឺ $16\times 12=192cm^2$

ផ្ទៃក្រឡារូបភាពថ្មីស្មើនឹង $\frac{1}{2}\times 192=96cm^2$

ផ្ទៃក្រឡារូបភាពថ្មីគឺ $(16-x)(12-x)=\frac{1}{2}\times 192$ ។

យើងដោះស្រាយសមីការ

$(16-x)(12-x)=96$, $x^2-28x+96=0$

$x^2-24x-4x+96=0$, $x(x-24)-4(x-24)=0$

គាបាន $(x-24)(x-4)=0$

$x-24=0\Rightarrow x=24$ ឬ $x-4=0\Rightarrow x=4$

$x=4$ ជាចម្លើយ ។

នារីមិនអាចបង្រួមទំហំ $24cm$ បានទេ ព្រោះបណ្តោយរូបដើមស្មើ $16cm$ និងទទឹងស្មើនឹង $12cm$ ដូចនេះ 24 មិនមែនជាចម្លើយទេ ។ នារីអាចបង្រួមទទឹង និងបណ្តោយរូបបានចំនួន $4cm$ ។ យើងបានបណ្តោយ $(16-4)=12m$ និងទទឹង $(12-4)=8cm$ ។

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $(16-x)(12-x)=96$ ជំនួស $x=4$ គេបាន

$(16-4)(12-4)=96$ ឬ $12\times 8=96$

$96=96$ ពិត ។

> **ជាទូទៅ** ផលគុណនៃពីរកត្តា ស្មើនឹងសូន្យ លុះត្រាតែកត្តាណាមួយស្មើនឹងសូន្យ ។
> $A\times B=0$ លុះត្រាតែ $A=0$ ឬ $B=0$ ។

ឧទាហរណ៍ ដោះស្រាយសមីការ ក. $x^2-2x-8=0$ ខ. $x(x-2)=35$ ។

ចម្លើយ ក.គេបាន $x^2-2x-8=0$

$(x+2x)(x-4)=0$

$x+2=0$ ឬ $x-4=0$

$x=-2$ ឬ $x=4$ ។

សមីការមានឫសពី $x=2$, 4 ។ $x^2-2x=35$

ខ. គេបាន $x^2-2x=35$

$x^2-2x-35=0$

$(x-7)(x+5)=0$

$x-7=0$ ឬ $x+5=0$

$x=7$ ឬ $x=-5$ ។

សមីការមានឫសពី $x=7$, -5 ។

ប្រតិបត្តិ ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម

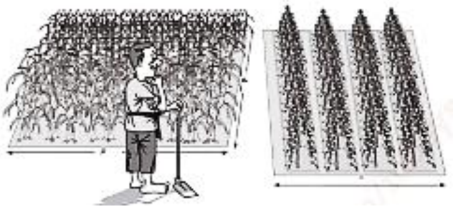
ក. $5x^2-45=0$ ខ. $(x-4)(x+1)=-4$

គ. $9x^2+12=3+12x+5x^2$ ឃ. $6x^2+5x-4=0$

ង. $(3x-1)^2-25x^2=0$ ច. $8x^2+x-1=3x^2-2x+1$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការតាមលក្ខណៈឫសការេ

ពូសុខមានដីចំការពោតមួយកន្លែងរាងចតុកោណកែង ដែលមានបណ្តោយប្រវែង $80m$ និងទទឹង $45m$ ។ គាត់ទិញដីមួយកន្លែងទៀតរាងការេធ្វើចំការសណ្តែក ហើយមានផ្ទៃក្រឡាស្មើនឹងផ្ទៃក្រឡាចំការពោតដែរ ។



តើដីចំការក្រោយនេះត្រូវមានជ្រុងប្រវែងប៉ុន្មាន ?

តាង x ជាប្រវែងជ្រុងដីចំការសណ្តែករាងការេ $(x \rangle 0)$

ផ្ទៃក្រឡាដីរាងចតុកោណកែងស្មើផ្ទៃក្រឡាដីរាងការេ គេបាន $x^2=45\times 80=3600m^2$

$x^2=3600$ នាំឲ្យ $x=\pm\sqrt{3600}=\pm 60$ ។

ដោយ $x>0$ នាំឲ្យ $x=60m$ ។

ដូចនេះ ចំការរាងការនោះត្រូវមានជ្រុងប្រវែង $60m$ ។

ឧទាហរណ៍២ ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម

ក. $x^2-6x+9=16$

ចម្លើយ ក. $x^2-6x+9=16$

$(x-3)^2=16$

$x-3=\pm\sqrt{16}$

$x-3=4$ ឬ $x-3=-4$

$x=7$ ឬ $x=-1$ ។

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $x=7$, -1

ខ. $(2x+1)^2=5$

$2x+1=\pm\sqrt{5}$

$2x=-1\pm\sqrt{5}$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ។

> **ជាទូទៅ** សមីការ $x^2=b$ ដែល b ជាចំនួនវិជ្ជមាន មានឫសពីរផ្សេងគ្នាគឺ $x=\sqrt{b}$, $-\sqrt{b}$

ឧទាហរណ៍៣ ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម

ក. $x^2+9=0$ ខ. $2(3x-5)^2+32=0$ ។

ចម្លើយ ក. $x^2+9=0$ ខ. $2(3x-5)^2+32=0$

$x^2=-9$ $(3x-5)^2=16$

$x=\pm\sqrt{-9}=\pm\sqrt{9}\,i$ $3x-5=\pm\sqrt{-16}=\pm\sqrt{16}\,i=\pm4i$

$x=\pm 3i$ $x=\dfrac{5\pm 4i}{3}$

ប្រតិបត្តិ ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម តាមលក្ខៈឫសការេ

ក. $(x-2)^2=10$ ខ. $3(5x+4)^2-81=0$

គ. $(y-3)^2=-5$ ឃ. $7+25(2y+3)^2=0$

គ. ដោះស្រាយសមីការដោយបំពេញជាការេ

ឧទាហរណ៍១ ដោះស្រាយសមីការ $x^2+6x=7$

ចម្លើយ គេត្រូវដាក់អង្គខាងឆ្វេងនៃសមីការជាការេទ្វេធា ដោយយកមេគុណ ៦ នៃ x ចែកនិង 2 រួចលើកការេ បន្ទាប់មកបូកលើអង្គទាំងពីនាំសមីការ ។

គេបាន $x^2+6x+\left(\dfrac{6}{2}\right)^2=7+\left(\dfrac{6}{2}\right)^2$

$x^2+6x+9=7+9$

$(x+3)^2=16$

$x+3=\pm\sqrt{16}=\pm4$

ដូចនេះ $x+3=4$ ឬ $x+3=-4$

$x=1\ ,-7$ ជាសឫសនៃសមីការ ។

> **ជាទូទៅ** ដើម្បីបំពេញ ការេទ្វេធាចំពោះកន្សោម x^2+bx
>
> គេបូកនឹង $\left(\dfrac{b}{2}\right)^2$ ដែលជាការេពាក់កណ្តាមេគុណនៃ x ។
>
> ហើយគេបាន $x^2+bx+\left(\dfrac{b}{2}\right)^2=x+\left(\dfrac{b}{2}\right)^2$

ឧទាហរណ៍២ ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម

ក. $x^2+4x+5=0$ ខ. $3x^2-5x-4=0$

ចម្លើយ ក. $x^2+4x+5=0$

$$x^2+4x=-5$$
$$x^2+4x+4=-5+4$$
$$(x+2)^2=-1$$
$$x+2=\pm\sqrt{-1}=\pm i$$
$$x+2=\pm i$$

ដូចនេះ $x+2=\pm i$ ។

ខ. $3x^2-5x-4=0$

$$3x^2-5x=4$$
$$x^2-\frac{5}{3}x=\frac{4}{3}$$
$$x^2-\frac{5}{3}x+\left(-\frac{5}{6}\right)^2=\frac{4}{3}+\frac{25}{36}$$
$$\left(x-\frac{5}{6}\right)^2=\frac{73}{6}$$
$$x-\frac{5}{6}=\pm\frac{\sqrt{73}}{6}$$

ដូចនេះ $x=\frac{5}{6}\pm\frac{\sqrt{73}}{6}$ ។

ប្រតិបត្តិ ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម ដោយបំពេញជាការេ ។

ក. $x^2+5x+2=0$ ខ. $x(2x+3)=6$ គ. $3x^2-2x+1=0$

ឃ. $x^2-10x+25=0$ ង. $2x^2-x-2=0$ ច. $x^2-4x+8=0$ ។

៧.៣. រូបមន្តសមីការដឺក្រេទី 2

ក.ដំណោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី 2 មានមួយអញ្ញាត

ដោះស្រាយសមីការ $ax^2+bx+c=0$ ដើម្បីឲ្យបានមេគុណ x^2 ស្មើរនឹង 1 គេចែកអង្គទាំងពីរនឹង a ។

$$x^2+\frac{a}{b}x^2+\frac{c}{a}=0$$

លើក $\frac{c}{a}$ ទៅអង្គទាំង 2 យើងបាន

$$x^2+\frac{a}{b}x^2=\frac{c}{a}$$

បូក $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ លើអង្គទាំងពីរ

$$x^2+\frac{a}{b}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

ដូចនេះ $x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $x=-\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

គេបានឫសនៃសមីការដឺក្រេទី 2 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ហៅថារូបមន្តឫសនៃសមីកាដឺក្រេទី 2 ។

កន្សោម $\Delta=b^2-4ac$ ហៅថាឌីសគ្រីមីណង់នៃសមីកាដឺក្រេទី 2 ។

ជាទូទៅ ចម្លើយនៃសមីការ $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$

តាមឌីសគ្រីមីណង់ $\Delta=b^2-4ac$

(1) ចំពោះ $\Delta>0$ នោះសមីការមានឫសពីរជា **ចំនួនពិតផ្សេងគ្នា**

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{a}$, $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{a}$ ។

(2) ចំពោះ $\Delta=0$ នោះសមីការមានឫសឌុប $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$ ។

(3) ចំពោះ $\Delta<0$ នោះសមីការមានឫសពីរជាចំនួន **កុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នាគឺ**

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}\,i}{2a}$, $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}\,i}{2a}$ ។

តាម (1) និង (2) យើងបាន $\Delta\geq 0$ សមីការមានឫសជាចំនួនពិត ។

សំគាល់ ក្នុងសមីការ $ax^2+bx+c=0$ បើ b ជាចំនួនគូ នោះ $b=2b'$ ។ ដូចនេះសមីការមានទម្រង់ $ax^2+2b'x+c=0$ ដែលមាន $\Delta=4b^2-4ac=4(b^2-ac)$ ។

ក្នុងករណីនេះ ដើម្បីដោះស្រាយសមីការ គេគណនាតាម $\Delta'=b'^2-ac$ ។ មានឫសនៃសមីការកំណត់ដូចខាងក្រោម

- បើ $\Delta'>0$ សមីការមានឫសពិតពីផ្សេងគ្នាគឺ $x_1=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$, $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta'}}{a}$
- បើ $\Delta'=0$ សមីការមានឫសឌុប $x_1=x_2=-\frac{b'}{a}$
- បើ $\Delta'<0$ សមីការមានឫសពីជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់ គឺ $x_1=\frac{-b'+\sqrt{-\Delta'}\,i}{a}$, $x_2=\frac{-b-\sqrt{-\Delta'}\,i}{a}$

ឧទាហរណ៍១ ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមដោយប្រើរូបមន្ត

ក. $9x^2-12x+4=0$ ខ. $2x^2-4x+5=0$ ។

ចម្លើយ ក. $9x^2-12x+4=0$

តាមរូបមន្តសមីការដឺក្រេ 2 គេបាន

$$x=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4(9)(4)}}{2\times 9}=\frac{12\pm\sqrt{0}}{18}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $x=\frac{2}{3}$ ។

ខ. $2x^2-4x+5=0$

តាមរូបមន្តសមីការដឺក្រេ 2 គេបាន

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(2)(5)}}{2\times 2}=\frac{4\pm\sqrt{-24}}{4}$$

$$=\frac{4\pm 2\sqrt{6}\,i}{4}=\frac{2\pm\sqrt{6}\,i}{2}$$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $x=\frac{2+\sqrt{6}i}{2}$, $x=\frac{2-\sqrt{6}i}{2}$ ។

ប្រតិបត្តិ ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម ដោយប្រើរូបមន្ត

ក. $x^2-6x-7=0$ ខ. $3x^2-5x+1=0$

គ. $3x^2+2x+1=0$ ឃ. $4x^2+3x+2=0$

ឧទាហរណ៍២ ប្រើឌីសគ្រីមីណង់ ដើម្បីកំណត់ប្រភេទចម្លើយនៃសមីការខាងក្រោម

ក. $x^2-2x+1=0$ ខ. $2x^2-5x-4=0$

គ. $16x^2-40x+25=0$ ឃ. $5x^2-3x+4=0$

ចម្លើយ ក. $x^2-2x+1=0$ គេមាន $a=1, b=5-2, c=1$

គេបាន $\Delta'=b'^2-ac=(1)^2-(1)(1)=0$ ។ $\Delta'=0$ នាំឲ្យសមីការមានឫសឌុប ។

ខ. $2x^2-5x-4=0$ គេមាន $a=2$, $b=5$, $c=-4$

គេបាន $\Delta=b^2-4ac=(5)^2-4(2)(-4)=57\rangle 0$ ។

$\Delta\rangle 0$ នាំឲ្យសមីការមានឫសពីរចំនួនពិតផ្សេងគ្នា ។

គ. $16x^2-40x+25=0$

គេបាន $\Delta'=b'^2-ac=(-20)^2-(16)(25)=0$ ។

$\Delta'=0$ នាំឲ្យសមីការមានឫស ឌុប ។

ឃ. $5x^2-3x+4=0$

គេបាន $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4(5)(4)=-71\langle 0$ ។

ដូចនេះសមីការមានឫសពីរជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់។

ប្រតិបត្តិ ប្រើឱសគ្រីមីណង់ ចូរដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម

ក. $x^2-10x+21=0$ ខ. $5y^2+12y+19=0$

គ. $\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x+1=0$ ឃ. $y^2-20y+51=0$

អនុវត្ត ដោះស្រាយសមីការ $x^2+(m-8)x+m=0$ ទៅតាមតម្លៃ m ។

ចំពោះ $m=0$,$m=2,m=4,m=8$ ។

ចម្លើយ $x^2+(m-8)x+m=0$ (1)

- ចំពោះ $m=0$ សមីការ (1)ទៅជា $x^2-8=0$ ។

  $x^2-8=0$ ឬ $x(x-8)=0$ ឬ $x=0\,,x-8=0\Rightarrow x=0\,,x=8$ ។

- ចំពោះ $m=2$ សមីការ (1) ទៅជា $x^2-6x+2=0$ គេបាន $\Delta'=(3)^2-2=7\rangle 0$

  $\Rightarrow x\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}=3\pm\sqrt{7}$ ។

- ចំពោះ $m=4$ សមីការ (1)ទៅជា $x^2-4x+4=0$ ឬ $(x-2)^2=0\Rightarrow x=2$ ។

- ចំពោះ $m=8$ សមីការ Δ ទៅជា $x^2+8=0$ ឬ $x^2=-8$

  នាំឲ្យ $x=\pm\sqrt{-8}=\pm\sqrt{8}\,i=\pm 2\sqrt{2}\,i$

ឧទាហរណ៍៣ រកតម្លៃ k នាំឲ្យសមីការ $x^2+kx+9=0$ មានឫសឌុប ។ គណនាឫសឌុបនោះ ។

ចម្លើយ សមីការមានឫសឌុប $\Leftrightarrow \Delta=0$ ។

$\Delta=b^2-4ac=(-k)^2-4(9)=k^2-36=0$

$k^2-36=0\Rightarrow k^2=36$ ឬ $k=\pm\sqrt{36}=\pm 36$

បើ $k=6$ សមីការទៅជា $x^2-6x+9=0$ ឬ $(x-3)^2=0\Rightarrow x=3$ ។

បើ $k=-6$ សមីការទៅជា $x^2-6x+9=0$ ឬ $(x+3)^2=0\Rightarrow x=-3$ ។

ដូចនេះ $k=6\Rightarrow x=3$ និង $k=-6\Rightarrow x=-3$ ។

ប្រតិបត្តិ៣ ក. រកតម្លៃ a ដែលនៃឲ្យសមីការ $(a-2)x^2+(3a-6)x+2a-3=0$ មានឫសឌុបហើយរកតម្លៃឫសឌុបនោះ ។

ខ. រកតម្លៃ k ដែលនាំឲ្យសមីការ $4x^2-2kx+k+3=0$ មានឫសឌុប។ ចូលរកឫសឌុបនោះ ។

៧.៤. ទំនាក់ទំនងរវាងឫស និងមេគុណ

៧.៤.១. គណនាផលបូក និងផលគុណឫស

គេមានសមីការ $ax^2 - bx + c = 0$, $a \neq 0$ ។ បើ α និង β ជាឫសពីរនៃសមីការដឺក្រេទី 2 នោះ

$$\alpha = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad \beta = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ។}$$

យើងបាន

$$\alpha + \beta = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta = \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{b^2 - b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \text{ ។}$$

ជាទូទៅ ទំនាក់ទំនងរវាងឫស និងមេគុណនៃសមីការដឺក្រេទី 2

បើ α និង β ជាឫសពីរនៃសមីការដឺក្រេទី 2

$ax^2 - bx + c = 0$, $a \neq 0$

នោះ $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$ ។

ឧទាហរណ៍១ រកផលបូក និងផលគុណឫសនៃសមីការ

ក. $x^2 - 13x + 42 = 0$ ខ. $2x^2 + 3x - 7 = 0$ ។

ចម្លើយ ក. គេបាន $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a} = -13$, $\alpha\beta = \dfrac{c}{a} = 42$ ។

ខ. $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{3}{2}$, $\alpha\beta = \dfrac{c}{a} = -\dfrac{7}{2}$ ។

ឧទាហរណ៍២ គេតាង α និង β ជាឫសពីរនៃសមីការ $2x^2 + 3x - 4 = 0$ ចូលឲ្យតម្លៃកន្សោមខាងស្ដាំ ក. $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}$ ខ. $\alpha^2 + \beta^2$ ។

ចម្លើយ សមីការ (1) មាន $\alpha + \beta = \dfrac{3}{2}$ និង $\alpha\beta = -2$ ។

ក. $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \dfrac{\frac{3}{2}}{-2} = -\dfrac{3}{4}$ ។

ខ. $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - 2(2) = \dfrac{25}{4}$ ។

ប្រតិបត្តិ សមីការ $2x^2 + 8x + 3 = 0$ មានឫស α និង β ។គណនា

ក. $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$ ខ. $\alpha^2+\beta^2$ ។

៧.៤.២. អនុវត្តចំពោះផលបូក និងផលគុណឫស

ក. មុខងារគណនាឫសនៃសមីការដឺក្រេទី 2 ខាយ

ក្នុងសមីការ $x^2-5x+6=0$ គេបាន $x^2-\underset{2+3}{\underset{\Downarrow}{5}}x+\underset{2\times3}{\underset{\Downarrow}{6}}=0$

សមីការនេះមានផលបូកឫសស្មើនឹង 5 និងផលគុណឫសស្មើនឹង 5 ។ ដូចនេះឫសទាំងពីរ គឺ 2 និង3 ។

ខ. ដោយស្គាល់ឫសមួយគេអាចទាញរកឫសមួយទៀត

ក្នុងសមីការ $ax^2-bx+c=0$ ។បើ $x=1$ គេបាន $a+b+c=0$ ។

បើ $x=-1$ គេបាន $a-b+c=0$ ។ ដូចនេះ

- បើ $a+b+c=0$ សមីការ $ax^2+bx+c=0$, $(a\neq0)$មានឫស $x_1=1$ និង $x_2=\dfrac{c}{a}$
- បើ$a-b+c=0$ សមីការ $ax^2+bx+c=0$, $(a\neq0)$មានឫស $x_1=-1$ និង $x_2=-\dfrac{c}{a}$

ឧទាហរណ៍១ រកឫសនៃសមីការ$2x^2+7x-9=0$ ។

ចម្លើយ គេឃើញថា $a+b+c=2+7-9=0$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $x_1=1$និង$x_2=\frac{c}{a}=-\frac{9}{2}$ ។

ឧទាហរណ៍២ រកឫសនៃសមីការ $5x^2-3x-8=0$ ។

ចម្លើយ គេពិនិត្យឃើញថា $a-b+c=5+3-8=0$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $x_1=-1$ និង $x_2=-\frac{c}{a}=\frac{8}{5}$

ប្រតិបត្តិ ក. ដោះស្រាយសមីការ $\frac{4}{x-2}-\frac{x-3}{x+4}=0$ ។

ខ. គេមានសមីការ $-x^2+x+a=0$ ។

កំណត់តម្លៃ a ដោយដឹងថា $x=-1$ជាឫសមួយនៃសមីការ ។ រកឫសមួយទៀតនៃសមីការ

គ. ការដាក់កន្សោមដឺក្រេទី 2 ជាផលគុណកត្តា

គេមានសមីការ $ax^2+bx+c=0$ ដែលមាន α និង βជាឫស ។ គេបានតាមទំនាក់ទំនងឫស និងមេគុណ $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ ។

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}\right)$$
$$=a\left[x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\right]$$
$$=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

ជាទូទៅ បើសមីការ $ax^2+bx+c=0$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នា α និង β នោះកន្សោមដឺក្រេទី 2 $ax^2+bx+c=\ a(x-\alpha)(x-\beta)$ ។

សំគាល់ ក្នុងករណីដែលសមីការដឺក្រេទី 2 មានឫសឌុបនោះគេបាន

$$ax^2+bx+c=\ a(x-\alpha)^2$$ ។

ឧទាហរណ៍១ ដាក់កន្សោមដឺក្រេទី 2 $6x^2+13x-5$ ជាផលគុណកត្តា។

ចម្លើយ គេដោះស្រាយសមីការ $6x^2+13x-5=0$ នោះគេបានឫស $x_1=\frac{1}{3}$ និង $x_1=-\frac{5}{2}$ ។

គេបាន $6x^2+13x-5=6\left(x-\frac{1}{3}\right).\left[x-\left(-\frac{5}{2}\right)\right]$

$$=6.\left(x-\frac{1}{3}\right).\left(x+\frac{5}{2}\right)=(3x-1)(2x+5)$$ ។

ឧទាហរណ៍ ២ ដាក់កន្សោមដឺក្រេទី 2 ខាងក្រោមនេះជាផលគុណកត្តា

ក. $2x^2-3x-1$ ខ. x^2-2x+5 ។

ចម្លើយ ក. បើគេដោះស្រាយសមីការ $2x^2-3x-1$ នោះគេបានឫស $x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{4}$ ។

ដូចនេះ $2x^2-3x-1=2\left(x-\frac{3+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{17}}{4}\right)$ ។

ខ. បើគេដោះស្រាយសមីការ x^2-2x+5 នោះគេបានឫស $x=1\pm 2i$ ។

ដូចនេះ $x^2-2x+5=\left[x-\left(1+2i\right)\right]\left[x-\left(1-2i\right)\right]=(x-1-2i)(x-1+2i)$ ។

ប្រតិបត្តិ ដាក់កន្សោមដឺក្រេទី 2 ខាងក្រោមជាផលគុណកត្តា ។

ក. $2x^2+x-21$ ខ. $2x^2-11x+12$

គ. x^2+2x-1 ឃ. $2x^2-3x+2$ ។

ឃ. បង្កើតសមីការដឺក្រេទី 2 ដោយស្គាល់ផលបូក និងផលគុណឫស

សមីការដឺក្រេទី 2 ដែលមានឫស α និង β មានរាង $(x-\alpha)(x-\beta)=0$

ឬ $x-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ ។ ដូចនេះ សមីការនេះមានរាង $x^2+Sx+P=0$ ។

ជាទូទៅ សមីការដឺក្រេទី 2 ដែល α និង β ជាឫស ហើយ $\alpha+\beta=S$ និង $\alpha\beta=P$ មានរាង $x^2+Sx+P=0$

ឧទាហរណ៍១ រកសមីការដឺក្រេទី 2 ដែលមានឫស $\alpha = 3+2\sqrt{2}$, $\beta = 3-2\sqrt{2}$ ។

ចម្លើយ គេបាន $S = 3+2\sqrt{2} + 3-2\sqrt{2} = 6$ និង $P = \left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right) = 9-8 = 1$ ។

ដូចនេះ សមីការនោះគឺ $x^2+6x+1=0$ ។

ឧទាហរណ៍២ គេមានសមីការ $x^2-3x+4=0$ ដែលមាន β និង β ជាឫស ។ ចូររកសមីការ ដែលមានឫស α^2 និង β^2

ចម្លើយ សមីការ $x^2-3x+4=0$ ផលបូកឫសមាន $\alpha+\beta = -\frac{b}{a} = 3$ និងផលគុណឫស $\alpha\beta = \frac{c}{a} = 4$ ។

$\alpha^2+\beta^2 = \left(\alpha+\beta\right)^2 - 2\alpha\beta = 3^2 - 2\times 4 = 1$

$\alpha\beta = \left(\alpha\beta\right)^2 = 4^2 = 16$ ។

ដូចនេះ សមីការដែលមានឫស α^2 , β^2 មានទម្រង់ $x^2-x+16=0$

ប្រតិបត្តិ សមីការ $x^2-2x+7=0$ មានឫស β និង ។

រកសមីការដឺក្រេទី 2 ដែលមានឫស $\alpha+2$ និង $\beta+2$ ។

អនុវត្ត រកពីរចំនួនដោយស្គាល់ផលបូកស្មើនឹង 20 និងផលគុណស្មើនឹង 51 ។

ចម្លើយ បើ x_1 និង x_2 ជាចំនួនទាំងពីរនោះ $\begin{cases} x_1+x_2=20 \\ x_1x_2=51 \end{cases}$

គេបាន $S=20$, $P=51$

ដើម្បីរកចំនួននោះ គេត្រូវដោះស្រាយសមីការ

$x^2-20x+51=0$, $\Delta' = 49\rangle 0$

$x_1 = 10-7$, $x_2 = 10+7 = 17$

ដូចនេះ ចំនួនទាំងពីរនោះគឺ 3 និង 17

៧.៥. អនុវត្តសមីការដឺក្រេទី 2 មានមួយអញ្ញាត

គេប្រើដំណោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី 2 សម្រាប់ដោះស្រាយចំណោទសមីការដឺក្រេទី 2 ទៅតាមជំហានដូចក្នុងដំណោះស្រាយចំណោទសមីការដឺក្រេទី1 ដែរ ។

ឧទាហរណ៍១ គេមានពីរចំនួនដែលមានផលដកស្មើនិង 8 និងផលគុណចំនួនទាំងពីរស្មើនឹង128 ។ គណនាចំនួនទាំងពីរនោះ ។

ចម្លើយ

តាង x ជាចំនួនមួយ នោះ $x+8$ ជាចំនួនមួយទៀត ។ ផលគុណចំនួនទាំងពីរស្មើនឹង 128

គេបាន $x(x+8)=128$ ឬ $x^2+8x-128=0$

ដោះស្រាយសមីការនេះ គេបាន $x_1=8$, $x_2=-16$ ។

ផ្ទៀងផ្ទាត់ បើ $x=8$, $x+8=16$ គេបាន $x(x+8)=8\times16=128$ ។

បើ $x=-16$, $x+8=-16+8=-8$

គេបាន $x(x+8)=-16(-8)=128$ ពិត ។

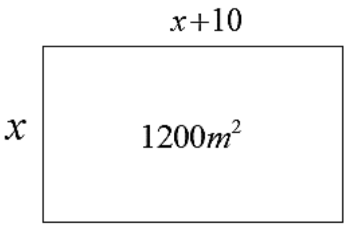
ដូចនេះ ចំណោទមានចម្លើយពីរគឺ $(8,16)$, $(-16,-8)$ ។

ឧទាហរណ៍២ ចំការមួយមានរាងចតុកោណកែង មានបណ្តោយលើសទទឹង $10cm$ ។ គេចង់សង់របងព័ទ្ធជុំវិញចំការនោះ ។ រកប្រវែងរបង បើចំការនោះមានផ្ទៃក្រឡាស្មើនឹង $1200cm^2$ ។

ចម្លើយ

តាង x ជាទទឹង នោះបណ្តោយគឺ $x+10$ ។

គេបាន $x(x+10)=1200cm^2$ ឬ $x^2+10x-1200=0$



ដោះស្រាយសមីការ គេបាន $x_1=-40$, $x_2=30$ ។

ដោយជ្រុងចំការយកតម្លៃវិជ្ជមាន ដូចនេះ $x=30$ ។

គេបានបណ្តោយ $x+10=30+10=40m$ ។

ប្រវែងរបង $(30+40)\times2=140m$ ។

ផ្ទៀងផ្ទាត់ ផ្ទៃក្រឡា $30m\times40m=1200m^2$ ត្រឹមត្រូវ ។

ដូចនេះ របងចំការត្រូវមានប្រវែង $140m$ ។

៧.៦. ប្រព័ន្ធសមីការដឺក្រេទី1 និងសមីការដឺក្រេទី 2

ប្រព័ន្ធសមីការនេះ **ផ្គុំដោយសមីការដឺក្រេទី1និង សមីការដឺក្រេទី 2 មានពីរអញ្ញាត** ។ គេប្រើវិធីបំបាត់អញ្ញាតមួយដោយជំនួសក្នុង ការដោះស្រាយ ។

ឧទាហរណ៍១ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} y=x-1 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$$

ចម្លើយ គេមានប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} y=x-1 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$

យក (1) ជំនួសក្នុង(2)

$x^2+(x-1)^2=13$ ឬ $2x^2-2x-12=0$ ឬ $x^2-x-6=0$

ដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី 2 នោះ គេបាន $x=2$, 3 ។

-បើ $x=-2$ នោះ (1) $y=-3$

-បើ $x=3$ នោះ (1) $y=2$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានគូចម្លើយ $(x=-2\,,\, y=-3)$ ឬ $(x=3\,,\, y=2)$ ។

ឧទាហរណ៍២ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} x^2-y=0 \\ x+y=2 \end{cases}$

ចម្លើយ ប្រព័ន្ធសមីការអាចសរសេរ

$$\begin{cases} x^2-y=0 & (1) \\ x+y=2 & (2) \end{cases}$$

យក (2) ជំនួសក្នុង (1)

សមីការនេះមានឫស $x=1\,,\, x=-2$

-បើ $x=1$ នោះ (2) $:y=1$

-បើ $x=-2$ នោះ (2) $:y=4$ ។

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានគូចម្លើយ $(x=1,\, y=1)$ ឬ $(x=-2,\, y=4)$ ។

ឧទាហរណ៍៣ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} x+y=11 \\ xy=30 \end{cases}$

ចម្លើយ ដោយ $x+y=11$ និង $xy=30$ នោះ x និង y ជាឫសនៃសមីការ $t^2-11t+30=0$ ។

ដោះស្រាយសមីការនេះ គេបាន $t=5\ ,6$ ។

ដូចនេះសមីការមានឫស $(x=5\,,\, y=6)$ ឬ $(x=6,\, y=5)$ ។

ប្រតិបត្តិ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម

ក. $\begin{cases} y=x+2 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$ ខ. $\begin{cases} y=\sqrt{3x} \\ x^2+y^2=48 \end{cases}$ គ. $\begin{cases} x+y=25 \\ xy=125 \end{cases}$ ។

អនុវត្ត ដីចំការមួយរាងចតុកោណកែងមានផ្ទៃក្រឡា $4284m^2$ ហើយមានបរិមាត្រប្រវែង $270m$ ។ គណនាវិមាត្រនៃចំការនោះ ។

ចម្លើយ តាង $x\,,\, y$ ជាវិមាត្រនៃចតុកោណកែង $(x>y>0)$

យើងបាន $\begin{cases} 2(y+x)=270 \\ xy=4284 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} y+x=135 & (1) \\ xy=4284 & (2) \end{cases}$

យើងបានសមីការ $t^2-135+4282=0$

$\Delta=1080=33^2$, $t=\dfrac{135+33}{2}$ ។

$x_1=\dfrac{135-33}{2}=51$ នោះ $y_1=135-51=84$ ។

$x_2=\dfrac{135+33}{2}=84$ នោះ $y_1=135-84=51$

ដូចនេះដោយ $x>y$ វិមាត្រចំការគឺ $x=84m$, $y=51m$ ។

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\begin{cases} 2(84+51)=2\times135=270 \\ 84\times51=4284 \end{cases}$ ពិត ។

៧.៧. វិសមីការដឺក្រេទី២មានមួយអញ្ញាត

៧.៧.១. សញ្ញាណវិសមីការដឺក្រេទី2

វិសមីការដែលជាប់ទាក់ទងនឹងពហុធាដឺក្រេទី 2 ហៅថា វិសមីការដឺក្រេទី 2 ។

ឧទាហរណ៍ $2x^2+3x-5<0$, $x^2\le 4$

$2x^2+3x-5<0$, $x^2\le 4$ ជាវិសមីការដឺក្រេទី 2 មានមួយ អញ្ញាត x ។

> **ជាទូទៅ** វិសមីការដឺក្រេទី 2 មានមួយអញ្ញាត x មានរាង $ax^2+bx+c>0$ ឬ $ax^2+bx+c<0$ ដែល $a\neq 0$ ។

៧.៧.២. ដោះស្រាយវិសមីការតាមសញ្ញាត្រីធា ដឺក្រេទី2

ត្រីធាដឺក្រេទី 2 មានរាង

$ax^2+bx+c>0$ ដែល $a\neq 0$ ។

ករណី $\Delta>0$

ឧទាហរណ៍១ ដោះស្រាយវិសមីការ $x^2-3x-10\le 0$ (1)

ចម្លើយ គេសិក្សាសញ្ញានៃ $f(x)=x^2-3x-10$ ។

$\Delta = 490>0$, $x_1=-2$ $x_2 = 5$ ។ ដាក់ $f(x)$ ជាកត្តា

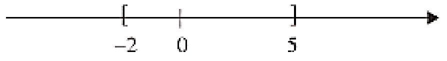
គេបាន $f(x) = x^2-3x-10=(x+2)(x-5)$ ។

តារាងសញ្ញានៃ $f(x)$:

x	$-\infty$	-2		5	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$x-5$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)=(x+2)(x-5)$	$+$	0	$-$	0	$+$

តាមតារាងគេសង្កេតឃើញថា វិសមីការ (1)ផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះតម្លៃ (1) ដែលនាំឱ្យ $f(x) =0$ គឺ $-2\le x\le 5$ ។ ដូចនេះចម្លើយនៃវិសមីការ (1) គឺ $-2\le x\le 5$ ឬ $x\in(-2\,,\,5)$ ។

បកស្រាយលើបន្ទាត់ចំនួន



ឧទាហរណ៍២ ដោះស្រាយវិសមីការ $2x^2-7x+3>0$ ។

ចម្លើយ តាង $f(x) =2x^2-7x+3$ ។ $\Delta =25>0$ នាំឱ្យ $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=3$

គេដាក់ $f(x)$ ជាកត្តា

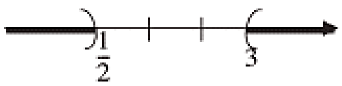
គេបាន $f(x) = (2x-1)(x-3)$ ។

គេសិក្សាសញ្ញានៃ $f(x)$ តាមតារាងខាងក្រោម

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) = (2x-1)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

តាមតារាងនេះចម្លើយនៃវិសមីការដើមគឺ

$x < \frac{1}{2}, 3 < x$ ឬ $x \in \left(-\infty , \frac{1}{2}\right) \cup (3 , \infty)$ ។

ចម្លើយលើបន្ទាត់ចំនួន 

ជាទូទៅ បើសមីការ $ax + bx + x = 0$ មាន $\Delta > 0$ សមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នាគឺ α និង β គេអាចដាក់ជាផលគុណកត្តា $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ ។

គេនឹង សិក្សាសញ្ញានៃត្រីធា $ax^2 + bx + c$ ដោយគ្រាន់តែសិក្សា សញ្ញាផលគុណ a និង $(x-\alpha)(x-\beta)$ ។ ចំពោះ $a > 0$ គេបានតារាងដូចខាងក្រោម

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$x-\alpha$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-\beta$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-\alpha)(x-\beta)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		សញ្ញាដូច a		សញ្ញាផ្ទុយ a		សញ្ញាដូច a	

គេបានរូបមន្តទូទៅដូចខាងក្រោម

ចម្លើយនៃវិសមីការដឺក្រេទី 2

ចំពោះ $\Delta > 0$ និង $a > 0$ សមីការ $ax + bx + c = 0$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នា α និង β ដែល $\alpha < \beta$ នោះ

