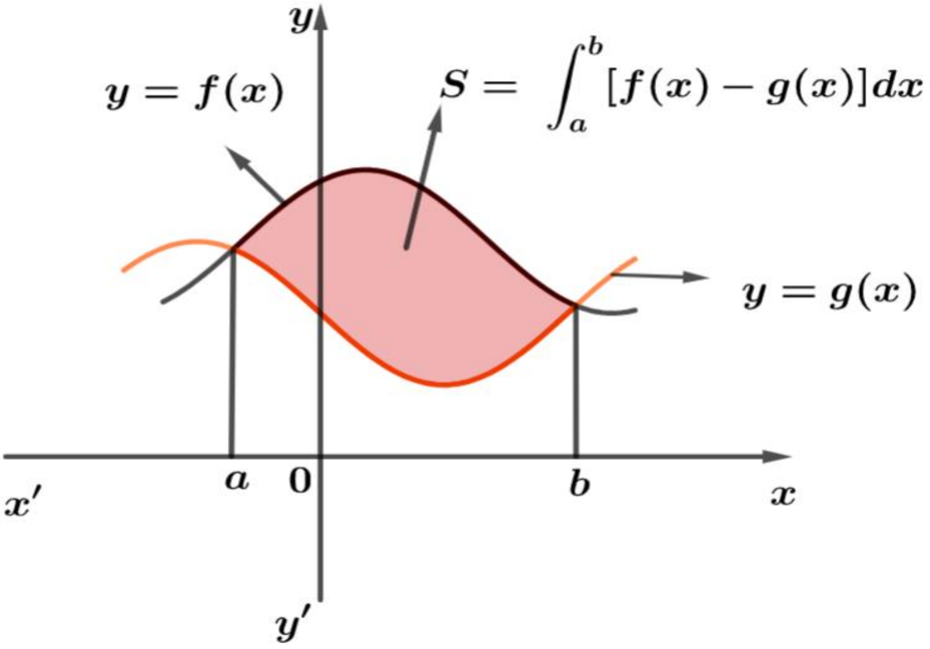
គណិតវិទ្យាសម្រាប់វិទ្យាសាស្ត្រ១



និពន្ធដោយៈលោក សាង ធិតា និង លោកស្រី ឡុង ស្រីអូន

គាំទ្រថវិកាលើការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អដោយៈ
"មូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍"
២០២៣

គណៈកម្មការនិពន្ធ៖

១. លោក សាង ផិតា

២. លោកស្រី ឡុង ស្រីអូន

គណៈកម្មការរចនាទំព័រ ៖ លោកស្រី សំបាត់ អ៊ិត លោកស្រី ឈុំ ពៅ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យ៖

១. លោក ហ៊ុន រ៉ាវី	ព្រឹទ្ធបុរសរង	ប្រធាន
២. លោក ឈាន ហាង	ប្រធានដេប៉ាតឺម៉ង់គណិត	សមាជិក
៣. លោក ឯក លីម	ប្រធានដេប៉ាតឺម៉ង់គណិត	សមាជិក
៤. លោកស្រី ស៊ិន សុគន្ធា	គ្រូឧទ្ទេស	សមាជិក

បុព្វកថា

ដំណើរអភិវឌ្ឍនៃព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជានៅក្នុងយុគសម័យទំនើបនេះ ជាមេរៀនដ៏ជោគជ័យបំផុតមួយដែលចាប់ឫសគល់ចេញពីការបញ្ចប់របបប្រល័យពូជសាសន៍ ការបញ្ចប់សង្គ្រាម ការផ្សះផ្សារជាតិ ការកសាងមូលដ្ឋានរឹងមាំនៃសន្តិភាពនិងស្ថេរភាព និងការអភិវឌ្ឍសេដ្ឋកិច្ច។ នៅក្រោយពេលដែលសន្តិភាពត្រូវបានកើតឡើងដោយបរិបូរណ៍នៅឆ្នាំ១៩៩៨ កម្ពុជាទទួលកំណើនសេដ្ឋកិច្ចខ្ពស់ គឺប្រមាណ៨%ក្នុងមួយឆ្នាំ។ លើសពីនេះទៀតអត្រានៃភាពក្រីក្រត្រូវបានកាត់បន្ថយពីប្រមាណ៥៣% នៅឆ្នាំ២០០៤មកនៅទាបជាង១០% នៅឆ្នាំ២០១៩។ ដំណើរនៃការអភិវឌ្ឍជាតិជាសកម្មភាពដែលបន្តទៅមុខជាប់ជានិច្ច ហើយគោលនយោបាយថ្មីៗដែលមានលក្ខណៈអន្តរវិស័យគ្រប់ដណ្តប់ ក៏កំពុងលេចរូបរាងឡើងដើម្បីតម្រង់ទិសកម្ពុជាឆ្ពោះទៅកាន់ប្រទេសមានប្រាក់ចំណូលមធ្យមកម្រិតខ្ពស់នៅឆ្នាំ២០៣០ និងឈានឡើងជាប្រទេសមានប្រាក់ចំណូលខ្ពស់ នៅឆ្នាំ២០៥០។ ការប្រែប្រួលឆាប់រហ័សនៃនិម្មាបនកម្មពិភពលោក និងតំបន់រួមទាំងទំនាក់ទំនងភូមិសាស្ត្រនយោបាយ បានផ្តល់កាលានុវត្តភាពសម្រាប់ការអភិវឌ្ឍឧស្សាហកម្មនៅកម្ពុជា ដែលត្រូវបានរាជរដ្ឋាភិបាលចាត់ទុកជាមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃកំណើនសេដ្ឋកិច្ចកម្ពុជា។ រាជរដ្ឋាភិបាលកម្ពុជាបានកំពុងបន្តពង្រឹង និងអភិវឌ្ឍវិស័យអប់រំឆ្ពោះទៅរកការស្រាវជ្រាវ និងនវានុវត្តន៍ដើម្បីពង្រឹងសមត្ថភាពនិងជំនាញរបស់ធនធានមនុស្សនៅកម្ពុជាឱ្យស្របទៅនឹងបរិបទថ្មីនៃការអភិវឌ្ឍ ជាពិសេសការពង្រឹងសហគ្រិនភាពក្នុងការរៀបចំម៉ូដែលធុរកិច្ចថ្មីៗ។ ដើម្បីចាប់យកកាលានុវត្តភាពពីបដិវត្តន៍ឧស្សាហកម្មទី៤ និងសេដ្ឋកិច្ចឌីជីថលដែលកំពុងផុសផុលឡើង ប្រព័ន្ធអេកូឡូហ្ស៊ីដែលបង្កលក្ខណៈអំណោយផលដល់ការបង្កើតថ្មី នវានុវត្តន៍ ការស្រាវជ្រាវ និងអភិវឌ្ឍន៍ ត្រូវតែមានការកែលម្អ។

បណ្តាប្រទេសនៅទ្វីបអាស៊ីកំពុងនាំមុខក្នុងការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍ ដោយមានភាគហ៊ុនប្រមាណ៤៤% នៃការវិនិយោគទាំងមូលរបស់ពិភពលោក។ ប្រទេសចិនកំពុងបន្តកសាងហេដ្ឋារចនាសម្ព័ន្ធនៃការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍ ក៏ដូចជាសមត្ថភាពមនុស្ស។ ផ្ទុយទៅវិញ ប្រទេសនៅទ្វីបអាមេរិកខាងត្បូង និងអាហ្វ្រិក កំពុងស្ថិតនៅឆ្ងាយពីការវិនិយោគនេះ ហើយជាលទ្ធផល ប្រទេសទាំងនោះក៏ពុំមានកំណើនសេដ្ឋកិច្ចគួរឱ្យកត់សម្គាល់ដែរ។ ទុនវិនិយោគសរុបលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍរបស់ប្រទេសនៅទ្វីបអាមេរិកខាងត្បូនិងអាហ្វ្រិក មានប្រមាណ៥%នៃការវិនិយោគទាំងមូលរបស់ពិភពលោក ក្នុងពេលដែលតំបន់ទាំង២នេះមានប្រជាជនប្រមាណ២០%នៃប្រជាជនពិភពលោក។ ប្រទេសចំនួន៦ដែលមានលំដាប់ខ្ពស់ជាងគេនៅក្នុងការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍ រួមមានសហរដ្ឋអាមេរិក ចិន ជប៉ុន អាល្លឺម៉ង់ ឥណ្ឌា និងកូរ៉េខាងត្បូង ដែលស្មើនឹងប្រមាណ៧០%នៃទុនវិនិយោគសរុបរបស់ពិភពលោក។

តើចំណេះដឹង ផលិតផល និងសេវាកម្មថ្មីទាំងនេះកើតឡើងពីអ្វី? ហើយកើតឡើងដោយរបៀបណា? ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជាកំពុងតែកសាងមូលដ្ឋានសម្រាប់ការត្រៀមខ្លួនទទួល និងប្រកួតប្រជែងក្នុងយុគសម័យបដិវត្តឧស្សាហកម្មទី៤ នៅក្នុងសេដ្ឋកិច្ចដែលផ្អែកលើពុទ្ធិ ហើយដែលប្រការនេះចាំបាច់តម្រូវឱ្យពលរដ្ឋកម្ពុជា ត្រូវក្លាយខ្លួនជាពលរដ្ឋឌីជីថល ពលរដ្ឋសកល និងពលរដ្ឋដែលប្រកបដោយការ

ទទួលខុសត្រូវ ដែលមានសមត្ថភាពក្នុងការផលិត ចែកចាយ និងប្រើប្រាស់ពុទ្ធិដើម្បីទទួលមនុញ្ញផល និងរួមចំណែកក្នុងកំណើន។ ធនាគារពិភពលោកបានធ្វើការកត់សម្គាល់តាំងពីឆ្នាំ២០០២នូវបម្លាស់ប្តូរនៃមូលដ្ឋានសេដ្ឋកិច្ច ពីសេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើកម្លាំងពលកម្ម និងធនធានអតិកម្ម (Labour and Resource Based Economy) ទៅកាន់សេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើពុទ្ធិ (Knowledge Based-Economy) ដែលក្នុងន័យនេះ ពុទ្ធិគឺជាគន្លឹះនៃការអភិវឌ្ឍ។ អាស្រ័យហេតុនេះ នៅលើគន្លងដែលកម្ពុជាកំពុងធ្វើដំណើរឆ្ពោះទៅកាន់សេដ្ឋកិច្ចឌីជីថល សង្គមកម្ពុជាត្រូវតែមានសមត្ថភាពក្នុងការ ផលិត ជ្រើសរើស បន្សាំ បង្កើតមុខរបរ និងប្រើប្រាស់ពុទ្ធិ ដើម្បីរក្សានិរន្តរភាពនៃកំណើន និងកែលម្អជីវភាពរស់នៅ។ សមត្ថភាពទាំងនេះ អាចកើតឡើងនៅពេលពលរដ្ឋកម្ពុជាមានឱកាសក្នុងការទទួលបានបទពិសោធន៍ពីការស្រាវជ្រាវ ការបណ្តុះគំនិតច្នៃប្រឌិត និងការស្វែងរកនវានុវត្តន៍។