(1) ចម្លើយនៃ $ax^2 + bx + c > 0$ x គឺ $x < \beta$, $\beta < x$ ។

(2) ចម្លើយនៃ $ax^2 + bx + c < 0$ គឺ $\alpha < x < \beta$ ។

(3) ចម្លើយនៃ $ax^2 + bx + c \geq 0$ គឺ $x \leq \beta$, $\beta \leq x$ ។

(4) ចម្លើយនៃ $ax^2 + bx + c \leq 0$ គឺ $\alpha \leq x \leq \beta$ ។

ប្រតិបត្តិ ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម

ក. $x^2 - 2x - 2 > 0$ ខ. $2x^2 - 3x - 2 < 0$

គ. $-5x^2 - 3x + 2 \leq 0$ ឃ. $3x^2 - 7.x + 10 \geq 2x^2$

ង. $(x+1)(x+4) > 18$ ច. $\frac{5x^2}{2} - \frac{x}{6} \geq \frac{1}{3}$

ឧទាហរណ៍៣ ដោះស្រាយវិសមីការ $1 + 2x - x^2 \geq 0$ ។

ចម្លើយ គុណអង្គទាំងពីរនឹង (-1) ដើម្បីឱ្យមេគុណ x^2 ជាចំនួនវិជ្ជមាន នោះគេបាន

$x^2 - 2x - 1 \geq 0$ ដោះស្រាយ $x^2 - 2x - 1 = 0$ ។

$\Delta' = 2 > 0$ សមីការមានឫស $x = 1 \pm \sqrt{2}$ ។ ដោយ a = 1 >0

តាមរូបមន្តខាងលើ គេបានចម្លើយនៃវិសមីការគឺ $1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}$ ។

ប្រតិបត្តិ ចូររកតម្លៃ p និង q បើចម្លើយនៃវិសមីការ

$x^2 + px + q > 0$ គឺ $x < -3$, $2 < x$ ។

ករណី $\Delta = 0$

ឧទាហរណ៍៤ ដោះស្រាយវិសមីការ $16.x^2 - 8.x + 1 > 0$

ចម្លើយ តាង $f(x) = 16x - 8x + 1$, $\Delta = 16 - 16 = 0$

នាំឱ្យ $x_1 = x_2 = \frac{1}{4}$ ។ ដាក់ $f(x)$ ជាកត្តា គេបាន

$$f(x) = 16\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 \ , \ f(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \text{ ហើយ } a = 16 > 0$$

គេបាន $f(x)$ មានសញ្ញាដូច a លើកលែងតែ $x = 1$ ។

ដូចនេះ វិសមីការដើមមានចម្លើយគ្រប់ចំនួនពិត លើកលែងតែ $x = \frac{1}{4}$ ឬ $\left\{x \mid x \neq \frac{1}{4}\right\}$ ឬ

$x \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, -\infty\right)$ ។

ឧទាហរណ៍៥ ដោះស្រាយវិសមីការ $10x + x^2 + 25 < 0$

ចម្លើយ តាង $f(x) = x^2 + 10x + 25$ ។$\Delta' = 25 - 25 = 0$ ហើយ $a = 1 > 0$ នាំឱ្យ $f(x)$ មានសញ្ញាដូច a មានន័យថា $f(x) \geq 0$, $x = -5$ នាំឱ្យ $f(-5) = 0$ ។

ដូចនេះ វិសមីការ (1) គ្មានចម្លើយ ។

ជាទូទៅ បើសមីការ $ax^2 + bx + c = 0$ មានឫស α ជាឫសឌុប

គេបាន $ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)^2$

ចំពោះ $a > 0$ នោះវិសមភាព $a(x-a)^2 \geq 0$ ពិតជានិច្ច ។

ពេល $x = \alpha$ នោះគេបាន $a(x-\alpha)^2 = 0$ ។

គេបានរូបមន្តទូទៅដូចខាងក្រោម

ចម្លើយនៃវិសមីការដឺក្រេទី 2

ចំពោះ $\Delta = 0$ និង $a > 0$ សមីការ $ax^2 + bx + c = 0$ មានឫសឌុប

(1) ចម្លើយនៃ $ax^2+bx+c>0$ គឺគ្រប់ចំនួនពិតទាំងអស់ លើកលែងតែ α ។

(2) $ax^2 + bx + c < 0$ មិនមានចម្លើយ ។

(3) ចម្លើយនៃ $ax^2 + bx + c \geq 0$ គឺឫសពិតទាំងអស់ ។

(4) ចម្លើយនៃ $ax^2+bx+c \leq 0$ គឺ $x = \alpha$ ។

ប្រតិបត្តិ ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម

ក. $x^2-4x+4>0$

ខ. $4x^2+4x+1<0$

គ. $9x^2-12x+4 \geq 0$

ឃ. $64 \leq 16x - x^2$

• **ករណី** $\Delta < 0$

សមីការ $ax + bx + c = 0$ គ្មានឫសជាចំនួនពិតទេ មានឫសជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា ។

$\Delta = b^2 - 4ac$ គេបានត្រីធា $f(x) = ax + bx + c = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right]$

ឬ $= a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{-\Delta}{4a^2}\right]$

មាន $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, $\dfrac{-\Delta}{4a^2} > 0$ ដោយ $\Delta < 0$ និង $a>0$

ដូចនេះ $f(x)$ មានសញ្ញាដូច a ជានិច្ច ។

គេបានរូបមន្តទូទៅដូចខាងក្រោម

ចម្លើយនៃវិសមីការដឺក្រេទី 2

ចំពោះ $\Delta < 0$ និង $a > 0$ សមីការ $ax^2 + bx + c = 0$ មានឫសជាចំនួនកុំផ្លិច

ឆ្លាស់គ្នា នោះ

(1) ចម្លើយនៃ $ax^2+bx+c>0$ គឺគ្រប់ចំនួនពិតទាំងអស់ ។

(2) $ax^2 + bx + c < 0$ គ្មានចម្លើយ ។

(3) ចម្លើយនៃ $ax^2 + bx + c \ge 0$ គឺចំនួនពិតទាំងអស់ ។

(4) $ax^2+bx+c\le 0$ គ្មានចម្លើយ ។

ឧទាហរណ៍៦ ដោះស្រាយវិសមីការ $x^2+x+1 \le 0$

ចម្លើយ ត្រីធា $f(x) = x^2 + x + 1$ មាន $\Delta = 1-4 = -3<0$ និងមេគុណ $a=1>0$

នាំឱ្យ $f(x)>0$។ ដូចនេះវិសមីការគ្មានចម្លើយ ។

ប្រតិបត្តិ ចូរដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម

ក. $2x^2+3x+4>0$

ខ. $x^2+2x+5<0$

គ. $2x^2-4x+3\ge 0$

ឃ. $5x \ge 2x^2+9$ ។

៧.៧.៣. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការដឺក្រេទី 2 មានមួយអញ្ញាត

ឧទាហរណ៍១ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការ $\begin{cases} 3x^2+x-1<1 & (1) \\ 2x^2+x-1\ge 0 & (2) \end{cases}$

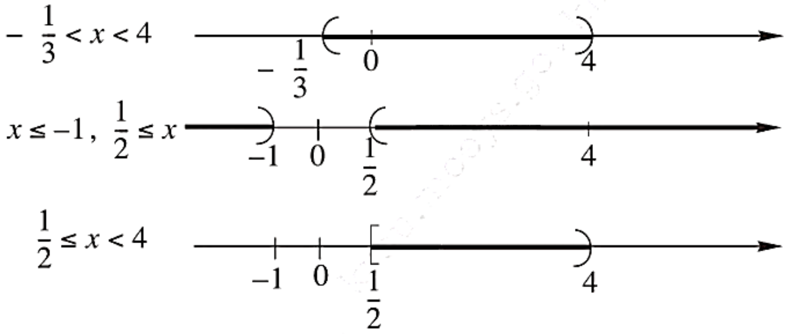
ចម្លើយ តាមវិសមីការ (3) គេដាក់កត្តា $3x^2-11x-4=(3x+1)(x-1)<0$

ចម្លើយនៃវិសមីការ (1) គឺ $-\frac{1}{3}<x<4 \quad (3)$

វិសមីការ $(1): 2x^2+x-1\ge 0$ គេដាក់ជាកត្តា $2x^2+x-1=\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1)\ge 0$

ចម្លើយនៃ (2) គឺ $x\le -1$, $\frac{1}{2}\le x \quad (4)$

បកស្រាយ (2) និង (2) នៅលើបន្ទាត់ចំនួន ដើម្បីកំណត់តម្លៃរួម។ គេបាន $\frac{1}{2}\le x<4$។



ដូចនេះ ប្រព័ន្ធវិសមីការមានសំណុំចម្លើយ $x\in\left[\frac{1}{2}, 4\right)$ ។

ឧទាហរណ៍២ ដោះស្រាយវិសមីការ $\begin{cases} x^2+x-6>0 & (1) \\ x^2+3x-4\geq 0 & (2) \end{cases}$

ចម្លើយ ត្រីធា $f(x)=x^2+x-6$ មានឫស $x_1=-3$, $x_2=2$ ។

$g(x)=x^2+3x-4$ មានឫស $x_1=1$, $x_2=-4$ ។

គេបានតារាង

x	$-\infty$		-4		-3		1		2		$+\infty$
$f(x)$		+		+	0	−		−	0	+	
$g(x)$		+	0	−		−	0	+		+	
$\begin{cases} f(x) \\ g(x) \end{cases}$		+	0						0	+	

វិសមីការ (1) មានសំណុំចម្លើយ $(-\infty\,,-3)\cup(2\,,+\infty)$ ។

វិសមីការ (2) មានសំណុំចម្លើយ $(-\infty,-4]\cup[1\,,+\infty)$ ។

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធវិសមីការមានសំណុំចម្លើយ $S=S_1\cap S_2$ គឺ $S=(-\infty,-4]\cup(2\,,+\infty)$ ។

ប្រតិបត្តិ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការខាងក្រោម

ក. $\begin{cases} x^2-6x+5\leq 0 \\ x^2-9x+14<0 \end{cases}$

ខ. $\begin{cases} -x^2+3x+4\geq 0 \\ (2x^2+3)(x^2-3x)>0 \end{cases}$

គ. $\begin{cases} x^2+x-3>0 \\ x^2-5x+4<0 \end{cases}$

ឃ. $\begin{cases} x^2+x-20\leq 0 \\ 2x^2+7x+3>0 \end{cases}$ ។

៧.៧.៤. អនុវត្តវិសមីការ

ឧទាហរណ៍១ ដោះស្រាយវិសមីការ $x^3-2x^2-8x\leq 0$ ។

ចម្លើយ យើងដាក់ជាផលដកកត្តាត្រីធា

$$f(x)=x^3-2x^2-8x=x(x^2-2x-8)$$

$$=x(x+2)(x-4)$$

សិក្សាសញ្ញាត្រីធា $f(x)$ តាមតារាងខាងក្រោម

x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
x		−		−	0	+		+	
$x+2$		−	0	+		+		+	
$x-4$		−		−		−	0	+	
$f(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

សំណុំចម្លើយនៃវិសមីការគឺ $x\in(-\infty\,,-2]\cup[0\,,4]$។

ឧទាហរណ៍២ ដោះស្រាយសមីការ $\frac{\left(x^2+3x-4\right)}{x^2-9}>0$

ចម្លើយ អង្គទី១ នៃវិសមីការជាកន្សោមប្រភាគ។មានន័យលុះត្រាតែ $x^2-9\neq 0$ គឺ $x\neq 3$ឬ $x\neq -3$

ក្នុងករណីនេះ គេគ្រាន់តែសិក្សាផលចែកសញ្ញានៃពីត្រីធា។

ត្រីធា $f(x)=x^2+3x-4$ មានឫស $x_1=1$ ឬ $x_2=-4$។

ត្រីធា $g(x)=x^2-9$មានឫស $x_1=-3$, $x_2=3$។

សិក្សាសញ្ញា $\frac{f(x)}{g(x)}$ តាមតារាងខាងក្រោម

x	$-\infty$		-4		-3		1		3		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	|	−	0	+	|	+	
$g(x)$		+	|	+	0	−	|	−	0	+	
$\frac{f(x)}{g(x)}$		+	0	−	||	+	0	−	||	+	

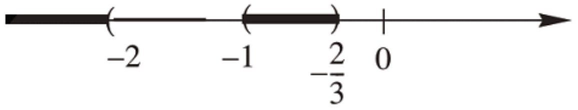
តាមតារាងសំណុំចម្លើយរបស់វិសមីការគឺ $x\in(-\infty\,,-4)\cup(-3\,,1)\cup(3\,,+\infty)$។

ឧទាហរណ៍៣ គេឱ្យសមីការ $x^2+2mx-3m-2=0$។ កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។

ចម្លើយ សមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន លុះត្រាតែ

$$\begin{cases}\Delta'>0\\ S>0\\ P>0\end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases}\Delta'=m^2-(3m-2)=m^2+3m+2>0\\ S=-2m>0\\ P=-3m-2>0\end{cases}$$

$$\text{គេបាន }\begin{cases}(m+2)(m+1)>0\\ m<0\\ m<-\frac{2}{3}\end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases}m<-2\ ,\ -1<m\\ m<0\\ m<-\frac{2}{3}\end{cases}$$



ដូចនេះ: $m(-\infty,-2)\cup\left(-1,-\frac{2}{3}\right)$ ។

ឧទាហរណ៍៤ សិក្សាអត្ថិភាព និងសញ្ញាឫសនៃសមីការ $mx^2-2(2m-3)x+2m-1=0$ (1) តាមតម្លៃនៃ m។

ចម្លើយ គេបាន $\Delta' = 2m^2 - 11m + 9$, $\Delta' = 0$, $m = 1$, $m = \dfrac{9}{2}$ ។

នាំឱ្យ $P = \dfrac{2m-1}{m}$

បើ $P = 0 \Rightarrow m = \dfrac{1}{2}$ និង $S = \dfrac{2(2m-3)}{m}$

បើ $S = 0 \Rightarrow m = \dfrac{3}{2}$

m	Δ'	P	S	$x_1 < x_2$
$+\infty$				
	+	+	+	$0 < x_1 < x_2$
$\frac{9}{2}$	0			$x_1 = x_2 = 0$
	−	+	+	សមីការមានឫសជាចំនួនកុំផ្លិច
$\frac{3}{2}$			0	
	−	+	−	
1	0			$x_1 = x_2 = -1$
	+	+	−	$x_1 < x_2 < 0$
$\frac{1}{2}$		0		$x_1 = 0$, $x_2 = -8$
	+	−	−	$x_1 < 0 < x_2$
0				សមីការដឺក្រេទី 1 មានឫស $x = \frac{1}{6}$ ។
	+	−	−	$x_1 < 0 < x_2$
$-\infty$				

លំហាត់អនុវត្ត

1.គណនាកន្សោមខាងក្រោម

ក.$3-i-4-\sqrt{9}$ ខ. $\frac{-4-\sqrt{-12}}{2}$ គ. $-\sqrt{24}\left(\sqrt{-\frac{4}{9}}+-\frac{4}{9}\right)$

2.កំណត់តម្លៃ a និង b

ក. $-8+6i=a+bi$ ខ. $a+bi+\left(\sqrt{4}-\sqrt{-16}\right)=-1-6i$ គ. $\frac{a+bi}{3+2i}=\frac{8}{13}+\frac{12}{13}i$

3. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម

ក. $\left(y+\frac{5}{8}\right)^2+\frac{49}{16}=0$ ខ.$3iy^2-y+2i=0$ គ.$5\sqrt{5x^2}-10x+\sqrt{5}=0$

4.គេមានសមីការ $x^2-x+8=0$ ដែលមានឫស α និង β ។

គណនា   ក. $\frac{\beta}{1+\alpha^2}+\frac{\alpha}{1+\beta^2}$

ខ. $\alpha^2+\beta^2$

5. រកពីរចំនួនដោយស្គាល់

ក. $\begin{cases} x_1+x_2=10 \\ x_1.x_2=21 \end{cases}$ ខ. $\begin{cases} x_1+x_2=25 \\ x_1.x_2=150 \end{cases}$ គ. $\begin{cases} n+m=12 \\ n.m=28 \end{cases}$ ឃ. $\begin{cases} p+q=12 \\ p.q=28 \end{cases}$

6. គេមានសមីការ $(m+1)x^2-2(m+1)x+2m+3=0$

ក.ដោះស្រាយសមីការ ក្នុងករណីដែល $m=-1$, $m=-3$, $m=3$

ខ. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឲ្យសមីកាមានឫសឌុប ហើយគណនាឫសឌុបនោះ ។

គ. រកទំនាក់ទំនងរវាង x_1 និង x_2 ដែលគ្មាន m ។

7. ក្រុមហ៊ុនមួយមានម៉ាស៊ីនថតចម្លងពីគ្រឿង ។ ក្នុងការថតចម្លងរបាយការណ៍ប្រចាំខែ គេដឹងថា ម៉ាស៊ីន B ប្រើរយៈពេល $12mn$ លើសម៉ាស៊ីន A ។ បើម៉ាស៊ីនទាំងពីធ្វើការរួមគ្នានោះ កិច្ចការនិងសម្រេចតែក្នុងរយៈពេល $8mn$ ។ បើគេឲ្យម៉ាស៊ីននីមួយៗ ដំណើការតែឯង តើប្រើរយៈពេលប៉ុន្មាន ?

8.សិក្សាសញ្ញាត្រីធាខាងក្រោម

ក. $f(x)=x^2-4x-5$

ខ. $f(x)=5x^2-x-3$

គ. $f(x)=-4x^2+4x+3$

ឃ. $f(x)=\frac{x^2}{2}$

9. ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម

ក. $x^2-9x+14>0$

ខ. $-2x^2+5x-3\le 0$

គ. $-x^2-6x-8\le 0$

ឃ. $-x^2 \geq 0$

10. រកតម្លៃ m ដើម្បីឲ្យវិសមីកាផ្ទៀងផ្ទាត់គ្រប់តម្លៃ $x \in R$

ក. $(m-3)x^2-(m-3)x^2+m-5<0$

ខ. $(m^2+4m-5)x^2-2(m+1)x+3>0$

គ. $(m-4)x^2-3x+m+4>0$

11. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការ

1. $\begin{cases} -x^2+3x+4 \geq 0 \\ 2x^2+3(x^2-3x) \geq 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y+1 \geq \frac{1}{3}(y+5) \\ \frac{1}{2}(3y+7)-1<0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 6(t+1) > 2t-5 \\ 25-\frac{6-t}{2}3t \end{cases}$

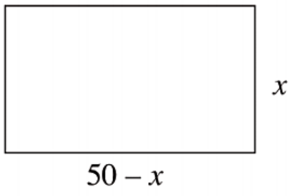
12.កំណត់តម្លៃ c នៃវិសមីការ $x^2+7x+9>8x+c$ មានចម្លើយចំពោះគ្រប់តម្លៃ x

មេរៀនទី៨ អនុគមន៍

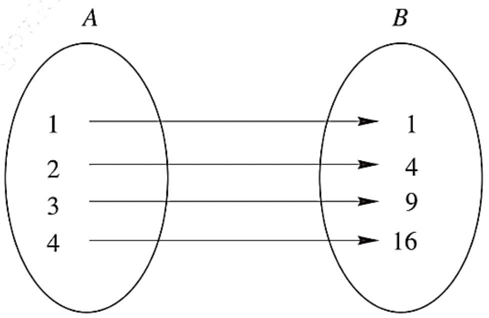
៨.១. សញ្ញាណអនុគមន៍

ឧទាហរណ៍១ នារីបានលក់ក្រូចឆ្មារ x ផ្លែក្នុងតម្លៃ50 រៀលក្នុង 1 ផ្លែ ហើយនាងទទួលបានប្រាក់ចំណូល $y=50x$ រៀល ។

ឧទាហរណ៍ ២ បើគេសង់សួនច្បារចតុកោណកែងមួយដែលមានបរិមាត្រស្មើ 100 (ម៉ែត្រ) និងទទឹងគឺ x (ម៉ែត្រ) នោះផ្ទៃ ក្រឡា y គឺ $y=x(50-x)$ (ម៉ែត្រការ៉េ)ដែល $0<x<50$ ។



ឧទាហរណ៍៣ ធាតុ x នៃសំណុំ $A=\{1,2,3,4\}$ ទាក់ទងនឹងធាតុ y នៃសំណុំ $B=\{1,4,9,16\}$ តាមទំនាក់ទំនង " មានការេស្មើនឹង" គឺ " $y=x^2$ " ដូចក្នុងដ្យាក្រាមព្រួញខាងក្រោម

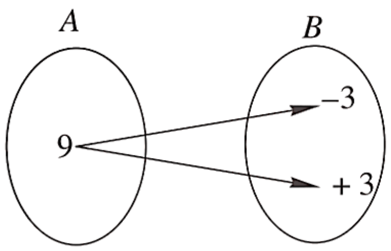


សំណួរ ពិនិត្យទំនាក់ទំនងរវាង x និង y ខាងលើ ។ ចំពោះតម្លៃនីមួយៗនៃ x តើមានតម្លៃ y ប៉ុន្មានដែលគេរកបាន ?

ចម្លើយ ចំពោះតម្លៃនីមួយៗនៃ x គេអាចរកបានតម្លៃ y តែមួយគត់ ។ ទំនាក់ទំនងទាំងបីខាងលើ នេះហៅថា អនុគមន៍ពីសំណុំមួយទៅសំណុំមួយផ្សេងទៀត ។

និយមន័យ A និង B ជាសំណុំមិនទទេ ។

បើទំនាក់ទំនង f ពីសំណុំ A ទៅសំណុំ B ភ្ជាប់ធាតុនីមួយៗនៃសំណុំ A ទៅនឹងធាតុតែមួយគត់នៃសំណុំ B នោះទំនាក់ទំនង f ហៅថាអនុគមន៍ពីសំណុំ A ទៅសំណុំ B ។



ចំពោះទំនាក់ទំនង $y^2 = x$ បើគេឱ្យ $x = 9$ នោះគេ
បាន $y = -3$ ឬ $y = +3$ ក្នុងករណីដែលតម្លៃ x មួយ
បណ្ដាលឱ្យ y មានតម្លៃពីរបែបនេះ គេថា $y^2 = x$ មិនមែនជា
អនុគមន៍ទេ ។ ដ្យាក្រាមរបស់វា គឺជាតុមួយនៃសំណុំ A
ភ្ជាប់ទៅ ជាតុពីរនៃសំណុំ B ។
បើ f ជាអនុគមន៍ពីសំណុំ A ទៅសំណុំ B នោះគេកំណត់សរសេរ

$$f: \quad A \to B$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

A ហៅថា **សំណុំដើម** ហើយ x ជាធាតុដើមនិង x ហៅថាអថេរមិនអាស្រ័យ ។
B ហៅថា **សំណុំចុង** ហើយ y ជារូបភាពនៃ x តាម f និង $y = f(x)$ ហៅថា
អថេរអាស្រ័យ ។

ប្រតិបត្តិ តើទំនាក់ទំនងនីមួយៗខាងក្រោមជាអនុគមន៍ ឬទេ ? ព្រោះអ្វី ?

ក. $y = (x-4)^2$ ខ. $x = (y+1)^2$

ឧទាហរណ៍៤ ចំពោះ $f(x) = x^2 + 2x$ គេអាចគណនាតម្លៃ:

$$f(2) = 2^2 + 2\times 2 = 8$$
$$f(0) = 0^2 + 2\times 0 = 0$$
$$f(-3) = (-3)^2 + 2\times(-3) = 3 \text{ ជាដើម។}$$

ប្រតិបត្តិ ចំពោះ $g(x) = -x^2 + 3x - 4$ ។ គណនាតម្លៃខាងក្រោម:

ក. $g(1)$ ខ. $g(0)$ គ. $g(-2)$ ឃ. $g(k)$

៨.២. ដែនកំណត់ និងសំណុំរូបភាព

ឧទាហរណ៍១ តើគេអាចគណនា $f(x)$ និង $g(x)$ ឬទេ ?

ក. $f(x) = 2x+1$ ខ. $g(x) = \dfrac{1}{x}$

ចម្លើយ ក. $f(x) = 2x+1$ មានតម្លៃគ្រប់ចំពោះចំនួនពិត x ។

ខ. $g(x) = \dfrac{1}{x}$ មានតម្លៃចំពោះគ្រប់ x ដែល $x \neq 0$ ។

គេថាអនុគមន៍ f កំណត់ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x និងអនុគមន៍ g កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x លើកលែងសូន្យ។

1. ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ដែលតាងដោយ D គឺសំណុំអថេរ x ដែលបណ្ដាលឱ្យអនុគមន៍ $y = f(x)$ មានតម្លៃ ។
2. សំណុំរូបភាពនៃអនុគមន៍ f ដែលតាងដោយ I គឺសំណុំតម្លៃ $y = f(x)$ ចំពោះគ្រប់ x នៅលើដែនកំណត់ D ។

ឧទាហរណ៍២

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $y=\frac{1}{x-2}$ ។

ខ. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $y=\sqrt{x}$ ។

ចម្លើយ

ក. ប្រភាគ $\frac{1}{x-2}$ គ្មានន័យចំពោះភាគបែងស្មើនឹងសូន្យ។

ដោយ $x-2=0$ នាំឱ្យ

$x=2$ អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $x\neq 2$

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $D=\{x\,|\,x\neq 2\}$ ។

ខ. អនុគមន៍ $y=\sqrt{x}$ មានន័យចំពោះគ្រប់ $x\geq 0$

គេបានដែនកំណត់នៃអនុគមន៍គឺ $D=\{x\,|\,x\geq 0\}$ ។

ប្រតិបត្តិ១ រកដែនកំណត់នៃអនុកមន៍៖

ក. $y=-x+3$

ខ. $y=\frac{1}{x+1}$ ។

ឧទាហរណ៍៣ រកសំណុំរូបភាពនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $y=-2x+3$

ខ. $y=-2x+3 \quad (x\geq 1)$ ។

ចម្លើយ ក. អនុគមន៍កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត។ ដូចនេះ គេបានសំណុំរូបភាព I ជាសំណុំចំនួនពិត។

$x\geq 1$ ខ. ចំពោះគ្រប់ $x\geq 1$ គេបាន៖ $-2x\leq -2$

$\Leftrightarrow -2x+3\leq -2+3$

នោះ $y\leq 1$

គេបាន សំណុំរូបភភាព $I=\{y\,|\,y\leq 1\}$ ។

ប្រតិបត្តិ២ រកសំណុំរូបភាពនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $y=x-2$

ខ. $y=3x-4 \quad (x<1)$ ។

ឧទាហរណ៍៤ បើថាសមួយមានកាំ x នោះផ្ទៃក្រឡារបស់វាកំណត់ដោយ πx^2 ។ រកដែនកំណត់ និងសំណុំរូបភាពនៃអនុគមន៍ $y=\pi x^2$ ។

ចម្លើយ កាំ x នៃថាសជាចំនួនវិជ្ជមាន គេបានដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $D=\{x\,|\,x>0\}$ ម្យ៉ាងទៀត ទៀត $y=\pi x^2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ គេបានសំណុំរូបភាព $I=\{y\,|\,y>0\}$ ។

ប្រតិបត្តិ៣ បើ t ជារយៈពេលនៃចល័តមួយដែលមានល្បឿន $15km/h$ នោះចម្ងាយចរវាកំណត់ដោយ$15t$ ។ រកដែនកំណត់ និងសំណុំរូបភាពនៃអនុគមន៍ $y=15t$ ។

៨.៣. អនុគមន៍កើន និងអនុគមន៍ចុះ

ឧទាហរណ៍១ គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=2x-1$ និង $g(x)=-x+2$ ។ ចូលពិនិត្យមើលតម្លៃ $f(x)$ និង $g(x)$ កើន ឬចុះនៅពេលតម្លៃ $f(x)=x^2+2x$ កើនឡើង។

ចម្លើយ បើតម្លៃ x កើន នោះតម្លៃ $f(x)$ ក៏កើនឡើងដែរ។

បើតម្លៃ x កើនឡើង នោះតម្លៃ $g(x)$ ថយចុះ។

ចំពោះ x_1 និង x_2 ដែល $x_2>x_1$

គេកំណត់ កំណើនអថេរ $\Delta x=x_2-x_1$ និងអនុគមន៍កំណើន $\Delta f=f(x_2)-f(x_1)$ ។

គេសិក្សាភាពកើន ឬចុះនៃអនុគមន៍ដោយពិនិត្យមើលផលធៀប $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

ចំពោះអនុគមន៍ $f(x)=2x-1$ និង $g(x)=-x+2$ យើងបាន

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(2x_2-1)-(2x_1-1)}{x_2-x_1}=\frac{2(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=2>0$$

$$\frac{\Delta g}{\Delta x}=\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(-x_2+2)-(-x_1+2)}{x_2-x_1}=\frac{-(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=-1<0$$

ជាទូទៅ ជាអនុគមន៍កំណត់លើចន្លោះ x ។

បើ $\frac{\Delta f}{\Delta x}>0$ នោះគេថា f ជាអនុគមន៍កើននៅលើចន្លោះ $[a,b]$ ។

បើ $\frac{\Delta f}{\Delta x}<0$ នោះគេថា f ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើចន្លោះ $[a,b]$ ។

ប្រតិបត្តិ គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=3x-5$ និង $g(x)=-\frac{2}{3}x+2$ ។ សិក្សាភាពកើន ឬចុះនៃ f អនុគមន៍ និង g ដោយប្រើផលធៀប $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ និង $\frac{\Delta g}{\Delta x}$ ។

៨.៤. ក្រាបនៃអនុគមន៍

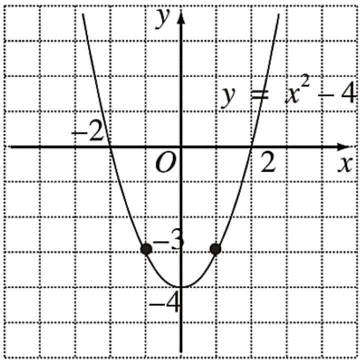
ឧទាហរណ៍១ គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=x^2-4$ ។

គណនាតម្លៃនៃអនុគមន៍ f ។

ចំពោះគ្រប់តម្លៃនៃ $x\in\{-3,-2,-1,0,2,3\}$

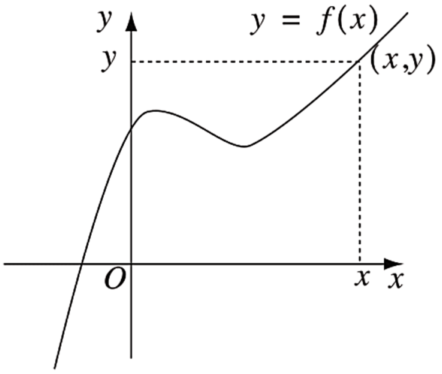
គេបានៈ

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	5	0	-3	-4	-3	0	5



ដៅចំណុចទាំងនេះក្នុងតម្រុយកូអរដោនេរួចភ្ជាប់ គេបានសំណុំចំណុចទាំងនេះបង្កើតបានជាក្រាបនៃ អនុគមន៍ $f(x)=x^2-4$ ។

ជាទូទៅ ៖ ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ គឺជាសំណុំ ចំណុច (x,y) ដែល x នីមួយៗនៅ ក្នុងដែនកំណត់ D នៃអនុគមន៍ f ហើយ $y=f(x)$ ។ក្រាប $y=f(x)$ ជាសំណុំ: $\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$ ។



ក. ចំពោះគ្រប់តម្លៃនៃ $x\in\left\{\frac{1}{4},\frac{1}{2},1,2,4\right\}$ គណនាតម្លៃ $f(x)$ ។

ខ. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=\frac{1}{x}$ ចំពោះ $x>0$ ។

ចំណេះដឹងបន្ថែម: ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=|x|$

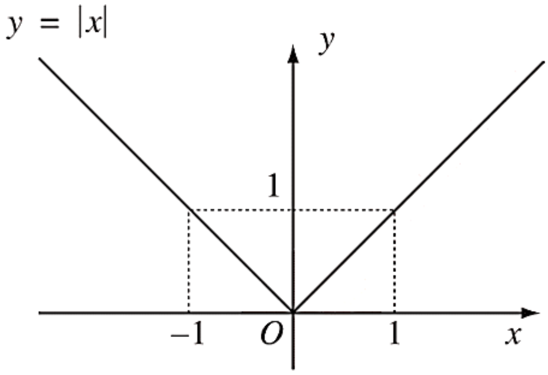
ចំពោះអនុគមន៍ $y=|x|$ មានដែនកំណត់ $D\in\mathbb{R}$

ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ នោះ $y=|x|\geq 0$ ។ គេបានសំណុំរូបភាព $I=\{y\mid y\geq 0\}$

ចំពោះ $x\geq 0\ , y=x$

ចំពោះ $x<0\ , y=-x$

ក្រាបនៃអនុគមន៍មានរាងជាអក្សរ ចំពោះ $y=|x|$ ដូចរូបខាងស្តាំ។



ប្រតិបត្តិ សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $y=|x+2|$
ខ. $y=|-x+1|+2$ ។

៨.៥. អនុគមន៍ដឺក្រេទី២

១. អនុគមន៍ $y=ax^2$

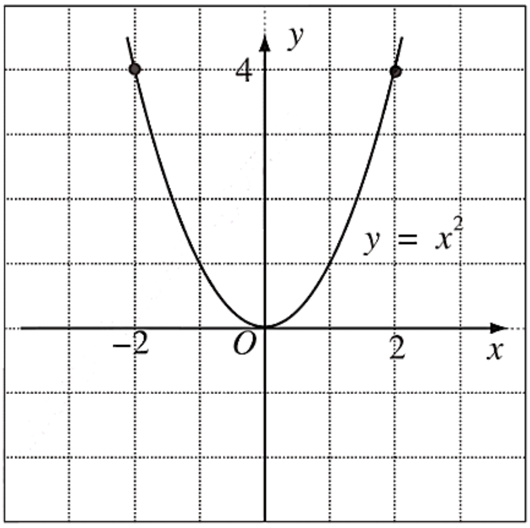
អនុគមន៍ដឺក្រេទី 2 មានមួយអថេរគឺជាអនុគមន៍ដែលដឺក្រេនៃអថេរស្មើ 2 ។

ឧទាហរណ៍១ សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=x^2$ ។

ចម្លើយ ក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=x^2$ កាត់តាមចំណុចខាងក្រោម

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4

ដៅចំណុចទាំងនេះ រួចភ្ជាប់គេបានក្រាបដូចខាងក្រោម



ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងលើហៅថា " ប៉ារ៉ាបូល" ។ ចំណុច $O(0,0)$ នៃប៉ារ៉ាបូលនេះដែលស្ថិត នៅទាបជាងគេហៅថា " កំពូល" ហើយអ័ក្សអរដោនេជា " អ័ក្សឆ្លុះ " នៃប៉ារ៉ាបូលនេះ ។ ប៉ារ៉ាបូល នេះបែរភាពផតឡើងលើ ។

ពិនិត្យមើលភាពចុះ និងភាពកើននៃអនុគមន៍ $y=x^2$ ។

គេបាន កំណើនអថេរ $\Delta x = x_2 - x_1$

កំណើនអនុគមន៍ $\Delta f = f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 + x_1)(x_2 - x_1)$

ដូចនេះផលធៀប $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1$ ។

ចំពោះគ្រប់ x_1, x_2 ដែល $x_1 < x_2 < 0$ គេបាន $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = x_2 + x_1 < 0$ ហើយត្រូវគ្នានឹងប៉ារ៉ាបូលចុះ។ គេថា f ជាអនុគមន៍ចុះ ចំពោះ $x < 0$ ។

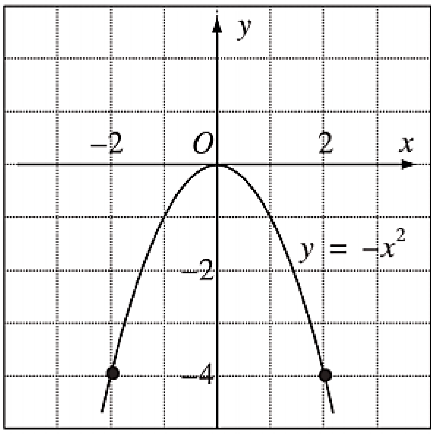
ចំពោះគ្រប់ x_1, x_2 ដែល $0 < x_1 < x_2$ គេបាន $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = x_2 + x_1 < 0$ ហើយត្រូវគ្នានឹងប៉ារ៉ាបូលកើនឡើង។ គេថា f ជាអនុគមន៍កើន ចំពោះ $x > 0$ ។

ឧទាហរណ៍២ សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ $y = -x^2$ ។

ចម្លើយ ក្រាបតាងអនុគមន៍ $y = -x^2$ កាត់តាមចំណុចខាងក្រោម

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y	-4	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	-1	-4

ដៅចំណុចទាំងនេះរួចភ្ជាប់ គេបានក្រាបដូចខាងក្រោម



ចំណុច $O(0,0)$ នៃប៉ារ៉ាបូលនេះដែលស្ថិតនៅខ្ពស់ជាងគេហៅថា " កំពូល" ហើយអ័ក្សអរដោនេក៏ជា "អ័ក្សឆ្លុះ" នៃប៉ារ៉ាបូលនេះ ហើយប៉ារ៉ាបូល នេះបែរភាពផតចុះក្រោម។

ប្រតិបត្តិ១ ពិនិត្យមើលភាពចុះ និងភាពកើននៃអនុគមន៍ $y = -x^2$ ។

ឧទាហរណ៍៣ សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ $y = \dfrac{1}{2}x^2$ និង $y = 2x^2$ ។

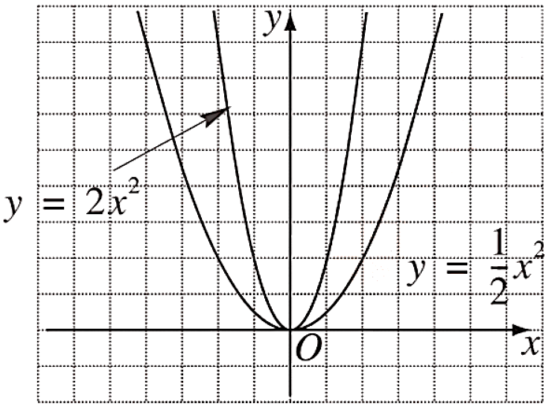
ចម្លើយ ក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=\frac{1}{2}x^2$ កាត់តាមចំណុចខាងក្រោម