កំណែទម្រង់វិស័យអប់រំ គឺជាការត្រួសត្រាយមាគ៌ាសម្រាប់ដំណើរឆ្ពោះទៅកាន់សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិ និងប្រជាពលរដ្ឋប្រកបដោយភាពរស់រវើក។ តាមរយៈមូលដ្ឋានអប់រំ សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិនឹងប្រមូលផ្តុំ បង្កើត និងចែករំលែក ទៅកាន់សមាជិកក្នុងសង្គមនូវសម្បទាអប់រំ ពិសេសគឺពុទ្ធិសម្បទាក្នុងបុព្វហេតុនៃមនុស្សជាតិនិងឧត្តមប្រយោជន៍នៃប្រទេស។ សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិ គឺពុំគ្រាន់តែជាសង្គមដែលសម្បូរព័ត៌មានប៉ុណ្ណោះទេ តែជាសង្គមដែលប្រជាពលរដ្ឋអាចធ្វើបរិវត្តកម្មពីព័ត៌មានទៅជាមូលធនប្រកបដោយប្រសិទ្ធភាព។ ការរីកចម្រើនទៅមុខជាលំដាប់នៃបច្ចេកវិទ្យានិងតំណភ្ជាប់ បានពង្រីកព្រំដែននៃការចូលទៅកាន់ និងការទទួលបានព័ត៌មានជាសកល ហើយដែលក្នុងន័យនេះ ការអប់រំនឹងបន្តវិវត្តទៅមុខនិងមានការផ្លាស់ប្តូរ។ សង្គមមួយដែលមានអំណាន និងរបាប់ជាបុរេលក្ខខណ្ឌនៃជីវភាពប្រចាំថ្ងៃនៃប្រជាពលរដ្ឋ ពេលនោះបំណិននៃអំណាន និពន្ធ និងការគណនាលេខនព្វន្ត គឺជាចលករនៃការរៀនរបស់សិស្ស។ ធាតុដ៏ចម្បងមួយដែលស្ថិតនៅក្នុងការកសាងសង្គមដែលប្រកបដោយពុទ្ធិគឺសៀវភៅសិក្សា ហើយការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សាជាប្រចាំ គឺជានវានុវត្តន៍នៃវិស័យអប់រំដែលនាំទៅរកការសិក្សាពេញមួយជីវិត ការអភិវឌ្ឍសម្បទាអប់រំ និងការចែករំលែកចំណេះដឹង។ មូលដ្ឋានអប់រំ ជាពិសេសគឺគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សាត្រូវមានតួនាទីដែលប្រកបដោយការឆ្លើយតបចំពោះតម្រូវការខាងលើនេះ។ សាស្ត្រាចារ្យ អ្នកស្រាវជ្រាវ និងបុគ្គលិកអប់រំត្រូវបន្តសិក្សាជាប់ជានិច្ចតាមរយៈការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ហើយដែលសៀវភៅសិក្សាទាំងនេះនឹងក្លាយជាស្ពាននៃទំនាក់ទំនងរវាងនវានុវត្តន៍នៃបច្ចេកវិទ្យា និងការរៀននិងបង្រៀននៅក្នុងថ្នាក់រៀន។

សង្គមដែលប្រកបពុទ្ធិ ក៏ជាសង្គមដែលបណ្តុះឱ្យមានរចនាសម្ព័ន្ធទន់នៃសេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើពុទ្ធិដែរ។ ឧទាហរណ៍ជាក់ស្តែងនៃបែបផែននេះរួមមាន Silicon Valley នៃសហរដ្ឋអាមេរិក សួនឧស្សាហកម្មវិស្វកម្មអាកាសយានយន្តនិងយានយន្តនៅទីក្រុង Munich ប្រទេសអាល្លឺម៉ង់ តំបន់ជីវបច្ចេកវិទ្យានៅក្រុង Hyderabad ប្រទេសឥណ្ឌា តំបន់ផលិតគ្រឿងអេឡិចត្រូនិក និងសារគមនាគមន៍ ឌីជីថលនៅទីក្រុង Seoul ប្រទេសកូរេខាងត្បូង ក៏ដូចជាសួនឧស្សាហកម្មថាមពល និងឥន្ធនគីមីសាស្ត្រនៃប្រទេសប្រេស៊ីល ហើយក៏នៅមានទីក្រុងនៃប្រទេសជាច្រើនទៀតនៅលើពិភពលោក លក្ខណៈសម្បត្តិនៃទីក្រុងទាំងនេះគឺការប្រើប្រាស់និន្នាការនៃការអភិវឌ្ឍដែលជំរុញ និងតម្រង់ទិស

ដោយចំណេះដឹង ហើយដែលចំណេះដឹងទាំងនោះកើតចេញជាដំបូងពីការវិនិយោគទៅលើគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា ស្ថាប័នស្រាវជ្រាវ មជ្ឈមណ្ឌលឧត្តមភាពនៃជំនាញជាន់ខ្ពស់ ការប្រកួតប្រជែងដោយគុណាធិបតេយ្យ និង ជាពិសេសគឺការបណ្តុះវប្បធម៌អំណាននិងនិពន្ធសៀវភៅ។ ល្បឿននៃការរីកចម្រើនផ្នែកពុទ្ធិ និងបច្ចេកវិទ្យាកំពុងមានសន្ទុះលឿនជាងអ្វីដែលសិស្ស និងនិស្សិតអាចទទួលបានពីគ្រូនៅគ្រឹះស្ថានសិក្សា ដែលធ្វើឱ្យគោលដៅនៃការអប់រំនៅពេលបច្ចុប្បន្ននេះ មានការប្រឈមខ្លាំងជាងពេលណាទាំងអស់។ ឧទាហរណ៍ ក្នុងមួយឆ្នាំ មានសៀវភៅជាង២,២លានចំណងជើង ត្រូវបានសរសេរ និងបោះពុម្ព ដែលក្នុងនោះប្រទេសចិនមាន៤៤០ពាន់ ចំណែកឯសហរដ្ឋអាមេរិកមាន ៣០៥ ពាន់ និងប្រទេសរុស្ស៊ីមាន ១២០ពាន់ចំណងជើង។

ខណៈពេលដែលបច្ចេកវិទ្យាកំពុងរីកចម្រើនជារៀងរាល់ថ្ងៃ មធ្យោបាយសម្រាប់អំណានក៏មានច្រើនជម្រើសសម្រាប់សិស្ស និស្សិត និងសាធារណៈជនរួមមានការអានសៀវភៅ ការអានលើឧបករណ៍អេឡិចត្រូនិក ការអានដោយប្រើទូរសព្ទវៃឆ្លាត និងការអានលើកុំព្យូទ័រ ដែលសុទ្ធសឹងជាមធ្យោបាយសំខាន់ៗដែលនាំអ្នកអានទាំងឡាយឱ្យសម្រេចគោលបំណងអានរបស់ខ្លួន។ ម្យ៉ាងវិញទៀត អំណានដោយប្រើមធ្យោបាយបច្ចេកវិទ្យាទំនើប ចំណាយពេលតិច ងាយស្រួលអាន និងជួយដល់បរិស្ថានមួយកម្រិតទៀត។ នាពេលបច្ចុប្បន្ន សិស្ស និស្សិត និងសាធារណៈជនកម្ពុជាដែលស្រឡាញ់អំណានកំពុងតែប្រើប្រាស់មធ្យោបាយអំណានទាំងនេះ។ បើយើងក្រឡេកមើលទៅប្រទេសជឿនលឿន ទោះបីជាបច្ចេកវិទ្យារីកចម្រើនខ្លាំងយ៉ាងណា អំណានតាមរយៈសៀវភៅនៅតែមានសន្ទុះដដែល។ ម្យ៉ាងវិញទៀត បច្ចេកវិទ្យាអានបែបទំនើបតាមរយៈឧបករណ៍ទំនើប អាស្រ័យលើលទ្ធភាពនៃធនធានអប់រំឌីជីថល និងមាតិកាឌីជីថលគ្រប់គ្រាន់ដែលបានផលិត និងបង្ហោះចែកចាយសម្រាប់អំណាន។

ក្នុងបរិបទកម្ពុជា ជាពិសេសក្នុងបរិការណ៍នៃការផ្ទុះរីករាលដាលនៃជំងឺកូវីដ-១៩ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានជំរុញឱ្យមានបរិវត្តកម្មឌីជីថលនៅក្នុងអេកូស៊ីស្តែមនៃការអប់រំ ជាពិសេសការអប់រំតាមប្រព័ន្ធអេឡិចត្រូនិកនិងការអប់រំពីចម្ងាយដើម្បីលើកកម្ពស់អំណានតាមរយៈការផលិតមាតិកាឌីជីថលដែលមានភាពចំរុះ ការកសាងសមត្ថភាពផ្នែកតំណភ្ជាប់និងវេទិកាឌីជីថល ការពង្រីកវិសាលភាពនៃមជ្ឈមណ្ឌលទិន្នន័យ និងការលើកកម្ពស់គុណភាពនៃការផលិតធនធានអប់រំឌីជីថល គួបផ្សំជាមួយការចែកសន្លឹកកិច្ចការឱ្យសិស្សយកទៅរៀននៅផ្ទះ និងការចុះទៅជួបជាមួយសិស្សជាបណ្តុំនៅតាមសហគមន៍។ ក្នុងន័យលើកកម្ពស់អំណាន និងភាពសម្បូរបែបនៃធនធានសៀវភៅសិក្សាឱ្យកាន់តែមានប្រសិទ្ធភាពនិងភាពសក្តិសិទ្ធិ និងផ្តល់ឱកាសអំណានកាន់តែច្រើនថែមទៀតដល់សិស្សានុសិស្ស និស្សិត និងសាធារណៈជន ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាលើកទឹកចិត្តនូវចំណុចមួយចំនួនដូចខាងក្រោម៖

1. សាស្ត្រាចារ្យ អ្នកស្រាវជ្រាវ និងបុគ្គលិកអប់រំ សូមបន្តនិងបង្កើនការបោះពុម្ពស្នាដៃបន្ថែមទៀត ដើម្បីធ្វើឱ្យធនធានសម្រាប់អំណានកាន់តែសម្បូរបែប ជាពិសេសធនធានអំណានជាខេមរភាសា

2. គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា សូមផ្តល់លទ្ធភាពគ្រប់បែបយ៉ាង ដើម្បីឱ្យបុគ្គលិកអប់រំគ្រប់លំដាប់ថ្នាក់ និង និស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សាអាចចូលរួមអាន និងសិក្សាស្រាវជ្រាវតាមគ្រប់លទ្ធភាពជាមួយធនធានអំណាន ជាពិសេសការរៀបចំឱ្យមានពេលវេលាសម្រាប់សហាសិក្សា និងអំណានក្នុងបណ្ណាល័យ
3. សាស្ត្រាចារ្យតាមមុខវិជ្ជា និងអ្នកស្រាវជ្រាវតាមជំនាញឬវិស័យ ត្រូវរៀបចំដំណើរការរៀនបង្រៀន និងស្រាវជ្រាវដែលមានដាក់បញ្ចូលកិច្ចការស្វ័យសិក្សា សហាសិក្សា ឬការស្រាវជ្រាវបណ្ណាល័យដែលតម្រូវឱ្យនិស្សិត ត្រូវអាននិងស្រាវជ្រាវជាមួយធនធានអំណាន
4. គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងមជ្ឈមណ្ឌលស្រាវជ្រាវ ត្រូវខិតខំឱ្យអស់លទ្ធភាពក្នុងការបង្កើតបណ្ណាល័យ មជ្ឈមណ្ឌលរក្សាឯកសារ ឬមជ្ឈមណ្ឌលអប់រំឌីជីថល ជាដើម ដើម្បីឱ្យបុគ្គលិកអប់រំគ្រប់លំដាប់ថ្នាក់និងនិស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សា អាចទទួលបាន និងស្វែងរកប្រភពសម្រាប់អំណាន កាន់តែសម្បូរបែប និងមានភាពបត់បែន ឆ្លើយតបតាមតម្រូវការអ្នកអាន
5. និស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សា ត្រូវខិតខំនិងចំណាយពេលអាន និងចាត់ទុកវប្បធម៌ និងអកប្បកិរិយាអំណានជាផ្នែកមួយ នៃពេលវេលានិងភាពស៊ីវិល័យនៃជីវិតប្រចាំថ្ងៃ
6. បងប្អូនជនរួមជាតិ ដែលជាមាតាបិតា ឬអ្នកអាណាព្យាបាល សូមជួយជំរុញនិងបង្កលក្ខណៈកាន់តែ ច្រើនថែមទៀត ជាពិសេសការលៃលកចំណាយនៅក្នុងគ្រួសារសម្រាប់ការទិញសម្ភារៈសិក្សា សៀវភៅអាន និងឧបករណ៍សម្រាប់អំណានដល់កូនៗ ដែលចាត់ទុកជាការវិនិយោគមួយដ៏សំខាន់ សម្រាប់ បង្កើនចំណេះដឹង និងអនាគតរបស់ពួកគេ។

ដោយមានការគាំទ្រពីក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ នៅឆ្នាំ២០២០ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានបង្កើតមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ដែលហៅកាត់ថា“មូលនិធិ ស.គ.ន” និងហៅជាភាសាអង់គ្លេសថា The Research Creativity and Innovation Fund ដែលហៅកាត់ជាភាសាអង់គ្លេសថា “RCI Fund”។ គោលដៅចម្បងនៃមូលនិធិនេះ គឺរួមចំណែកលើកកម្ពស់វប្បធម៌នៃការស្រាវជ្រាវ បំផុសគំនិតច្នៃប្រឌិត និងជំរុញការធ្វើនវានុវត្ត ដើម្បីជាប្រយោជន៍ដល់វិស័យអប់រំ យុវជន និងកីឡា ដែលឆ្លើយតបទៅនឹងទីផ្សារពលកម្ម និងសាកលភាវូបនីយកម្ម។ មូលនិធិ ស.គ.ន បានសម្រេចកំណត់ប្រធានបទ ជាអាទិភាពសម្រាប់ការគាំទ្រដោយមូលនិធិចំនួន៣ រួមមាន ឌីជីថលនីយកម្មសម្រាប់បដិវត្តឧស្សាហកម្ម៤.០(Digitalization for IR.4.0)ការស្រាវជ្រាវអនុវត្តលើវិស័យកសិកម្ម (Applied Agricultural Research) និងការស្រាវជ្រាវគរុកោសល្យសតវត្សទី២១ (21st Century Pedagogy Research)។

ដោយមានការធ្វើអាទិភាពវូបនីយកម្មទៅលើទិសដៅនៃការប្រើប្រាស់ថវិកាមូលនិធិសម្រាប់ឆ្នាំ២០២០ ក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ និងក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានផ្តល់ការគាំទ្រដល់ការ**រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អ សៀវភៅសិក្សា(Text book) ដែលនឹងត្រូវប្រើប្រាស់នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា**។ គោលបំណងនៃការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អ សៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សាគឺដើម្បីបង្កើនបរិមាណ លើកកម្ពស់គុណភាព និងពង្រីកសមធម៌នៃធនធានសិក្សាជាខេមរភាសា ជូន

ដល់និស្សិតដែលកំពុងបន្តការសិក្សា និងត្រៀមខ្លួនធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។ លើសពីនេះទៀតការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា មានគោលដៅដូចខាងក្រោម ៖

- ឆ្លើយតបជាបន្ទាន់ចំពោះការខ្វះខាតធនធានសិក្សា ដែលជាតម្រូវការសិក្សារបស់និស្សិតនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា
- លើកកម្ពស់ទំនើបភាវូបនីយកម្ម និងឧត្តមានុវត្តន៍នៃការរៀននិងបង្រៀន និងការស្រាវជ្រាវនៅលើមុខវិជ្ជា កម្មវិធីសិក្សា ឬមុខជំនាញជាក់លាក់
- បង្កើនភាពស៊ីជម្រៅក្នុងការកសាងវិជ្ជាជីវៈនិងបទពិសោធន៍សម្រាប់បានសាស្ត្រាចារ្យ និងអ្នកស្រាវជ្រាវ
- រួមចំណែកដល់ការកសាងភាពជាសហគមន៍វិជ្ជាជីវៈ ការចែករំលែកបទពិសោធន៍ និងវប្បធម៌នៃការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានវាយតម្លៃខ្ពស់ចំពោះការបោះជំហានប្រកបដោយមនសិការវិជ្ជាជីវៈនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងបុគ្គលិកអប់រំទាំងអស់ ក្នុងការរៀបចំ រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ដើម្បីបង្កើនបរិមាណ លើកកម្ពស់គុណភាព និងពង្រឹងសមធម៌នៃធនធានសិក្សាជាខេមរភាសា ជូននិស្សិតដែលកំពុងបន្តការសិក្សា និងត្រៀមខ្លួនធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។ សៀវភៅសិក្សាជាផ្នែកមួយនៃការទទួលស្គាល់គុណភាពអប់រំនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងជាធនធានសិក្សាដែលជាមូលដ្ឋានមួយដ៏សំខាន់ ក្នុងការគាំទ្រដល់ការបង្រៀន និងរៀន ហើយត្រូវមានបរិមាណគ្រប់គ្រាន់ ឆ្លើយតបទៅនឹងកម្មវិធីអប់រំ និងតម្រូវការសិក្សាស្រាវជ្រាវ។ ជាគោលការណ៍ គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សាទាំងអស់ ត្រូវមានសៀវភៅសិក្សាដែលប្រើជាគោលសម្រាប់មុខវិជ្ជានីមួយៗ។ ចំនួនសៀវភៅសិក្សាដែលគ្រប់គ្រាន់សម្រាប់ការស្រាវជ្រាវ និងការសិក្សារបស់និស្សិត ត្រូវមានយ៉ាងតិចមួយចំណងជើងក្នុងមួយមុខវិជ្ជា ហើយត្រូវតម្កល់យ៉ាងតិច២ច្បាប់ នៅក្នុងបណ្ណាល័យ ឬអាចរកបានតាមប្រព័ន្ធអេឡិចត្រូនិក។ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា លើកទឹកចិត្តបន្ថែមទៀតជូនដល់គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សារដ្ឋ និងឯកជនដែលបានស្នើសុំថវិកាមូលនិធិរួច សូមចូលរួមបន្ថែមទៀតដើម្បីបង្កើនចំនួនចំណងជើងសៀវភៅ។ ចំណែកគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សារដ្ឋនិងឯកជនដែលពុំទាន់បានដាក់ពាក្យស្នើសុំ សូមចូលរួមដើម្បីជាគុណប្រយោជន៍ដល់តម្រូវការដ៏ទទូច និងថ្លៃថ្លានៃនិស្សិតកម្ពុជាក្នុងការសិក្សា និងស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។

សេចក្ដីបញ្ជាក់
នៃមូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍

សៀវភៅសិក្សានេះជាលទ្ធផលនៃការស្នើសុំអនុវត្តថវិកាមូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ក្នុងគម្រោង**រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ដែលនឹងត្រូវប្រើប្រាស់នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។** សៀវភៅសិក្សានេះ ត្រូវបានរៀបរៀង និពន្ធ ឬកែលម្អដោយមានការធានាអះអាងថា ជាស្នាដៃរបស់អ្នកនិពន្ធផ្ទាល់ និងបានឆ្លងកាត់ត្រួតពិនិត្យ ផ្តល់យោបល់ និងវាយតម្លៃដោយក្រុមប្រឹក្សាអប់រំ ក្រុមប្រឹក្សាស្រាវជ្រាវ ឬក្រុមប្រឹក្សាដែលមានតម្លៃស្មើនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងតាមរយៈកិច្ចសន្យាដែលបានធ្វើឡើង និងដែលបានតម្កល់ទុកនៅមូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍។ រាល់ខ្លឹមសារ ការបកស្រាយ និងរូបភាព គឺជាជំហរនិងទស្សនៈផ្ទាល់របស់អ្នកនិពន្ធ ហើយ ពុំឆ្លុះបញ្ចាំង ឬជាតំណាងដល់មូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ នៃក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ឡើយ។

មាតិកា

បុព្វកថា i

សេចក្ដីបញ្ជាក់ vi

អារម្ភកថា xii

សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ xiii

មូលន័យសង្ខេប xv

មេរៀនទី១ អនុគមន៍លេខនៃមួយអថេរពិត 1

១.១ អនុគមន៍លេខនៃមួយអថេរពិត 1

១.១.១ និយមន័យ 1

១.១.២ ដែនកំណត់ 2

១.១.៣ សំណុំរូបភាព 3

១.១.៤ អនុគមន៍ច្រាស 4

១.២ លីមីតនៃអនុគមន៍ 7

១.២.១ លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រង់មួយចំនួនកំណត់ 7

១.២.២ លក្ខណៈនៃលីមីត 8

១.២.៣ លីមីតខាងឆ្វេងនិង ខាងស្តាំ 9

១.២.៤ លីមីតនៃអនុគមន៍បណ្តាក់ 11

១.៣ លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រង់អនន្ត 11

១.៣.២ លីមីតដែលមានរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$ 12

១.៣.២ លីមីតដែលមានរាងមិនកំណត់ $+\infty-\infty$ 13

១.៤ ភាពជាប់នៃអនុគមន៍ 15

១.៤.១ ភាពជាប់ត្រង់មួយចំណុច 15

១.៤.២ ភាពជាប់លើចន្លោះ 20

១.៤.៣ ភាពជាប់នៃអនុគមន៍បណ្តាក់ 25

១.៤.៤ អនុវត្តន៍៖ អនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់ 26

១.៥ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ 27

១.៥.១ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រង់មួយចំណុច 27

១.៥.២ ភាពមានដេរីវេ និងភាពជាប់ 28

១.៥.៣ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ 30

១.៥.៤ ដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្តាក់ 35

១.៥.៥ វិធានច្រវ៉ាក់ (The Chain Rule) 36

១.៥.៦ ដេរីវេបន្តបន្ទាប់ 37

១.៥.៧ រូបមន្ត Leibniz 40

១.៥.៨ ឌីផេរ៉ង់ស្យែល 42

១.៥.៩ ទ្រឹស្តីបទរ៉ូល 44

១.៥.១០ ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម 45

មេរៀនទី២ ព្រីមីទីវ និងអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ 49

២.១ ព្រីមីទីវ 49

២.១.១ និយមន័យ 49

២.១.២ ទ្រឹស្តីបទ 49

២.២ អាំងតេក្រាលមិនកំណត់ 50

២.២.១ និយមន័យ 50

២.២.២ រូបមន្តគ្រឹះនៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ 51

២.២.៣ អាំងតេក្រាលប្តូរអថេរ 53

២.២.៤ អាំងតេក្រាលដោយផ្នែក 55

២.២.៥ អាំងតេក្រាលប្រភាគសនិទាន 57

មេរៀនទី៣ អាំងតេក្រាលកំណត់ 60

៣.១អាំងតេក្រាលកំណត់ 60

៣.១.១ និយមន័យ 60

៣.១.២ លក្ខណៈ 60

៣.១.៣ គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ដោយប្តូរអថេរ 61

៣.១.៣ គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ដោយផ្នែក 63

៣.២ ផ្ទៃក្រឡាផ្នែកនៃប្លង់ 64

៣.២.១ផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ អ័ក្សអាប់ស៊ីសនិង 64

បន្ទាត់ឈរ 64

៣.២.២ ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាបពីរ 66

៣.៣ មាឌនៃសូលីត 69

៣.៣.១ មាឌនៃសូលីតបរិវត្តដែលបានពីរង្វិលជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីសនៃផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោង និង អ័ក្សអាប់ស៊ីស 69