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	8	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	2	8

ក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=2x^2$ កាត់តាមចំណុចខាងក្រោម

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2
y	8	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	2	8

ដៅចំណុចទាំងនេះរួចភ្ជាប់ គេបានក្រាបដូចខាងក្រោម



ប្រតិបត្តិ២ សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

ក. $y=-2x^2$

ខ. $y=-\frac{1}{2}x^2$

ជាទូទៅ	- ចំពោះ $a>0$ ប៉ារ៉ាបូល $y=ax^2$ បែរភាពផតឡើងលើ។ - ចំពោះ $a<0$ ប៉ារ៉ាបូល $y=ax^2$ បែរភាពផតចុះក្រោម។

២.ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=a(x-p)^2$

ឧទាហរណ៍១ សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=x^2$ និង $y=(x-2)^2$ រួចទាញសន្និដ្ឋានពីក្រាប។

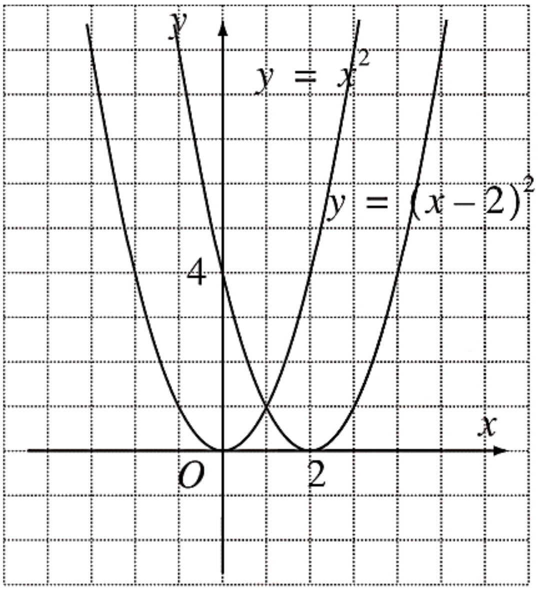
ចម្លើយ ក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=x^2$ ជាប៉ារ៉ាបូលកាត់តាមចំណុច

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

ក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=(x-2)^2$ ជាប៉ារ៉ាបូលកាត់តាមចំណុច

x	0	1	2	3	4
y	4	1	0	1	4

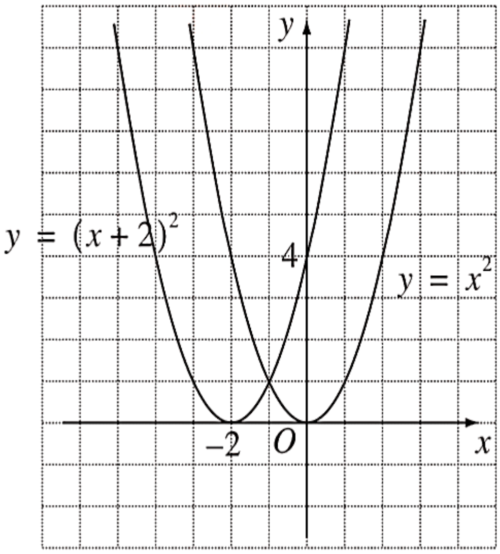
ដៅចំណុចទាំងនេះរួចភ្ជាប់ គេបានក្រាបដូចខាងស្តាំ។ តាមក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងលើ គេអាចសន្និដ្ឋានបានថា ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=(x-2)^2$ បានដោយការរំកិលក្រាបនៃ អនុគមន៍ $y=x^2$ ចំនួន 2 ឯកតាស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស។



ឧទាហរណ៍២ សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=x^2$ និង $y=(x-2)^2$ រួចទាញសន្និដ្ឋានពីក្រាប។

ចម្លើយ ក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=x^2$ ជាប៉ារ៉ាបូលកាត់តាមចំណុច

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4



ក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=(x-2)^2$ ជាប៉ារ៉ាបូល
កាត់តាមចំណុច

x	-4	-3	-2	-1	0
y	4	1	0	1	4

ដៅចំណុចទាំងនេះរួចភ្ជាប់ គេបានក្រាបដូចខាងស្តាំ។
តាមក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងលើ គេអាចសន្និដ្ឋានបានថាក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=(x-2)^2$ បានដោយការរំកិលក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=x^2$ ចំនួន -2 ឯកតាស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

ជាទូទៅ ក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=a(x-p)^2$ ជារូបកិលនៃក្រាបតាង $y=ax^2$ ចំនួន p ឯកតាស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

- រំកិលទៅស្តាំ បើ $p>0$ ។
- រំកិលទៅឆ្វេង បើ $p<0$ ។

ប្រតិបត្តិ សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ខាងក្រោមដោយប្រើក្រាបតាង $y=3x^2$

ក. $y=3(x+2)^2$

ខ. $y=3(x-1)^2$

៣.ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=a(x-p)^2+q$

ឧទាហរណ៍១ សង់ក្រាបនៃអនុកមន៍ $y=x^2$ និង $y=(x+2)^2+1$ រួចទាញសន្និដ្ឋានពីក្រាប។

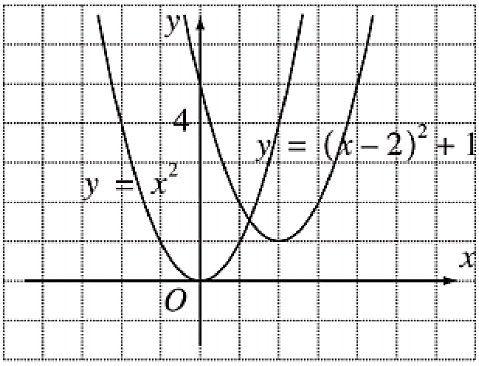
ចម្លើយ ក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=x^2$ ជាប៉ារ៉ាបូលកាត់តាមចំណុច

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

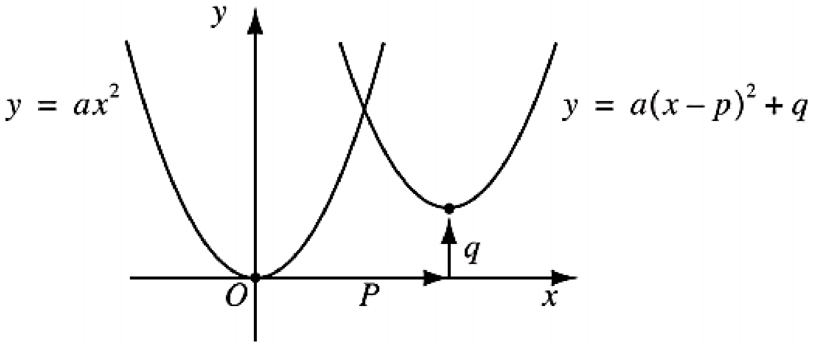
ក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=(x+2)^2+1$ ជាប៉ារ៉ាបូលកាត់តាមចំណុច

x	0	1	2	3	4
y	5	2	1	2	5

ដៅចំណុចទាំងនេះរួចភ្ជាប់ គេបានក្រាបដូចខាងស្តាំ តាមក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងលើ គេអាចសន្និដ្ឋានបានថា ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=(x-2)^2+1$ បានដោយការរំកិលក្រាបតាង $y=x^2$ ចំនួន 2 ឯកតាស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ហើយបន្ទាប់មករំកិលស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេចំនួន 1 ឯកតា។



ជាទូទៅ ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=a(x-p)^2+q$ គឺជាប៉ារ៉ាបូលដែលបានរំកិលក្រាបតាង $y=ax^2$ ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ចំនួន p ឯកតា ហើយស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេចំនួន p ឯកតា។ ប៉ារ៉ាបូលមានកំពូល (p,q) និងអ័ក្សឆ្លុះមានសមីការ $x=p$។



ប្រតិបត្តិ១ ក. សង់ក្រាបតាង $y=\frac{1}{2}x^2$។ ខ. ទាញរកក្រាប $y=\frac{1}{2}(x-3)^2-2$។

ប្រតិបត្តិ២ សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $y=3(x-4)^2+1$

ខ. $y=\frac{1}{3}(x+2)^2-1$

គ. $y=-2(x-1)^2+3$

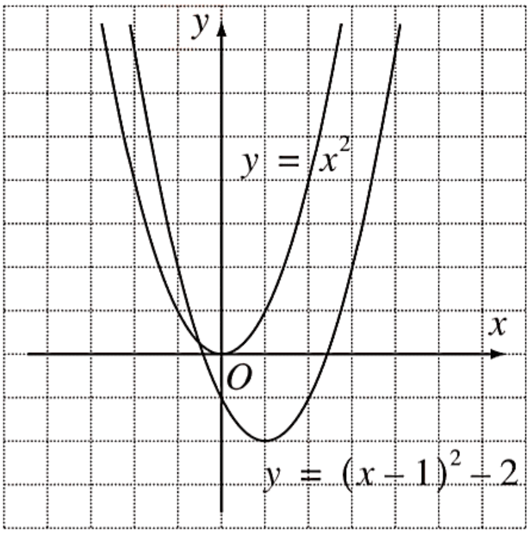
ឧទាហរណ៍២ សង់ក្រាបតាង $y=x^2-2x-1$ ។

ចម្លើយ គេមាន $y=x^2-2x-1$

$$=\left(x^2-2x+1\right)-2=\left(x-1\right)^2-2$$

ក្រាប $y=x^2-2x-1$ ជាប៉ារ៉ាបូលបានរំកិលក្រាប តាង $y=x^2$ ចំនួន 1 ឯកតា ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ហើយរំកិលស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេចំនួន 2 ឯកតា។

ដូចនេះ កូអរដោនេនៃកំពូលគឺ $(1,-2)$ គេបានក្រាបដូចខាងក្រោម



ជាទូទៅ $y=ax^2+bx+c=a\left[x+\frac{b}{2a}\right]^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=a\left(x-p\right)^2+q$

ដែល $p=-\frac{b}{2a}$ និង $q=-\frac{b^2-4ac}{4a}$ ។

ក្រាបនៃ $y=ax^2+bx+c$ ជាប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូល $-\frac{b}{2a},=-\frac{b^2-4ac}{4a}$

និងអ័ក្សឆ្លុះមានសមីការ $x=-\frac{b}{2a}$ ។

ប្រតិបត្តិ៣ កំណត់កូអរដោនេនៃកំពូល និងមានសមីការអ័ក្សឆ្លុះនៃប៉ារ៉ាបូលខាងក្រោម:

ក. $y=x^2+2x+3$ ខ. $y=-2x^2+8x+1$ ។

ប្រតិបត្តិ៤ សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $y=5x^2+2x-3$ ខ. $y=2x-\frac{1}{2}x^2$ ។

៤. តម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមានៃអនុគមន៍ដឺក្រេទី ២

ឧទាហរណ៍១ គេឲ្យអនុគមន៍ដឺក្រេទី២

$$y=x^2-2x+3=x^2-2x+1+2=\left(x-1\right)^2+2$$

ដោយ $(x-1)^2 \geq 0$

គេបាន $y=(x-1)^2+2\geq 2$ ហើយអនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមា ស្មើ 2 កាលណា $x=1$។តែគ្មានតម្លៃអតិបរមាទេ នៅលើ $\mathbb{R}$ ។

ឧទាហរណ៍២ គេឲ្យអនុគមន៍ដឺក្រេទី២

$y=-2x^2+4x+1=-2(x-1)^2+3$

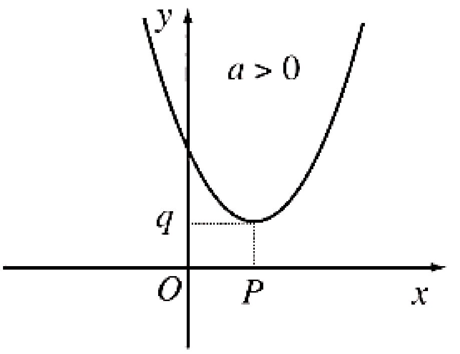
ដោយ $-2(x-1)^2\leq 0$ នោះគេបាន $y=-2(x-1)^2+3\leq 3$ នោះអនុគមន៍មានតម្លៃ អតិបរមា ស្មើ 3 កាលណា $x=1$។ តែគ្មានតម្លៃអប្បបរមានៅលើ $\mathbb{R}$។

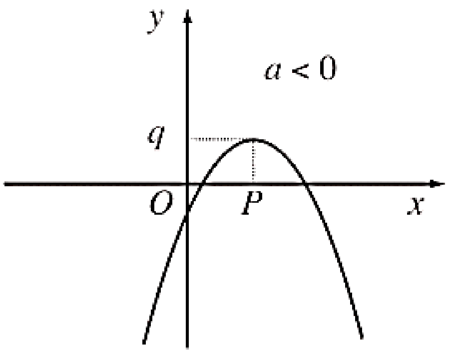
ជាទូទៅ តម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមានៃអនុគមន៍ដឺក្រេទី២ $y=ax^2+bx+c$

– បើ $a>0$ នោះ អនុគមន៍មានតម្លៃ**អប្បបរមា**ស្មើ $y=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ ត្រង់ $x=-\dfrac{b}{2a}$ ហើយ អនុគមន៍គ្មាន **អតិបរមា** ទេ។

– បើ $a<0$ នោះ អនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមា ស្មើ $y=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ ត្រង់ $x=-\dfrac{b}{2a}$ ហើយ អនុគមន៍គ្មាន **អប្បបរមា** ទេ។

ដូចនេះ បើគេសរសេរ $y=ax^2+bx+c=a(x-p)^2+q$ នោះគេបានក្រាបដូចខាងក្រោម





ឧទាហរណ៍៣ កំណត់តម្លៃអតិបរមានៃ $y=-2x^2+3x+4$ ។

ចម្លើយ អនុគមន៍ $y=-2x^2+3x+4$ មានតម្លៃ អតិបរមា ស្មើ

$y=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}=-\dfrac{3^2-4(-2)4}{4(-2)}$ ត្រង់ $y=-\dfrac{b^2}{?a}=-\dfrac{3}{2(-2)}=\dfrac{3}{4}$

ប្រតិបត្តិ១ ក. កំណត់តម្លៃអតិបរមានៃ $y=-2x^2+3x+4$ ។

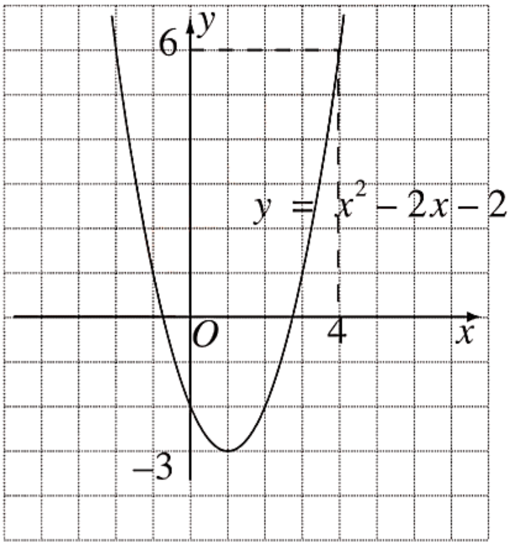
ខ. កំណត់តម្លៃអប្បបរមានៃ $y=x^2-4x-3$ ។

ឧទាហរណ៍៤ កំណត់តម្លៃអតិបរមា និងតម្លៃអប្បបរមានៃ $y=x^2-2x-2$ បើមានដែនកំណត់ $D=\{x \mid -1\le x\le 4\}$ ។

ចម្លើយ សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=x^2-2x-2$

ក្រាបជាប៉ារ៉ាបូលកាត់តាមចំណុច

x	-1	0	1	4
y	1	-2	-3	6



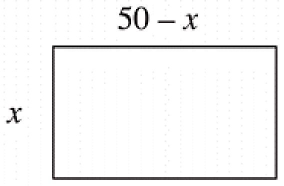
ក្រាបតាងនៃអនុគមន៍មានដែនកំណត់ $D=\{x \mid -1\le x\le 4\}$

គេបាន $y=x^2-2x-2=(x-1)^2-3$ អនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាស្មើ -3 ត្រង់ $x=1$ ហើយអនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាស្មើ 6 ត្រង់ $y=x^2-4x\ (0\le x\le 3)$ ។

ប្រតិបត្តិ២ កំណត់តម្លៃអតិបរមា និងតម្លៃអប្បបរមានៃអនុគមន៍ដឺក្រេទី២ ខាងក្រោម:

ក. $y=x^2-4x\ (0\le x\le 3)$ ខ. $y=-x^2+3x\ (-2\le x\le 1)$

ឧទាហរណ៍៥ គេសង់សួនច្បារចតុកោនកែងមួយមានបរិមាត្រស្មើ $100m$ ។ កំណត់វិមាត្រចតុកោណកែងដើម្បីឲ្យផ្ទៃក្រឡានៃសួនច្បារនេះមានតម្លៃធំបំផុត រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានោះ។



ចម្លើយ កំណត់វិមាត្រចតុកោណកែង

តាង x ជាទទឹង នោះបណ្តោយគឺ $50-x$

គេបានផ្ទៃក្រឡា S នៃសួនច្បារគឺ $S=(50-x)x$

$S=-x^2+50x=-(x-25)^2+625$ នោះ S មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $x=25$

ចំពោះ $x=25$ នោះ $50-x=25$ ហើយ $S=625$

ដូចនេះ S មានតម្លៃធំបំផុត កាលណាចតុកោណកែងមានវិមាត្រ $25m$, $25m$ ។

ផ្ទៃក្រឡា ធំបំផុត $S=625m^2$ ។

ប្រតិបត្តិ៣ គេកាត់ខ្សែមួយមានប្រវែង $60m$ ជាពីរផ្នែក ហើយបត់ខ្សែទាំងនោះជាការេពីរ។ តើគេត្រូវកាត់ខ្សែត្រង់ណាដើម្បីឲ្យផលបូកផ្ទៃក្រឡានៃការេទាំងពីរមានតម្លៃតូចបំផុត។

៥. ដំណោះស្រាយសមីការ និងវិសមីការដឺក្រេទី ២ តាមក្រាប

ក. ដំណោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី ២ តាមក្រាប

ដំណោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី២ $ax^2+bx+c=0$ (1)

ដោយប្រើក្រាបនៃអនុគមន៍ដឺក្រេទី២ $y=ax^2+bx+c$ (2)

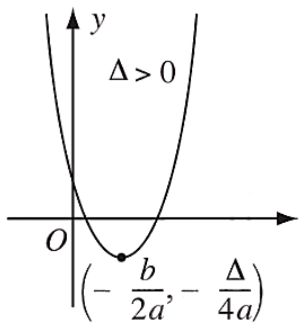
តាម $\Delta=b^2-4ac$ ជាឌីសគ្រីមីណង់ នៃសមីការ (1)

$$y=ax^2+bx+c=a\left[x+\frac{b}{2a}\right]^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

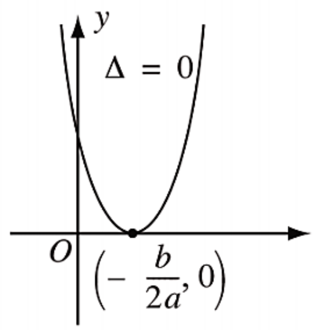
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$$

ដូចនេះក្រាបនៃ (2) មានកំពូល $\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$ ។

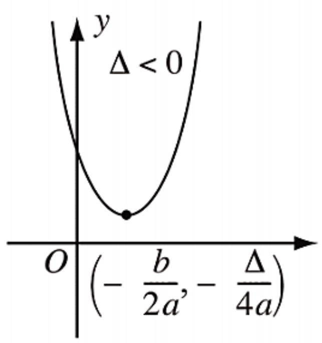
ចំពោះ $a>0$ គេបានករណីដូចខាងក្រោមៈ



ប៉ារ៉ាបូលកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីស
ត្រង់ពីរចំណុចផ្សេងគ្នា
សមីការ $\left(-\frac{b}{2a},0\right)$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នា x_1,x_2 ។

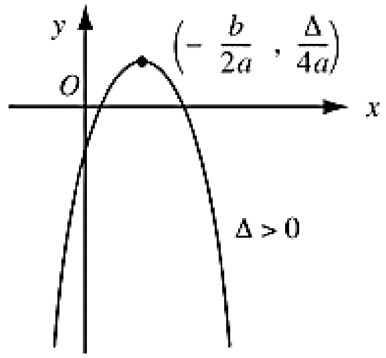


ប៉ារ៉ាបូលប៉ះនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស
ត្រង់ $\left(-\frac{b}{2a},0\right)$ សមីការ
(1) មានឫសឌុប $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$ ។

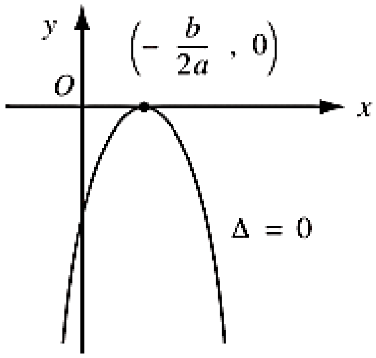


ប៉ារ៉ាបូលមិនជួបអ័ក្សអាប់ស៊ីសសមីការ
(1) គ្មានឫសក្នុងចំនួនពិត ។

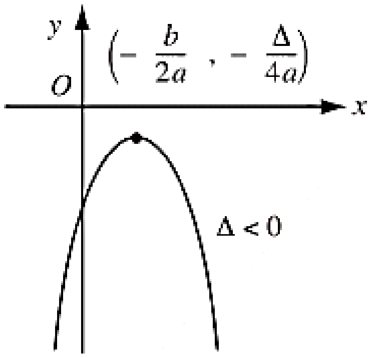
ចំពោះ $a<0$ គេបានករណីដូចខាងក្រោមៈ



ប៉ារ៉ាបូលកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ពីរចំណុចផ្សេងគ្នា
សមីការ$\left(-\frac{b}{2a},0\right)$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នា x_1,x_2 ។



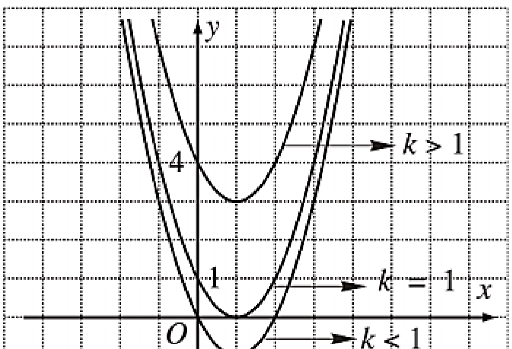
ប៉ារ៉ាបូលប៉ះនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$
សមីការ $\left(-\frac{b}{2a},0\right)$ មានឫសឌុប $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$



ប៉ារ៉ាបូលមិនជួបអ័ក្សអាប់ស៊ីសសមីការ
$\left(-\frac{b}{2a},0\right)$ គ្មានមានចំនួនពិត ។

ឧទាហរណ៍១ សិក្សាចំនួនចំណុចប្រសព្វរវាងប៉ារ៉ាបូលតាង $y=x^2-2x+k$ និងអ័ក្សអាប់ស៊ីសទៅតាមតម្លៃk។

ចម្លើយ តាង Δ ជា ឌីសគ្រីមីណង់នៃសមីការ
$x^2-2x+k=0$ នោះ $\frac{\Delta}{4}=1-k$ ។



ចំពោះ$\frac{\Delta}{4}>0$ ឬ$k<1$ នោះក្រាបកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ពីរចំណុចផ្សេងគ្នា។

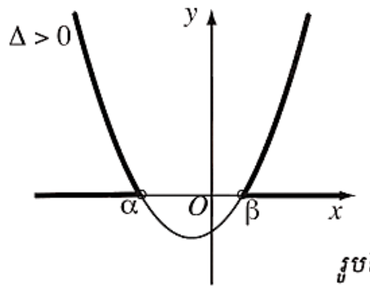
ចំពោះ$\frac{\Delta}{4}=0$ ឬ$k=1$ នោះក្រាបកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់មួយចំណុច ។

ចំពោះ$\frac{\Delta}{4}<0$ ឬ$k>1$ នោះក្រាបមិនអ័ក្សអាប់ស៊ីសទេ ។

ដូចនេះ ចំពោះ$k<1$ នោះមានចំណុចប្រសព្វ ២ ។
ចំពោះ $k=1$ នោះមានចំណុចប្រសព្វ ១ និងចំពោះ $k<1$ នោះគ្មានចំណុចប្រសព្វ។
ប្រតិបត្តិ សិក្សសចំណុចប្រសព្វរវាងប៉ារ៉ាបូល
តាង $y=x^2-mx+4$ នឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសទៅតាមតម្លៃ m ។

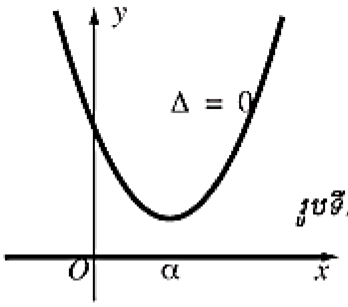
ខ. ដំណោះស្រាយវិសមីការដឺក្រេទី ២ តាមក្រាប

ដោះស្រាយវិសមីការដឺក្រេទី ២ ដោយប្រើក្រាបនៃអនុគមន៍ដឺក្រេទី ២ $y=ax^2+bx+c$ (1)
បើ $a>0$ តាងឌីគ្រីមីណង់ $\Delta=b^2-4ac$ ហើយ α និង β ជាឫសពិតមិនស្មើគ្នានឹង $\alpha<\beta$
នៃសមីការដឺក្រេទី ២ $ax^2+bx+c=0$ (2)



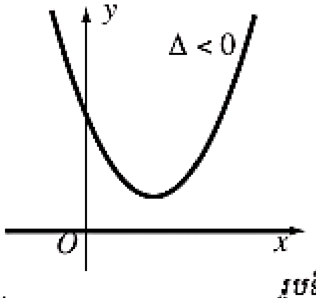
រូបទីI

បើ$\Delta>0$ក្រាបតាងអនុគមន៍ដឺក្រេទី ២ គឺរូប I និង II ។
សំណុំឫសនៃវិសមីការដឺក្រេទី ២ $ax^2+bx+c>0$
គឺជាសំណុំតម្លៃនៃx ដែល $y>0$ នៅលើក្រាបនៃ (1)
គឺ $x<\alpha$,$x>\beta$ ។
សំណុំឫសនៃវិសមីការដឺក្រេទី ២ $ax^2+bx+c>0$
គឺ $\alpha<x<\beta$ ។



រូបទីIII

បើ$\Delta=0$ សមីការ (2) មានឫសឌុប α នោះក្រាបតាង
(1) ដូចក្នុងរូប III ។
សំណុំឫសនៃ $ax^2+bx+c>0$ ជាចំនួនពិតទាំងអស់
លើកលែងតែ α ហើយ $ax^2+bx+c<0$ គ្មានឫសទេ ។



រូបទីIV

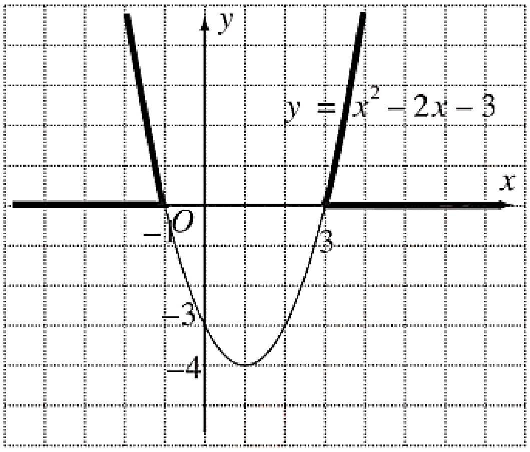
បើ $\Delta<0$ តាមក្រាប IV គេបានសំណុំឫសនៃ
$ax^2+bx+c>0$ ជាចំនួនពិតទាំងអស់ ហើយ$ax^2+bx+c<0$
គ្មានឫសទេ ។

ឧទាហរណ៍ 1 ដោះស្រាយវិសមីការ $x^2-2x-3>0$ តាមក្រាប ។
ចម្លើយ សង់ក្រាប $y=x^2-2x-3$មាន
ឌីគ្រីមីណង់ $\Delta=(-2)^2-4\times1(-3)=16$

$$x_1=\frac{2+4}{2}=3 \quad ,x_2=\frac{2-4}{2}=-1$$

x	-1	0	1	2	3
y	0	-3	-4	-3	0

ក្រាប



តាមក្រាបគេឃើញថាវិសមីការមានសំណុំចម្លើយ

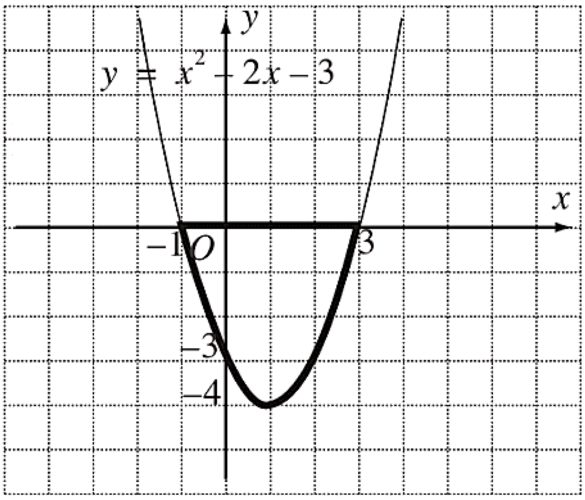
$x<-1$ ឬ $x>3$ ។

ឧទាហរណ៍២ ដោះស្រាយវិសមីការ $x^2-2x-3<0$ តាមក្រាប ។

ចម្លើយ សង់ក្រាប $y=x^2-2x-3$ មាន ឌីគ្រីមីណង់ $\Delta=(-2)^2-4\times1(-3)=16$

$x_1=\frac{2+4}{2}=3 \quad ,x_2=\frac{2-4}{2}=-1$

x	-1	0	1	2	3
y	0	-3	-4	-3	0



តាមក្រាបគេឃើញថាវិសមីការមានសំណុំចម្លើយ $-1<x<3$ ។

ប្រតិបត្តិ ដោះស្រាយវិសមីការតាមក្រាប:

ក. $x^2+4x+1<0$ ខ. $3x^2+7x+3\geq 0$

គ. $-x^2+7x+3>0$ ឃ. $x^2-4x+4\leq 0$

៨.៦. អនុគមន៍សនិទាន និងក្រាប

អនុគមន៍ $y=\frac{4}{x}, y=-\frac{1}{2x+3}$, $y=\frac{3x+4}{x-2}$

ដែលមានភាគយក និងភាគបែងជាពហុធា

នៃ x ហៅថា **អនុគមន៍សនិទាន** នៃអថេរ x ។

ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ **អនុគមន៍សនិទាន** តម្លៃ

អថេរដែលធ្វើឲ្យភាគបែងមានតម្លៃខុសពីសូន្យ ។

ឧទាហរណ៍១ អនុគមន៍ $y=\frac{4}{x}$ មានដែនកំណត់ $\{x\,|\,x\neq 0\}$

អនុគមន៍ $y=-\frac{1}{2x+3}$ មានដែនកំណត់ $\left\{x\,|\,x\neq -\frac{3}{2}\right\}$

អនុគមន៍ $y=\frac{3x+4}{x-2}$ មានដែនកំណត់ $\{x\,|\,x\neq 2\}$ ។

ប្រតិបត្តិ រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $y=-\frac{x-1}{3-x}, y=\frac{3x+4}{x+4}$, $y=-\frac{2}{x-1}$

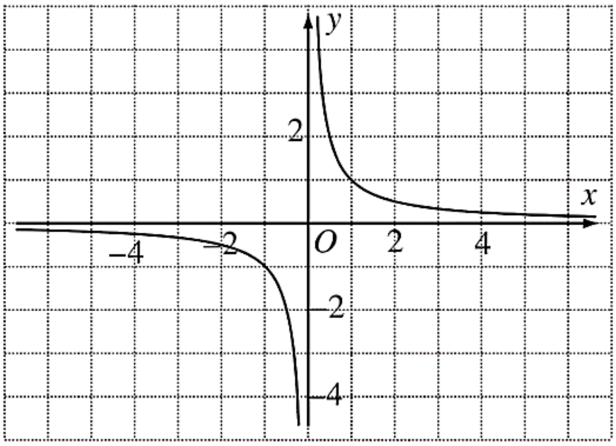
ក. ក្រាប $y=\frac{a}{x}$

ឧទាហរណ៍២ សង់ក្រាបតាង $y=\frac{1}{x}$ ។ អនុគមន៍ $y=\frac{1}{x}$ មានដែនកមណត់ $\{x\,|\,x\neq 0\}$

តារាងតម្លៃលេខ

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

ដៅចំណុចទាំងនេះរួចភ្ជាប់ គេបានក្រាបដូចខាងក្រោម



ពិនិត្យភាពចុះ និងកើននៃអនុគមន៍ $y=\frac{1}{x}$ ។

គេបាន កំណើនអថេរ $\Delta x = x_2 - x_1$

កំណើនអនុគមន៍

$$\Delta f = f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{-\left(x_2-x_1\right)}{x_2x_1}$$

ដូចនេះ គេបាន $\frac{\Delta f}{\Delta x}=-\frac{1}{x_2x_1}$

- ចំពោះគ្រប់ x_2, x_1 ដែល $x_1<x_2<0$

គេបាន $\frac{\Delta f}{\Delta x}<0$ ហើយត្រូវគ្នានឹងក្រាបចុះកាន់តែទាប។

- ចំពោះគ្រប់ x_2,x_1 ដែល $0<x_1<x_2$ គេបាន $\frac{\Delta f}{\Delta x}<0$ ហើយត្រូវគ្នានឹងក្រាបចុះកាន់តែទាប។

  នោះគេបាន f ជាអនុគមន៍ចុះ ចំពោះ $x<0$ និង $x>0$ ។

ក្រាប $y=\frac{1}{x}$ ខិតជិតអ័ក្សអាប់ស៊ីសកាលណា x ខិតជិតអានន្ត ហើយខិតជិតអ័ក្សអរដោនេកាលណា x ខិតជិតសូន្យនោះអ័ក្សអាប់ស៊ីស និងអ័ក្សអរដោនេហៅថា អាស៊ីមតូតនៃក្រាប $y=\frac{1}{x}$ ។

ជាទូទៅ ចំពោះអនុគមន៍ $y=\frac{1}{x}$ កំណត់លើ $\{x \mid x\neq 0\}$ ។

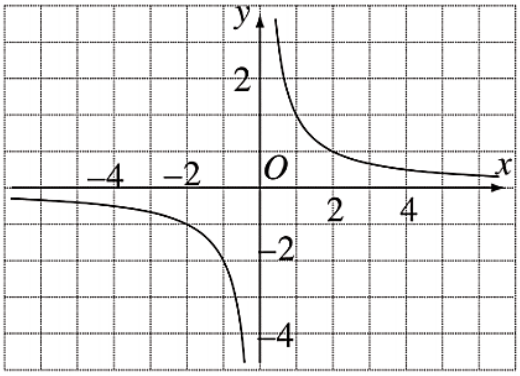
គេបាន កំណើនអថេរ $\Delta x = x_2 - x_1$

កំណើនអនុគមន៍ $\Delta f = f(x_2)-f(x_1)=\frac{a}{x_2}-\frac{a}{x_1}=\frac{-a(x_2-x_1)}{x_2\ x_1}$

គេបាន $\Delta f=\frac{-a}{x_2\ x_1}$

ចំពោះ $a>0$ និង $0<x_1<x_2$ ឬ $x_1<x_2<0$ គេបាន $\frac{\Delta f}{\Delta x}<0$

នោះ f ជាអនុគមន៍ចុះ ចំពោះ $x<0$ និង $x>0$ ។

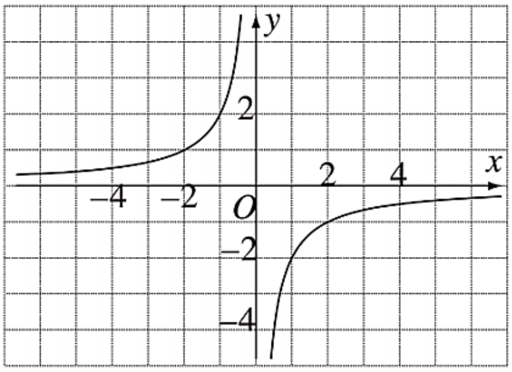


ចំពោះ $a<0$ និង $0<x_1<x_2$ ឬ $x_1<x_2<0$ គេបាន $\frac{\Delta f}{\Delta x}>0$

នោះ f ជាអនុគមន៍កើនចំពោះ $x<0$ និង $x>0$ ។

ក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=\frac{1}{x}$ ដែល $a\neq 0$ ហៅថា"អ៊ីពែបូល"