មេរៀនទី៤ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល 74

៤.១ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១ 74

៤.១.១ និយមន័យ 74

៤.១.២ ដំណោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១ 75

៤.២ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី ២ 81

៤.២.១ និយមន័យ 81

៤.២.២ ដំណោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី២ អូម៉ូសែន មានមេគុណថេរ . 83

៤.១.៣ ដំណោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី២ មិនអូម៉ូសែន មានមេគុណថេរ 84

មេរៀនទី៥ ចំនួនកុំផ្លិច 90

៥.១ ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពិជគណិត 90

៥.១.១ សញ្ញាណនៃចំនួនកុំផ្លិច 90

៥.១.២ ប្រមាណវិធីលើចំនួនកុំផ្លិច 90

៥.១.២ ចំនួនកុំផ្លិចលើប្លង់កុំផ្លិច 92

៥.១.៣ វិចទ័ររូបភាពនៃផលបូក ផលដកចំនួនកុំផ្លិច និងផលគុណចំនួនកុំផ្លិចនឹងចំនួនពិតលើប្លង់កុំផ្លិច 94

៥.២ ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ 95

៥.២.១ ម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច 95

៥.២.២ អាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច 98
៥.២.៣ ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច 99
៥.២.៤ ផលគុណនិងផលចែកនៃចំនួនកុំផ្លិចតាមទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ 101
៥.២.៥ ស្វ័យគុណទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច 104
៥.២.៦ ឫសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច 105
៥.២.៧ ទម្រង់អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនៃចំនួនកុំផ្លិច 107
មេរៀនទី៦ ធរណីមាត្រវិភាគក្នុងលំហ 110
៦.១ កូអរដោនេក្នុងលំហ 110
៦.១.១ តម្រុយក្នុងលំហ 110
៦.១.២ កូអរដោនេនៃចំណុច 110
៦.១.៣ លក្ខណៈកូអរដោនេ 112
៦.១.៤ ទិសដៅកូស៊ីនុស 114
៦.២ ផលគុណស្កាលែនៃវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ 116
៦.២.១ និយមន័យ 116
៦.២.២ លក្ខណៈ 117
៦.២.៣ ផលគុណស្កាលែក្នុងគោលអរតូណរម៉ាល់ 119
៦.៣ ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ 122
៦.៣.១ និយមន័យ 122
៦.៣.២ លក្ខណៈផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ 124
៦.៣.៣ បំណកស្រាយផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រតាមបែបធរណីមាត្រ 125
៦.៤ អនុវត្តផលគុណពីរវ៉ិចទ័រនៅក្នុងរូបវិទ្យា៖ ម៉ូម៉ង់ $\overrightarrow{M}$ នៃកម្លាំង $\vec{F}$ 127
ចំពោះចំណុច P 127
៦.៥ បន្ទាត់ និងប្លង់ក្នុងលំហ 128
៦.៥.១ បន្ទាត់ក្នុងលំហ 128

៦.៥.២ ប្លង់ក្នុងលំហ 130
៦.៥.៣ មុំរវាងប្លង់ពីរ 131
៦.៥.៤ ចម្ងាយពីចំណុចមួយទៅប្លង់មួយក្នុងលំហ 133
៦.៥.៥ ចម្ងាយពីចំណុចមួយទៅបន្ទាត់មួយក្នុងលំហ 134
៦.៥.៦ ចម្ងាយរវាងបន្ទាត់ពីរក្នុងលំហ 136
ឯកសារពិគ្រោះ 140

អារម្ភកថា

ខ្លឹមសារមេរៀនដែលបានលើកឡើងក្នុងសៀវភៅនេះអាចជួយដោះស្រាយបញ្ហាក្នុងការបង្រៀន និងរៀនគណិតវិទ្យាដែលបង្កលក្ខណៈងាយស្រួលដល់គ្រូឧទ្ទេស គ្រូបង្រៀន គរុនិស្សិត គរុសិស្ស សិស្សានុសិស្សអាចយកសៀវភៅនេះជាឯកសារជំនួយ និងស្រាវជ្រាវសម្រាប់សាធារណៈជនទូទៅ ។ ជាមូលដ្ឋានគ្រឹះសម្រាប់ហ្វឹកហាត់គរុនិស្សិត សិស្សានុសិស្សបានសិក្សានូវរាល់ខ្លឹមសារស្របតាមកម្មវិធីដែលធ្វើឱ្យមេរៀននីមួយៗមានទំនាក់ទំនងគ្នាពីមួយចំណុចទៅមួយចំណុច និងឈានទៅចាប់យកចំណេះដឹងដ៏សម្បូរបែបដែលជាយានួយ៉ាងសំខាន់ឆ្ពោះកាន់វឌ្ឍនៈភាពនៃគណិតវិទ្យា ។

សិក្សាលម្អិតលើកម្មវិធីដែលអាចឱ្យអ្នកសិក្សាចេះប្រើប្រាស់បានដូចជា៖ មេរៀន ឧទាហរណ៍ លំហាត់អនុវត្ត លំហាត់ស្រាវជ្រាវ លំហាត់វិភាគ លំហាត់ប្រតិបត្តិ រួមមានវិធីផ្សេងក្នុងការដោះស្រាយដោយវិភាគ ការគិតត្រិះរិះពិចារណា យកទៅប្រើប្រាស់ក្នុងតថភាពជាក់ស្តែង ជាដើម ។

មេរៀនក្នុងសៀវភៅគណិតវិទ្យាសម្រាប់វិទ្យាសាស្ត្រ និងជួយឱ្យគរុនិស្សិតមានចំណេះដឹងមូលដ្ឋានគ្រឹះគណិតវិទ្យាទាំងទ្រឹស្តី វិភាគ និងការអនុវត្តដើម្បីងាយស្រួលក្នុងការសិក្សាមុខវិជ្ជាវិទ្យាសាស្ត្រ ថែមទាំងផ្សារភ្ជាប់គណិតវិទ្យា ជាមួយការពិសោធន៍បែបវិទ្យាសាស្ត្រ ។

សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ

ជាការពិតសៀវភៅ «គណិតវិទ្យាសម្រាប់វិទ្យាសាស្ត្រ២ » ដែលលេចចេញជារូបរាងនៅពេលនេះ គឺបានកើតឡើងពីការខិតខំ និងយកចិត្តទុកដាក់ចូលរួមពីភាគី និងស្ថាប័នពាក់ព័ន្ធជាច្រើន។

យើងខ្ញុំសូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅបំផុតដល់ភាគី និងស្ថាប័នពាក់ព័ន្ធទាំងអស់ដូចជា ៖

- ក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ ដែលបានគាំទ្រយ៉ាងពេញទំហឹងដល់ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាឱ្យបង្កើតមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ហៅកាត់ថា «មូលនិធិ ស.គ.ន»។

- ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាដែលបានបង្កើតមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ដែលហៅកាត់ថា «មូលនិធិ ស.គ.ន» ដើម្បីរួមចំណែកលើកកម្ពស់វប្បធម៌នៃការស្រាវជ្រាវ បំផុសគំនិតច្នៃប្រឌិត និងជំរុញការធ្វើនវានុវត្ត ដើម្បីជាប្រយោជន៍ដល់វិស័យអប់រំ យុវជន និងកីឡា ដែលឆ្លើយតបទៅនឹងទីផ្សារពលកម្ម និងសាកលភាវូបនីយកម្ម។

- មូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ដែលបានគាំទ្រដល់ការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា (Text book) ដែលនឹងត្រូវប្រើប្រាស់នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា ដើម្បីបង្កើនបរិមាណ លើកកម្ពស់គុណភាព និងពង្រីកសមធម៌នៃធនធានសិក្សាជាខេមរភាសាជូនដល់និស្សិតដែលកំពុងបន្តការសិក្សា និងត្រៀមខ្លួនធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។

- ឯកឧត្តមវិទ្យាស្ថានគរុកោសល្យបាត់ដំបងដែលបានចាត់តាំងជាគណៈកម្មការនិពន្ធចូលរួមការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សានេះ។

- នាយកដ្ឋានបណ្តុះបណ្តាលដែលបានចាត់តាំងជាគណៈកម្មការនិពន្ធ និងគណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យ លើស្នាដៃនៃការចូលរួមការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សានេះ។

- លោកប្រធាន នាយកដ្ឋានបណ្តុះបណ្តាលដែលព្រមព្រៀងទទួលសិទ្ធិជាតំណាងអ្នករៀបរៀងក្នុងការចាត់ចែង និងសម្របសម្រួលជាមួយក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ចុះហត្ថលេខាលើកិច្ចព្រមព្រៀង និងកិច្ចដំណើការទូទាត់ថវិកាតាមរយៈការស្នើសុំ និងទទួលថវិកា បោះពុម្ព និងផ្សព្វផ្សាយបន្តនូវស្នាដៃរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អរបស់អ្នករៀបរៀងក្នុងការរៀន និងបង្រៀនក្នុងគ្រឹះស្ថានសិក្សា និងប្រគល់សិទ្ធិស្របតាមការកំណត់នៃកិច្ចព្រមព្រៀង ស្តីពីការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា ក្រោមការគាំទ្រនៃមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍។

- គ្រូឧទ្ទេសមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យានៃវិទ្យាស្ថានគរុកោសល្យាបាត់ដំបង ដែលបានផ្តល់មតិកែលម្អលើខ្លឹមសារ នៃមេរៀននីមួយៗឱ្យកាន់តែមានភាពសុក្រឹត និងមានលក្ខណៈវិទ្យាសាស្ត្រ។

យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថា សៀវភៅនេះនឹងឆ្លើយតបជាបន្ទាន់ចំពោះការខ្វះខាតធនធានសិក្សា ដែលជាតម្រូវការសិក្សារបស់សិស្ស និស្សិត នៅកម្រិតវិទ្យាល័យ និងឧត្តមសិក្សា។

ការបរិយាយលើមុខវិជ្ជា

ខ្លឹមសារមេរៀនដែលបានលើកឡើងក្នុងសៀវភៅនេះអាចជួយដោះស្រាយបញ្ហាក្នុងការបង្រៀន និងរៀនគណិតវិទ្យាដែលបង្កលក្ខណៈងាយស្រួលដល់គ្រូឧទ្ទេស គ្រូបង្រៀន គរុនិស្សិត គរុសិស្ស សិស្សានុសិស្សអាចយកសៀវភៅនេះជាឯកសារជំនួយ និងស្រាវជ្រាវសម្រាប់សាធារណៈជនទូទៅ ។ ជាមូលដ្ឋានគ្រឹះសម្រាប់ហ្វឹកហាត់គរុនិស្សិត សិស្សានុសិស្សបានសិក្សានូវរាល់ខ្លឹមសារស្របតាមកម្មវិធីដែលធ្វើឱ្យមេរៀននីមួយៗមានទំនាក់ទំនងគ្នាពីមួយចំណុចទៅមួយចំណុច និងឈានទៅចាប់យកចំណេះដឹងដ៏សម្បូរបែបដែលជាយានដ៏យ៉ាងសំខាន់ឆ្ពោះកាន់វឌ្ឍនៈភាពនៃគណិតវិទ្យា ។

សិក្សាលម្អិតលើកម្មវិធីដែលអាចឱ្យអ្នកសិក្សាចេះប្រើប្រាស់បានដូចជាៈ មេរៀន ឧទាហរណ៍ លំហាត់អនុវត្ត លំហាត់ស្រាវជ្រាវ លំហាត់វិភាគ លំហាត់ប្រតិបត្តិ រួមមានវិធីផ្សេងក្នុងការដោះស្រាយដោយវិភាគ ការគិតត្រិះរិះពិចារណា យកទៅប្រើប្រាស់ក្នុងតថភាពជាក់ស្តែង ជាដើម ។

មេរៀនក្នុងសៀវភៅគណិតវិទ្យាសម្រាប់វិទ្យាសាស្ត្រ និងជួយឱ្យគរុនិស្សិតមានចំណេះដឹងមូលដ្ឋានគ្រឹះគណិតវិទ្យាទាំងទ្រឹស្តី វិភាគ និងការអនុវត្តដើម្បីងាយស្រួលក្នុងការសិក្សាមុខវិជ្ជាវិទ្យាសាស្ត្រ ថែមទាំងផ្សារភ្ជាប់គណិតវិទ្យា ជាមួយការពិសោធន៍បែបវិទ្យសាស្ត្រ ។

មុខវិជ្ជានេះរួមមានៈ

១. អនុគមន៍លេខនៃមួយអថេរពិត

២. ព្រីមីទីវ និងអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

៣. អាំងតេក្រាលកំណត់

៤. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

៥. ចំនួនកុំផ្លិច

៦. ធរណីមាត្រវិភាគក្នុងលំហ

ដើម្បីឱ្យគរុនិស្សិត និងអ្នកសិក្សាបានយល់ និងចេះកាន់តែច្បាស់ លើមូលដ្ឋានគ្រឹះគណិតវិទ្យា ។

មូលន័យសង្ខេប

សៀវភៅនេះផ្តោតសំខាន់ទៅលើការសិក្សាពីគណិតវិទ្យាផ្សារភ្ជាប់ទៅនឹងវិទ្យាសាស្ត្រ និងបន្ថែមនូវចំណុចខ្លះៗដែលមាននៅក្នុងកម្រិតទុតិយភូមិ ដែលមានមេរៀនសង្ខេប និយមន័យ ទ្រឹស្តីបទ ឧទាហរណ៍ លំហាត់អនុវត្ត ជាដើម ព្រមទាំងមានទំនាក់ទំនងនៃមេរៀននីមួយៗ ។ នៅក្នុងមេរៀនអនុគមន៍លេខនៃមួយអថេរពិត មានគោលបំណងឱ្យអ្នកសិក្សាបានយល់ច្បាស់ពីទំនាក់ទំនងនៃ លីមីត និងដេរីវេ ដែលអាចប្រើប្រាស់ក្នុងតថភាពរស់នៅជាក់ស្តែង ដែលស្ថាបត្យករតែងតែប្រើប្រាស់ដើម្បីសាងសង់អាគារធំៗ ផ្លូវថ្នល់ ស្ពាន ... ជាដើម ដើម្បីកំណត់បានពីទម្ងន់ដែលអាគារ ស្ពាន ឬផ្លូវថ្នល់ទ្រទ្រង់បាន និងកំណត់ពីរយៈពេល ឬអាយុនៃសំណង់ទាំងនោះ ។ ចំពោះមេរៀនព្រីមីទីវ និងអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ និងអាំងតេក្រាលកំណត់ ជាមេរៀនមួយដែលសំខាន់ចំពោះមុខវិជ្ជាវិទ្យាសាស្ត្រ ដូចជាមុខវិជ្ជារូបវិទ្យា ដែលអាចយកទៅគណនារក ផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់ គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាបពីរ និងគណនារកមាឌនៃសូលីតបរិវត្ត ។ ដោយឡែកមេរៀន សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល មានទំនាក់ទំនងយ៉ាងសំខាន់ដែលអាចឱ្យអ្នកវិទ្យាសាស្ត្រធ្វើជាគំរូ និងវិភាគបាតុភូតធម្មជាតិ ពិពណ៌នាអំពីចលនារបស់វត្ថុលំហូរនៃអង្គធាតុរាវ និង ឥរិយាបទនៃសៀវគ្វីអគ្គិសនី ... និងសម្រាប់មុខវិជ្ជាជីវវិទ្យា សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល មានសារៈសំខាន់ យកទៅប្រើដើម្បីយកគំរូសក្តានុពលចំនួនប្រជាជន និងដំណើរការជីវសាស្ត្រផ្សេងទៀត ចំពោះវិស្វកម្ម សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលគឺមាន សារសំខាន់សម្រាប់ការរចនាប្រព័ន្ធគ្រប់គ្រង ការវិភាគរចនាសម្ព័ន្ធ និងការយល់ដឹងអំពីការផ្ទេរកំដៅ ។ ចំណែកឯមេរៀនទី៥ ចំនួនកុំផ្លិច មានសារៈសំខាន់នៅក្នុងវិស្វកម្មអគ្គិសនី សម្រាប់លេខដែលស្មុគស្មាញត្រូវបានប្រើប្រាស់ដើម្បីតំណាងឱ្យ Impedance នៅក្នុងសៀគ្វី ដែលអនុញ្ញាតឱ្យមានការវិភាគនៃសៀគ្វីចរន្តឆ្លាស់ លើសពីនេះ ចំនួនកុំផ្លិចគឺជា មូលដ្ឋានគ្រឹះនៅក្នុងមេកានិចកង់ទិច ដែលមានមុខងាររលកត្រូវបានប្រើជាញឹកញាប់នៅក្នុងចំនួនកុំផ្លិច ហើយចំនួនកុំផ្លិចក៏ត្រូវបានប្រើផងដែរនៅក្នុងដំណើរការសញ្ញា ចំពោះលេខដែលស្មុគស្មាញត្រូវបានប្រើក្នុងដំណើរការសញ្ញាសម្រាប់វិភាគ និងរៀបចំសញ្ញាទាំងក្នុងដែលពេលវេលា និងប្រេកង់ ... ។ សម្រាប់មេរៀនធរណីមាត្រក្នុងលំហ ពិតជាដើរតួនាទីយ៉ាងសំខាន់ ក្នុងវិស័យវិទ្យាសាស្ត្រយ៉ាងច្រើនដូចជា រូបវិទ្យា វិទ្យាសាស្ត្រកុំព្យូទ័រ វិស្វកម្ម និងស្ថិតិ វ៉ិចទ័រក្នុងលំហផ្តល់នូវក្របខ័ណ្ឌគណិតវិទ្យាសម្រាប់តំណាង និងវិភាគបរិមាណរូបវន្ត ដូចជាកម្លាំង ល្បឿន អគ្គិសនី និងពិពណ៌នាបាតុភូតពិតយ៉ាងត្រឹមត្រូវ ចំពោះការវិភាគទិន្នន័យ នៅក្នុងការរៀនម៉ាស៊ីន និងការវិភាគ ទិន្នន័យវ៉ិចទ័រត្រូវបានប្រើដើម្បីតំណាងឱ្យចំណុចទិន្នន័យវិមាត្រក្នុងលំហខ្ពស់ ។ បច្ចេកទេសដូចជាការចង្កោម ការចាត់ថ្នាក់ និងការកាត់បន្ថយវិមាត្រ ពឹងផ្អែកយ៉ាងខ្លាំងលើវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ ។

មេរៀនទី១ អនុគមន៍លេខនៃមួយអថេរពិត

១.១ អនុគមន៍លេខនៃមួយអថេរពិត

១.១.១ និយមន័យ

A និង B ជាសំណុំមិនទទេ។ បើទំនាក់ទំនង f ពីសំណុំ A ទៅសំណុំ B ភ្ជាប់ធាតុនីមួយៗនៃសំណុំ A ទៅធាតុតែមួយគត់នៃសំណុំ B នោះទំនាក់ទំនង f ហៅថាអនុគមន៍ពីសំណុំ A ទៅសំណុំ B។

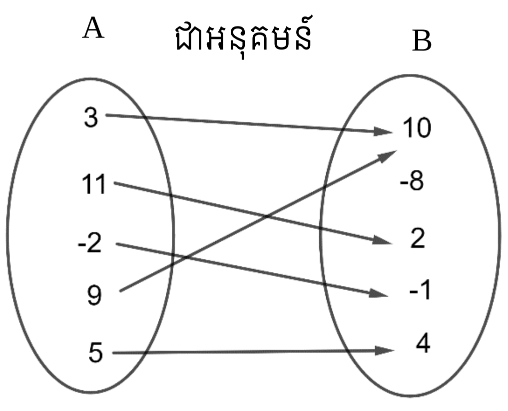
បើ f ជាអនុគមន៍ពីសំណុំ A ទៅសំណុំ B នោះគេកំណត់សរសេរ៖

$$f : A \to B$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

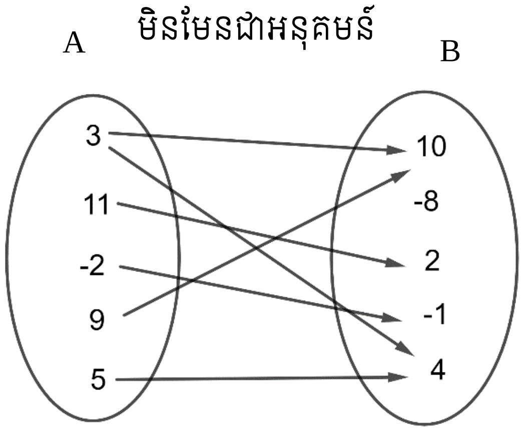
A ហៅថា **សំណុំដើម** ហើយ x ជាធាតុដើម និង x ហៅថាអថេរមិនអាស្រ័យ។

B ហៅថា **សំណុំចុង** ហើយ y ជារូបភាពនៃ x តាម f និង $y = f(x)$ ហៅថាអថេរអាស្រ័យ។

ឧទាហរណ៍១៖



រូបភាព១.១



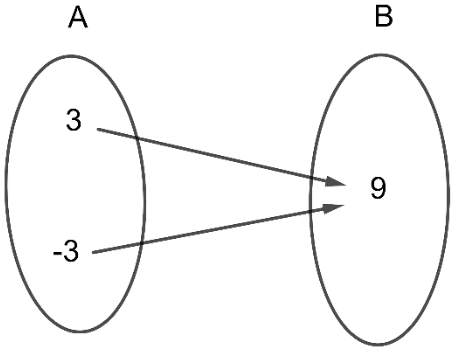
រូបភាព១.២

ឧទាហរណ៍ទី២៖ ចំពោះកន្សោមខាងក្រោម តើកន្សោមមួយណាជាអនុគមន៍ ហើយកន្សោមមួយណាមិនមែនជាអនុគមន៍?