ដែលមានអ័ក្សអាប់ស៊ីសនិងអ័ក្សអរដោនេជាអាស៊ីមតូត ។



ប្រតិបត្តិ១ សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

ក. $y=\frac{2}{x}$　　　　　　　ខ. $y=-\frac{3}{x}$

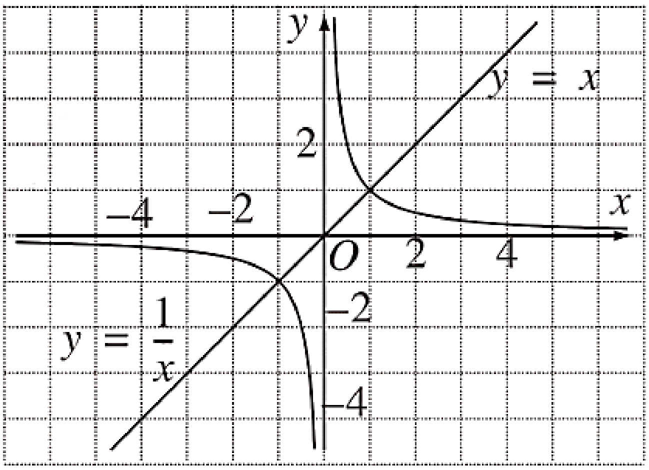
ឧទាហរណ៍១ សង់ក្រាបអនុគមន៍ $y=\frac{1}{x}$ ហើយរកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនោះនិងបន្ទាត់ $y=x$ ។

ចម្លើយ សង់ក្រាបអនុគមន៍ $y=\frac{1}{x}$ ។ អនុគមន៍ $y=\frac{1}{x}$ មានដែនកំណត់ $\{x \mid x\neq 0\}$

តារាងតម្លៃលេខ

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

ដៅចំណុចទាំងនេះរួចភ្ជាប់ គេបានក្រាបដូចខាងក្រោមបន្ទាត់ $y=x$ កាត់គល់តម្រុយ O និងតាមចំណុច $(-1,-1)$ តាមក្រាបគេបានកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វគឺ $(-1,-1)$ និង $(1,1)$ ។



ប្រតិបត្តិ២

ក. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\frac{4}{x}$ ហើយរកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោងនិងបន្ទាត់ $y=x$

ខ. ក្រាបនៃ $y=\frac{a}{x-p}+q$

ឧទាហរណ៍១ សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=\frac{4}{x}$ និង $y=\frac{4}{x-2}-1$ រួចទាញសន្និដ្ឋានពីក្រាប។

ចម្លើយ $y=\frac{4}{x}$ មានដែលកំណត់ $\{x \mid x\neq 0\}$

តារាងតម្លៃលេខ

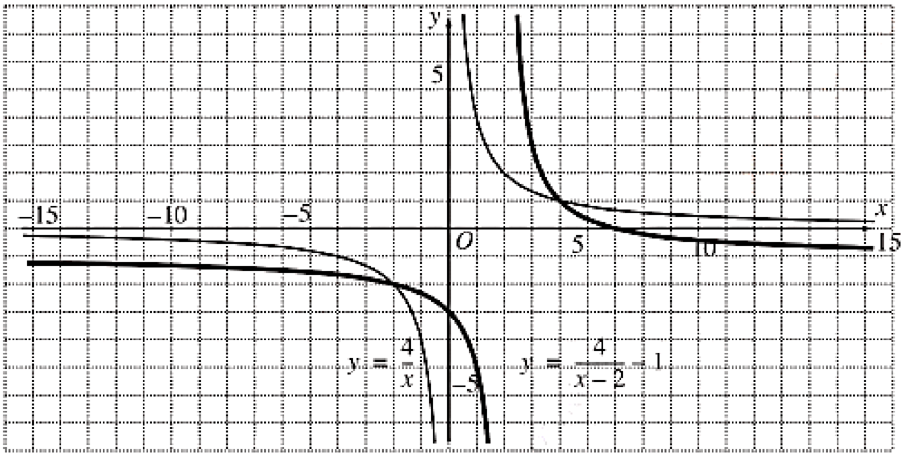
x	-5	-3	-1	1	3	5
y	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{3}$	-4	4	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{5}$

$y=\frac{4}{x-2}-1$ មានដែនកំណត់ $\{x \mid x\neq 2\}$ ។

តារាងតម្លៃលេខ

x	-6	-2	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	6	10
y	$-\frac{3}{2}$	-2	-9	7	0	$-\frac{1}{2}$

ដៅចំណុចទាំងនេះរួចភ្ជាប់ គេបានក្រាបដូចខាងក្រោម



តាមក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងលើ គេអាចសន្និដ្ឋានបានថាក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\frac{4}{x-2}-1$ បានដោយរំកិលក្រាបតាង $y=\frac{4}{x}$ ចំនួន 2 ឯកតាស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស និងអ័ក្សអរដោនេ។

ជាទូទៅ ក្រាបតាង $y=\frac{a}{x-p}+q$ គឺជាអ៊ីពែបូលដែលបានមកដោយរំកិលក្រាបតាង $y=\frac{a}{x}$ ចំនួន p ឯកតាស្របអ័ក្សអាប់ស៊ីស និងចំនួន q ឯកតាស្របអ័ក្សអរដោនេ។ អ៊ីពែបូលនេះមានអាស៊ីមតូតឈរ និងដេកដែលមានសមីការរៀងគ្នា $x=p$ និង $y=q$

ប្រតិបត្តិ១ សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍

ក. $y=-\frac{2}{x}$ ខ. $y=-\frac{2}{x}+5$ គ. $y=-\frac{2}{x-2}$ ឃ. $y=-\frac{2}{x-2}+5$

ប្រតិបត្តិ២ សង់ក្រាបនិងកំណត់សមីការអាស៊ីមតូតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $y=\frac{2}{x-3}$ ខ. $y=\frac{3}{x+1}-2$ គ. $y=-\frac{1}{x-3}+4$

ប្រតិបត្តិ៣ y ជាអនុគមន៍ x ។ សង់ក្រាបតាង y ដែលកំណត់ដោយសមីការខាងក្រោម:

ក. $(x+1)y=-1$ ខ. $(x-1)(y+2)=4$ ។

គ. ក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=\frac{ax+b}{cx+d}$

ឧទាហរណ៍១ សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=\frac{2x+3}{x+1}$ ។

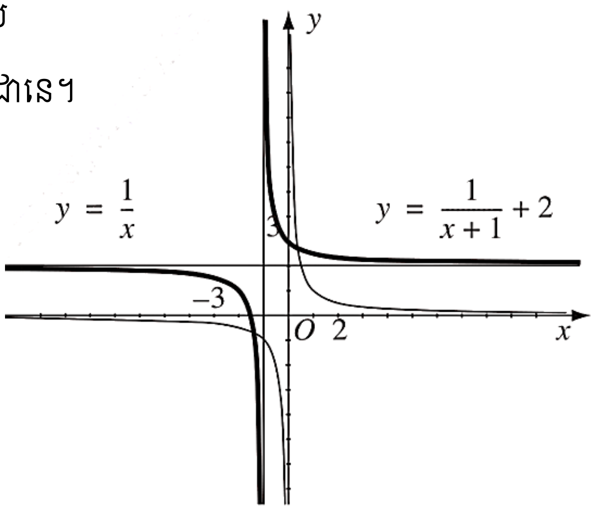
ចម្លើយ គេមាន $y=\frac{2x+3}{x+1}=\frac{1}{x+1}+2$ ។សង់ក្រាបតាង $y=\frac{1}{x}$ មានដែលកំណត់ $\{x \mid x\neq 0\}$ ។

តារាងតម្លៃលេខ

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
y	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$

ដូចនេះ ក្រាបតាង $y=\frac{1}{x+1}+2$ បានដោយរំកិលក្រាប $y=\frac{1}{x}$ ចំនួន -1 ឯកតាអ័ក្សអរដោនេ។

- **អាស៊ីមតូតឈរ** $x=-1$
- **អាស៊ីមតូតដេក** $y=2$



ប្រតិបត្តិ 1 សង់ក្រាបនិងកំណត់សមីការអាស៊ីមតូតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោមៈ

ក. $y=\frac{3x}{x-1}$

ខ. $y=\frac{1-2x}{x+2}$

គ. $y=\frac{x-1}{2-x}$ ។

៨.៧. អនុគមន៍សនិទានខាយ និងក្រាប

អនុគមន៍ $y=\sqrt{x}$, $y=3\sqrt{2-x}$, $\sqrt{x^2+1}+5$..... ដែលជាកន្សោមមានអថេរ x នៅក្រោមរ៉ាឌីកាល់ ហៅថា **អនុគមន៍អសនិទាន**នៃអថេរ x ។

ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍អសនិទានគឺជាសំណុំនៃតម្លៃអថេរដែលធ្វើឲ្យកន្សោមរ៉ាឌីកាល់មានន័យ។

ឧទាហរណ៍១

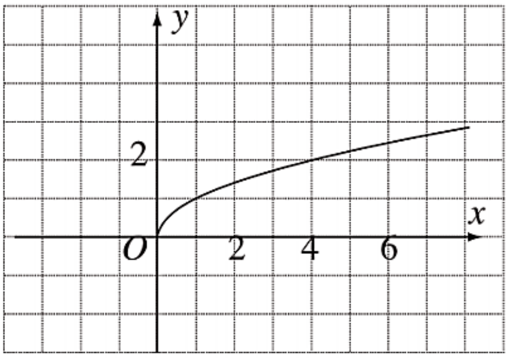
- អនុគមន៍ $y=\sqrt{x}$ មានដែនកំណត់ $\{x \mid x\geq 0\}$
- អនុគមន៍ $y=3\sqrt{2-x}$ មានដែនកំណត់ $\{x \mid x\leq 2\}$
- អនុគមន៍ $y=\sqrt{x^2+1}+5$ មានដែនកំណត់ $\{x \mid x\in\mathbb{R}\}$

ក. ក្រាបនៃ $y=\sqrt{ax}$

ឧទាហរណ៍១ សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍អសនិទាន $y=\sqrt{x}\ (x\geq 0)$

ចម្លើយ តារាងតម្លៃលេខ

x	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9
y	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3



ដៅចំណុចនេះរួចភ្ជាប់ គេបានក្រាបដូចខាងស្តាំ

ឧទាហរណ៍២ សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍អសនិទាន $y=\sqrt{x}\ (x\geq 0)$

ចម្លើយ ចំណុចលើក្រាបតាង $y=\sqrt{x}\ (x\geq 0)$

មានកូអរដោនេ (x,y) ស្ថិតនៅលើក្រាបតាង

$y^2=x \quad , y\geq 0 \quad (1)$

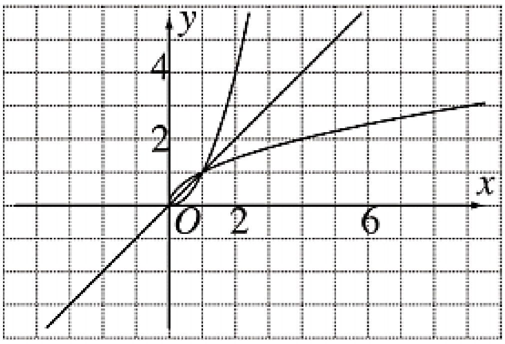
ដោយប្តូរ x និង y ជា y ជា x នៅក្នុង (1)

គេបានសមីការ $y^2=x \quad , y\geq 0$

ដែលជាអនុគមន៍ច្រាសនៃ (1)

ដូចនេះ ក្រាបតាង $y^2=x$ និងក្រាបតាង $y^2=x$

ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ $x\geq 0$



ជាទូទៅ ក្រាបតាង $y=\sqrt{x}$ គឺជារូបភាពឆ្លុះនាំប៉ារ៉ាបូលតាង $y=x^2$ តាមបំលែងឆ្លុះធៀប ទៅនឹងបន្ទាត់ $y=x$ ដែលត្រូវនឹង $x\geq 0$ ។

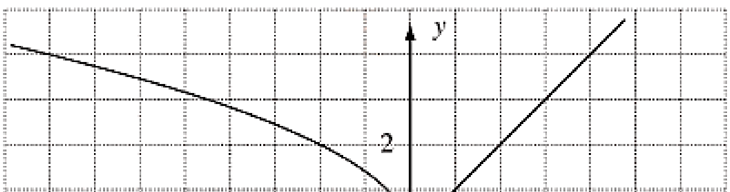
ឧទាហរណ៍៣ សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍អសនិទាន $y=\sqrt{-2x}$ ។

ចម្លើយ $y=\sqrt{-2x}$ សមមូល $y^2=-2x \ , \ x\geq 0$ ។

ប្តូរជា x និង y ជា y ជា x ចំពោះ $y^2=-2x$ គេបាន $x^2=-2y$ ។

ដូចនេះ $y=-\frac{1}{2}x^2$ ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃ $y^2=-2x$ ។

សង់រូបភាពឆ្លុះនៃក្រាបតាង $y=-\frac{1}{2}x^2$ ធៀបនឹងបន្ទាត់ $x\geq 0$ ហើយផ្នែកត្រូវនឹង $y\geq 0$ នោះក្រាប ដែលបានគឺជាក្រាបតាង $y=\sqrt{-2x}$ ។



ប្រតិបត្តិ១ សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍អសនិទាន $y=-\sqrt{x}\ (x\geq 0)$ ។

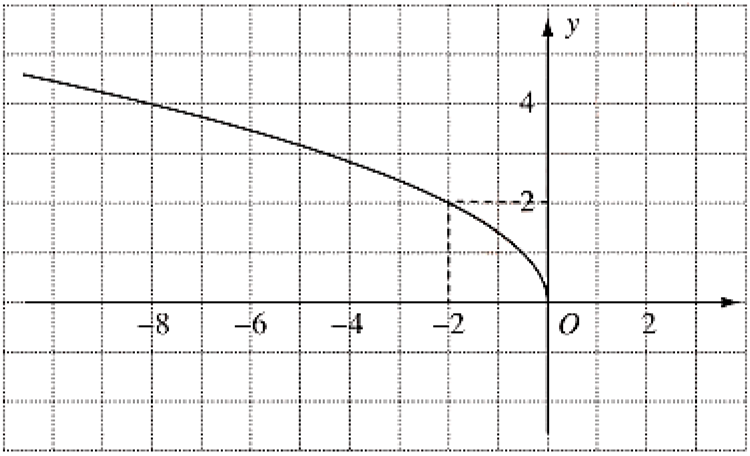
ឧទាហរណ៍៤ សង់ក្រាបតាងអនុគន៍អសនិទាន $y=\sqrt{-2x}$ ។

ចម្លើយ អនុគមន៍ $y=\sqrt{-2x}$ មានដែនកំណត់ $\{x \mid x\leq 0\}$ ។

តារាងតម្លៃលេខ

x	0	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$	-2	-8
y	0	$\frac{1}{2}$	1	2	4

ដៅចំណុចទាំងនេះរួចភ្ជាប់ គេបានក្រាបដូចខាងស្តាំ

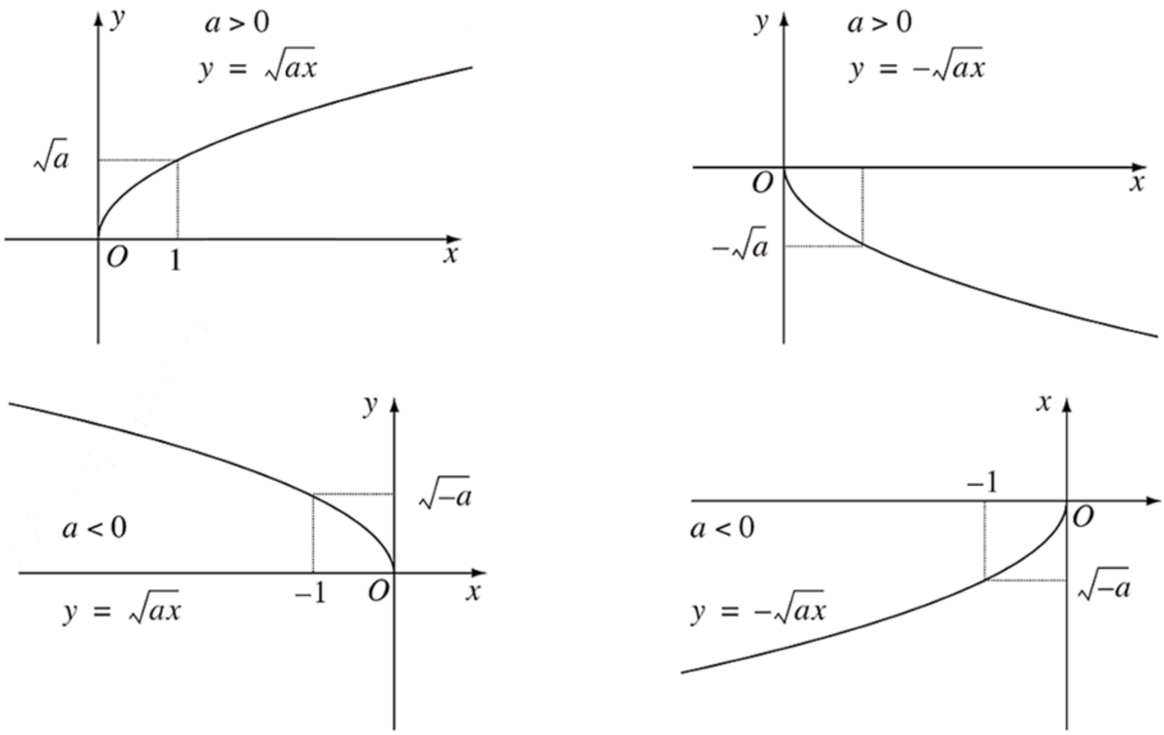


ប្រតិបត្តិ២ សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍អសនិទាន

ក. $y=\sqrt{2x}$

ខ. $y=\sqrt{-\frac{1}{2}x}$

ជាទូទៅ ក្រាបតាងអនុគមន៍អសនិទាន $y=\sqrt{ax}$ មានរាងដូចខាងក្រោមអាស្រ័យតាមសញ្ញានៃ a ។



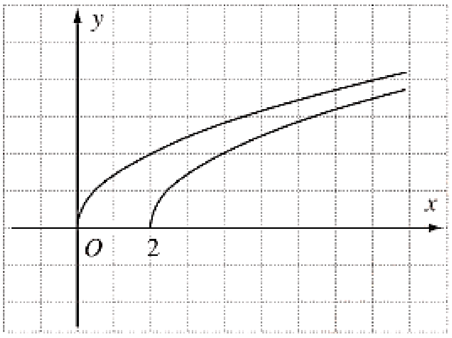
ប្រតិបត្តិ៣ សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍អសនិទាន

ក. $y=\sqrt{3x}$ ខ. $y=-\sqrt{-x}$

ខ. ក្រាបអនុគមន៍ $y=\sqrt{ax+b}$

ឧទាហរណ៍៥ សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍អសនិទាន $y=\sqrt{2x-4}$

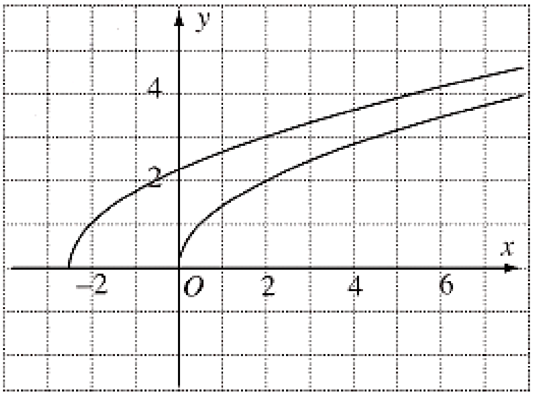
ចម្លើយ សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍អសនិទាន $y=\sqrt{2x}$ ហើយរំកិលក្រាបនោះចំនួន 2 ឯកតាស្រប អ័ក្សអាប់ស៊ីស។ គេបានក្រាបតាង $y=\sqrt{2(x-2)}=\sqrt{2x-4}$ ។



ជាទូទៅ ក្រាបតាង $y=\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}=\sqrt{a(x-p)}$ ដោយរំកិលក្រាបតាង $y=\sqrt{ax}$ ចំនួន p ឯកតាស្របអ័ក្សអាប់ស៊ីស ដែល $p=-\frac{b}{a}$ ។

ឧទាហរណ៍៦ សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍អសនិទាន $y=\sqrt{2x+5}$

ចម្លើយ សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍អសនិទាន



$y=\sqrt{2x+5}$ អាចបំលែង $y=\sqrt{2\left(x+\frac{5}{2}\right)}$

$=\sqrt{2\left(x-\left(-\frac{5}{2}\right)\right)}$ ក្រាបនេះបានដោយរំកិលក្រាបតាង

$y=\sqrt{2x}$ ចំនួន $-\frac{5}{2}$ ឯកតាស្របអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

ប្រតិបត្តិ១ សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍អសនិទានខាងក្រោម

ក. $y=\sqrt{x-3}$ ខ. $y=\sqrt{1-x}$ គ. $y=\sqrt{2x-4}+2$ ។

ឧទាហរណ៍៧ កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប $y=\sqrt{2x+5}$ និងបន្ទាត់ $y=\frac{1}{2}x$ ។

ចម្លើយ វិធីទី១ កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វជាចម្លើយនៃសមីការអាប់ស៊ីស $\sqrt{2x+5}=\frac{1}{2}x$ (1)

លើកអង្គទាំងពីរនៃ (1) ជាការេ $2x+5=\frac{1}{4}x$ ឬ $x^2-8x-20=0$

គេបាន $x=-2$, $x=10$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $x=-2$ គេបាន $\sqrt{-1}=1$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

$x=10$ គេបាន $\sqrt{25}=5$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

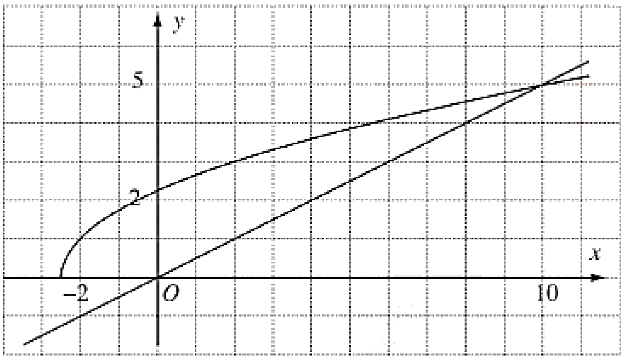
ដូចនេះ កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វគឺ $(10,5)$ ។

វិធីទី២ សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍អសនិទាន $y=\sqrt{2x+5}$ និងក្រាបតាង $y=\frac{1}{2}x$

សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍អសនិទាន $y=\sqrt{2x+5}$

តារាងតម្លៃលេខ

x	$-\frac{5}{2}$	-2	2
y	0	1	3



តាមក្រាបគេបានកូអរដោនេ ចំណុចប្រសព្វគឺ $(10,5)$ ។

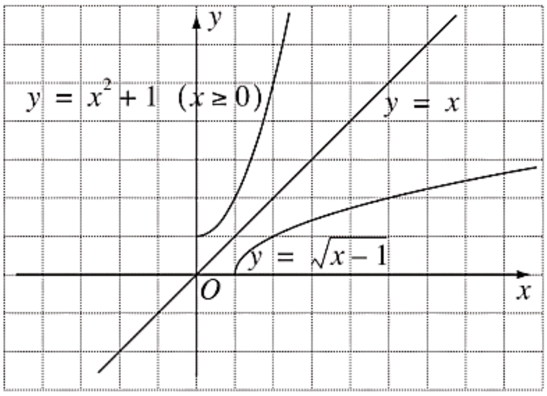
ប្រតិបត្តិ២ កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វនៃក្រាបតាងគូអនុគមន៍គូអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y=\begin{cases} y=\sqrt{x-2} \\ y=\dfrac{1}{3}x \end{cases}$

ខ. $y=\begin{cases} y=-\sqrt{x} \\ y=x-1 \end{cases}$

៨.៨. ក្រាបនៃអនុគមន៍ច្រាស

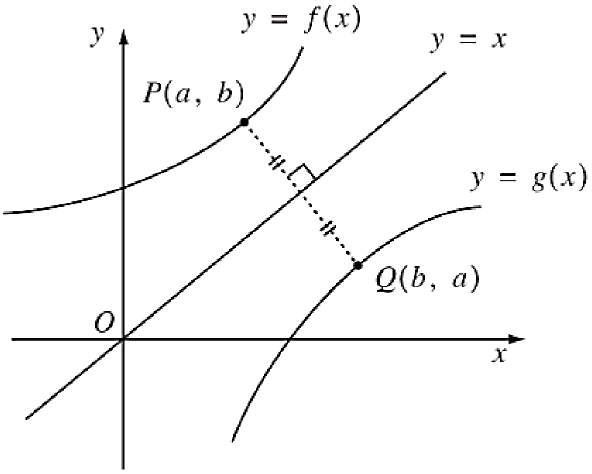
ឧទាហរណ៍១ ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=x^2+1\ (x\geq 0)$ និងក្រាបអនុគមន៍ច្រាស របស់វាគឺ $y=\sqrt{x-1}$ គឺឆ្លុះគ្នា ធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=x$ ដូចបានបង្ហាញក្នុងរូបខាងក្រោម



ជាទូទៅ បើអនុគមន៍ $y=f(x)$ មានអនុគមន៍ច្រាស $y=g(x)$ យើងបាន $b=f(a)$ សមមូល $a=g(b)$។

ដូចនេះ ចំណុច $P(a,b)$ ស្ថិតនៅលើក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ គឺសមមូលទៅនឹងចំណុច $Q(b,a)$ ស្ថិតនៅលើក្រាបនៃអនុគមន៍ច្រាស $y=g(x)$។

ចំណុច $P(a,b)$ និង $Q(b,a)$ ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=x$។



សន្និដ្ឋាន ក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=g(x)$ និងក្រាបតាងអនុគមន៍ច្រាស $y=g(x)$ របស់ f ឆ្លុះគ្នាធៀប ទៅនឹងបន្ទាត់ $y=x$ ។

ប្រតិបត្តិ១ សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ខាងក្រោម និងរកអនុគមន៍ច្រាសរបស់វា

ក. $y=x^2-1\ (x\geq 0)$ ខ. $y=\frac{2}{x}+1\ (x>0)$

ឧទាហរណ៍២ រកអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ $y=x^2+1$ ដែលមានដែនកំណត់ $\{x\,|\,x\leq 0\}$ រួចរកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ច្រាសនេះ។

x

ចម្លើយ គេមាន $y=x^2+1\ \{x\,|\,x\leq 0\}$ ចំពោះ x គេបាន $x=-\sqrt{y-1}$ ។

ដូចនេះ អនុគមន៍ច្រាសគឺ $x=-\sqrt{y-1}$

ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ច្រាសគឺ $\{x\,|\,x\geq 1\}$ ។

ប្រតិបត្តិ២ រកអនុគមន៍ច្រាសនៃ $y=x^2-2$ ដែលមានដែនកំណត់ $\{x\,|\,x\leq 0\}$ រួចរកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ច្រាសនេះ។

លំហាត់អនុវត្ត

1.គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=x^2-4x+2$ ។ចំពោះគ្រាប់តម្លៃនៃ $x\in\{-1,0,1,2\}$ កំណត់តម្លៃនៃ $f(x)$ ។

2. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $f(x)=4\sqrt{x-4}-\dfrac{3x}{\sqrt{5-x}}$ ខ. $f(x)=\sqrt{5x-4}+\dfrac{1}{x-3}$

គ. $f(x)=4\sqrt{3-2x}-\dfrac{3x}{x^2-3x+2}$ ឃ. $f(x)=\sqrt[3]{x-5}-\sqrt[4]{4-x}$

3. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=x+3 \ \ ,x\ge 0$ និង $g(x)=x^2 \ \ ,-2\le x\le 3$ ។ រកសំណុំរូបភាពនៃអនុគមន៍ f , g ។

4. រកអនុគមន៍ច្រាស ចំពោះអនុគមន៍ $f(x)$ នីមួយៗខាងក្រោម:

ក. $f(x)=2x+3$ ខ. $f(x)=2-x$

គ. $f(x)=\dfrac{1}{x}-3 \ \ ,x\ne 0$ ឃ. $f(x)=\dfrac{3}{x-1}$

5. សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $y=|x+1|$ ខ. $y=|x-1|+2$

6. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍:

ក. $y=\dfrac{3}{2}x^2$ ខ. $y=-\dfrac{1}{3}x^2$ គ. $y=-\dfrac{3}{2}x^2$

7. រកអនុគមន៍ដឺក្រេទី២ ដែលក្រាបបានដោយរំកិលក្រាបតាង $y=-3x^2$ ដែលកំពូលស្ថិតនៅលើចំណុចខាងក្រោម:

ក. $(-2,0)$ ខ. $(0,2)$ គ. $(-1,4)$

8. សង់ក្រាបប៉ារ៉ាបូលនីមួយៗ រកកំពូលរបស់វា និងចំណុចប្រសព្វរវាងប៉ារ៉ាបូល ជាមួយនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស

ក. $y=3x^2-2x$ ខ. $y=(x+1)(x-3)$ គ. $y=-2x^2-4x+6$

9. កំណត់តម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមានៃអនុគមន៍បើវាមានដែនកំណត់ភ្ជាប់ជាមួយខាងក្រោម:

ក. $y=3x^2-2x \ (-1\le x\le 2)$ ខ. $y=x^2+5x+4 \ (-3\le x\le 0)$

10. ដោះវិសមីការខាងក្រោម:

ក. $x^2\ge 9$ ខ. $x(x-2)<3$ គ. $x^2+5x-6<0$

ឃ. $y=2x^2-7x+3\ge 0$ ង. $4x(x-1)\le 3$ ច. $(1-x)^2\ge 17-2x$

ឆ. $(x+2)^2<x(4-x)+40$

11. រកអនុគមន៍ដែលក្រាបបានដោយរំកិលក្រាបតាង $y=\frac{2}{x}$

ក. ចំនួន -5 ឯកតា ស្របអ័ក្សអាប់ស៊ីស

ខ. ចំនួន -4 ឯកតា ស្របអ័ក្សអរដោនេ

គ. ចំនួន 3 ឯកតា ស្របអ័ក្សអាប់ស៊ីស និង 5 ឯកតា ស្របអ័ក្សអរដោនេ។

12. សង់ក្រាប និងអាស៊ីមតូតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោមៈ

ក. $y=\frac{4}{x+3}$ ខ. $y=4-\frac{2}{x+1}$ ។

13. កំណត់កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបតាង $y=\frac{1}{x}$ និងបន្ទាត់ $y=\frac{5}{2}-x$ ។

14. រកអនុគមន៍ដែលក្រាបបានដោយបំលែងក្រាបតាង $y=2\sqrt{x}$ តាមរំកិលក្រាបចំនួន 2 ឯកតា ស្របអ័ក្សអាប់ស៊ីសទៅឆ្វេង។

15. សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ខាងក្រោមៈ

ក. $y=\sqrt{3x-5}$ ខ. $y=-\sqrt{4-x}$ ។

16. រកអនុគមន៍ច្រាស និងដែនកំណត់តាងអនុគមន៍ $f(x)$ នីមួយៗខាងក្រោមៈ

ក. $f(x)=\frac{2}{3}x+5$ ខ. $f(x)=\frac{1}{x+2}+1$

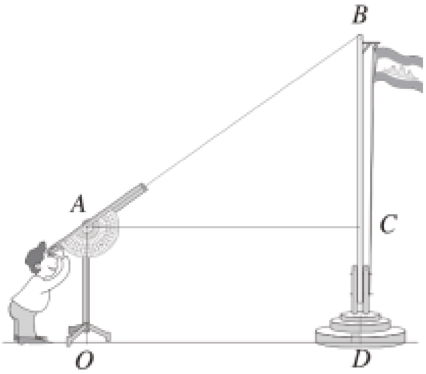
គ. $f(x)=\sqrt{1-x}$ ឃ. $f(x)=-\sqrt{x+4}$ ។

មេរៀនទី៩ ត្រីកោណមាត្រ

៩.១. ផលធៀបត្រីកោណមាត្រ

៩.១.១. តង់សង់

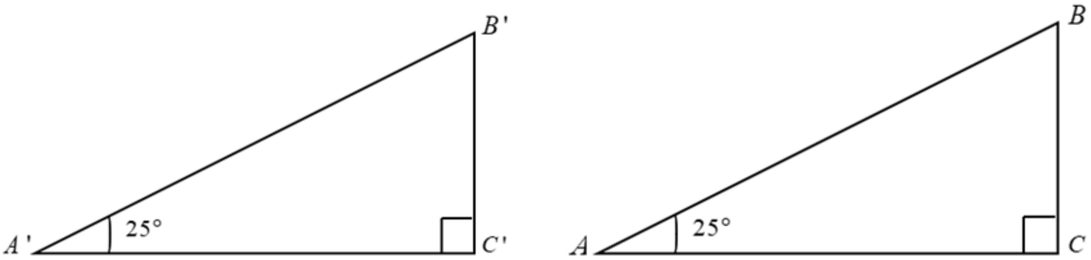
តាមការប្រើឧបករណ៍រ៉ាប៉ទ័រវាស់មុំ តើសិស្សអាចកំណត់កម្ពស់ដងទង់ជាតិក្នុងសាលារៀនរបស់ខ្លួនបានឬទេ?



គេដាក់ជើងឧទាហរណ៍នៅត្រង់ចំណុច O អោយឈរកែងនឹងផ្ទៃដីមានចម្ងាយ OD ពីដងទង់ជាតិ។ គេដាក់ភ្នែកតាមបំពង់រ៉ាប៉ទ័រសម្លឹងត្រង់ឱ្យឃើញចុង B នៃដងទង់ជាតិ ។ ខ្សែប្រយោល ដែលធ្លាក់ ត្រង់ចុះមកដីផ្ទុំនិងអ័ក្សឆ្លុះនៃរ៉ាបំទីរកំណត់បានមុំស្មើនិងមុំ BAC ។

កម្ពស់ដងទង់ជាតិ $DB = DC + CB$ ដែល $DC = OA$ ជាកម្ពស់ជើងឧបករណ៍ ។ ឧបមាថា $\angle BAC = 25°$ ចម្ងាយ $OD = 10m$ និង $OA = 2m$ ។គេសង់ត្រីកោណ A'B'C' កែងត្រង់ C ដោយយក $A'C' = 5cm$ បន្ទាត់ក្រិតវាស់រកប្រវែងជ្រុង BC ។

ABC ជាត្រីកោណកែងតំណាងរូបពិសោធន៍ខាងលើ



គេឃើញថាត្រីកោណ ABC និង ABC ជាត្រីកោណដូចគ្នាតាមករណីដណ្ដូចទិ1 ។

តាមផលធៀបដំណូចយើងទាញបាន $\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$ ឬ $BC = AC \times \frac{B'C'}{A'C'}$ $(*)$

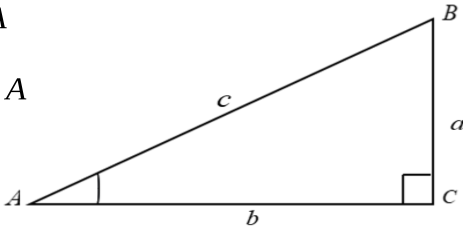
ដោយ $AC, A'C', BC$ ជាប្រវែងដែលស្គាល់នោះ BC អាចគណនាបានតាមរូបមន្ត $(*)$

- គេសង្កេតឃើញថា ផលធៀប BC ត្រូវកំណត់បានដោយគ្រាន់តែស្គាល់ចំណុច A រង្វាស់មុំ A ។
- ផលធៀប $\frac{BC}{AC}$ រវាងរង្វាស់ជ្រុងឈម និងរង្វាស់ជ្រុងជាប់នៃមុំ A ហៅថាតង់សង់នៃមុំ A ។

គេកំណត់សរសេរ $\tan A$ ។

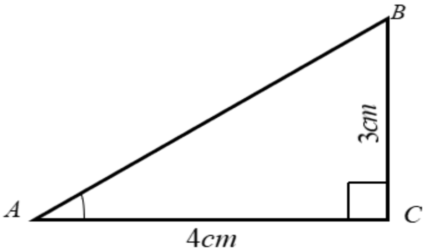
និយមន័យ ក្នុងត្រីកោណមួយ បើ A ជារង្វាស់មុំស្រួចមួយនោះ តង់សង់នៃមុំ A គឺជាផលធៀបរង្វាស់ជ្រុងឈមមុំ A និងរង្វាស់ជ្រុងជាមុំ A

$$\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b} \text{ ឬ } a = b\ \tan A$$



គេកំណត់សរសេររង្វាស់មុំត្រង់កំពូលត្រីកោណដោយឈ្មោះកំពូលត្រីកោណនោះ។

ឧទាហរណ៍១ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ B មានរង្វាស់ជ្រុង $BC=3cm,\ AC=4cm$ ។ គណនា $\tan A$ និង $\tan B$ ។



ចម្លើយ គេបាន $\tan A = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{3}{4} = 0.75$

$\tan B = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{4}{3} = 1.333$ ។

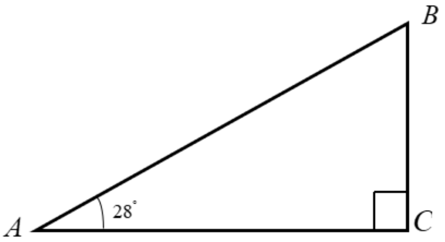
ឧទាហរណ៍២ សង់ត្រីកោណកែងមួយដែលមានមុំស្រួចមួយស្មើ 28° ។ យកបន្ទាត់ក្រិតវាស់ជ្រុងមុំកែងទាំងពីរ រួចគណនា $\tan 28^\circ$ ។

ចម្លើយ បើគេសង់ត្រីកោណ MNP កែងត្រង់ M ដោយយកមុំ $\angle N\ 28^\circ$ និង $MN=3cm$ នោះគេវាស់

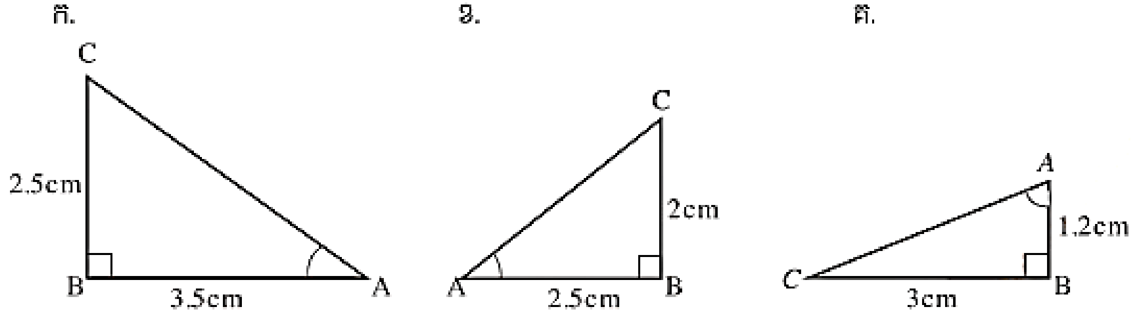
ជ្រុង (MP)

គេបាន $MP=1.6cm$

$\tan 28^\circ = \dfrac{MP}{MN} = \dfrac{1.6}{3} = 0.5333$



ប្រតិបត្តិ តាមរូបខាងក្រោមនេះចូរគណនាតង់សង់នៃមុំ A រួចប្រើរ៉ាប៉័ទ័រ ដើម្បីវាស់តម្លៃដើម្បីវាស់តម្លៃនៃមុំ A



៩.១.២. ស៊ីនុស និងកូស៊ីនុស

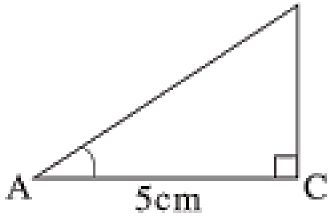
ឧទាហរណ៍១ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ C ។

បើស្គាល់ $\tan A=0.75$ និង $AC=5cm$

ចូរគណនាផលធៀប $\dfrac{BC}{AB}$ និង $\dfrac{AC}{AB}$

ចម្លើយ តាមរូបមន្តតង់សង់ គេបាន

$\tan A=\dfrac{BC}{AC}$ ឬ $BC=AC\cdot\tan A$ នាំឱ្យ $5\times0.75=3.75$



តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ គេបាន $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + (3.75)^3} = 6.25$$

$\frac{BC}{AB} = \frac{3.75}{6.25} = 0.6$ និង $\frac{AC}{AB} = \frac{5}{6.25} = 0.8$

គេសង្កេត ឃើញថាផលធៀប $\frac{BC}{AB}$ និង $\frac{AC}{AB}$ អាចកំណត់បានដោយគ្រាន់តែស្គាល់រង្វាស់មុំមួយ និង ជ្រុងមួយ។

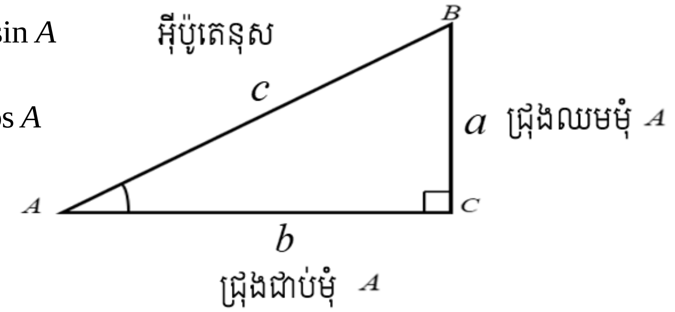
- ផលធៀប $\frac{BC}{AB}$ ជ្រុងឈមមុំ A និងអ៊ីប៉ូតេនុសហៅថាស៊ីនុសនៃមុំ A ។ គេកំណត់សរសេរ $\sin A$
- ផលធៀប $\frac{AC}{AB}$ ជ្រុងជាប់មុំ A និងអ៊ីប៉ូតេនុសហៅថាកូស៊ីនុសនៃមុំ A ។ គេកំណត់សរសេរ $\cos A$

និយមន័យ ក្នុងត្រីកោណកែងមួយ បើ A ជារង្វាស់មុំស្រួចមួយនោះ

- ស៊ីនុសនៃមុំ A គឺជាផលធៀបរវាងរង្វាស់ជ្រុងឈមមុំ A និងអ៊ីប៉ូតេនុស។
- កូស៊ីនុសនៃមុំ A គឺជាផលធៀបរវាងរង្វាស់ជ្រុងជាប់មុំ A និងអ៊ីប៉ូតេនុស។

$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$ ឬ $a = c \cdot \sin A$

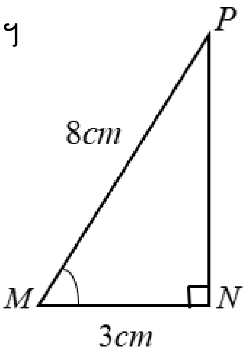
$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$ ឬ $b = c \cdot \cos A$



សម្គាល់ តង់សង់ ស៊ីនុស និងកូស៊ីនុស ហៅថា ផលធៀបត្រីកោណមាត្រ។

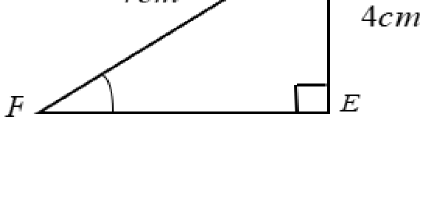
ឧទាហរណ៍២ MNP ជាត្រីកោណកែងត្រង់ N គណនាកូស៊ីនុសមមុំ M ។

ចម្លើយ ដោយស្គាល់ជ្រុងជាប់មុំ M គឺ $MN = 3cm$ និងអ៊ីប៉ូតេនុស $MP = 8cm$ នោះគេបាន $\text{Cos } M = \frac{MN}{MP} = \frac{3}{8}$ ។



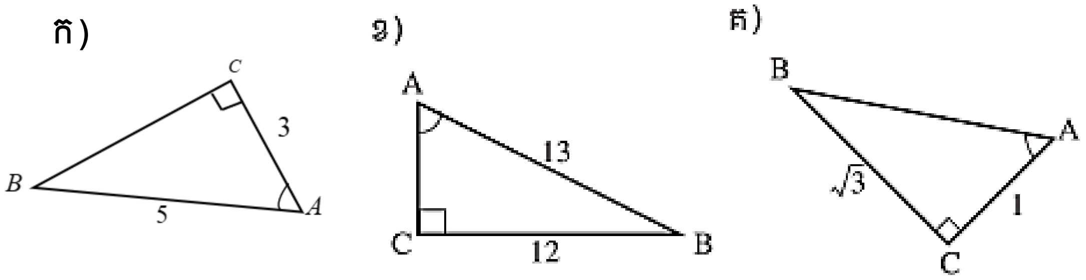
ឧទាហរណ៍៣ EFG ជាត្រីកោណកែងត្រង់ E ដែល $EG = 4cm$ និង $FG = 7cm$ ចូរគណនា $\sin F$

ចម្លើយ ដោយជ្រុងឈមមុំ F គឺ $EG = 4cm$ និង អ៊ីប៉ូតេនុស $FG = 7cm$ នោះគេបាន $\sin \frac{EG}{FG} = \frac{4}{7}$ ។



ប្រតិបត្តិ

1. តាមរូបមន្តខាងក្រោមនេះ ចូរគណនា $\sin A$ និង $\text{Cos}A$ ។

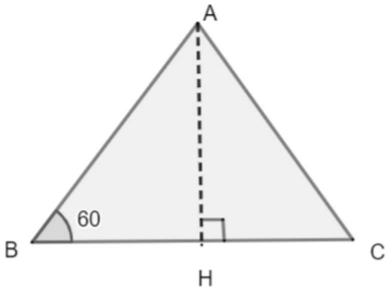


2. តាមរូប ក-ខ និង គ. ខាងលើ ចូរសង់ជ្រុងឱ្យត្រឹមត្រូវតាមខ្នាតគិតជាសង់ទីម៉ែត្រ (cm) ។ ចូរយករ៉ាប៉័ទ័រវាស់រកមុំ A រួចសន្និដ្ឋានតម្លៃផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំ A នេះ ។

៩.១.៣. តម្លៃផលធៀបត្រីកោណមាត្រ

ក. ត្រីកោណសម័ង្ស

ប្រើលក្ខណៈកោណសម័ង្ស ABC ដែលជ្រុង មាន a រង្វាស់ ដើម្បីគណនាផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំ $30°$ និងមុំ $60°$ ។



គូសកម្ពស់ AH គេបានត្រីកោណ ABH ជាត្រីកោណកែងត្រង់ H ដែលមានមុំ $B=60^{\circ}$ និង $\angle BAH=30^{\circ}$ ។ គេមាន $AB=BC=AC=a,\ BH=HC=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{a}{2}$

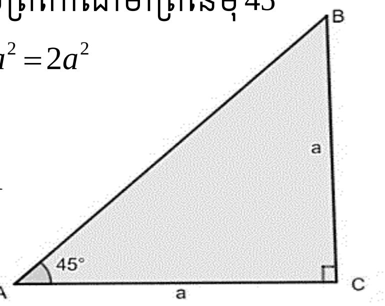
តាមទ្រឹស្តីពីតាគ័រ គេបាន $AH^2=AB^2-BH^2=a^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=\dfrac{3a^2}{4}$ នោះ $AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

តាមនិយមន័យផលធៀបត្រីកោណមាត្រ គេបាន

$$\tan 60^{\circ}=\frac{AH}{BH}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}}=\sqrt{3},\quad \sin 60^{\circ}=\frac{AH}{AB}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^{\circ}=\frac{BH}{AB}=\frac{\frac{a}{2}}{a}=\frac{1}{2},\quad \tan 30^{\circ}=\frac{BH}{AH}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

ខ. ត្រីកោណកែងសមបាត



ប្រើលក្ខណៈត្រីកោណកែងសមបាត ដើម្បីគណនាផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំ 45°

គេមាន តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ $AB^2=BC^2+AC^2=a^2+a^2=2a^2$

$AB=a\sqrt{2}$

តាមនិយមន័យផលធៀបត្រីកោណមាត្រ $\tan 45^\circ=\dfrac{BC}{AC}=1$

$\sin 45^\circ=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{a}{a\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 45^\circ=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

តាមការកំណត់តម្លៃផលធៀបត្រីកោណមាត្រនេះ គេអាចបង្កើតបានតារាងតម្លៃផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំពី 0° ទៅ 90° ។ (តារាងត្រីកោណមាត្រ)

ឧទាហរណ៍១ ប្រើតារាងត្រីកោណមាត្រ ដើម្បីគណនាជ្រុងនៃត្រីកោណ ABC ដោយស្គាល់

1. $AC=3$, $\angle B=22^\circ$ 2. $AC=3.4$, $\angle A=26^\circ$

3. $AB=7$, $\angle B=60^\circ$ 4. $AC=4$, $AB=7$ គណនារង្វាស់មុំ B

ចម្លើយ

1. $\tan 22^\circ=\dfrac{AC}{AB}$ ឬ $BC=\dfrac{AC}{\tan 22^\circ}=\dfrac{3}{0.4040}=7.42$

$\sin 22^\circ=\dfrac{AC}{AB}$ ឬ $AB=\dfrac{AC}{\sin 22^\circ}=\dfrac{3}{0.3746}=8$ ។

2. $\tan 26^\circ=\dfrac{BC}{AC}$ ឬ $BC=AC\bullet\tan 26^\circ=3.4\times 0.4877=1.66$

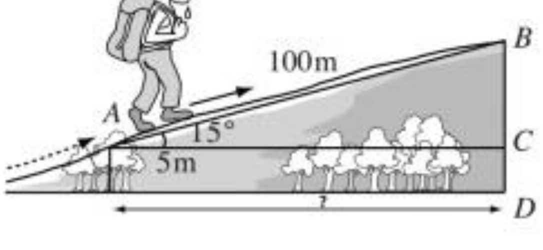
$\cos 26^\circ=\dfrac{AC}{AB}$ ឬ $AB=\dfrac{AC}{\cos 26^\circ}=\dfrac{3.4}{0.8987}=3.78$ ។

3. $\sin 60^\circ=\dfrac{AC}{AB}$ ឬ $AC=AB\bullet\sin 60^\circ=\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$

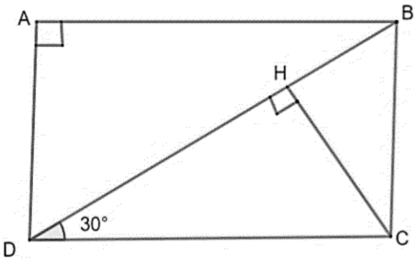
$\cos 60^\circ=\dfrac{BC}{AB}$ ឬ $BC=AB\bullet\cos 60^\circ=\dfrac{7}{2}$ ។

4. $\sin B=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{4}{7}=0.5714$ គេបាន $B\approx 35^\circ$

ប្រតិបត្តិ១ នៅតាមផ្លូវចោតមួយ បើគេធ្វើដំណើរ ដល់ចំណុច A គេដឹងថាមានកម្ពស់ $5m$ ផុតពីដីរាប ។ បើគេបន្តដំណើរ $100m$ ទៅមុខទៀតដល់ ចំណុច B តើគេបានកម្ពស់ប៉ុន្មានម៉ែត្រផុតពីដីរាប បើគេដឹងថាមុំនៅត្រង់ A ស្មើ 15° គឺរកកម្ពស់ BD។

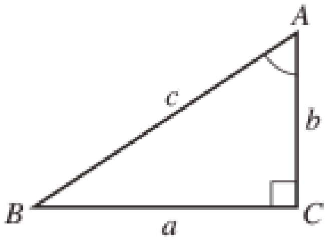


ប្រតិបត្តិ២ $ABCD$ ជាចតុកោណកែងដែល $BC=5$ និងមុំ $\angle BDC=30^\circ$ ។ H ជាចំណោលកែងនៃ C លើ BD ។
គណនារង្វាស់ AB , BH និង BD ។



៩.១.៤. ទំនាក់ទំនងរវាងផលធៀបត្រីកោណមាត្រ

ក. ទំនាក់ទំនងរវាងតង់សង់ ស៊ីនុស និងកូស៊ីនុស



ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ C

គេបាន $\tan A=\frac{a}{b}, \sin A=\frac{a}{c}, \cos A=\frac{b}{c}$

ដោយ $a=c\sin A, \sin A, b=c\cdot\cos A$ នោះ $\tan A=\dfrac{c\sin A}{c\cos A}$

ដូចនេះ $\boxed{\tan A=\dfrac{c\sin A}{c\cos A}}$ ។

ខ.ទំនាក់ទំនងរវាងស៊ីនុស និងកូស៊ីនុស

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ $BC^2+AC^2=AB^2$

$$(c\sin A)^2+(c\cos A)^2=c^2$$

$$c^2[(\sin A)^2+(\cos A)^2]=c^2 \quad \text{ឬ} \quad (\sin A)^2+(\cos A)^2=1$$

គេអាចសរសេរ $(\sin A)^2=\sin^2 A$, $(\cos A)^2=\cos^2 A$

ដូច្នេះជាទំនាក់ទំនងសំខាន់ក្នុងផលធៀបត្រីកោណមាត្រ។

បើគេចែកអង្គទាំងពីរនៃ $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ នឹង $\cos^2 A\neq 0$ នោះ

គេបាន $\dfrac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\cos^2 A}=\dfrac{1}{\cos^2 A}$

ដូចនេះ $1+\tan^2 A=\dfrac{1}{\cos^2 A}$

គ, ផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំបំពេញ

បើមុំ A និង B មានផលបូកស្មើ 90° នោះគេថាមុំ A និង B ជាមុំបំពេញគ្នា។

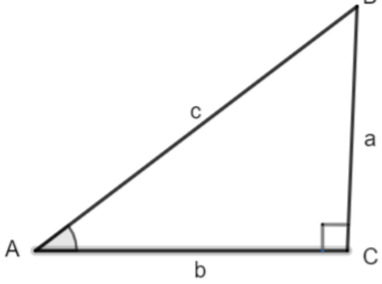
បើ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ C នោះ $A+B=90^\circ$ ។

$\sin A=\frac{a}{c}$, $\cos A=\frac{b}{c}$, $\sin B=\frac{b}{c}$, $\cos B=\frac{a}{c}$

ដោយ $\angle B=90^\circ-\angle A$

នោះ $\sin(90^\circ-A)=\cos A$

$\cos(90^\circ-A)=\sin A$



$$\tan(90^\circ - A) = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{1}{\tan A}$$

ដោយមុំ A និង $(90^\circ - A)$ ជាមុំបំពេញគ្នានោះ

- ស៊ីនុសនៃមុំមួយស្មើនឹងកូស៊ីនុសនៃមុំមួយទៀត
- តង់សង់នៃមុំមួយស្មើនឹងចម្រាស់តង់សង់នៃមុំមួយទៀត

$$\sin(90^\circ - A) = \cos A$$
$$\cos(90^\circ - A) = \sin A$$
$$\tan(90^\circ - A) = \frac{1}{\tan A}$$

ឧទាហរណ៍១ ក្នុងត្រីកោណកែង ABC បើស្គាល់ $\sin A = \frac{4}{7}$ គណនា $\cos A$ និង $\tan A$ ។

ចម្លើយ តាមទំនាក់ទំនង $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ នោះ

$$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A = 1 - \sin^2 A = 1 - \left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{33}{49}$$

ដោយ $\cos A > 0$ នោះ $\cos A = \frac{\sqrt{33}}{7}$ ។

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{4}{7}}{\frac{\sqrt{33}}{7}} = \frac{4}{\sqrt{33}} = \frac{4\sqrt{33}}{33}$$ ។

ឧទាហរណ៍២ បើស្គាល់ $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ គណនា $\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$ ដែល α ជារង្វាស់មុំស្រួច។

ចម្លើយ $\sin\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

ដោយ $\sin\alpha > 0$ នោះ $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ និង $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4}{3}$

ដូចនេះ $$\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha} = \frac{1+\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{3}} = \frac{7}{-1} = -7$$

ឧទាហរណ៍៣ បើស្គាល់ $\tan\alpha = 2$ គណនា $\frac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - 3\sin\alpha}$ ។

ចម្លើយ គេមាន $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2$ នាំអោយ $\sin\alpha = 2\cos\alpha$

$$\frac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - 3\sin\alpha} = \frac{2\cdot 2\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - 6\cos\alpha} = \frac{5\cos\alpha}{-5\cos\alpha} = -1$$ ឬម្យ៉ាងទៀត

$$\frac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - 3\sin\alpha} = \frac{\frac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha - 3\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{2\tan\alpha + 1}{1 - 3\tan\alpha} = \frac{2\cdot 2 + 1}{1 - 3\cdot 2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{2\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-3\sin\alpha}=-1}$

ប្រតិបត្តិ

1. ដោយស្គាល់ $\cos A=\dfrac{12}{13}$ គណនា $\sin A$ និង $\tan A$ ។
2. ដោយស្គាល់ $\tan A=3$ គណនា $\sin A$ និង $\cos A$
3. រកផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំតូចជាង 45° ដែលស្មើនឹងផលធៀបត្រីកោណមាត្រនីមួយៗនេះ ក. $\sin 60^\circ$ ខ. $\cos 82^\circ$ គ. $\tan 73^\circ$ ។

៩.១.៥. ការពន្លាតនៃផលធៀបត្រីកោណមាត្រ

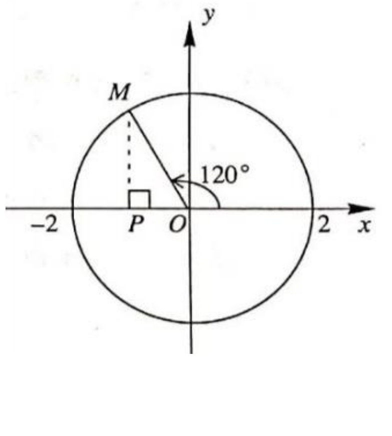
ក. គណនាផលធៀបត្រីកោណមាត្រដោយប្រើកូអរដោនេ

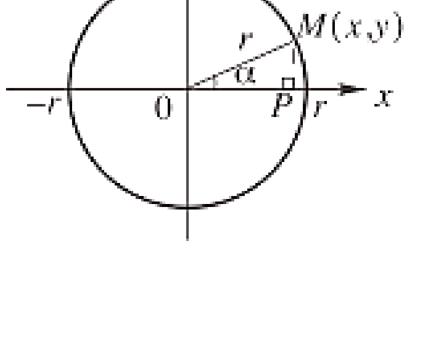
គេបានកំណត់ផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំ ស្រួច ដោយប្រើត្រីកោណកែង ។ បើ α ជាមុំទាល តើគេអាចកំណត់ផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំទាល α បានឬទេ ? គេនឹងសិក្សាបញ្ហានេះនៅក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ ។

នៅក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ គេគូសរង្វង់ផ្ចិត o កាំ r ។ M ជាចំណុចមួយនៅលើរង្វង់នេះ ។ OM កំណត់ជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីសខាង x វិជ្ជមានបានមុំស្រេច α ។ P ជាចំណោលកែងនៃ M លើអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

តាមនិយមន័យ ផលធៀបត្រីកោណមាត្រ ចំពោះត្រីកោណកែង OMP គេបាន

$$\cos\alpha=\frac{OP}{OM}\,,\ \sin\alpha=\frac{MP}{OM}\,,\ \tan\alpha=\frac{MP}{OP}$$

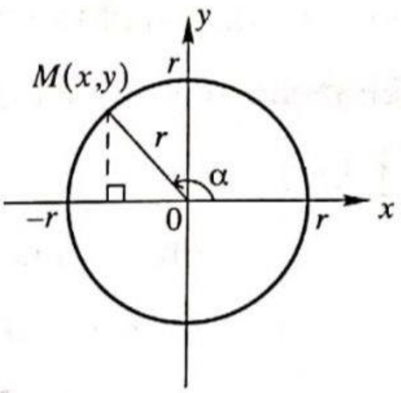




បើចំណុច M មានកូអរដោនេ (x,y) នោះ

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}\,,\ \sin\alpha=\frac{y}{r}\,,\ \tan\alpha=\frac{y}{x}$$ ។

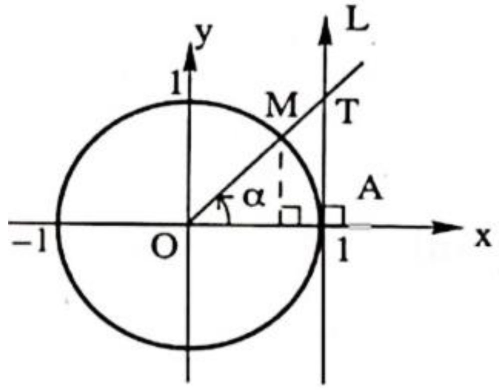
តាមលក្ខណៈនេះ គេនឹងកំណត់ផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃ មុំ α ដែល $0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$ ។ ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេគូសរង្វង់ផ្ចិត o កាំ r ហើយ M ជាចំណុចនៅលើរង្វង់ដែល OM កំណត់ជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីសខាង x វិជ្ជមានបានមុំ α ជាមុំទាល ។ គេឃើញថាចំណុច M នៅក្នុងតំបន់នេះអាប់ស៊ីស x ជាចំនួនអវិជ្ជមាន និងអរដោនេ y ជា ចំនួនវិជ្ជមាន



ដូចនេះ $\cos\alpha < 0\ ,\ \sin\alpha > 0\ ,\ \tan\alpha < 0$ ។

ឧទាហរណ៍១ បើមុំ $\alpha = 120^\circ$ និងកាំ $r = 2$ ឯកតា បង្ហាញថា M មានកូអរដោនេ $(-1,\sqrt{3})$ រួចគណនាផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំ 120° ។

ចម្លើយ OPM ជាត្រីកោណកែងត្រង់ P មាន $\angle MOP = 60^\circ$



គេបាន $OP = OM\cdot\cos 60^\circ = 2\times\dfrac{1}{2} = 1$

$$MP = OM\cdot\sin 60^\circ = 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\text{ ។}$$

ដោយ P នៅខាងឆ្វេងគល់ O នោះគេបាន $M\left(-1,\sqrt{3}\right)$

$$\cos 120^\circ = \frac{x}{r}\ ,\ \sin 120^\circ = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ \tan 120^\circ = \frac{y}{x} = -\sqrt{3}$$

ឧទាហរណ៍២ បើ $\alpha = 150^\circ$ និងកាំ $r = 2$ ។ បង្ហាញថា M មានកូអរដោនេ $\left(-\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2}\right)$ និងគណនាផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំ 135° ។

ចម្លើយ គេបាន $\angle MOP = 30^\circ$ $OP = OM\times\cos 30^\circ = 2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ និង

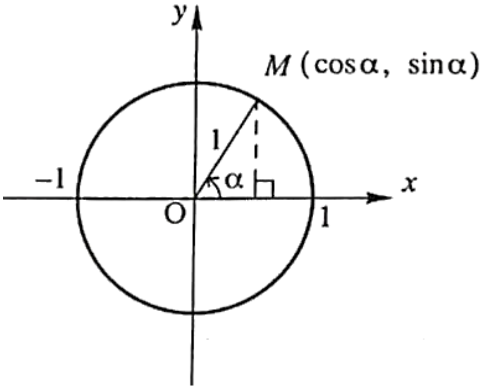
$MP = OM\times\cos 30^\circ = 2\times\dfrac{1}{2} = 1$ ។ ដោយ P នៅខាង x អវិជ្ជមាននោះ $M\ (-\sqrt{3},1)$

ដូចនេះ $\cos 150^\circ = -\sqrt{3}\ ,\ \sin 150^\circ = 1\ ,\ \tan 150^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

ប្រតិបត្តិ

1. គណនាផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំ 135° ក្នុងរង្វង់ដែលមានកាំ $r = \sqrt{2}$ ។
2. គណនាផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំ 180° ក្នុងរង្វង់ដែលមានកាំ $r = 2$ ។

ខ. រង្វង់ត្រីកោណមាត្រ



រង្វង់ដែលមានផ្ចិតជាគល់តម្រុយកូអរដោនេ និងកាំមានរង្វាស់មួយឯកតាហៅថា **រង្វង់ឯកតា ឬរង្វង់** ត្រីកោណមាត្រ ។

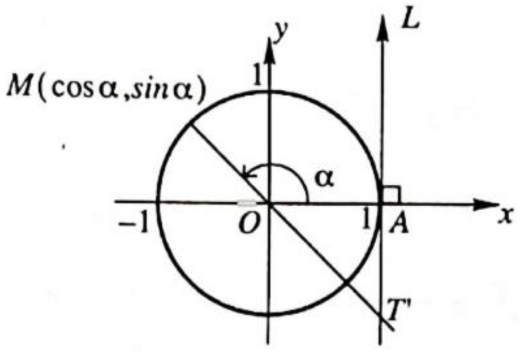
M មានកូអរដោនេ (x,y) នៅលើរង្វង់ឯកតា កាំ OM និងអ័ក្សអាប់ស៊ីសខាង x វិជ្ជមាន បង្កើតបានមុំ α តាមទិសផ្ទុយពីទិសទ្រនិចនាឡិកា

គេបាន $\cos\alpha = x$, $\sin\alpha = y$

ដូចនេះ នៅលើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រចំណុច M មានកូអរដោនេ $(\cos\alpha , \sin\alpha)$ ។

- **តម្លៃតង់សង់នៃមុំ α ក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ**

គូស AL ជាបន្ទាត់ប៉ះ រង្វង់ត្រង់ $A(1, 0)$



- បើ $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ បន្ទាត់ OM កាត់បន្ទាត់ AL ត្រង់ T ខាងផ្នែកវិជ្ជមានគេបាន

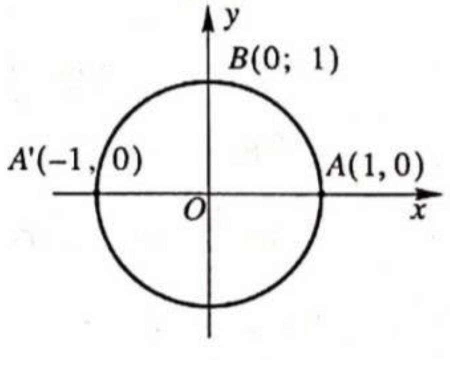
$$\tan\alpha = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = AT$$

- បើ $\alpha = 90^\circ$ បន្ទាត់ OM ស្របនឹង AL ដូចនេះគ្មានតម្លៃតង់សង់នៃមុំ 90° ។

- បើ $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ បន្ទាត់ OM កាត់បន្ទាត់ AL ត្រង់ T' ខាងផ្នែកអវិជ្ជមាន គេបាន $\tan\alpha = AT'$ ។

សម្គាល់

- អ័ក្សអាប់ស៊ីស ហៅថាអ័ក្សកូស៊ីនុស
- អ័ក្សអរដោនេ ហៅថាអ័ក្សស៊ីនុស
- អ័ក្ស (AL) ហៅថាអ័ក្សតង់សង់ ។



- **តម្លៃផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំ** $0°, 90° , 180°$

នៅលើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រចំណុច A , B និង A' មានកូអរដោនេ និង $(-1,0)$

- បើ M នៅត្រង់ A នោះមុំ $\alpha = 0°$

  $\cos 0° = 1$, $\sin 0° = 0$, $\tan 0° = 0$ ។

- បើ M នៅត្រង់ B នោះ $\alpha = 90°$

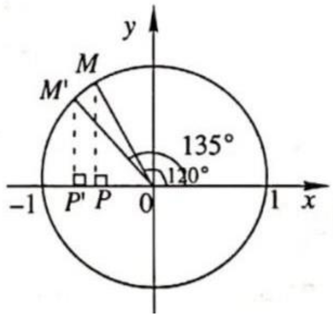
  $\cos 90° = 0$, $\sin 90° = 1$, $\tan 90°$ មិនកំណត់។

- បើ M នៅត្រង់ A' នោះ $\alpha = 180°$: $\cos 180° = 1$, $\sin 180° = 0$, $\tan 180° = 0$ ។

ឧទាហរណ៍១ បើកាំ $r = 1$ ឯកតា គណនាផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំ $120°$, $135°$ ។

ចម្លើយ ដោយ $\alpha = 135°$ នោះ

$\angle MOP = 60°$, $M\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



ដូចនេះ $\cos 120° = -\frac{1}{2}$, $\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 120° = -\sqrt{3}$

ដោយ $\alpha = 135°$ នោះ

$\angle M'OP' = 45°$, $M'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan 135° = 1}$

តារាងតម្លៃផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំពិសេស

α	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	មិនកំណត់	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

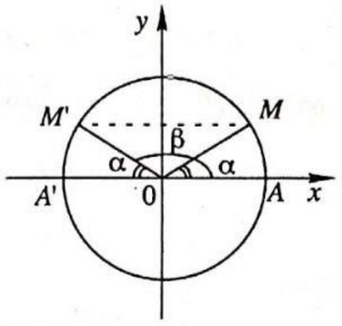
ប្រតិបត្តិ ក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងខាងក្រោម

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, 2. $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, 3. $1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ ។

សង្កេត បើ $0° \le \alpha \le 180°$ នោះ $-1 \le \cos\alpha \le 1$ និង $0 \le \sin\alpha \le 1$ ។

គ. ផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំ $180° - \alpha$

- បើ α និង β ជាមុំបន្ថែមគ្នា នោះ $\alpha + \beta = 180°$ ហើយ $\beta = 180° - \alpha$



$\angle A'OM' = \beta = 180° - \alpha$ គេបាន $\angle A'OM' = \alpha$

ដូចនេះ M និង M' ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងអ័ក្ស (oy)

បើ M មានកូអរដោនេ (x, y) នោះ M' មានកូអរដោនេ $(-x, y)$

ដោយ $\cos\alpha = x$, $\sin\alpha = y$, $\tan\alpha = \frac{y}{x}$

នោះ $\cos\beta = -x$, $\sin\beta = y$, $\tan\beta = \frac{y}{x}$

នាំអោយបាន $\cos\beta = -\cos\alpha$, $\sin\beta = \sin\alpha$, $\tan\beta = -\tan\alpha$ ។

ដូចនេះ បើមុំពីរបន្ថែមគ្នានោះគេបាន

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(180° - \alpha) = \sin$$
$$\tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha$$

តាមរូបមន្តនេះ តម្លៃផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំទាលត្រូវគណនា បានតាមការបំប្លែងមុំនេះជាមុំស្រួច។

ឧទាហរណ៍១

1. $\cos125° = \cos(180° - 55°) = -\cos 55° = -0.5736$
2. $\sin125° = \sin(180° - 55°) = \sin 55° = 0.8192$
3. $\tan125° = \tan(180° - 55°) = -\tan 55° = -1.4281$
4. $\sin143° = \sin(180° - 37°) = \sin 37° = 0.6018$

ប្រតិបត្តិ រកផលធៀបត្រីកោណមាត្រមុំ $105°$, $152°$។ ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ គេផ្ទៀងផ្ទាត់ផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំបំពេញ $\alpha + \beta = 90°$

$\beta = 90° - \alpha$, $\angle AOM = \alpha$, $\angle AOM' = \beta$ ។

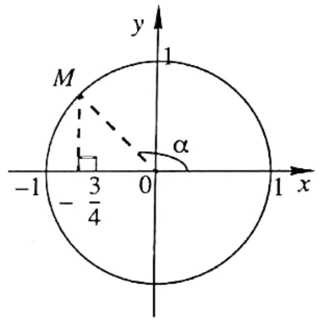
នៅលើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រចំណុច M និង M'ឆ្លុះគ្នាថាធៀបនឹងបន្ទាប់ពុះ (OT) នៃ $\angle xoy$

គេបាន $0° \le \alpha \le 180°$ $\cos\beta = \sin\alpha$, $\sin\beta = \cos\alpha$ ។

ដូចនេះ $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$, $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$, $\tan(90° - \alpha) = \dfrac{1}{\tan\alpha}$ ។

ឃ. ការអនុវត្ត

ឧទាហរណ៍១ គេអោយ $\cos = -\dfrac{3}{4}$ ដែល



$0° \le \alpha \le 180°$ ។ គណនា $\sin\alpha$ និង $\tan\alpha$ ។

ចម្លើយ តាមទំនាក់ទំនង $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ គេបាន

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$$

ដោយ $0° \le \alpha \le 180°$ នោះ $\sin\alpha \ge 0$ នាំអោយ

$$\sin = \frac{\sqrt{7}}{4} \text{ , } \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{-\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$$

ឧទាហរណ៍២ គេអោយ $\tan\alpha = -\sqrt{2}$ ដែល $0° \le \alpha \le 180°$ ។

គណនា $\sin\alpha$ និង $\cos\alpha$ ។

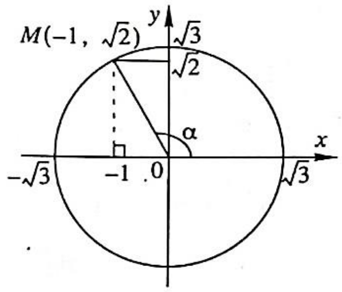
ចម្លើយ តាមទំនាក់ទំនង $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

គេបាន $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + (-\sqrt{2})^2 = 3$ ឬ $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{3}$

ដោយ $\tan\alpha < 0$ និង $0° \le \alpha \le 180°$ នោះ $\cos\alpha<0$ នាំអោយ $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ។ $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ឬ

$\sin\alpha = \tan\alpha \cdot \cos\alpha = \left(-\sqrt{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{6}}{3}$

គេអាចដោះស្រាយតាមរបៀបម៉្យាងទៀត



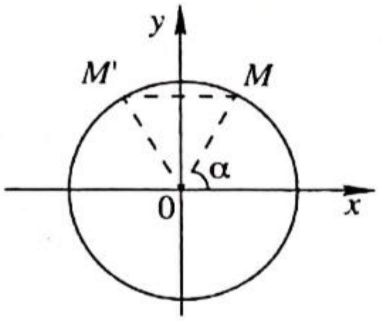
គេសង់រង្វង់កាំ $r = \sqrt{3}$ នៅលើរង្វង់នេះ ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស -1 ត្រូវមានអរដោនេ $\sqrt{2}$ ដែល

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$

គេបាន $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ឬ

$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ។

ឧទាហរណ៍៣ រកតម្លៃមុំ α ដែល $0° \le \alpha \le 180°$ ហើយ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\sin = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ។



ចម្លើយ នៅលើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ $\sin\alpha$ ជាអរដោនេនៃចំណុចនៅលើរង្វង់នេះ $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ។

មានពីរចំណុច M និង M' ដែលមានអរដោនេ $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ឋិតនៅលើរង្វង់ ហើយចំណុច ទាំងពីរនេះឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងអ័ក្សអរដោនេ ។

តាមរូបមន្ត $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

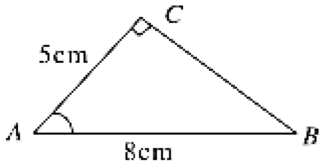
$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

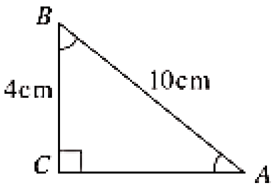
$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{2} , M'\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) , M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