ក. $y = x^2$ ខ. $y^2 = x$

ចម្លើយ

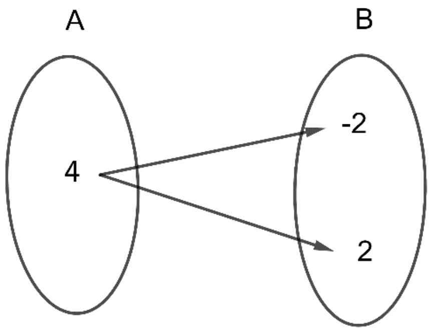
ក. ចំពោះកន្សោម $y = x^2$ ជាអនុគមន៍ ព្រោះ បើ $x = 3$ នោះ $y = 3^2 = 9$, បើ $x = -3$ នោះ $y = (-3)^2 = 9$ ។



រូបភាព១.៣

យើងសង្កេតឃើញថា ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x មួយឱ្យរូបភាព y តែមួយគត់ ។

ខ. ចំពោះកន្សោម $y^2=x$ មិនមែនជាអនុគមន៍ទេ ព្រោះបើ x សង្កេតឃើញថា តម្លៃ x មួយឱ្យរូបភាព y ពីរផ្សេងគ្នា។



រូបភាព១.៤

ប្រតិបត្តិ តើទំនាក់ទំនងខាងក្រោមជាអនុគមន៍ដែរឬទេ? ព្រោះអ្វី?

ក. $x=(y-5)^2$ ខ. $y=(2x+3)^2$ គ. $y=x^2-2x+3$

១.១.២ ដែនកំណត់

ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ តាងដោយ D គឺជាសំណុំនៃតម្លៃ x ដែលធ្វើអោយអនុគមន៍ $y=f(x)$ មានន័យ ឬធ្វើអោយអនុគមន៍អាចកំណត់តម្លៃបាន។

ឧទាហរណ៍១៖ រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $y=5x^6+3x^4+x^2+4$ ។

អនុគមន៍កំណត់បានចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $y=5x^6+3x^4+x^2+4$ គឺ $D=\mathbb{R}$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $g(x)=\dfrac{2x+1}{3x+4}$ ។

អនុគមន៍កំណត់បានកាលណា $3x+4\neq 0$ ឬ $x\neq -\dfrac{4}{3}$

ដូចនេះដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $g(x)=\dfrac{2x+1}{3x+4}$ គឺ $D=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{4}{3}\right\}$ ។

ឧទាហរណ៍៣៖ រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $y=e^{\sqrt{x^2-4}}$ ។

អនុគមន៍មានន័យកាលណា $x^2-4\geq 0\Leftrightarrow(x-2)(x+2)\geq 0$

$x-2=0\Rightarrow x=2,\ x+2=0\Rightarrow x=-2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2-4\geq 0$		$+$	0	$-$	0	$+$	

តាមតារាងយើងបានដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $y=e^{\sqrt{x^2-4}}$ គឺ $D=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$ ។

ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍មួយចំនួន៖

- អនុគមន៍ពហុធា $y=a_1x^n+a_2x^{n-1}+....+a_nx+a_0$ មានន័យចំពោះ $\forall x\in\mathbb{R}$ ឬ $D=\mathbb{R}$ ។
- អនុគមន៍សនិទាន $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ មានន័យកាលណា $g(x)\neq 0$ ។
- អនុគមន៍អសនិទាន $y=\sqrt[n]{f(x)}$ ដែល n ជាចំនួនគត់គូ មានន័យកាលណា $f(x)\geq 0$ ។
- អនុគមន៍អសនិទាន $f(x)=\sqrt[n]{f(x)}$ ដែល n ជាចំនួនគត់សេស កំណត់បានចំពោះ $\forall x\in\mathbb{R}$ ។
- អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $y=e^{f(x)}$ កំណត់បានចំពោះ $\forall x\in\mathbb{R}$ ។
- អនុគមន៍លោការីតនេពែ $y=\ln f(x)$ មានន័យកាលណា $f(x)>0$ ។
- អនុគមន៍កូស៊ីនុស $y=\text{cosx}$ កំណត់បានចំពោះ $\forall x\in\mathbb{R}$ ។
- អនុគមន៍ស៊ីនុស $y=\sin x$ កំណត់បានចំពោះ $\forall x\in\mathbb{R}$ ។

ប្រតិបត្តិ ៖ ចូររកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

1) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-x+3}$

2) $y=\sqrt{x^2-3x+2}$

3) $h(x)=\ln(3x-4)$

4) $y=\dfrac{\sin x+1}{\cos x}$

5) $h(x)=\sin x+x-1$

6) $g(x)=5\cos x-\dfrac{3}{x+3}-1$

7) $y=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}$

១.១.៣ សំណុំរូបភាព

សំណុំរូបភាពនៃអនុគមន៍ f ដែលតាងដោយ I គឺជាសំណុំតម្លៃ $y=f(x)$ ចំពោះគ្រប់ x នៅលើដែនកំណត់ D ។

ឧទាហរណ៍១៖ រកសំណុំរូបភាពនៃអនុគមន៍ $y=3x+1$ ។

អនុគមន៍កំណត់បានចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x $(D=\mathbb{R})$ ។ ដូចនេះសំណុំរូបភាពនៃអនុគមន៍ $y=3x+1$ គឺ $I=\mathbb{R}$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ រកសំណុំរូបភាពនៃអនុគមន៍ $y=2x+1,\ x\geq 0$ ។

ចំពោះគ្រប់ $x\geq 0$ គេបាន:

$$2x\geq 0$$
$$\Leftrightarrow 2x+1\geq 1$$
$$\Leftrightarrow \quad y\geq 1$$

ដូចនេះសំណុំរូបភាពនៃអនុគមន៍ $y=2x+1,\ x\geq 0$ គឺ $I=\{y\,|\,y\geq 1\}$ ។

ឧទាហរណ៍៣៖ រកសំណុំរូបភាពនៃអនុគមន៍ $y=3-2x$ ដែលត្រូវនឹងដែនកំណត់ $\{x\in\mathbb{R}\,|-1\le x\le 2\}$ ។

ចំពោះគ្រប់ $-1\le x\le 2$ គេបាន:

$$2\ge -2x\ge -4$$
$$\Leftrightarrow 5\ge 3-2x\ge -1$$
$$\Leftrightarrow -1\le y\le 5$$

ដូចនេះសំណុំរូបភាពនៃអនុគមន៍ y គឺ $I=\{y\in\mathbb{R}\,|-1\le y\le 5\}$ ។

ប្រតិបត្តិ រកសំណុំរូបភាពនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

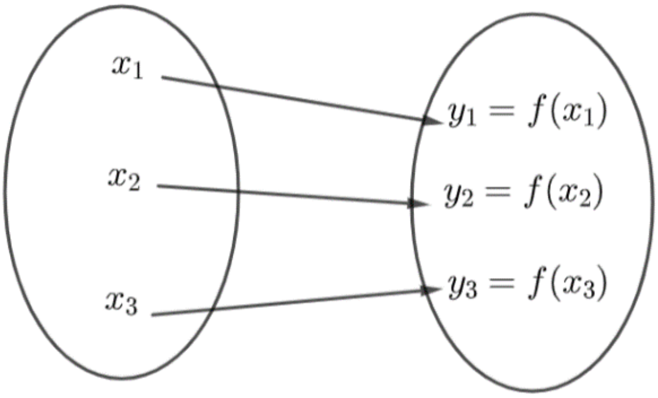
ក. $y=4x-5 \quad ,(x\le 3)$

ខ. $y=x^2$, $-2\le x\le 3$

គ. $y=\dfrac{x-3}{4}$, $2\le x<7$

១.១.៤ អនុគមន៍ច្រាស

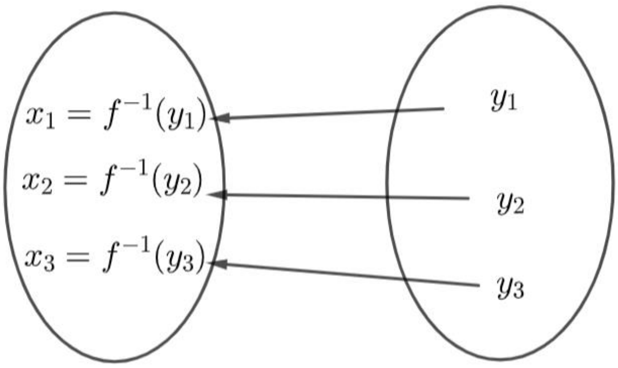
គេមានដ្យាក្រាមតាងឱ្យអនុគមន៍ $f:A\to B$ គេភ្ជាប់ធាតុនៃសំណុំដើម A ទៅធាតុនៃសំណុំរូបភាព B តាមអនុគមន៍ f ។



រូបភាព ១.៥

ចំពោះអនុគមន៍ f នេះបង្កើតបានអនុគមន៍ f^{-1} ដោយភ្ជាប់ធាតុនៃសំណុំ B ទៅសំណុំ A វិញដូចដ្យាក្រាមខាងក្រោមខាងស្តាំ។

គេថាអនុគមន៍ f^{-1} ជា**អនុគមន៍ច្រាស** នៃអនុគមន៍ f ។



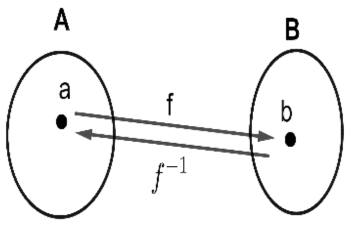
រូបភាព ១.៦

ជាទូទៅ៖ បើ f ជាអនុគមន៍មួយទល់មួយ យើងបាន៖

(1) f មានអនុគមន៍ច្រាស f^{-1}

(2) b ជារូបភាពនៃ a តាម $f \Leftrightarrow a$ ជារូបភាពនៃ b តាម f^{-1}។

មានន័យថា $b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$។



ឧទាហរណ៍១៖ គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = 4x + 3$។

រកអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ f រួច សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ f និង អនុគមន៍ f^{-1}។