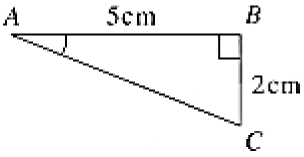
ដូចនេះ មុំ α ដែលត្រូវរកគឺ $\alpha = 60°$ ឬ $\alpha = 180° - 60° = 120°$ ។

លំហាត់អនុវត្ត

1. តាមរូបខាងក្រោមនេះ គណនាផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំ A រួចអោយតម្លៃប្រហែលនៃមុំ A







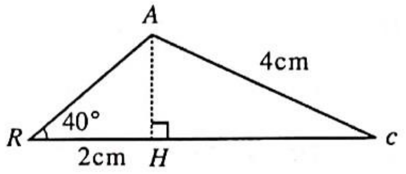
2. ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ។ បើស្គាល់មុំមួយ និងជ្រុងមួយ រួចចូរគណនារង្វាស់ជ្រុងពីរទៀត

ក. $\angle B = 18^\circ$, $AB = 5$ ខ. $\angle B = 32^\circ$, $AC = 9$

គ. $\angle B = 68^\circ$, $BC = 12$ ឃ. $\angle C = 60^\circ$, $BC = 10$

3. AH ជាកម្ពស់នៃត្រីកោណសាមញ្ញ ARC ដែល

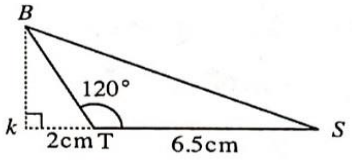
$HR = 2cm$, $AC = 4cm$, $\angle R = 40^\circ$ ។



ក. គណនា AH រួចរកតម្លៃប្រហែលនៃមុំ C

ខ. គណនា HC ។

4. BK ជាកម្ពស់នៃត្រីកោណ BTS ។



ក. គណនារង្វាស់ $\angle BTK$

ខ. គណនា BK និង BS រួចរកតម្លៃនៃមុំ S ។

5. ស្រាយបំភ្លឺសមភាព $\dfrac{3-6\cos^2}{\sin\alpha - \cos\alpha} = 3(\sin\alpha + \cos\alpha)$ ។

6. គណនាតម្លៃនៃកន្សោមនីមួយៗខាងក្រោម

ក. $\dfrac{\sin 45^\circ}{\cos 30^\circ + \sin 60^\circ}$ ខ. $\tan 45^\circ + \tan 30^\circ \tan 60^\circ$

គ. $\dfrac{sin 65^\circ}{cos 25^\circ}$ ឃ. $tan 75^\circ tan 15^\circ$ ។

7. សម្រួលកន្សោម $B = cos(180^\circ - \alpha) - sin(180^\circ - \alpha) + cos(90^\circ - \alpha)$

8. រកតម្លៃ $cos\alpha$ ឬ $sin\alpha$ ឬ $tan\alpha$ ដោយស្គាល់

ក. $sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ និង $0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$ ខ. $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$ និង $90^\circ \le \alpha \le 180^\circ$

គ. $tan\alpha = 2$ និង $0^\circ \le \alpha \le 90^\circ$ ឃ. $\tan\alpha = -\dfrac{1}{2}$ និង $90^\circ \le \alpha \le 180^\circ$

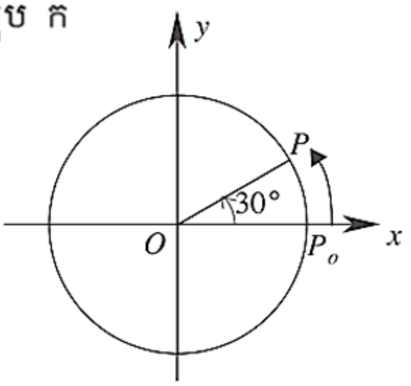
៩.២. សញ្ញាណនៃមុំមានទិសដៅ

៩.២.១. រង្វាស់មុំ

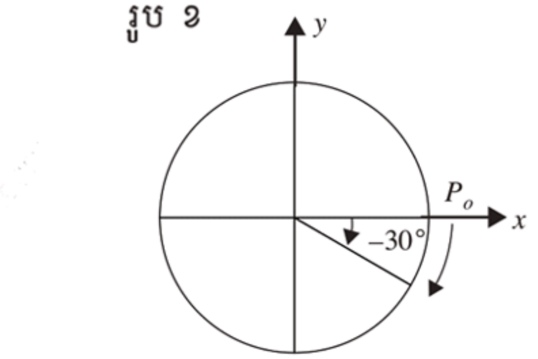
ក. ការកំណត់មុំមានទិសដៅ

ឧទាហរណ៍ទី១ ក្នុងរង្វាស់ត្រីកោណមាត្រគេប្រើវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OP_O}$ និង $\overrightarrow{OP}$ មកកំណត់មុំ ។ $\overrightarrow{OP}$ ជាវ៉ិចទ័រនឹងបិតនៅផ្នែកវិជ្ជមាននៃអ័ក្ស $\overline{OX}$ ហៅថាវ៉ិចទ័រគល់ ។
$\overrightarrow{OP}$ ជាវ៉ិចទ័រចល័តជុំវិញគល់ O ហៅថាវ៉ិចទ័រចុង ។

រូប ក



រូប ខ



វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OP_O}$ និង $\overrightarrow{OP}$ បង្កើតបានមុំតាមករណីដូចខាងក្រោម

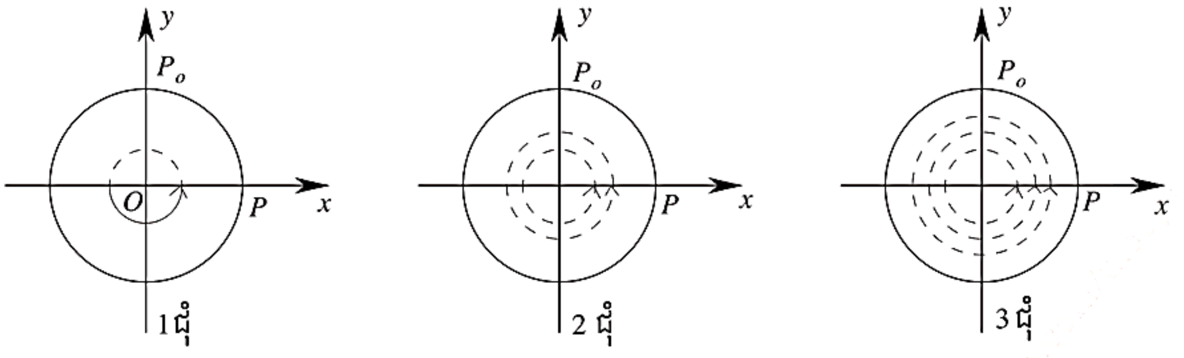
- ក្នុងករណីវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OP_O}$ វិលច្រាសនិងទិសដៅនៃទ្រនិចនាឡិកា មុំដែលបង្កើតបានមុំវិជ្ជមាន ។

(រូប ក) $\left(\overrightarrow{OP_O},\overrightarrow{OP}\right)=30^\circ$ ។

- ក្នុងករណីវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OP}$ វិលស្របនិងទិសដៅទ្រនិចឡិកា មុំដែលបង្កើតបានជាមមុំអវិជ្ជមាន ។

(រូប ខ) $\left(\overrightarrow{OP_O},\overrightarrow{OP}\right)=-30^\circ$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២ តាមទិសដៅវិជ្ជមាន បើ $\overrightarrow{OP_O}$ វិលបានមួយជុំពេញនៃរង្វង់នោះ គេនឹងបានមុំ 360° ហើយរង្វាស់មុំនិងកើន 2 ដង ជា 3 ដង ទៅតាមចំនួនជុំនៃការវិលនេះ ។



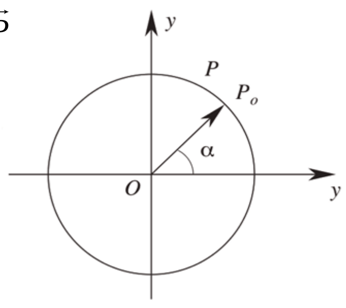
360° $2\times360^\circ$ $3\times360^\circ$

បើ α ជាមុំកំណត់ដោយវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OP_O}$ និង $\overrightarrow{OP}$ នោះ $\overrightarrow{OP_O}$ និង $\overrightarrow{OP}$ ក៏កំណត់មុំដែលមានរង្វាស់ផ្សេងៗគ្នាដូចខាងក្រោម

$\alpha+360^\circ$ $\alpha-360^\circ$

$\alpha+2\times360^\circ$ $\alpha-2\times360^\circ$

$\alpha+3\times360^\circ$ $\alpha-3\times360^\circ$



ជាទូទៅ៖ $\overrightarrow{OP_O}$ និង $\overrightarrow{OP}$ ជាពីរវ៉ិចទ័រកំណត់បានមុំ $\alpha + \text{K}360^\circ$, $(\text{K} \in \text{Z})$ ។

សម្គាល់ មុំ α និង $\alpha + 360^\circ$ មានរង្វាស់ខុសគ្នា ប៉ុន្តែមានវ៉ិចទ័រ និងវ៉ិចទ័រចុងដូចគ្នា ។

លំហាត់គំរូ១ វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OP}$ វិលចេញពីទីតាំងដើម $\overrightarrow{OP_O}$ បានមុំ 120° ហើយបន្ទាប់មកវិលបានមុំ -155° ទៀត ។ គណនាមុំ $\left(\overrightarrow{OP_O}, \overrightarrow{OP}\right)$ ។

ចម្លើយ គណនាមុំ $\left(\overrightarrow{OP_O}, \overrightarrow{OP}\right)$

គេបាន $\left(\overrightarrow{OP_O}, \overrightarrow{OP}\right) = 120^\circ + \left(-155^\circ\right) = -35^\circ$ ។

លំហាត់គំរូ២ គណនាមុំ $\alpha = 45^\circ + k \times 360^\circ$ ក្នុងករណី $k = 1$, $k = -1$ ។

ចម្លើយ

ចំពោះ $k = 1$ នោះ $\alpha = 45^\circ + (1) \times 360^\circ = 405^\circ$ ។

ចំពោះ $k = -1$ នោះ $\alpha = 45^\circ + (-1) \times 360^\circ = -315^\circ$ ។

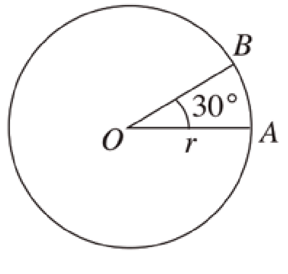
ប្រតិបត្តិ១ បើវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OP}$ ផ្តើមវិលពីទីតាំងដើម $\overrightarrow{OP_O}$ បានមុំ 70° តាមទិសដៅអវិជ្ជមានហើយបន្ទាប់មកវិលបានមុំ 150° តាមទិសដៅវិជ្ជមាន ។ ចូរកំណត់មុំ $\left(\overrightarrow{OP_O}, \overrightarrow{OP}\right)$ ។

ប្រតិបត្តិ២ គណនាមុំ $\alpha = -270^\circ + k \times 360^\circ$ ក្នុងករណី $k = 2$, $k = -3$ ។

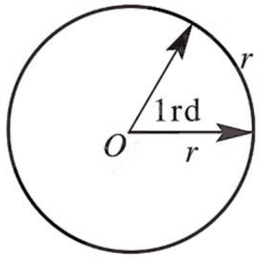
ខ. រង្វាស់មុំគិតជារ៉ាដ្យង់

ឧទាហរណ៍១ រង្វង់មួយមានកាំ $r = 5cm$ និង $\angle AOB = 30^\circ$ គណនាប្រវែងធ្នូ AB ។ មុំផ្ចិតគិតជាដឺក្រេពុំមានទំនាក់ទំនងទៅនឹងប្រវែងធ្នូ AB ។

ហេតុនេះ គេបង្កើតខ្នាតរង្វាស់មុំមួយទៀត ដែលមានទំនាក់ទំនងទៅនឹងប្រវែងធ្នូ ។



និយមន័យ៖ 1រ៉ាដ្យង់ គឺជារង្វាស់មុំផ្ចិតដែលស្កាត់ធ្នូមួយមានប្រវែងស្មើនឹងកាំនៃរង្វង់ ហើយគេកំណត់សរសេរ $1rd$ ។



យើងដឹងថាប្រវែងធ្នូ $2\pi r$ ស្មើនឹងបរិមាត្ររង្វង់ស្កាត់ដោយមុំ 360° ឬ មុំ $2\pi r(rd)$

មានន័យថា $360^\circ = 2\pi r(rd)$ ។

យើងបានទំនាក់ទំនងរវាងរង្វាស់មុំគិតជាដឺក្រេនិងរ៉ាដ្យង់ $1rd=\frac{180^\circ}{\pi}=57^\circ$, $1^\circ=\frac{\pi}{180^\circ}\approx 0.017$ ។

គេអាចគណនាប្រវែងធ្នូ AB ដោយគ្រាន់តែប្តូរឯកតាមុំដឺក្រេទៅរ៉ាដ្យង់ $\alpha=30^\circ$ ឬ $\alpha=30\times\frac{\pi}{180^\circ}=0.52rd$ ប្រវែងធ្នូ $AB=\alpha\times r=0.52\times 5=2.6cm$ ។

ជាទូទៅ៖ $\left(\overrightarrow{OP_O},\overrightarrow{OP}\right)=\alpha+2k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ ។

សម្គាល់ រង្វាស់មុំគិតជារ៉ាដ្យង់អាចសរសេរដោយមិនប្រើ rd បាន ។

ឧទាហរណ៍២ $\alpha=\frac{\pi}{4}rd$ អាចសរសេរដោយខ្លី $\alpha=\frac{\pi}{4}$ ។

លំហាត់គំរូ ប្តូរមុំ $30^\circ,45^\circ,150^\circ$ ជារ៉ាដ្យង់ និងប្តូរមុំ $\frac{\pi}{5},\frac{2}{3}\pi,3\pi$ ជាដឺក្រេ ។

ចម្លើយ

$$\frac{\pi}{180}\times 30=\frac{\pi}{6}\ ,\ \frac{\pi}{180}\times 45=\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{\pi}{180}\times 150=\frac{5\pi}{6}$$

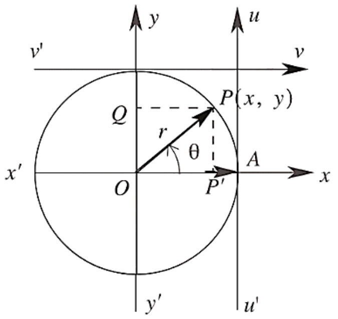
$$\frac{180^\circ}{\pi}\times\frac{\pi}{5}=36^\circ\ ,\ \frac{180^\circ}{\pi}\times\frac{2\pi}{3}=120^\circ\ ,\ \frac{180^\circ}{\pi}\times 3\pi=540^\circ$$ ។

៩.៣. អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

៩.៣.១. ស៊ីនុស កូស៊ីនុស តង់សង់ និងកូតង់សង់

យើងបានសិក្សារួចមកហើយពីផលធៀបត្រីកោណមាត្រ មុំចន្លោះ 0° និង 180° ក្នុងថ្នាក់ទី១០ ពេលនេះ យើងកំណត់ $\sin$, $\cos$, $\tan$ និង $\cot$ នៃមុំទូទៅ ។

ក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រដែលមានផ្ចិត O និងកាំ r ។ P ជាចំណុចមួយនៅលើរង្វង់ដែលមានកូអរដោនេ $P(x,y)$ ហើយ $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP}\right)=\theta$ ។ P' ជាចំណោលកែងនៃ P លើអ័ក្ស $\overrightarrow{x'x}$ និង Q ជាចំណោលកែងនៃ P លើអ័ក្ស $\overrightarrow{y'y}$ ។



គេបាន $\sin\theta=\frac{OQ}{OP}=\frac{y}{r}$, $\cos\theta=\frac{OP'}{OP}=\frac{x}{r}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{y}{x}$, $\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{x}{y}$ ។

ជាទូទៅ គេបាន **ស៊ីនុស កូស៊ីនុស តង់សង់** និង**កូតង់សង់** ជាអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ ។

សម្គាល់ អ័ក្ស $\overrightarrow{y'y}$ ហៅថាអ័ក្សស៊ីនុស ហើយអ័ក្ស $\overrightarrow{x'x}$ អ័ក្សកូស៊ីនុស ហើយអ័ក្ស $\overrightarrow{u'u}$ ជាអ័ក្សតង់សង់ និងអ័ក្ស $\overrightarrow{v'v}$ ជាអ័ក្សកូតង់សង់ ។

ឧទាហរណ៍១ គណនាតម្លៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រនៃមុំ $\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}$ ។ B ជាចំណុចប្រសព្វរវាងរង្វង់និងអ័ក្ស $\overrightarrow{y'y}$ តាមទិសដៅវិជ្ជមាន ។

ដូចនេះ B ជាចំណុចដែលត្រូវនឹងតម្លៃ $\frac{\pi}{2}$ ។ តាមរូបភាពនេះគេបាន $\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\cos\frac{\pi}{2}=0$ ។

$\cot\frac{\pi}{2}=\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{0}{1}=0$, $\tan\frac{\pi}{2}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}}$ មិនអាចកំណត់បានពីព្រោះ $\cos\frac{\pi}{2}=0$ ។

ក្នុងត្រីកោណកែង OPQ គេបាន $AOP=\frac{\pi}{6}$ ហើយ $PQ=\frac{1}{2}$ ។

ដូចនេះ គេបាន $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ។

$$\cot\frac{\pi}{2}=\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\ ,\ \tan\frac{\pi}{2}=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$$ ។

ជាទូទៅ គេបានតារាងតម្លៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រនៃមុំខ្លះដូចខាងក្រោម ។

មុំ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\|$
cot	$\|$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

លំហាត់គំរូ គណនា

ក. $2\sin\frac{\pi}{3}+4\cos\frac{\pi}{6}-3\tan\frac{\pi}{3}+4\cot\frac{\pi}{4}$

ខ. $\frac{5-4\tan^2 45^\circ+\cot^2 60^\circ}{2\cos^2 60^\circ-2\sin^3 90^\circ+\tan^2 45^\circ}$ ។

ចម្លើយ គណនា

ក. $2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+4\frac{\sqrt{3}}{2}-3\times\sqrt{3}+4\times1=\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3\sqrt{3}=4$

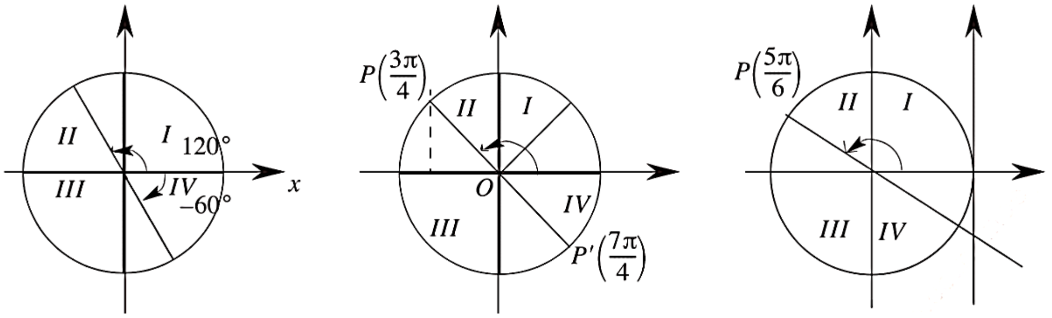
ខ. $\frac{5-4\times(1)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\times1^2+4\times1}=\frac{1+\frac{1}{3}}{2\times\frac{1}{4}-2+4}=\frac{8}{15}$ ។

ប្រតិបត្តិ គណនា $2\sin\frac{2\pi}{4}-3\tan^2\frac{\pi}{6}+2\cos^4+3\cot^2\frac{\pi}{4}$ ។

៩.៣.២. សញ្ញានៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

រង្វង់ត្រីកោណមាត្រចែកចេញជាបួនកាដ្រង់គឺ កាដ្រង់ទី I, II, III និង IV ។ សញ្ញានៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ គឺអាស្រ័យលើរង្វាង់មុំដែលឋិតនៅក្នុងកាដ្រង់នីមួយៗ ។

ឧទាហរណ៍ គណនា $\cos 120^\circ$, $\sin(-60^\circ)$, $\cos\frac{3\pi}{4}$, $\sin\frac{7\pi}{4}$, $\tan\frac{5\pi}{6}$ ។



$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$, $\sin(-60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

គេបានតារាងសង្ខេបដូចខាងក្រោម

អនុ. និង កាដ្រង់	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$	+	−	+	−
$\cot\alpha$	+	−	+	−

លំហាត់គំរូ តើមុំ x នៅក្នុងកាដ្រង់ណាដែលផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមីការ $\begin{cases}\sin x<0\\ \cos x<0\end{cases}$ ។

ចម្លើយ គេបាន $\sin x<0$ និង $\cos x<0$ នោះ x នៅកាដ្រង់ទី III ។

ដូចនេះ x នៅកាដ្រង់ទី III ។

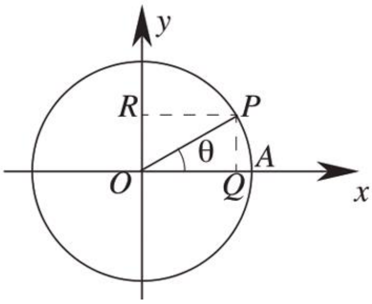
ប្រតិបត្តិ១ តើក្នុងកាដ្រង់ណាដែលគេអាចរកមុំផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមីការ $\begin{cases}\cos x<0\\ \tan x<0\end{cases}$ ។

ប្រតិបត្តិ២ តើក្នុងកាដ្រង់ណាដែល $\tan x$ និង $\cos x$ មានសញ្ញាដូចគ្នា ។

៩.៣.៣. លក្ខណៈនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

ក. ទំនាក់ទំនងសំខាន់ៗ

នៅលើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ θ ជារង្វង់មុំ $\left(\overrightarrow{OP_o},\overrightarrow{OP}\right)$ ។ គេបាន $\cos\theta=OQ$, $\sin\theta=OR$ ។ ក្នុងត្រីកោណកែង OPQ ។



តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ គេបាន $OP^2=OQ^2+PQ^2$

$1=\sin^2\theta+\cos^2\theta$ ឬ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \quad (1)$

គេដឹងថា $\tan x=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ចំពោះ $\cos\theta\neq 0$

គេចែកអង្គទាំងពីរនៃទំនាក់ទំនង (1) នឹង $\cos^2\theta$ ។

គេបាន $\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ ឬ $\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ ។

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \;,\; 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2 x} \;,\; 1+\cot^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta}$$

ឧទាហរណ៍១ គណនា $\cos\theta,\tan\theta,\cot\theta$ ដោយស្គាល់ $\sin\theta=\dfrac{8}{17}$ និងមុំ θ នៅកាដ្រង់ទី I ។

គេមាន $1=\sin^2\theta+\cos^2\theta$ ។ ដោយមុំ θ នៅកាដ្រង់ទី I នោះ $\cos\theta$ វិជ្ជមាន ។

គេបាន $\cos\theta=\sqrt{1-\sin\theta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{8}{17}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{225}{289}}=\dfrac{15}{17},\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{8}{17},\cot\theta=\dfrac{15}{8}$ ។

លំហាត់គំរូ គណនា $\dfrac{5\sin x+7\cos x}{6\cos x-3\sin x}$ ដោយដឹងថា $\tan x=\dfrac{4}{15}$ ។

ចម្លើយ គណនា $\dfrac{5\sin x+7\cos x}{6\cos x-3\sin x}=\dfrac{\cos x(5\tan x+7)}{\cos x(6-3\tan x)}=\dfrac{5\tan x+7}{6-3\tan x}=\dfrac{5\times\frac{4}{15}+7}{6-3\frac{4}{15}}=\dfrac{125}{78}$ ។

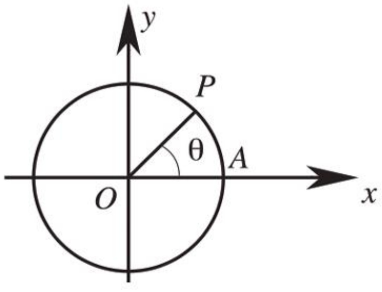
ប្រតិបត្តិ១ គណនា $\cos\theta,\tan\theta,\cot\theta$ ដោយស្គាល់ $\sin\theta=-\dfrac{12}{3}$ និង $\dfrac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$ ។

ប្រតិបត្តិ២ គណនា $\dfrac{\cot\alpha+\tan\alpha}{\cot\alpha-\tan\alpha}$ ដោយស្គាល់ $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ និង $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ ។

ខ. អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រនៃមុំ θ និង $\theta+2k\pi$

ដោយមុំ θ និង $\theta+2k\pi$ $,k\in Z$ ជាមុំកំណត់ដោយវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{OP}$ ដូចគ្នានោះ គេបានរូបមន្ត

$$\sin(\theta+2k\pi)=\sin\theta \;,\; \cos(\theta+2k\pi)=\cos\theta$$
$$\tan(\theta+2k\pi)=\tan\theta \;,\; \cot(\theta+2k\pi)=\cot\theta \;\; k\in Z$$



សម្គាល់ $\tan(\theta+k\pi)=\tan\theta$, $\cot(\theta+k\pi)=\cot\theta$, $k\in Z$ ។

ឧទាហរណ៍ $\sin\frac{9}{2}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{2}+4\pi\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\cos\left(-\frac{17}{3}\pi\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-6\pi\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ ។

លំហាត់គំរូ គេដឹងថា $\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ។ គណនា $\cos\frac{65\pi}{4}$ និង $\sin\left(-\frac{39}{4}\right)$ ។

ចម្លើយ គណនា $\cos\frac{65\pi}{4}$ និង $\sin\left(-\frac{39}{4}\right)$

គេអាចសរសេរ $\frac{65\pi}{4}=\frac{64\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=16\pi+10\pi$

ដូចនេះ $\cos\frac{65\pi}{4}=\cos\left[\frac{\pi}{4}+(8\times2\pi)\right]=\cos\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ។

គេដឹងថា $-\frac{39\pi}{4}=\frac{\pi}{4}-\frac{40\pi}{4}=\frac{\pi}{4}-10\pi$ ។

ដូចនេះ $\sin\left(-\frac{39\pi}{4}\right)=\sin\left[\frac{\pi}{4}-(5\times2\pi)\right]=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ។

ប្រតិបត្តិ គណនាតម្លៃរបស់ $\sin 6\pi$, $\sin\frac{11\pi}{3}$, $\cos\left(-\frac{23\pi}{6}\right)$, $\tan\left(-\frac{27\pi}{4}\right)$ ។

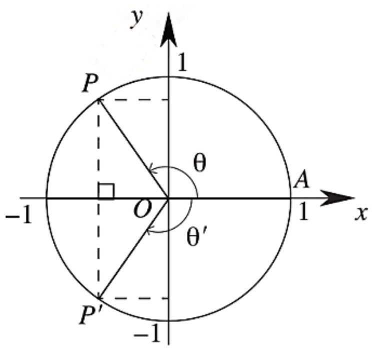
៩.៣.៣. មុំផ្ទុំ

ក. មុំផ្ទុយគ្នា θ និង $-\theta$ មុំបីរផ្ទុយគ្នាកាលណាផលបូករង្វាស់វាស្មើនឹងសូន្យតាម 2π ។

ក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រគេមាន $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP}\right)=\theta$

និង $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP}\right)=\theta'$ ហើយ $\theta+\theta'=0$ តាម 2π

នាំឱ្យ $\theta=-\theta'$ តាម 2π ។ គេបានកូអរដោនេនៃចំណុច P និង P' គឺ $P(\cos\theta,\sin\theta)$ និង $P'(\cos(-\theta)\sin(-\theta))$ ។



ដោយ P និង P' ឆ្លុះគ្នាធៀបនិងអ័ក្សអាប់ស៊ីស គេបាន

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$, $\cos(-\theta)=\cos\theta$ ដូចនេះ

$\tan(-\theta)=\frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)}=\frac{-\sin\theta}{\cos(-\theta)}=-\tan\theta$ និង

$\cot(-\theta)=\frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)}=\frac{\cos\theta}{-\sin\theta}=-\cot\theta$ ។

គេបានរូបមន្ត

$$\sin(-\theta)=\sin-\theta\ ,\ \cos(-\theta)=\cos\theta$$
$$\tan(-\theta)=-\tan\theta\ ,\ \cot(-\theta)=-\cot\theta$$

។

សម្គាល់ មុំពីរផ្ទុយគ្នាមានកូស៊ីនុសដូចគ្នា ហើយមានស៊ីនុស តង់សង់ និងកូតង់សង់ផ្ទុយគ្នា ។

ឧទាហរណ៍

$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $\cot\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\cot\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

ខ. មុំបំពេញ $\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)$ **និង** θ មុំពីរបំពេញគ្នា កាលណាផលបូករង្វាស់វាស្មើរនឹង $\dfrac{\pi}{2}$ និង 2π ។

ក្នុងរង្វង់ត្រីកោណគេមាន $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP}\right)=\theta$ និង $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP'}\right)=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ ។ គេបានកូអរដោនេនៃចំណុច P គឺ$(\cos\theta,\sin\theta)$ ។ បើគេយកចំណុច P' ឆ្លុះគ្នានឹងចំណុច P ធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=x$ នោះគេបាន កូអរដោនេនៃចំណុច P' គឺ $(\sin\theta,\cos\theta)$ (1) ។

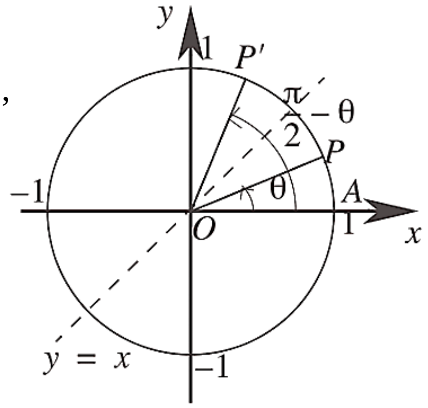
តាមរូបខាងស្តាំ OP' ជាជ្រុងមួយនៃមុំ $\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$ ។

ដូចនេះកូអរដោនេនៃ P' គឺ $\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right),\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\right]$ (2) ។

តាម (1) និង (2) គេបាន $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$ និង $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}=\theta\right)=\sin\theta$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta},$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$$



<u>សំគាល់</u> មុំពីរបំពេញគ្នា មានចុងឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ពុះទីមួយ ។

គេបានរូបមន្ត

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta,\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta\\ \tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta,\ \cot\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta\end{array}}$$ ។

សំគាល់ មុំពីរបំពេញគ្នា មានស៊ីនុសនៃមុំមួយស្មើនឹងកូស៊ីនុសនៃមុំមួយទៀត ហើយតង់សង់នៃមុំមួយស្មើនឹងកូតង់សង់នៃមុំមួយទៀត ។

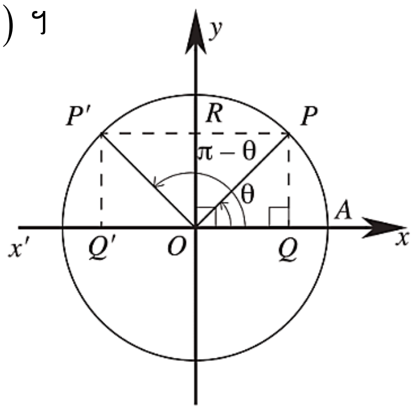
ឧទាហរណ៍ គណនា $\sin 60^o=\cos 30^o=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\dfrac{\pi}{2}=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cot\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{3}$ ។

គ. មុំបន្ថែម $(\pi-\theta)$ **និង** θ មុំពីរបន្ថែមគ្នា កាលណាផលបូករង្វាស់វាស្មើនឹង π តាម 2π ។

ក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រគេមាន $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP}\right)=\theta$ និង $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP'}\right)=\pi-\theta$ ។ គេបាន កូអរដោនេនៃចំណុច P គឺ $(\cos\theta,\sin\theta)$ និង កូអរដោនេនៃចំណុច $P'(-\cos\theta,\sin\theta)$ (1) ។

តាមរូបខាងស្តាំ OP' ជាជ្រុងមួយនៃមុំ $(\pi-\theta)$

ដូចនេះ កូអរដោនេនៃ P' គឺ $\left(\cos(\pi-\theta), \sin(\pi-\theta)\right)$ (2) ។



តាម (1) និង (2) គេបាន $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$,

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

$$\tan(\pi-\theta)=\frac{\sin(\pi-\theta)}{\cos(\pi-\theta)}=\frac{\sin\theta}{-\cos\theta}=-\tan\theta$$

$$\cos(\pi-\theta)=\frac{\cos(\pi-\theta)}{\sin(\pi-\theta)}=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=-\cot\theta$$

មុំពីរបន្ថែមគ្នា មានចុងធ្នូឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងអ័ក្សស៊ីនុស ។

គេបានរូបមន្ត

$$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta\,,\ \cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$$
$$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta\,,\ \cot(\pi-\theta)=-\cot\theta$$

សំគាល់ មុំពីរបន្ថែមគ្នា មានស៊ីនុសដូចគ្នាហើយមានកូស៊ីនុស តង់សង់ និងកូតង់សង់ផ្ទុយគ្នា ។

ឧទាហរណ៍

$$\sin 135^o=\sin\left(180^o-45^o\right)=\sin 45^o=\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,$$

$$\cos\left(-\frac{20\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{20\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}+6\pi\right)=\cos\frac{2\pi}{3}=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

លំហាត់គំរូ គណនាតម្លៃលេខនៃកន្សោម

$$A=\cos(-\theta)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\cos(\pi-\theta)+\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)$$

$$B=\sin\frac{5\pi}{6}+\cos\frac{3\pi}{4}+\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$ ។

ចម្លើយ $A=\cos\theta+\cos\theta-\cos\theta-\cos\theta=0$

$$B=\sin\frac{5\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{4}+\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\sin\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{6}=-\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ប្រតិបត្តិ១ ដោយស្គាល់ $\sin 47^o=0.6820$ គណនា $\cos 43^o$

ប្រតិបត្តិ២ រកតម្លៃលេខនៃកន្សោម $A=\sin(-x)+\sin(\pi-x)+\cos(\pi-x)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

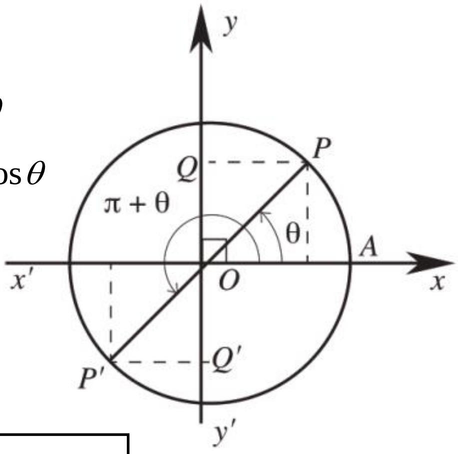
$$B=\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)+\cos(3\pi-x)\,,\ C=\tan\frac{5\pi}{6}+\cot\frac{7\pi}{4}+\frac{1}{\tan\frac{\pi}{3}}$$ ។

ឃ. មុំដែលមានផលសងស្មើ π

ក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រគេមាន $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}\right)=\theta$ និង $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP'}\right)=\pi+\theta$ គេបាន កូអរដោនេនៃចំណុច $P(\cos\theta, \sin\theta)$ និងកូអរដោនេនៃចំណុច $P'\cos(\pi+\theta), \sin(\pi+\theta)$ ។

ចំណុច P និង P'ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងគល់ O

គេបាន OP និង OP' មានចំណោលកែងផ្ទុយគ្នាលើអ័ក្សស៊ីនុស និងអ័ក្សកូស៊ីនុស ។



គេបាន $\sin(\pi+\theta)=\sin\left[\pi-(-\theta)\right]=\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$\cos(\pi+\theta)=\cos\left[\pi-(-\theta)\right]=-\cos(-\theta)=-\cos\theta$

$\tan(\pi+\theta)=\dfrac{\sin(\pi+\theta)}{\cos(\pi+\theta)}=\dfrac{-\sin\theta}{-\cos\theta}=\tan\theta$

$\cot(\pi+\theta)=\dfrac{\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi+\theta)}=\dfrac{-\cos\theta}{-\sin\theta}=\cot\theta$

គេបានរូបមន្ត
$$\boxed{\begin{array}{l}\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta\ ,\ \cos(\pi+\theta)=-\cos\theta\\ \tan(\pi+\theta)=\tan\theta\ ,\ \cot(\pi+\theta)=\cot\theta\end{array}}$$ ។

ឧទាហរណ៍ $\sin 210^o=\sin\left(180^o+30^o\right)=-\sin 30^o=-\dfrac{1}{2}$ ។

$\tan\dfrac{7\pi}{2}=\tan\left(\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)=\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

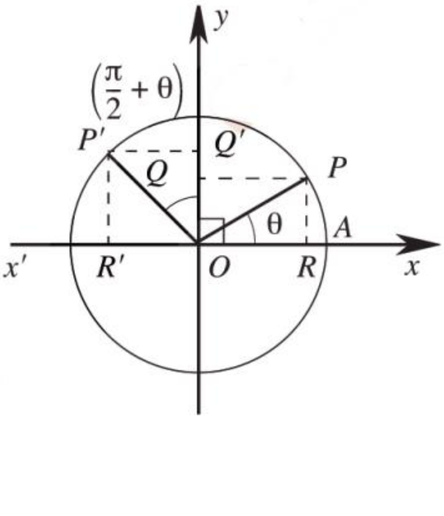
$A=2\cos(\pi-2x)+\sin(\pi+y)-2\cos(\pi-2x)-\sin(\pi+y)$