ចម្លើយ

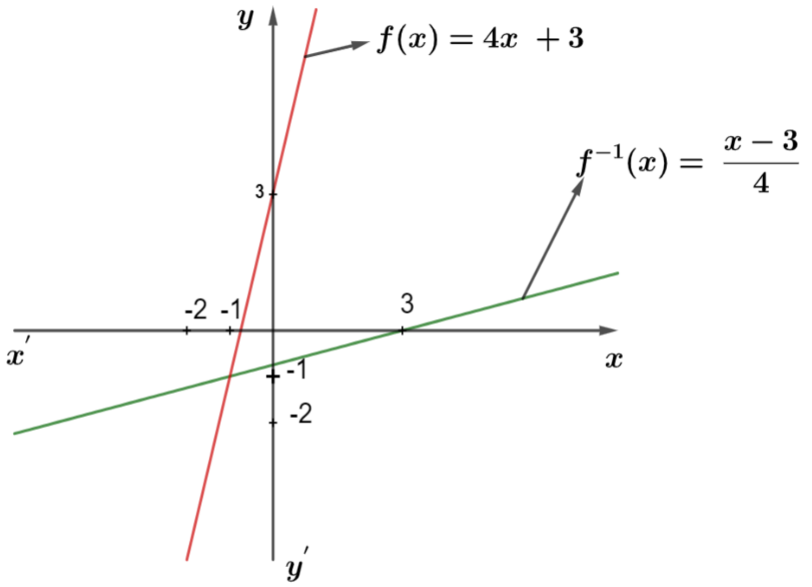
យើងមាន $f(x) = 4x + 3$

ជំនួស $f(x)$ ដោយ y យើងបាន $y = 4x + 3$

ជំនួស x ដោយ y និង ជំនួស y ដោយ x គេបាន $x = 4y + 3$ នោះ $y = \frac{x-3}{4}$

ជំនួស y ដោយ f^{-1} យើងបាន $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{4}$

ដូចនេះអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ $f(x) = 4x + 3$ គឺ $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{4}$។



រូបភាព១.៧

ឧទាហរណ៍២៖ គេមានអនុគមន៍ $g(x) = \frac{5}{2x-1}$ ដែល $x > \frac{1}{2}$។

ក. រកអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ g។

ខ. សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ $g(x)$ និងអនុគមន៍ច្រាស $g^{-1}(x)$។

ចម្លើយ

ក. អនុគមន៍ g កំណត់បានចំពោះគ្រប់ $x>\frac{1}{2}$ ។

ជំនួស g ដោយ y គេបាន $y=\frac{5}{2x-1}$

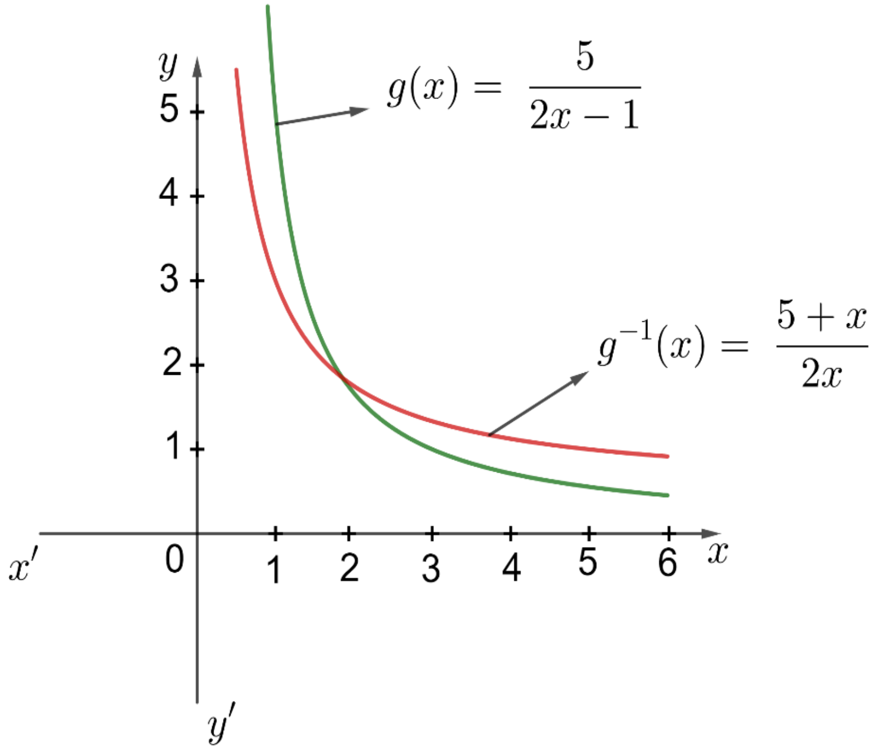
ជំនួស x ដោយ y និង ជំនួស y ដោយ x គេបាន $x=\frac{5}{2y-1}$

នាំឱ្យ $y=\frac{5}{2x}+\frac{1}{2}=\frac{5+x}{2x}$

ជំនួស y ដោយ $g^{-1}(x)$ យើងបាន $g^{-1}(x)=\frac{5+x}{2x}$ ។

ដូចនេះអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ $g(x)$ គឺ $g^{-1}(x)=\frac{5+x}{2x}$ ។

ខ. សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ $g(x)$ និងអនុគមន៍ច្រាស $g^{-1}(x)$



រូបភាព ១.៨

ប្រតិបត្តិ គេមានអនុគមន៍ $h(x)=3-4x$ ។

ក. រកអនុគមន៍ច្រាស នៃអនុគមន៍ $h(x)$ ។

ខ. សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ $h(x)$ និង $h^{-1}(x)$ ។

១.២ លីមីតនៃអនុគមន៍

១.២.១ លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រង់មួយចំនួនកំណត់

និយមន័យ

១. អនុគមន៍ f មានលីមីត L កាលណា x ខិតជិត a បើគ្រប់ចំនួន $\varepsilon>0$ មានចំនួន $\delta>0$ ដែល $0<|x-a|<\delta$ នាំឱ្យ $|f(x)-L|<\varepsilon$ ។

គេសរសេរ : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ ។

២. អនុគមន៍ f មានលីមីត $+\infty$ (ឬ $-\infty$) កាលណា x ខិតជិត a បើគ្រប់ចំនួន $M>0$ មាន $\delta>0$ ដែល $0<|x-a|<\delta$ នាំឱ្យ $f(x)>M$ (ឬ $f(x)<-M$)។

គេសរសេរ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ ឬ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ ។

ឧទាហរណ៍១៖ គេមានអនុគមន៍ $f(x)=3x+1$ ។

ដោយប្រើនិយមន័យ បង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=7$ ។

គេមាន: $|f(x)-7|=|3x+1-7|=|3x-6|=3|x-2|$

$$\forall\varepsilon>0, |f(x)-7|<\varepsilon \Leftrightarrow 3|x-2|<\varepsilon$$

$$|x-2|<\frac{\varepsilon}{3}$$

តាង $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$ យើងបាន $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ ដែល $|x-2|<\delta$ នាំឱ្យ $|f(x)-7|<\varepsilon$ ។

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 2}(3x+1)=7$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ ដោយប្រើនិយមន័យបង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x+2}=\sqrt{3}$ ។

យើងមាន: $|f(x)-\sqrt{3}|=|\sqrt{x+2}-\sqrt{3}|$

$<|\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3}\right)|$ ព្រោះ $\sqrt{x+2}+\sqrt{3}>0$

$<|\ x+2-3|$

$<|\ x+2-3|$

$<|x-1|$

យើងបាន $\forall\varepsilon>0$ យក $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ ដែល $|x-1|<\delta$ នាំឱ្យ $|f(x)-\sqrt{3}|<\varepsilon$ ។

ដូចនេះតាមនិយមន័យ $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x+2}=\sqrt{3}$ ។

ឧទាហរណ៍៣៖ គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\frac{3x+2}{x-2}$ ។ ដោយប្រើនិយមន័យបង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$ ។

យើងមាន $f(x)=\frac{3x+2}{x-2}=\frac{3x-6+8}{x-2}=\frac{3(x-2)}{x-2}+\frac{8}{x-2}=3+\frac{8}{x-2}$

កំណត់ចំនួន $M>0$ ដែល $f(x)>M$ យើងគ្រាន់តែឱ្យ $\frac{8}{x-2}>M$ ។

$\frac{8}{x-2}>M$ និង $x>2 \Leftrightarrow \frac{x-2}{8}<\frac{1}{M}$

$$\Leftrightarrow 0<|x-2|<\frac{8}{M}$$

ចំពោះ $M>0$ មាន $\delta=\frac{8}{M}>0$ ដែល $0<|x-2|<\delta$ នាំឱ្យ $f(x)>M$ ។

ឧទាហរណ៍៣៖ គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$ ។ ដោយប្រើនិយមន័យបង្ហាញថា $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x)=-\infty$ ។

យើងមាន $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}=\frac{2x-6+7}{x-3}=2+\frac{7}{x-3}$

កំណត់ចំនួន $M>0$ ដែល $f(x)<-M \Leftrightarrow 2+\frac{7}{x-3}<-M$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{x-3}<-(M+2)$$

$$\Leftrightarrow x-3>-\frac{7}{M+2}$$

$$\Leftrightarrow 0<|x-3|<\frac{7}{M+2}$$

ចំពោះ $M>0$ មាន $\delta=\frac{7}{M+2}>0$ ដែល $0<|x-3|<\delta$ នាំឱ្យ $f(x)<-M$ ។

ដូចនេះ $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x)=-\infty$ ។

ប្រតិបត្តិ ដោយប្រើនិយមន័យចូរបង្ហាញថា :

ក. $\lim\limits_{x\to 0}(4x-3)=-3$ ខ. $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x+7}=3$

គ. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{5}{x}=+\infty$ ឃ. $\lim\limits_{x\to 5^-}\frac{x-3}{x-5}=-\infty$

១.២.២ លក្ខណៈនៃលីមីត

បើ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=M$ និង $\lim\limits_{x\to a} h(x)=N$ ដែល a អាចជាចំនួនកំណត់ ឬ អនន្ត ហើយ L, M និង N ជាចំនួនពិត នោះគេបាន៖

1. $\lim\limits_{x\to a} kf(x)=kL$, k ជាចំនួនថេរ
2. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=L+M$
3. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\pm h(x)\right]=L\pm M\pm N$
4. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=L\cdot M$
5. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{L}{M}$ ដែល $M\neq 0$, $g(x)\neq 0$ ។
6. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^n=L^n$
7. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)^m}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)^m}=\sqrt[n]{L^m}$

ឧទាហរណ៍១៖ គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim_{x\to 3}\left(2x^4+5x^3-x+7\right)$ ខ. $\lim_{x\to\frac{1}{3}}\left(9x^2+2\right)\left(3x^3+5\right)$

គ. $\lim_{x\to -2}\sqrt{\frac{x+6}{7-x}}$ ឃ. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$

ចម្លើយ

ក. $\lim_{x\to 3}\left(2x^4+5x^3-x+7\right)$

$=2\lim_{x\to 3}x^4+5\lim_{x\to 3}x^3-\lim_{x\to 3}x+\lim_{x\to 3}7$

$=2(3)^4+5(3)^3-(3)+7$

$=301$

ខ. $\lim_{x\to\frac{1}{3}}\left(9x^2+2\right)\left(3x^3+5\right)=\lim_{x\to\frac{1}{3}}\left(9x^2+2\right)\times\lim_{x\to\frac{1}{3}}\left(3x^3+5\right)$

$$=\left[9\left(\frac{1}{3}\right)^2+2\right]\times\left[3\left(\frac{1}{3}\right)^3+5\right]=3\times\frac{46}{9}=\frac{46}{3}$$

គ. $\lim_{x\to -2}\sqrt{\frac{x+6}{7-x}}=\sqrt{\frac{\lim_{x\to -2}(x+6)}{\lim_{x\to -2}(7-x)}}=\sqrt{\frac{-2+6}{7+2}}=\frac{2}{3}$

ឃ. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ រាង $\frac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)}{(x+2)}=\frac{2-1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