$=-2\cos 2x-\sin y+2\cos 2x+\sin y=0$ ។

ង. មុំដែលមានផលសង់ស្មើ $\dfrac{\pi}{2}$

ក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រគេមាន $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}\right)=\theta$ និង $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP'}\right)=\dfrac{\pi}{2}+\theta=\dfrac{\pi}{2}-(-\theta)$ ។

ធ្នូ AP' ជាធ្នូបំពេញនៃធ្នូដែលមានរង្វាស់ $(-\theta)$ តាម 2π ។



ដូចនេះ

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(-\theta)=\cos\theta$$
$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\sin(-\theta)=-\sin\theta$$
$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cot(-\theta)=-\cot\theta$$
$$\cot\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\tan(-\theta)=-\tan\theta$$

ឧទាហរណ៍ $\sin 120^o=\sin\left(30^o+90^o\right)=\cos 30^o=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\tan\frac{5\pi}{6}=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=-\cot\frac{\pi}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\cot\frac{3}{4}\pi}{\sin\frac{3}{2}\pi}=\frac{\cot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)}=\frac{-\tan\frac{\pi}{4}}{\cos x}=\frac{-1}{-1}=1$$ ។

លំហាត់គំរូ គណនា $\frac{\cos\left(-288^o\right)\cot 72^o}{\tan\left(-162^o\right)\sin 108^o}-\tan 18^o$ ។

ចម្លើយ

$$\frac{\cos\left(-288^o\right)\cot 72^o}{\tan\left(-162^o\right)\sin 180^o}-\tan 18^o=\frac{\cos\left(-360^o+72^o\right)\cot 72^o}{\tan\left(-180^o+18^o\right)\sin\left(90^o+18^o\right)}-\tan 18^o$$

$$=\frac{\cos 72^o\tan 18^o}{\tan 18^o\cos 18^o}-\tan 18^o=\frac{\cos\left(90^o-18^o\right)\tan 18^o}{\tan 18^o\cos 18^o}-\tan 18^o$$

$$=\frac{\sin 18^o}{\cos 18^o}-\tan 18^o=\tan 18^o-\tan 18^o=0$$

ប្រតិបត្តិ១ គណនា $\sin 870^o$, $\cos\left(-135^o\right)$, $\tan 765^o$, $\cot\frac{25}{4}\pi$ ។

ប្រតិបត្តិ២ គណនា $\frac{\left(\cot 44^o+\tan 226^o\right)\cos 406^o}{\cos 316^o}-\cot 72^o\cot 18^o$ ។

៩.៣.៤. សិក្សាអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

ដើម្បីសិក្សាអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ គេត្រូវរក

ក. ដែនកំណត់ អនុគមន៍ស៊ីនុសនិងអនុគមន៍កូស៊ីនុសកំណត់លើ $\mathbb{R}$ ។ អនុគមន៍តង់សង់អាចកំណត់បាន លុះត្រាតែ $\cos x\neq 0$, $x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$ ។ ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍តង់សង់គឺ $\mathbb{R}-\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$, $k\in\mathbb{Z}$ ។

អនុគមន៍កូតង់សង់អាចកំណត់បាន លុះត្រាតែ $\sin x \neq 0$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ។

ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍កូតង់សង់គឺ $\mathbb{R}-\{k\pi\}$,$k \in \mathbb{Z}$ ។

ឧទាហរណ៍ អនុគមន៍ $y=\sin 2x$ មានដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}$ ។

$y=\dfrac{4}{\cos x}$ កំណត់បានកាលណា $\cos x \neq 0$, $(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$

អនុគមន៍ $y=\tan(x-1)$ កំណត់បានកាលណា $x-1\neq(2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ x\neq 1+(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$,$k \in \mathbb{Z}$ ។

ខ. ខួបនៃអនុគមន៍

និមយន័យ f ជាអនុគមន៍មានដែនកំណត់ D ។ f ជាអនុគមន៍មានខួប p លុះត្រាតែ p ជាចំនួនវិជ្ជមានតូចបំផុត ដែល $\forall x \in D:\ f(x+p)=f(x)$ ។ ពីនិយមន័យនេះ គេអាចសរសេរទាញបាន

$$f(x)=f(x+p)=f\left[(x+p)+p\right]=f(x+2p)=\dots$$
$$f(x)=f(x-p)=f\left[(x-p)-p\right]=f(x-2p)=\dots$$

ជាទូទៅ $\forall k \in \mathbb{Z}$,$\forall x \in D$, $f(x+kp)=f(x)$

អនុគមន៍ស៊ីនុសនិងកូស៊ីនុសមានខួប 2π ព្រោះ 2π ជាចំនួនវិជ្ជមានតូចបំផុតដែល $\sin^2(x+\pi)=\sin x$ និង $\cos(x+2\pi)=\cos x$

សម្គាល់ អនុគមន៍ $y=\sin 2x$ និង $y=\cos 2x$ មានខួប π ព្រោះ

$\sin\left[2(x+\pi)\right]=\sin(2x+2\pi)=\sin 2x$ និង $\cos^2(x+\pi)=\cos(2x+2\pi)=\cos 2x$

ជាទូទៅអនុគមន៍ $y=\sin ax$ និង $y=\cos ax$ មានខួប $p=\dfrac{2\pi}{|a|}$

អនុគមន៍តង់សង់និងអនុគមន៍កូតង់សង់មានខួប π ព្រោះ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{Z}$, $\tan(x+\pi)=\tan x$ នាំឱ្យ $\tan(x+k\pi)=\tan x$ និង $\cot(x+\pi)=\cot x$ នាំឱ្យ $\cot(x+k\pi)=\cot x$ ។ ជាទូទៅអនុគមន៍ $y=\tan ax$ និង $y=\cot x$ មានខួប $T=\dfrac{\pi}{|a|}$ ។

ឧទាហរណ៍ $y=\sin\dfrac{1}{2}x$ មានខួប $T=8\pi$, $y=\cos(-3x)$ មានខួប $T=\dfrac{2\pi}{|-3|}=\dfrac{2\pi}{3}$

អនុគមន៍ $y=3\tan\dfrac{1}{2}x$ មានខួប $T=2\pi$, $y=\cot 5x$ មានខួប $T=\dfrac{\pi}{5}$ ។

គ. ភាពគូនិងភាពសេស

និយមន័យ

- f ជាអនុគមន៍ដែលមានដែនកំណត់ D ។ f ជាអនុគមន៍គូ លុះត្រាតែ គ្រប់ $x \in D,\ -x \in D,\ f(-x)=f(x)$
- f ជាអនុគមន៍ដែលមានដែនកំណត់ D ។ f ជាអនុគមន៍សេស លុះត្រាតែគ្រប់ $x \in D,\ -x \in D,\ f(-x)=-f(x)$

ឧទាហរណ៍ $y=x-\sin x$ មានដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}$។ គ្រប់តម្លៃ $x\in D,-x\in D$ ហើយ
$f(-x)=-x-\sin(-x)=-(x-\sin x)=-f(x)$។ ដូចនេះ $y=x-\sin x$ ជាអនុគមន៍សេស។

$y=\tan x\cot^3 x$ មានដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}-\left\{\frac{k\pi}{2}\right\},k\in\mathbb{Z}$។ គ្រប់តម្លៃ $x\in D,-x\in D$

ហើយ $f(-x)=\tan(-x)\cot^3(-x)=\tan x\cot^3 x=f(x)$។

ដូចនេះ $y=\tan x\cot^3 x$ ជាអនុគមន៍គូ។

លក្ខណៈ:

- ក្រាបនៃអនុគមន៍សេសមានគល់តម្រុយជាផ្ចិតឆ្លុះ។
- ក្រាបនៃអនុគមន៍គូមានគល់តម្រុយជាអ័ក្សឆ្លុះ។

៩.៣.៥. អថេរភាពនិងក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\sin x$

ដែនកំណត់ $y=\sin x$ ជាអនុគមន៍ កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$។

ខួប ជាអនុគមន៍ខួប ដែលមានខួប $p=2\pi$ ដោយ $\sin(x+2\pi)=\sin x$ យើងសិក្សាអនុគមន៍ $y=\sin x$ លើ $[-\pi,\pi]$ ហើយក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\sin x$ លើចន្លោះ $[(2k-1)\pi,(2k+1)\pi]$ បានដោយរំកិលមែកលើ $[-\pi,\pi]$ ចំនួន 2π តាមអ័ក្ស $(x'x)$។

ភាពសេស គេដឹងថា $\sin(-x)=-\sin x$។ ដូចនេះអនុគមន៍ $y=\sin x$ ជាអនុគមន៍សេស។ ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\sin x$ មានគល់តម្រុយជាផ្ចិតឆ្លុះ។ ដូចនេះសិក្សាអនុគមន៍ $y=\sin x$ តែលើ $[0,\pi]$ រួចធ្វើបំលែងឆ្លុះធៀបនឹង 0 បានមែកលើ $[-\pi,0]$។

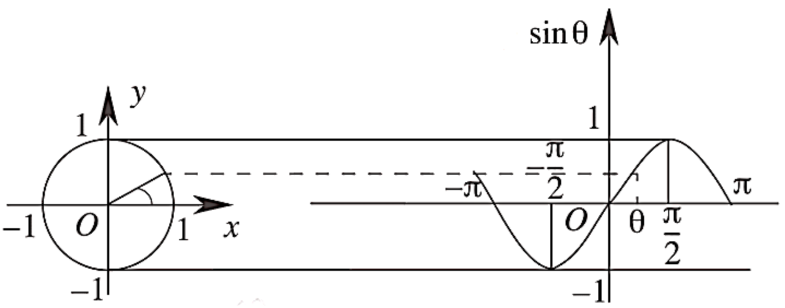
ទិសដៅអថេរភាព គេសង្កេតឃើញថា កាលណា x កើនពី 0 ទៅ $\frac{\pi}{2}$ នោះតម្លៃ $\sin x$ កើនពី 0 ទៅ 1។ បើ x កើនពី $\frac{\pi}{2}$ ទៅ π តម្លៃ $\sin x$ ចុះពី 1 ទៅ 0។

គេបានតារាងអថេរភាពដូចខាងក្រោម

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0 ↗	1	↘ 0

ក្រាប $y=\sin x$ លើ $[-\pi,\pi]$

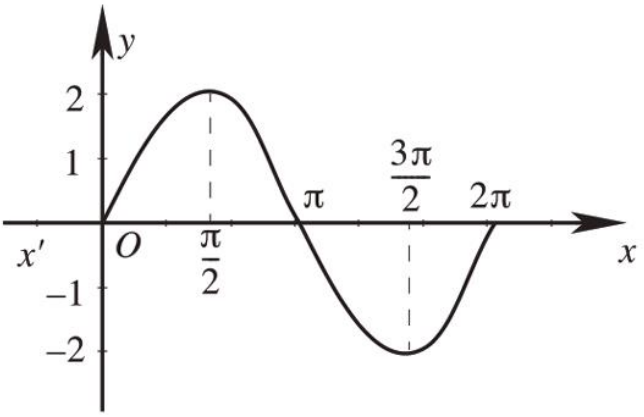
ក្រាបនេះហៅថា ស៊ីនុយសូអ៊ីត



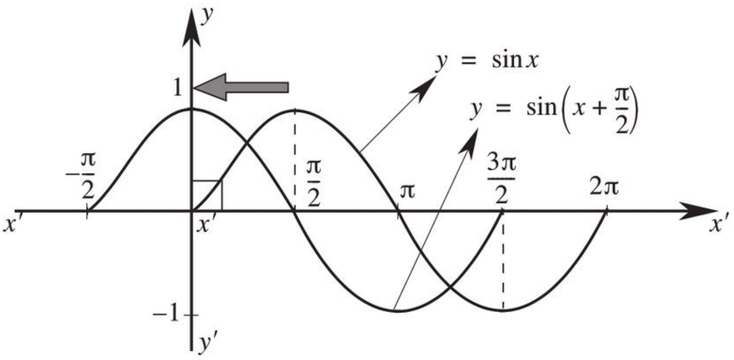
ឧទាហរណ៍ សិក្សាអថិរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=2\sin x$ លើចន្លោះ $[0,2\pi]$។
ដែនកំណត់ អនុគមន៍ $y=2\sin x$ មានដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}$។ អនុគមន៍ $y=2\sin x$ មានខួប $T=2\pi$។
ភាពគូ និងសេស $x\in D$, $-x\in D$ ហើយ $f(-x)=2\sin(-x)=-2\sin x=-f(x)$។
ដូចនេះ $y=2\sin x$ ជាអនុគមន៍សេស។
គេបានតារាងអថិរភាពដូចខាងក្រោម

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$2\sin x$	0 ↗	2 ↘	0 ↘	-2 ↗	0

សង់ក្រាប



លំហាត់គំរូ ដោយប្រើក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\sin x$ សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$។
ចម្លើយ ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ សង់បានដោយរំកិលក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\sin x$ ពីស្តាំទៅឆ្វេងចំនួន $\frac{\pi}{2}$ ឯកតាតាមអ័ក្ស $(x'x)$



ប្រតិបត្តិ ១ សិក្សាអថិរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\sin 2x$
ប្រតិបត្តិ ២ ប្រើក្រាប $y=\sin x$ សង់ក្រាប $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$។

៩.៣.៦. អថិរភាពនិងក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \cos x$

ដែនកំណត់ កូស៊ីនុសជាអនុគមន៍ កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។**ខួប** $y = \cos x$ ជាអនុគមន៍ដែលមានខួប $p = 2\pi$ ។ យើងសិក្សាអនុគមន៍ $y = \cos x$ លើ
ចន្លោះ $\left[(2k-1)\pi, (2k+1)\pi\right], k \in \mathbb{Z}$ បានដោយរំកិលមែកលើ $[-\pi, \pi]$ ចំនួន 2π តាម $(x'x)$ ។

ភាពគូ គេដឹងថា $\cos(-x) = \cos x$ ។ ដូចនេះ $y = \cos x$ ជាអនុគមន៍គូ។

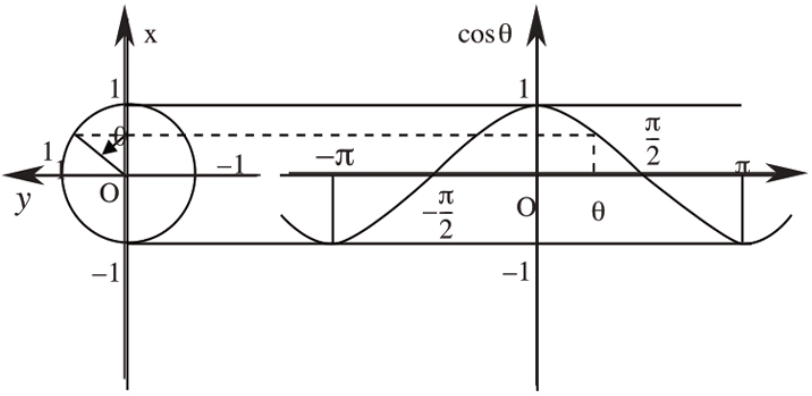
ក្រាបនៃ $y = \cos x$ មានអ័ក្សអរដោនេជាអ័ក្សឆ្លុះ។ ដូចនេះយើងសិក្សាតែលើ $[0, \pi]$ ហើយមែកលើ $[-\pi, 0]$ បានដោយធ្វើបំលែងឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្សអរដោនេនៃមែកលើ $[0, \pi]$

ទិសដៅអថិរភាព គេសង្កេតឃើញថា កាលណា x កើនពី 0 ទៅ $\frac{\pi}{2}$ តម្លៃ $\cos x$ ចុះពី 1 ទៅ 0 ។ បើ x កើនពី $\frac{\pi}{2}$ ទៅ π នោះតម្លៃ $\cos x$ ចុះពី 0 ទៅ -1 ។

គេបានតារាងអថេរភាពដូចខាងក្រោម

x	0 $\frac{\pi}{2}$ π
$\cos x$	1 ↘ 0 ↘ -1

សង់ក្រាប $y = \cos x$ តាមតារាងអថិរភាព



ឧទាហរណ៍សិក្សា អថិភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = 2\cos x$ ។

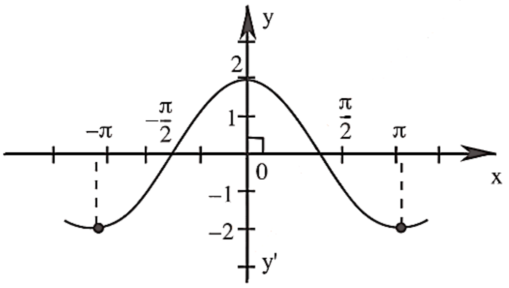
ដែនកំណត់ អនុគមន៍ $y = 2\cos x$ មានដែនកំណត់ $D = \mathbb{R}$ ។ អនុគមន៍ $y = 2\cos x$ មានខួប $T = 2\pi$ ។ $x \in D, -x \in D$ ហើយ $f(-x) = 2\cos(-x) = 2\cos x = f(x)$

ដូចនេះ $y = 2\cos x$ ជាអនុគមន៍គូ។

តារាងអថេរភាព

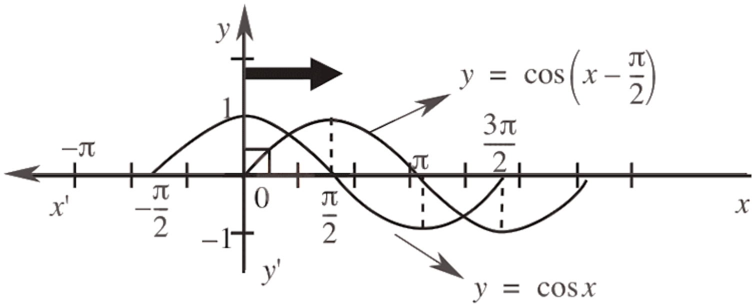
x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$2\cos x$	-2 ↗	0 ↗	2	↘ 0	↘ -2

សង់ក្រាប



លំហាត់គំរូ ដោយប្រើក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\cos x$ សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

ចម្លើយ គេបានក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ ដោយរំកិលក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\cos x$ ពីឆ្វេងទៅស្តាំ $\frac{\pi}{2}$ ឯកតាស្របនឹងអ័ក្ស $(x'x)$ ។



ប្រតិបត្តិ សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\cos 2x$ និង $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

៩.៣.៧. អថេរភាពនិងក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\tan x$

ដែនកំណត់ គេដឹងថា $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ ។

អនុគមន៍តង់សង់កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ខុសពី $\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbb{Z})$ ឬ $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ ។

ខួប $y=\tan x$ ជាអនុគមន៍ដែលមានខួប $p=\pi$ ។ យើងសិក្សាអនុគមន៍លើ $y=\tan x$ ។

លើចន្លោះ $\left((2k-1)\frac{\pi}{2},(2k+1)\frac{\pi}{2}\right), k\in\mathbb{Z}$ បានដោយរំកិលមែកលើ $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ចំនួន π តាម $(x'x)$ ។

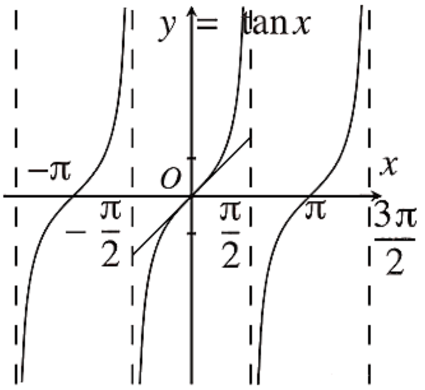
ភាពសេស គេដឹងថាគ្រប់ $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ នាំឱ្យ $\tan(-x)=-\tan x$ ។ ដូចនេះ $y=\tan x$ ជាអនុគមន៍សេស។ ក្រាបនៃ $y=\tan x$ មានគល់តម្រុយជាផ្ចិតឆ្លុះ។ ដូចនេះ យើងសិក្សាតែលើ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ ហើយមែកលើ $\left(-\frac{\pi}{2},0\right]$ បានដោយធ្វើបំលែងឆ្លុះធៀបនឹង 0 នៃមែកលើ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ ។

ទិសដៅអថេរភាព គេសង្កេតឃើញថាអនុគមន៍ $y=\tan x$ កើនលើចន្លោះ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ។

គេបានតារាងអថិរភាពដូចខាងក្រោម

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	0 ↗	$+\infty$

សង់ក្រាប



ឧទាហរណ៍ សិក្សាអថិរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\frac{1}{2}\tan x$ ។

ដែនកំណត់ អនុគមន៍ $y=\frac{1}{2}\tan x$ មានដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}, k\in\mathbb{Z}$ ។

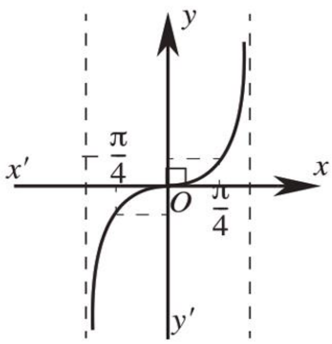
ខួប អនុគមន៍ $y=\frac{1}{2}\tan x$ មានខួប $T=\pi$ ។

គេដឹងថាគ្រប់ $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ នាំឱ្យ $\frac{1}{2}\tan(-x)=-\frac{1}{2}\tan x=-f(x)$ ជាអនុគមន៍សេស។

តារាងអថេរភាព

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{2}\tan x$	‖	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	‖

សង់ក្រាប

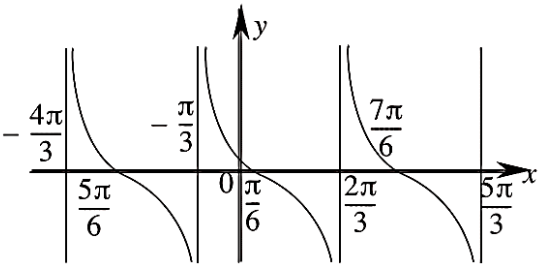


លំហាត់គំរូ សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\tan\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$ ។

ចម្លើយ តាង $X=x-\frac{\pi}{6}$, $x=X+\frac{\pi}{6},\ y=-\tan X$ ។

តារាងអថេរភាព សង់ក្រាប

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$x = X+\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$
y	‖ ∞ ↘	1 ↘	0 ↘	-1 ↘	$-\infty$ ‖



ប្រតិបត្តិ សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\frac{1}{2}\tan 2x$ និង $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ ។

៩.៣.៨. អថេរភាពនិងក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\cot x$

ដែនកំណត់ គេដឹងថា $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ ។

ដូចនេះ អនុគមន៍កូតង់សង់កំណត់និងជាប់ចំពោះគ្រប់ $x\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

ខួប $y=\cot x$ ជាអនុគមន៍ដែលមានខួប $p=\pi$ ។ យើងសិក្សាអនុគមន៍លើ $y=\cot x$ ។

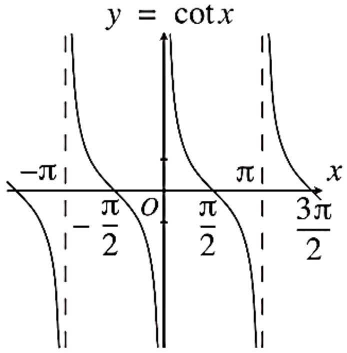
លើចន្លោះ $(k\pi,(k+\pi)\pi), k\in\mathbb{Z}$ បានដោយរំកិលមែកលើ $(0,\pi)$ ចំនួន π តាម $(x'x)$ ។

ភាពសេស ដោយ $\cot(-x)=-\cot x$ នាំឱ្យ $y=\cot x$ ជាអនុគមន៍សេស។ ក្រាបនៃ $y=\cot x$ មានគល់ 0 ជាផ្ចិតឆ្លុះយើងសិក្សាអនុគមន៍ $y=\cot x$ លើចន្លោះ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ។

ទិសដៅអថេរភាព អនុគមន៍ $y=\cot x$ ចុះលើចន្លោះ $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ ។

គេបានតារាងអថេរភាពដូចខាងក្រោម សង់ក្រាប

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\cot x$	‖ $+\infty$ ↘	0



៩.៥. រូបមន្តត្រីកោណមាត្រសំខាន់ៗ

ក. គណនា $\text{Cos}(\alpha-\beta)$ **និង** $\text{Cos}(\alpha+\beta)$

ឧទាហរណ៍ ប្រៀបធៀបកន្សោម $\text{Cos}(60^0-30^0)$ និង $\cos 60^0-\cos 30^0$ ។

គេបាន $\text{Cos}(60^0-30^0)=\cos 30^0=\frac{\sqrt{3}}{2}=0.866$

និង $\cos 60^0-\cos 30^0=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}(1-\sqrt{3})=-0.366$

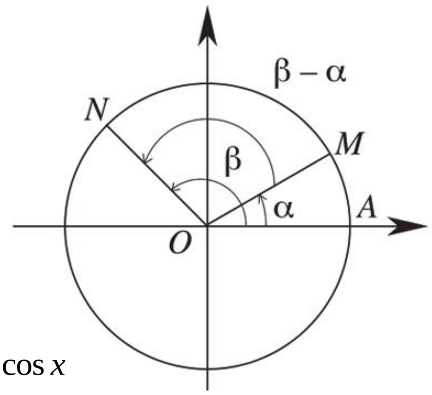
ដូចនេះ $\text{Cos}(60^0-30^0)\neq\cos 60^0-\cos 30^0$ ។

ខ. គណនា $\cos(60^0-45^0)=\cos15^0$

គេមិនអាចរក $\cos15^0$ បានដោយងាយនោះទេ ព្រោះ 15^0 មិនមែនជាមុំពិសេស ។ ដូចនេះ គេបង្កើតរូបមន្តដើម្បីងាយស្រួលក្នុងការរកអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រនៃមុំទាំងនោះដូចខាងក្រោម

គេពិនិត្យរង្វង់ត្រីកោណមាត្រដែលមាន

$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})=\alpha$, $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{ON})=\beta$ និង $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{ON})=\beta-\alpha$ ។



គេបាន $\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{vmatrix}$, $\overrightarrow{ON}\begin{vmatrix}\cos\beta\\ \sin\beta\end{vmatrix}$ ។

តាមនិយមន័យផលគុណស្កាលែ គេអាចសរសេរ

$\overrightarrow{OM}\bullet\overrightarrow{ON}=OM\bullet ON\bullet\cos(\beta-\alpha)=\cos(\beta-\alpha)$ ព្រោះ

$OM=ON=1$ (កាំរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ) ។ ហើយ $\cos(-x)=\cos x$

ម្យ៉ាងទៀតតាមកន្សោមវិភាគផលគុណស្កាលែ គេបាន $\overrightarrow{OM}\bullet\overrightarrow{ON}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$ (1)

គ. គណនា $\cos(60^0-45^0)=\cos15^0$

$$=\cos60^0\cos45^0+\sin60^0\sin45^0$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

បើគេជំនួស $-\beta$ ដោយ β ក្នុងរូបមន្ត $\cos(\alpha-\beta)$

គេបាន $\cos\left[\alpha-(-\beta)\right]=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)$

ដូចនេះ $\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$ (2) ។

ឃ. គណនា $\sin(\alpha+\beta)$ **និង** $\sin(\alpha-\beta)$

តាមលក្ខណៈមុំបំពេញ

គេបាន $\sin(\alpha+\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]$

តាមរូបមន្ត (1) $\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta$

តែ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ និង $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}$ (3)

ង. គណនា $\sin(45^0+30^0)=\sin75^0$

$$=\sin45^0\cos30^0+\cos45^0\sin30^0$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

បើយើងជំនួស β ដោយ $(-\beta)$ ក្នុងរូបមន្ត (3)

គេបាន $\sin(\alpha-\beta)=\sin\left[\alpha+(-\beta)\right]$

នាំឲ្យ $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos(-\beta)\cos\alpha$

ដោយ $\cos(-\beta)=\cos\beta$ និង $\sin(-\beta)=-\sin\beta$

ដូចនេះ $\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha}$ (4)

ច. គណនា $\tan(\alpha+\beta)$ **និង** $\tan(\alpha-\beta)$

គេមាន $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$

ដោយប្រើរូបមន្ត (2) និង (3)

គេបាន $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$

ឧបមាថា $\cos\alpha\neq 0$, $\cos\beta\neq 0$, $\cos(\alpha+\beta)\neq 0$

ចែកតួទាំងពីរនៃផលធៀបនឹង $\cos\alpha\cos\beta$

$$\text{គេបាន } \tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

ដូចនេះ $\boxed{\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}}$ (5) ។

ឆ. គណនា $\tan\left(60^0+\tan 45^0\right)=\tan 105^0$

$$=\frac{\tan 60^0+\tan 45^0}{1-\tan 60^0\tan 45^0}$$
$$=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\times 1}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$$

បើគេជំនួស β ដោយ $(-\beta)$ ក្នុងរូបមន្ត $\tan\left[\alpha+(-\beta)\right]=\dfrac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}$

ដូចនេះ $\boxed{\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}}$ (6) ។

រូបមន្តនេះកំណត់បានលុះត្រាតែ $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $(\alpha-\beta)\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\,(k\in z)$ ។

ជ. គេឲ្យ $\alpha=\beta$ ជំនួស β ដោយ α ក្នុងរូបមន្ត $\sin(\alpha+\beta)$

គេបាន $\sin 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

ដូចនេះ: $\boxed{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha}$ (7)

ឈ. បើគេជំនួស β ដោយ α ទៅក្នុងរូបមន្ត $\cos(\alpha+\beta)$

គេបាន $\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

គេសង្កេតឃើញថា $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ និង $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$

គេបាន $\cos 2\alpha=(1-\sin^2\alpha)-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ និង

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$ ។

ដូចនេះ: $\boxed{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1}$ (8)

ញ. បើគេជំនួស β ដោយ α ទៅក្នុងរូបមន្ត $\tan(\alpha+\beta)$

គេបាន $\tan 2\alpha=\tan(\alpha+\alpha)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

ដូចនេះ: $\boxed{\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}$ (9)

ដ. បើគេជំនួស 2α ដោយ α និង α ដោយ $\dfrac{\alpha}{2}$ ទៅក្នុងរូបមន្ត $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$, $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$ និង $\tan^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

គេបាន

$$\boxed{\begin{array}{ll}\sin\alpha=2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2} & , \cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}\\ \sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2} & , \tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\end{array}}$$

⊕ **ម្យ៉ាងទៀតរបស់** $\tan\dfrac{\alpha}{2}$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{2\sin x\cos x}{2\cos x\cos x}$$
$$=\frac{\sin 2x}{2\cos^2 x}=\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$$

បើជំនួស x ដោយ $\alpha=2x$

គេបាន $\boxed{\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin x}{1+\cos\alpha}}$

⊕ បើជំនួស 2α ដោយ α និង α ដោយ $\frac{\alpha}{2}$ ទៅក្នុងរូបមន្ត (7) , (8) និង (9)

គេបាន $\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$, $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, $\tan\alpha=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$ ។

ដោយ $\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}=1$

គេអាចសរសេរ $\cos\alpha=\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}$, $\sin\alpha=\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}$

ចែកភាគយកនិងភាគបែងកន្សោមទាំងពីរនឹង $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ ដែល $\cos\frac{\alpha}{2}\neq 0$

គេបាន $\cos\alpha=\dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$, $\sin\alpha=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

បើឲ្យ $\tan\frac{\alpha}{2}=t$

គេបានរូបមន្ត

$$\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}\ ,\ \sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2}\ ,\ \tan\alpha=\frac{2t}{1-t^2}$$

⊕ បំលែងពីផលគុណទៅជាផលបូក តាមរូបបន្តផលបូកនិងផលដកខាងក្រោមៈ

- $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \quad (1)$
- $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \quad (2)$
- $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad (3)$
- $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad (4)$

ក. បូករូបមន្ត (1) និង (2) គេបាន $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$

ដករូបមន្ត (1) និង (2) គេបាន $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\cos\alpha\sin\beta$

ខ. បូករូបមន្ត (3) និង (4) គេបាន $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$

ដករូបមន្ត (3) និង (4) គេបាន $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$

ដូចនេះ គេបានរូបមន្ត

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]\ ,\ \sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]\ ,\ \cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right]$$

⊕ បំលែងពីផលបូកទៅជាផលគុណ

តាង $\alpha+\beta=p$, $\alpha-\beta=q$

គេទាញបាន $\alpha=\frac{p+q}{2}$ និង $\beta=\frac{p-q}{2}$ ជំនួស α និង β ទៅក្នុងរូបមន្តខាងលើ គេបាន:

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \quad , \quad \cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \quad , \quad \sin p-\sin q=2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

⊕ ដូចគ្នាដែរ គេបាន

$$\tan p+\tan q=\frac{\sin p}{\cos p}+\frac{\sin q}{\cos q}=\frac{\sin p\cos q+\sin q\cos p}{\cos p\cos q}=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$$

ជំនួស q ដោយ $-q$ គេបាន $\tan p-\sin q=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$

ធ្វើតាមវិធីដូចខាងលើ គេបាន $\cot p+\cot q=\frac{\sin(p+q)}{\sin p\sin q}$ និង $\cot p-\cot q=\frac{\sin(p-q)}{\sin p\sin q}$

ដូចនេះ:

$$\tan p+\tan q=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q} \quad , \quad \cot p+\cot q=\frac{\sin(p+q)}{\sin p\sin q}$$
$$\tan p-\tan q=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q} \quad , \quad \cot p-\cot q=\frac{\sin(p-q)}{\sin p\sin q}$$

ឧទាហរណ៍១ $\sin 105^0+\sin 15^0=2\sin\frac{105^0+15^0}{2}\cos\frac{105^0-15^0}{2}$

$$=2\sin 60^0\cos 45^0$$
$$=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

ឧទាហរណ៍២ សរសេរជាផលគុណ $1+\cos a+\cos 2a$

គេបាន $1+\cos a+\cos 2a=1+\cos 2a+\cos a=2\cos^2 a+\cos a=2\cos a\left(\cos a+\frac{1}{2}\right)$

$$=2\cos a\left(\cos a+\cos\frac{\pi}{2}\right)=4\cos a\cos\left(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$$

ឧទាហរណ៍៣ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $2\left(\frac{1}{\sin 2\alpha}+\cot 2\alpha\right)=\cot\frac{\alpha}{2}-\tan\frac{\alpha}{2}$

គេបាន $2\left(\frac{1}{\sin 2\alpha}+\cot 2\alpha\right)=2\left(\frac{1}{s\sin 2\alpha}+\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\right)=2\left(\frac{2\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}\right)$

$$=\frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} - \frac{\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \cot\frac{\alpha}{2} - \cot\frac{\alpha}{2}$$ ។

៩.៦.សមីការត្រីកោណមាត្រ

៩.៦.១. ដោះស្រាយសមីការ $\cos x = a$

ឧទាហរណ៍១ ដោះស្រាយសមីការ $\cos x = \frac{1}{2}$ ។

គេដឹងថា $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ សមីការអាចសរសេរ $\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$ ។តែ $\cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ ។

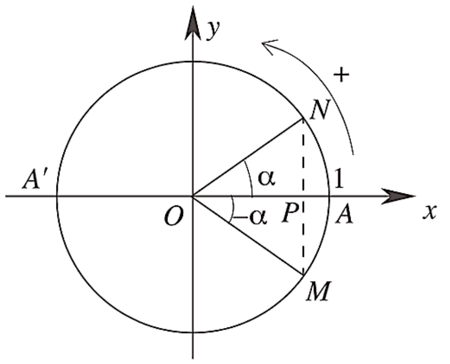
ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយពីរគឺ $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$ ។

ឧទាហរណ៍២ ដោះស្រាយសមីការ $\cos x = a$ ។ a ជាចំនួនពិតដែលគេឱ្យ

- កាល $|x| > 1$ សមីការ $\cos x = a$ គ្មានចម្លើយព្រោះគ្រប់ចំនួន $x \in \mathbb{R}$, $-1 \le \cos x \le 1$

- កាលណា $|a| \le 1$ គេបានសមីការដូចខាងក្រោម

ក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រដែលមានផ្ចិត O និង A ជាចំនុចគល់នៃធ្នូហើយ $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}\right) = \alpha$ ដែល $\cos\alpha = OP = a$ (ដូចរូបខាងស្តាំ)។



ម្យ៉ាងវិញទៀត $a = OP = \cos(-\alpha)$ ដែល $-\alpha$ ជារង្វាស់នៃមុំ $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right)$ ។គេបាន

- បើ $a \notin [-1,1]$ សមីការ $\cos x = a$ គ្មានចម្លើយ ។
- បើ $a = 1$ ឬ $\cos x = 1$ នោះចុងធ្នូត្រួតស៊ីគ្នានឹងចំណុច A ជាចម្លើយនៃសមីការ។ ដូចនេះ $x = 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$
- បើ $a = -1$ ឬ $\cos x = -1$ នោះចុងធ្នូត្រួតស៊ីគ្នានឹងចំណុច A' ជាចម្លើយនៃសមីការ។ នៃសមីការ។ ដូចនេះ $x = \pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$
- បើ $a \in (-1,1)$ មាន α តែមួយគត់ដែល $\cos\alpha = a = \cos x$ ។ ដោះស្រាយសមីការ $\cos x = a$ គឺដោះស្រាយសមីការ $\cos x = \cos\alpha$ ។តាមលក្ខណៈ (I) គេបានចម្លើយនៃសមីការ $\cos x = \cos a$ មានពីរគឺ $x = \alpha + 2k\pi$ ឬ $x = -\alpha + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

សម្គាល់ 1. បើ $a = 0$ នោះ $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ។ចម្លើយរបស់សមីការ $\cos x = 0$ គឺ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ (k \in \mathbb{Z})$ ។

2. តាមលក្ខណៈមុំពីរដែលមានកូស៊ីនុសដូចគ្នាលុះត្រាតែមុំទាំងពីរស្មើគ្នា ឬផ្ទុយគ្នានោះ គេអាចដោះស្រាយសមីការ $\cos u(x) = \cos v(x) \Leftrightarrow u(x) = \pm v(x) + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ ដែល $u(x)$ និង $v(x)$ ជាអនុគមន៍នៃ x ។

លំហាត់គំរូ១ ដោះស្រាយសមីការ $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin 3x$ រួចដៅចុងធ្នូនៃចម្លើយលើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ។

ចម្លើយ តាមធ្នូបំពេញ គេបាន $\sin 3x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$។ ដូចនេះ $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$

នាំឱ្យ $x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}-3x+2k\pi$ ឬ $x-\frac{\pi}{4}=-\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$។

គេបាន $4x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ និង $-2x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$។

ដូចនេះ $x=\frac{3\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}$ និង $x=\frac{\pi}{8}-k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$។

គេអាចសរសេរ $\frac{\pi}{8}-k\pi$ ទៅជា $\frac{\pi}{8}+k\pi$ ដែល $K=-k$ ($k\in\mathbb{Z}$ ដូចនេះ $k\in\mathbb{Z}$)។

គេបាន (1) $x=\frac{3\pi}{16}+k\frac{\pi}{2}$ បើ $k=0$, $x=\frac{3\pi}{16}$ ចុងធ្នូត្រង់ចំណុច M_1។

បើ $k=1$, $x=\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi}{2}$ ចុងធ្នូត្រង់ចំណុច M_1'។ បើ $k=2$, $x=\frac{3\pi}{16}+\pi$ ចុងធ្នូត្រង់ចំណុច M_2។

បើ $k=3$, $x=\frac{3\pi}{16}+\frac{3\pi}{2}$ ចុងធ្នូត្រង់ចំណុច M_2' , $x=\frac{3\pi}{16}+4\pi$ ចុងធ្នូត្រួតលើ M_1

ដូចនេះ (1) មានសំណុំចម្លើយចុងធ្នូបួនគឺ M_1, M_1', M_2, M_2'។

លំហាត់គំរូ២ ដោះស្រាយសមីការ $1+3\cos x+2\sin x\cdot\sin 2x$។

ចម្លើយ $1+3\cos x+\cos 2x=\cos 3x+2\sin x\cdot\sin 2x$

$3\cos x+2\cos^2 x=\cos 3x+\cos x-\cos 3x$ សមមូល $2\cos x+2\cos^2 x=0$

$2\cos x(1+\cos x)=0$ សមមូល $\cos x=0$ ឬ $\cos x=-1$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $x=\pi+2\pi k$ $(k\in\mathbb{Z})$។

ប្រតិបត្តិ ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម

ក. $\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=1$

ខ. $\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

គ. $\cos\frac{\pi}{6}\cos x-\sin\frac{\pi}{6}\sin x=\frac{\pi}{4}$

ឃ. $\sin^4 x-\cos^4 x=\frac{1}{2}$

៩.៦.២. ដោះស្រាយសមីការ $\sin x=a$

ឧទាហរណ៍១ ដោះស្រាសមីការ $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ។គេដឹងថា $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ សមីការអាចសរសេរ $\sin x=\sin\frac{\pi}{4}$ ។ ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយពីរ គឺ $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $x=\pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ ឬ

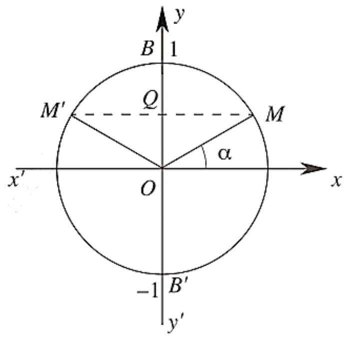
$x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ ។

ឧទាហរណ៍២ ដោះស្រាយសមីការ $\sin x=a$

- កាលណា $|a|>1$ សមីការ $\sin x=a$ គ្មានចម្លើយ ព្រោះគ្រប់ចំនួន $x\in\mathbb{R}:-1\le\sin x\le1$ ។

- កាលណា $|a|\le1$ គេបានករណីដូចខាងក្រោម

ក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រដែលមានផ្ចិត O និង A ជាចំណុចគល់នៃធ្នូ ហើយ $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})=\alpha$ ដែល $\sin\alpha=OQ=a$ (ដូចរូបខាងស្តាំ)។



ម្យ៉ាងទៀត $OQ=\sin(\pi-\alpha)=a$

ដែល $\pi-\alpha$ ជារង្វាស់នៃមុំ $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM'})$ ។គេបាន

– បើ $a\notin[-1,1]$ សមីការ $\sin x=a$ គ្មានចម្លើយ។

– បើ $a=1$ ឬ $\sin x=1$ នោះធ្នូទាំងឡាយណាដែលមានចុងត្រង់ចំណុច B ជាចម្លើយនៃសមីការ។

– បើ $a=-1$ ឬ $\sin x=-1$ នោះធ្នូទាំងឡាយដែលមានចុងត្រង់ចំណុចត្រង់ចំណុច B' ជាចម្លើយនៃ សមីការ។ដូចនេះ $\sin=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$ ។

– បើ $a\in(-1,\ 1)$ មាន α តែមួយគត់ក្នុងចន្លោះ $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ដែល $\sin\alpha=a=\sin x$ ។

ដោះស្រាយសមីការ $\sin x=a$ សមមូលនឹង $\sin x=\sin\alpha$ ។តាមលក្ខណៈ (1) គេបាន

សមីការ $\sin x=\sin\alpha$ មានចម្លើយពីរគឺ $x=\alpha+2k\pi$ ឬ $x=\pi-\alpha+2k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$ ។

សម្គាល់ 1. បើ $a=0$ នោះ $\sin x=0$ ។ចម្លើយរបស់សមីការគឺ $x=2k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$ ។

2.តាមលក្ខណៈមុំពីរដែលមានស៊ីនុសដូចគ្នា លុះត្រាតែមុំទាំងពីរស្មើគ្នា ឬបន្ថែមគ្នានោះគេ អាចដោះស្រាយសមីការ $\sin v(x)=\sin u(x)$ ដែល $u(x)$ និង $v(x)$ ជាអនុគមន៍នៃ x ។

$\sin v(x)=\sin u(x)\Leftrightarrow u(x)=v(x)+2k\pi$ និង $u(x)=\pi-v(x)+2k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$ ដែល $u(x)$ និង $v(x)$ ជាអនុគមន៍នៃ x ។

លំហាត់គំរូ១ ដោះស្រាយសមីការ $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ ។

ចម្លើយ គេបាន $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{3}=\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ ដោយ $\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$

គេបាន $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}$ ។

សមីការមានចម្លើយពីរគឺ $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ឬ $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ។

ដូចនេះ $x=\pi+4k\pi$, $x=\frac{7\pi}{3}+4k\pi$ ។

លំហាត់គំរូ២ ដោះស្រាយសមីការ $2\sin x\cos x+\sqrt{3}-2\cos x-\sqrt{3}\sin x=0$ ។

ចម្លើយ គេបាន $\left(2\sin x\cos x-\sqrt{3}\right)-\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)=0$

$$\sin x\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)-\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)=0\Leftrightarrow\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)\left(\sin x-1\right)=0$$

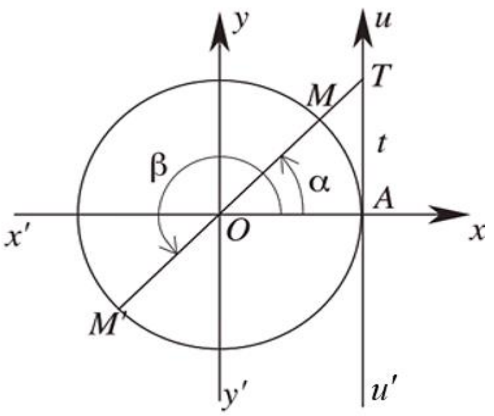
គេបាន $2\cos x-\sqrt{3}=0$ ឬ $\sin x-1=0\Rightarrow$ $\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ឬ $\sin x=1$ ។

ដូចនេះ $\cos x=\cos\dfrac{\pi}{6}$ $\Rightarrow$ $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ ។

ប្រតិបត្តិ ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម

ក. $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$ ខ. $\sin 2x=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$ គ. $2\sin x\cos x-3\sin 2x=0$

៩.៦.៣. ដោះស្រាយសមីការ $\tan x=a$



ឧទាហរណ៍១ ដោះស្រាយសមីការ $\tan x=-1$ ។

គេដឹងថា អនុគមន៍តង់សង់មានខួបស្មើនឹង x ។

ដូចនេះគេអាចរកចំនួនពិត x មួយដែល $\tan x=-1$ ។

ដោយសមីការសរសេរ $\tan x=\tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

ដូចនេះសមីការមានចម្លើយ

$x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ ។

បកស្រាយតាមក្រាបចម្លើយរបស់សមីការនេះជាអាប់ស៊ីសនៃចំណុចប្រសព្វរបស់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\tan x$ និងបន្ទាត់ដេក $y=-1$ ។

ឧទាហរណ៍២ ដោះស្រាយសមីការ $\tan x=1$ ។

គេមានរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ (C) ហើយ $(u'u)$ ជាអ័ក្សតង់សង់ដែលប៉ះរង្វង់ (C) ត្រង់ A ។

នៅលើ $u'Au$ គេដៅចំណុច T ដោយ $AT=1$ ។ រកធ្នូ AM ទាំងអស់ដែលមានតង់សង់ t ។

α ជារង្វាស់មួយនៃធ្នូ AM ចំណុច M និង M' ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹង O ។

ធ្នូចម្លើយត្រូវមានចុងត្រង់ M និង M' ។

ធ្នូទាំងអស់ដែលមានចុង M មានរង្វាស់ $x=\alpha+2k\pi$

ធ្នូមួយដែលមានចុង M' មានរង្វាស់ $\pi-\alpha$ ហើយធ្នូទាំងអស់ដែលមានចុង M' មានរង្វាស់ $x=\pi+\alpha+2k\pi$ ឬ $x=\alpha+2\left(2k+1\right)\pi$ ។ គេបានចម្លើយ $x=\alpha+k\pi$, $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ ។

ដូចនេះ សមីការ $\tan x=a=\tan\alpha$ មានចម្លើយ $x=\alpha+k\pi$, $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ ។

សម្គាល់ គេបាន $\tan u(x)=\tan v(x)\Leftrightarrow u(x)=v(x)+k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$ ដែល u និង v ជាអនុគមន៍នៃ x ។

ឧទាហរណ៍៣ ដោះស្រាយសមីការ $\tan 3x=\tan\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$។

គេបាន $\tan 3x=\tan\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)\Leftrightarrow 3x=\frac{\pi}{3}-2x+k\pi\Leftrightarrow 5x=\frac{\pi}{3}+k\pi\ ,\ (k\in\mathbb{Z})$។

សមីការមានចម្លើយ $x=\frac{\pi}{15}+k\frac{\pi}{5}\ ,\ (k\in\mathbb{Z})$ ។

លំហាត់គំរូ១ ដោះស្រាយសមីការ $\tan x=-0.7456$

តាមតារាងត្រីកោណមាត្រ គេបាន $\tan 36^o=0.7265$ និង $\tan 37^o=0.7536$ រកមុំ α' ដែល $\tan\alpha'=0.7456$ ។

គេបាន $\tan 36^o<\tan\alpha'<\tan 37^o$ និង $\tan 37^o-\tan 36^o=0.0271$

$\tan\alpha'-\tan 36^o=0.0191\left(\alpha'>36^o\right)$ ។គេត្រូវថែមលើ 36° ចំនួន $\frac{60'\times 0.0191}{0.0271}=42'24''$

គេបាន $\alpha'=36^o42'24''$ ហើយ $-0.7456=\tan\left(-36^o42'24''\right)$ ។

ដូចនេះ $\tan x=\tan\left(-36^o42'24''\right)\Rightarrow x=-36^o42'24''+180^o\ \ (k\in\mathbb{Z})$ ។

លំហាត់គំរូ២ ដោះស្រាយសមីការ $\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan x\tan\frac{\pi}{4}}=\sqrt{3}$

ចម្លើយ ដោយ $\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan x\tan\frac{\pi}{4}}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ និង $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ សមីការអាចសរសេរ

$$\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$\Rightarrow x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{3}+k\pi$ ឬ $x=-\frac{\pi}{12}+k\pi\ ,\ (k\in\mathbb{Z})$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ។

ប្រតិបត្តិ ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម

ក. $\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ខ. $\tan 3x=\sqrt{3}$

គ. $\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\sqrt{3}$ ឃ. $2\tan x\cos x+1=2\cos x+\tan x$

៩.៦.៤. ដោះស្រាយសមីការ $\cot x=a$

សមីការ $\cot x=\cot a$ អាចសរសេរ $\frac{1}{\tan x}=\frac{1}{\tan\alpha}\Rightarrow\tan x=\tan\alpha$

ដូចនេះ គេអាចដោះស្រាយសមីការ $\cot x = m$ ដូចសមីការ $\tan x = t$ ខាងលើដែរ។
ចំពោះសមីការ $\cot u(x) = \cot v(x)$ ដូចសមីការ $\tan u(x) = \tan v(x)$ ដែរ។
សមីការ $\cot u(x) = \cot v(x) \Leftrightarrow u(x) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ដែល u និង v ជាអនុគមន៍នៃ x ។

ឧទាហរណ៍ 1 ដោះស្រាយសមីការ $\cot\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ ។

គេបាន $\cot\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} = \cot\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ ។

ដូចនេះ $2x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ ។

លំហាត់គំរូ ដោះស្រាយសមីការ $\sin 2x \neq 0$, $\sin 3x \neq 0$, $\cos 2x \neq 0$ ។

គេបាន $2(\cot 2x - \cot 3x) = \tan 2x + \cot 3x$

$$2\left(\frac{\cos 2x}{\sin 2x} - \frac{\cos 3x}{\sin 3x}\right) = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos 2x}{\sin 3x}$$

$$2\left(\frac{\sin 3x\cos 2x - \sin 2x\cos 3x}{\sin 2x\sin 3x}\right) = \frac{\sin 3x\sin 2x + \cos 3x\cos 2x}{\sin 3x\cos 2x}$$

$$\frac{2\sin x}{\sin 2x\sin 3x} = \frac{\cos x}{\sin 3x\cos 2x}$$

$$\frac{2\sin x\cos 2x - \sin 2x\cos x}{\sin 2x\sin 3x\cos x} = 0$$

$$\frac{2\sin x\left(\cos 2x - \cos^2 x\right)}{\sin 2x\sin 3x\cos x} \Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ ។}$$

តាមលក្ខខណ្ឌនៃសមីការ $\sin 2x \neq 0 \Rightarrow \sin x \neq 0$ ។ដូចនេះសមីការគ្មានចម្លើយ។

ប្រតិបត្តិ ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម

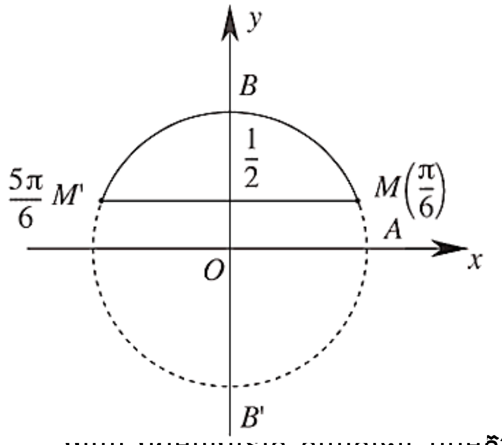
ក. $\cot x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ខ. $\cot 3x = \sqrt{3}$

គ. $\cot\left(\frac{x}{2} - 3\right) = -1$ ឃ. $3\cot x - \sqrt{3} = 0$

៩.៧. វិសមីការត្រីកោណមាត្រ

ឧទាហរណ៍១ ដោះសស្រាយសមីការ $\sin x - \frac{1}{2} \geq 0$

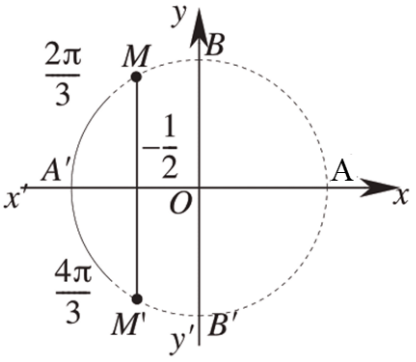
វិសមីការអាចសរសេរ $\sin x \geq \frac{1}{2}$ តែ $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = \sin\frac{5\pi}{6}$ ។
នៅលើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ គេមានចំណុច M និង M' ដែលធ្នូ $\text{AM} = \frac{\pi}{6}$ និង ធ្នូ $\text{AM}' = \frac{5\pi}{6}$ ។



គេសង្កេតឃើញថាស៊ីនុសនៃមួយចំនួនធំជាង ឬស្មើ នឹង $\frac{1}{2}$ លុះត្រាតែរូបភាពនៃចំនួននោះលើធ្នូ MBM' រួមទាំងចំណុច M និង M' ។

ដូចនេះ ចម្លើយនៃវិសមីការ $\sin x - \frac{1}{2} \geq 0$ គឺ $\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ ។

ឧទាហរណ៍ 2 ដោះស្រាយសមីការ $2\cos x + 1 < 0$ ។

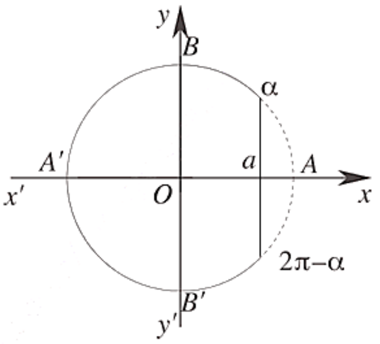


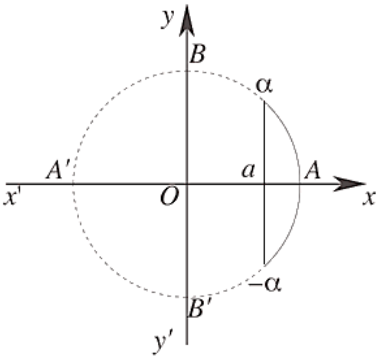
វិសមីការអាចសរសេរ $\cos x < -\frac{1}{2}$ តែ

$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} = \cos\frac{4\pi}{3}$ ។

នៅលើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ គេមានចំណុច M និង M' ដែលធ្នូ $\text{AM} = \frac{2\pi}{3}$ និង ធ្នូ $\text{AM}' = \frac{4\pi}{3}$ ។ គេសង្កេតឃើញថាកូស៊ីនុសនៃមួយចំនួនតូចជាង $-\frac{1}{2}$ លុះត្រាតែរូបភាពនៃចំនួននោះនៅលើធ្នូ $MA'M'$ លើកលែងតែចំណុច M និង M' ។

ដូចនេះ ចម្លើយនៃវិសមីការ $2\cos x + 1 < 0$ គឺ $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ ។





ជាទូទៅ វិសមីការ $\cos x \leq a$ គ្មានឫស កាលណា $a > 1$ ឬ $a < -1$ ហើយមានចម្លើយ បើ $-1 \leq a \leq 1$

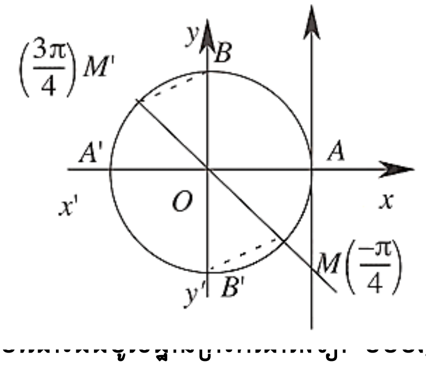
ចម្លើយ $\alpha + 2k\pi \leq x \leq 2\pi - \alpha + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$

$\cos x \geq a$ គ្មានឫស កាលណា $a < -1$ ឬ $a > 1$ ហើយមានចម្លើយ បើ $-1 \leq a \leq 1$

ចម្លើយ $-\alpha + 2k\pi \leq x \leq \alpha + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$

ករណីពិសេស វិសមីការ $\sin x > 0$ មានចម្លើយ $2k\pi < x < \pi + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$

ឧទាហរណ៍៣ ដោះស្រាយវិសមីការ $\tan x \geq -1$ ។

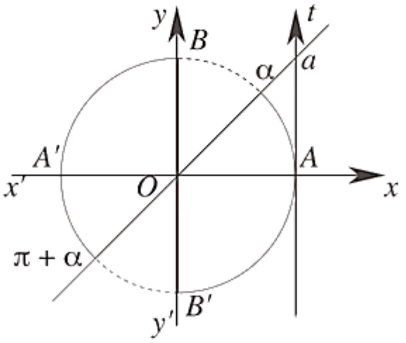


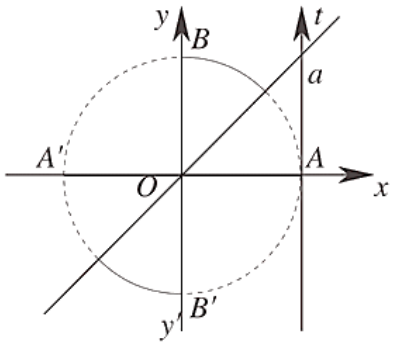
ដោយ $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 = \tan\frac{3\pi}{4}$ ។

នោះលើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រគេមានចំណុច M និង M'

ដែល $AM=-\frac{\pi}{4}$, $AM'=\frac{3\pi}{4}$ ។គេសង្កេតឃើញថាតង់សង់នៃ
មួយចំនួនធំជាង ឬស្មើ -1លុះត្រាតែរូបភាពនៃចំនួននោះនៅលើធ្នូ MAB ឬ $M'A'B'$ ។ ដូចនេះ វិសមីការ
$\tan x\ge -1$មានចម្លើយ $-\frac{\pi}{4}+k\pi\le x\le\frac{3\pi}{4}+k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$ ។

ជាទូទៅគេបាន $\tan x\le a$ $\tan x\ge a$





សម្គាល់ ដំណោះស្រាយវិសមីការ $\cot x$ ដូចគ្នានឹងដំណោះស្រាយវិសមីការ $\tan x$ដែរ ។ ជាទូទៅ
ដើម្បីដោះស្រាយវិសមីការដែលមានរាង $\sin\ge a$, $\cos x<a$, $\tan x>a$, $\cot x<a$......
គេត្រូវ

- រក α ដែល$\sin\alpha=a$, $\cos\alpha=a$, $\tan\alpha=a$, $\cot\alpha=a$
- ដៅចុងធ្នូតាមតម្លៃ α រួចបកស្រាយដោយប្រើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ
- ទាញរកសំណុំចម្លើយ

របៀបបំប្លែងអង្គទី 1 នៃវិសមីការគឺមានរបៀបដូចសមីការត្រីកោណមាត្រដែរ គេយករូបមន្ត
ត្រីកោណមាត្រមកប្រើ ។

លំហាត់គំរូ១ ដោះស្រាយសមីការ $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)>\sin x$ ។

ចម្លើយ វិសមីការអាចសរសេរ $\sin x-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$

$$2\sin\frac{x-x+\frac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{x+x-\frac{\pi}{3}}{2}<0\ ,\ 2\sin\frac{\pi}{6}\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)<0$$

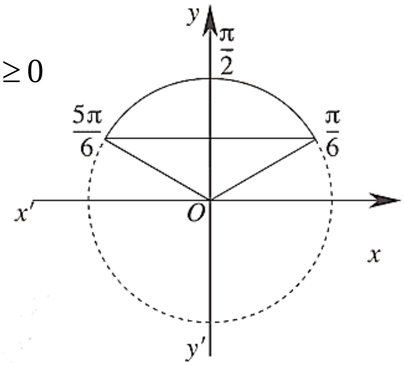
$$\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)<0\ ,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi<x-\frac{\pi}{6}<\pi+\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ,\ \frac{2\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{5\pi}{3}+2k\pi\ ,\ (k\in\mathbb{Z})$$

លំហាត់គំរូ២ ដោះស្រាយសមីការ $2\sin^2 x+3\sin x-2\ge 0$

ចម្លើយ តាង $t=\sin x$វិសមីការអាចសរសេរ $2t^2+3t-2\ge 0$

ឬ$(2t-1)(t+2)\ge 0$ គេទាញ $t\le -2$ ឬ$t\ge\frac{1}{2}$

ដោយ $-1\le t\le 1$យើងយកតែ $\frac{1}{2}\le t\le 1$



$t=\sin x\ge\frac{1}{2}$ ដោយ $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}=\sin\frac{5\pi}{6}$

គេបាន $\frac{\pi}{6}+2k\pi\le x\le\frac{5\pi}{6}+2k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$ ជាសំណុំចម្លើយនៃវិសមីការ។

ប្រតិបត្តិ ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម

ក. $2\cos x\ge-\sqrt{2}$ ខ. $\cos 2x>\cos\frac{2\pi}{3}$ គ. $\sqrt{3}\cos x-1<0$

ឃ. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)<\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)$ ង. $\cot x<\frac{\sqrt{3}}{3}$

មេរៀនសង្ខេប

រូបមន្តផលបូក និងផលដក

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\ \ ,\ \ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha\ \ ,\ \ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\qquad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

រូបមន្តមុំឌុប $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$
$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$
$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\ \ ,\ \ \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}\ \ ,\ \ \tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

រូបមន្តកន្លះមុំ $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$, $\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

បើ $\tan\frac{\alpha}{2}=t$ គេបាន $\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2},\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2}$, $\tan\alpha=\frac{2t}{1-t^2}$ ។

រូបមន្តបំប្លែងពីបូកទៅ បំប្លែងពីផលគុណទៅផលបូក និងផលដក

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]\qquad \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]\qquad \sin\beta\cos\alpha=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right]$$

បំប្លែងពីផលបូកទៅគុណ

$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$	$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$
$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$	$\sin p-\sin q=2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$
$\tan p-\tan q=\frac{\sin\left(p+q\right)}{\cos p\cos q}$	$\cot p+\cot q=\frac{\sin\left(p+q\right)}{\sin p\sin q}$
$\tan p-\tan q=\frac{\sin\left(p-q\right)}{\cos p\cos q}$	$\cot p-\cot q=\frac{\sin\left(p-q\right)}{\sin p\sin q}$

សមីការ $\cos x=\cos\alpha$ មានចម្លើយពីរគឺ $x=\alpha+2k\pi$ និង $x=-\alpha+2k\pi$ $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

$\cos u(x)=\cos v(x)\Leftrightarrow u(x)=\pm v(x)+2k\pi$, $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ ដែល $u(x)$ និង $v(x)$ ជាអនុគមន៍នៃ x

សមីការ $\sin x=\sin\alpha$ មានចម្លើយពីរគឺ $x=\alpha+2k\pi$ និង $x=\pi-\alpha+2k\pi$ $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

$\sin v(x)=\sin u(x)\Leftrightarrow u(x)=v(x)+2k\pi$ និង $u(x)=\pi-v(x)+2k\pi$ $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

សមីការ $\tan x=\tan\alpha$ មានចម្លើយ $x=\alpha+k\pi$, $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

$\tan u(x)=\tan v(x)\Leftrightarrow u(x)=v(x)+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ ដែល $u(x)$ និង $v(x)$ ជាអនុគមន៍នៃ x

សមីការ $\cot x=\cot\alpha$ មានចម្លើយ $x=\alpha+k\pi$, $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

$\cot u(x)=\cot v(x)\Leftrightarrow u(x)=v(x)+k\pi$, $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ ដែល $u(x)$ និង $v(x)$ ជាអនុគមន៍នៃ x

វិសមីការ $\sin x\le a$ មានសំណុំចម្លើយ $\pi-\alpha+2k\pi\le x\le\alpha+2k\pi$ $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

$\sin x\ge a$ មានសំណុំចម្លើយ $\alpha+2k\pi\le x\le-\alpha+2k\pi$, $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

$\cos x\le a$ មានសំណុំចម្លើយ $\alpha+2k\pi\le x\le 2\pi-\alpha+2k\pi$, $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

$\cos x\ge a$ មានសំណុំចម្លើយ $-\alpha+2k\pi<x\le\alpha+2k\pi$, $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

$\tan x\le a$ មានសំណុំចម្លើយ $-\frac{\pi}{2}+k\pi<x\le\alpha+k\pi$, $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

$\tan x\ge a$ មានសំណុំចម្លើយ $\alpha+k\pi\le x<\frac{\pi}{2}+k\pi$, $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ ។

លំហាត់អនុវត្ត

1. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម

ក. $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ខ. $\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ គ. $\cos\left(4x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

ឃ. $\cos^2 x=1$ ង. $\sin\sqrt{x}=-1$ ច. $\cot x=1$

ឆ. $\dfrac{1}{\cos 2x}=\sqrt{2}$ ជ. $2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=1$ ឈ. $\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ញ. $\tan^3\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\tan x-1$ ដ. $\cot\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=2$ ឋ. $\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=5$

2. ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម

ក. $\tan^3 3x-2\sin^3 3x=0$ ខ. $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)=\sqrt{2}\sin\cos x$

គ. $\sin 2x=(\cos x-\sin x)^2$ ឃ. $\sqrt{3}\sin x+\sin x=\dfrac{1}{\cos x}$

ង. $\sin 2x+\tan x=2$ ច. $\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}=4\tan x$

ឆ. $\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}=\dfrac{1}{2}$ ជ. $\sin 3x+\cos 2x=1+2\sin x\cos 2x$

ឈ. $\sin 2(x-\pi)-\sin(3x-\pi)=\sin x$ ញ. $\tan x+\cot x=2(\sin 2x+\cos 2x)$

ដ. $\dfrac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x}{\cos x+\cos 2x+\cos 3x}=\sqrt{3}$

3. ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម

ក. $2\cos\theta\le-\sqrt{2}$ ខ. $-\sqrt{2}\sin\theta+1\ge 0$

គ. $\sqrt{3}\tan\theta-1<0$ ឃ. $\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ (-\pi\le\theta<\pi)$

ង. $\cos\left(\dfrac{1}{2}\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)\le\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ (0\le\theta<2\pi)$

4. រកគ្រប់មុំចន្លោះ 0° និង 360° ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

ក. $2\tan y=5\sin y$ ខ. $8\sin x\cos x=\sin x$ គ. $4\sin^2 x=6-9\cos x$

ឃ. $3\cos y+\cot y=0$ ង. $2\sin 2x+1=0$ ច. $6\sin x-8\sin^2 x=5\cos^2 x$

ឆ. $2\cot 2x=5$ ឆ. $3\sin y\tan y+8=0$ ឈ. $3\cos^2 y=7\sin y+5$

ញ. $\cot\left(\dfrac{z}{2}\right)-2\cos\left(\dfrac{z}{2}\right)=0$ ដ. $\tan\left(x-30^o\right)\tan 50^o=0$

5. គេឱ្យ $x=3\sin\theta-2\cos\theta$ និង $y=3\cos\theta+2\sin\theta$

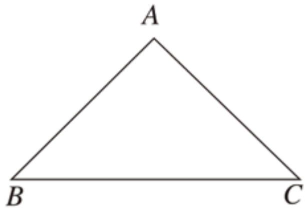
ក. រកតម្លៃសនៃមុំស្រួច θ ចំពោះ $x=y$

ខ.បង្ហាញថា x^2+y^2 ជាចំនួនថេរចំពោះគ្រប់តម្លៃនៃ θ ។

6. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មាន $\frac{\sin A+\cos B}{\sin B+\cos A}=\tan A$ ។បង្ហាញថា ΔABC ជាត្រីកោណកែង។

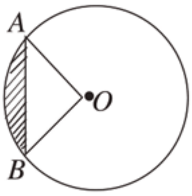
7. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មាន $\frac{\sin C}{\sin B}=2\cos A$ ។រកប្រភេទនៃ ΔABC ។

8. គេឱ្យ ΔABC មានមុំបំពេញលលក្ខខណ្ឌ $\tan B+\tan C=2\cos\frac{A}{2}$ ។
បង្ហាញថា ΔABC ជាត្រីកោណសមបាត។



លំហាត់ជំពូក

1. អង្កត់ធ្នូ AB ចែករង្វង់មួយដែលមានកាំស្មើនឹង $2cm$ ជាពីរអង្កត់ ។ គេដឹងថា AB ស្កាត់ធ្នូដែលមានមុំផ្ចិត 60° ។ គណនា
   - ក. ផ្ទៃក្រឡាចម្រៀកថាស AOB ។
   - ខ. ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ AOB ។
   - គ. ផ្ទៃក្រឡាអង្កត់ថាសតូច (ផ្នែកតូច) ។



2. គណនា ក. $\sin 960^o$ ខ. $\cos 1215^o$ គ. $\sin 2940^o$
   ឃ. $\cos\frac{13\pi}{6}$ ង. $\tan\left(-\frac{19}{4}\pi\right)$ ច. $\sin\left(-\frac{17}{3}\pi\right)$

3. គណនា ក. $\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+\sin(\theta+\pi)+\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right)$
   ខ. $\cos\frac{20}{3}\pi\tan\frac{7}{4}\pi+\sin\frac{5}{2}\pi\cos(-3\pi)$
   គ. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)+\sin(\pi-2\theta)+\cos(\pi-\theta)$

4. គេមាន $\tan\alpha+\tan\beta+\tan y=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\alpha,\beta,\gamma<\frac{\pi}{2}\right)$
   គណនាមុំ $(\alpha+\beta+\gamma)$ ។

5. គេមាន $\alpha=\cos 10^o$, $\beta=\cos 50^o$, $\gamma=\cos 70^o$ ។គណនា $\alpha-\beta-\gamma$, $\alpha^2-\beta\gamma$ និង $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ ។

6. បង្ហាញថា
   - ក. $(1-\sin A+\cos A)^2=2(1-\sin A)(1+\cos A)$
   - ខ. $\cot A+\tan A=\frac{1}{\sin A\cos A}$
   - គ. $(\tan\theta+\sin\theta)(\tan\theta-\sin\theta)=\tan^2\theta\sin^2\theta$
   - ឃ. $\left(1+\frac{1}{\sin\theta}\right)(1-\sin\theta)=\cos\theta\cot\theta$

7. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម

ក. $4\cos^3 x-\cos 2x-4\cos x+1=0$ ខ. $\sin^2 2x-\cos^2 8x=0.5\cos 10x$

គ. $1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x=0$ ឃ. $\sin^4 x+\cos^4 x-\cos 2x+\frac{1}{4}\sin^2 2x-2=0$

ង. $\sin^{2007} x+\cos^{2007} x=1$ ច. $\tan x=\cot x+2\cot^2 2x$

8. ក.គេឱ្យ $2\sin A\cos A+(\cos A+\sin A)^2-(2\cos A+\sin A)^2=q\sin^2 A+q$

រកតម្លៃនៃចំនួនថេរ p និង q

ខ.គេឱ្យ $\sin x\cos x(5\tan x+2\cot x)=a+b\sin^2 x$ ។រកចំនួនថេរ a និង b ។

9. ដោះស្រាយវិសមីការរខាងក្រោម ដោយដឹងថា $0\le x\le 2\pi$

ក. $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\ge -\frac{1}{2}$ ខ. $\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\ge -1$

10. ដោះស្រាយសមីការ និង វិសមីការខាងក្រោម

ក. $2\sin^2\theta-\sqrt{2}\cos\theta=0$ ខ. $2\cos^2\theta+\sqrt{3}\sin\theta+1>0$

11. គេឱ្យ ΔABC មានមុំ 3 ជាមុំស្រួច។

ក.បង្ហាថា $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$

ខ. តាង $t=\tan A+\tan B+\tan C$ បង្ហាញថា $T\ge 3\sqrt{3}$ ។

ឯកសារយោង

១. សៀវភៅគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី៧ បោះពុម្ពលើកទី១៤ ឆ្នាំ២០២០

២. សៀវភៅគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី៨ បោះពុម្ពលើកទី១១ ឆ្នាំ២០២០

៣. សៀវភៅគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី៩ បោះពុម្ពលើកទី១១ ឆ្នាំ២០២០

៤. សៀវភៅគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១០ បោះពុម្ពលើកទី១១ ឆ្នាំ២០២០

៥. សៀវភៅណែនាំសម្រាប់គ្រូបង្រៀន គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី៧ ឆ្នាំ២០១៦

៦. សៀវភៅណែនាំសម្រាប់គ្រូបង្រៀន គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី៨ ឆ្នាំ២០១៦

៧. សៀវភៅណែនាំសម្រាប់គ្រូបង្រៀន គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី៩ ឆ្នាំ២០១៦

៨. ឯកសារបំប៉ន គ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន គណិតវិទ្យា ឆ្នាំ២០២០

៩.College Algebra with Trigonometry

- Raymond A. Barnett — Merritt College
- Michael R. Ziegler — Marquette University
- Karl E. Bayleen — Marquette University

១០. Intermediate Algebra (Graphs and Functions)

- Roland E. Larson — The Pennsylvania State University, The Behrend College
- Robert P. Hostetler — The Pennsylvania State University, The Behrend College
- Carolyn F. Neptune — Jonhson Country Community College