សម្គាល់៖ បើភាគយក និងភាគបែងមានម្លៃលីមីតសូន្យដូចគ្នា នោះគេត្រូវគណនាតាមជំហាន៖

- បំបែកតួទាំងពីរនៃប្រភាគជាផលគុណកត្តា
- សម្រួលកត្តារួមចោល
- រកលីមីតនៃកន្សោមថ្មី

ប្រតិបត្តិ គណនា

ក. $\lim_{x\to 4}\sqrt{\frac{x^2-3x+4}{2x^2-x-1}}$ ខ. $\lim_{x\to -\frac{2}{3}}(3x+5)\left(27x^3-2\right)(1-9x)$

គ. $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-5x+3}{x^2+x-2}$

១.២.៣ លីមីតខាងឆ្វេងនិង ខាងស្តាំ

ជាទូទៅ

- បើ $f(x)$ ខិតជិត L កាលណា x ខិតជិត x_0 ពីខាងឆ្វេងនោះ L លីមីតខាងឆ្វេងនៃ $f(x)$ ហើយកំណាត់សរសេរ $\lim_{x\to x^-_0}f(x)=L$ ។

– បើ $f(x)$ ខិតជិត R កាលណា x ខិតជិត x_0 ពីខាងស្តាំនោះ R ជាលីមីតខាងស្តាំនៃ $f(x)$ ហើយកំណត់សរសេរ $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = R$ ។

– អនុគមន៍ $y = f(x)$ មានលីមីតត្រង់ x_0 លុះត្រាតែលីមីតខាងឆ្វេងស្មើនឹងលីមីតខាងស្តាំ។

ឧទាហរណ៍១៖ គេមានអនុគមន៍ $y = f(x) = \begin{cases} x^2+1 \ , x \le 1 \\ 2x+3 \ , x \ge 1 \end{cases}$ ។

ក. គណនា $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ និង $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ ។

ខ. តើអនុគមន៍ f មានលីមីតត្រង់ $x = 1$ ដែរឬទេ?

ចម្លើយ

ក. $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1}(2x+3) = 2+3 = 5$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1}(x^2+1) = 1+1 = 2$

ខ. ដោយ $\lim_{x \to 1^+} f(x) \ne \lim_{x \to 1^-} f(x)$ នោះអនុគមន៍ f គ្មានលីមីតត្រង់ $x = 1$ ទេ។

ឧទាហរណ៍២៖ គេមានអនុគមន៍ $y = |x-2|$ ។

ក. គណនា $\lim_{x \to 2} |x-2|$ ។

ខ. តើអនុគមន៍ $y = |x-2|$ មានលីមីតត្រង់ $x = 2$ ដែរឬទេ?

ចម្លើយ

ក. គណនា $\lim_{x \to 2} |x-2|$

$y = |x-2| = \begin{cases} -x+2, \ x < 2 \\ x-2 \ , \ x \ge 2 \end{cases}$

យើងបាន៖

$\lim_{x \to 2^-} y = \lim_{x \to 2}(-x+2) = 0$

$\lim_{x \to 2^-} y = \lim_{x \to 2}(-x+2) = 0$

ខ. តើអនុគមន៍ $y = |x-2|$ មានលីមីតត្រង់ $x = 2$ ដែរឬទេ?

ដោយ $\lim_{x \to 2^-} y = \lim_{x \to 2^+} y = 0$ នោះអនុគមន៍ $y = |x-2|$ មានលីមីតត្រង់ $x = 2$ ដែល $\lim_{x \to 2} |x-2| = 0$ ។

ប្រតិបត្តិ

១. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \begin{cases} 5x+1, x \le 0 \\ \dfrac{1}{x+1} \ , \ x > 0 \end{cases}$ ។

ក. គណនា $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ និង $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ ។

ខ. តើអនុគមន៍ $f(x)$ មានលីមីតត្រង់ $x = 0$ ដែរឬទេ?

២. គេមានអនុគមន៍ $g(x) = |x+3|$ ។

សិក្សាភាពមានលីមីតនៃអនុគមន៍ $g(x)$ ត្រង់ $x = -3$ ។

១.២.៤ លីមីតនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់

ជាទូទៅ៖ បើ f និង g ជាអនុគមន៍ដែលមានលីមីត $\lim_{x\to a} g(x)=L$ និង $\lim_{x\to L} f(x)=f(L)$ នោះ $\lim_{x\to a} f\left[g(x)\right]=f(L)$ ។

ឧទាហរណ៍១៖ គណនា $\lim_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x+6}{3x-5}}$ ។

ដោយ $\lim_{x\to 3}\dfrac{x+6}{3x-5}=\dfrac{3+6}{3\times 3-5}=\dfrac{9}{4}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x+6}{3x-5}}=\lim_{x\to 3}\sqrt{X}=\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\dfrac{3}{2}$

ឧទាហរណ៍២៖ គណនា $\lim_{\substack{x\to 4\\ x>4}}\left(\dfrac{x^2+2x-4}{4-x}\right)^3$ ។

ដោយ $\lim_{\substack{x\to 4\\ x>4}}\dfrac{x^2+2x-4}{4-x}=\dfrac{4^2+2\times 4-4}{4-4^+}=\dfrac{20}{0^-}=-\infty$

$\Rightarrow \lim_{\substack{x\to 4\\ x>4}}\left(\dfrac{x^2+2x-4}{4-x}\right)^3=(-\infty)^3=-\infty$ ។

១.៣ លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រង់អនន្ត

១.៣.១ និយមន័យ

- អនុគមន៍ f មានលីមីត L កាលណា x ខិតទៅ $+\infty$ (ឬ $-\infty$) បើចំពោះគ្រប់ចំនួន $\varepsilon>0$ មាន $N>0$ ដែល $x>N$ (ឬ $x<-N$) នាំឱ្យ $|f(x)-L|<\varepsilon$ ។
  គេសរសេរ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$ ឬ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$ ។
- អនុគមន៍ f មានលីមីត $+\infty$ កាលណា x ខិតទៅ $+\infty$ បើចំពោះគ្រប់ $M>0$ មាន $N>0$ ដែល $x>N$ នាំឱ្យ $f(x)>M$ ។
  គេសរសេរ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ។
- អនុគមន៍ f មានលីមីត $+\infty$ កាលណា x ខិតទៅ $-\infty$ បើចំពោះគ្រប់ $M>0$ មាន $N>0$ ដែល $x<-N$ នាំឱ្យ $f(x)>M$ ។
  គេសរសេរ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ។

ឧទាហរណ៍១៖ គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{6x+1}{2x-3}$ កំណត់បានចំពោះ $x\neq\dfrac{2}{3}$ ។

បង្ហាញថា $\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$ ។

យើងមាន $f(x)-3=\dfrac{6x+1}{2x-3}-3=\dfrac{6x+1-6x+9}{2x-3}=\dfrac{10}{2x-3}$

$|f(x)-3|<\varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{10}{|2x-3|}<\varepsilon,\ \varepsilon>0$

$\Leftrightarrow |2x-3|>\dfrac{10}{\varepsilon}$

$\Leftrightarrow 2x-3>\frac{10}{\varepsilon}$ ព្រោះ $x\to+\infty$ នាំឱ្យ $2x-3>0$

$\Leftrightarrow x>\frac{5}{\varepsilon}+\frac{3}{2}$

គេបានគ្រប់ $\varepsilon>0$ មាន $N=\frac{5}{\varepsilon}+\frac{3}{2}>0$ ដែល $x>N$ នាំឱ្យ $|f(x)-3|<\varepsilon$ ។

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ បង្ហាញថា អនុគមន៍ $y=x^2+1$ ខិតទៅរក $+\infty$ កាលណា x ខិតទៅរក $+\infty$ ។

គ្រប់ $M>0$, $y>M \Leftrightarrow x^2+1>M$

$x^2>M-1$

$x>\sqrt{M-1}$

យក $N=\sqrt{M-1}>0$ គេបាន គ្រប់ $M>0$ មាន $N>0$ ដែល $x>N$ នាំឱ្យ $y>M$ ។

ឧទាហរណ៍៣៖ គេមានអនុគមន៍ $f(x)=x^2+2x+3$ ។

ដោយប្រើនិយមន័យបង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ។

យើងមាន៖

$\forall M>0, f(x)>M$

$\Leftrightarrow x^2+2x+3>M$

$(x+1)^2+2>M$

$(x+1)^2>M-2$

$x+1>\sqrt{M-2}$

$x>\sqrt{M-2}-1$

កំណត់យក $N=\sqrt{M-2}-1>0$ យើងបាន $\forall M>0$ មាន $N>0$ ដែល $x>N$ នាំឱ្យ $f(x)>M$ ។

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ។

ប្រតិបត្តិ បង្ហាញថា

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{x+3}=3$ ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x^2+x}{x+3}=-\infty$

១.៣.២ លីមីតដែលមានរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$

ឧទាហរណ៍១៖ គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2x-5}{x^3+4x}$ ។

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2x-5}{x^3+4x}$ មានរាង $\frac{\infty}{\infty}$

យើងបាន៖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2x-5}{x^3+4x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(3+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}{x^3\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(3+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}=0$

ឧទាហរណ៍១៖ គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-x+3}}{\sqrt[3]{x^3-2x+1}}$ ។

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-x+3}}{\sqrt[3]{x^3-2x+1}}$ រាង $\dfrac{\infty}{\infty}$

យើងបាន៖ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-x+3}}{\sqrt[3]{x^3-2x+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2\left(4-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}}{\sqrt[3]{x^3\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{\left(4-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}}{x\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{\left(4-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}}{x\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{\left(4-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}}=-2$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-x+3}}{\sqrt[3]{x^3-2x+1}}=-2$

> **វិធាន៖** ដើម្បីគណនាលីមីតដែលមានរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$ គេត្រូវដាក់តួដែលមានដឺក្រេខ្ពស់ជាងគេទាំងនៅភាគយក និងភាគបែងជាកត្តារួមសិន ហើយសម្រួលកត្តារួមចោល រួចគណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី។

ប្រតិបត្តិ គណនា

ក. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[4]{16x^4-5x+10}}{\sqrt[3]{8x^3+2x+1}}$ ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x^5-3x^4-x}{x^4+3x^3-5}$

១.៣.២ លីមីតដែលមានរាងមិនកំណត់ $+\infty-\infty$

ឧទាហរណ៍១៖ គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-7x^3+3x+5\right)$ ។

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-7x^3+3x+5\right)$ មានរាង $+\infty-\infty$

យើងបាន៖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-7x^3+3x+5\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\left(-7-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{5}{x^3}\right)=-\infty$

ឧទាហរណ៍២៖ គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2-3}+x-3\right)$ ។

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2-3}+x-3\right)$ មានរាង $+\infty-\infty$

យើងបាន៖

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2-3}+x-3\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(9-\frac{3}{x^2}\right)}+x-3\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{9-\frac{3}{x^2}}+x-3\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{9-\frac{3}{x^2}}+x-3\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{9-\frac{3}{x^2}}+1-\frac{3}{x}\right)=-\infty(-2)=+\infty$$

ឧទាហរណ៍២៖ គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+1-\sqrt{4x^2+3}\right)$។

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+1-\sqrt{4x^2+3}\right)$ រាង $+\infty-\infty$

យើងបាន៖

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x+1-\sqrt{4x^2+3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2x+1-\sqrt{4x^2+3}\right)\left(2x+1+\sqrt{4x^2+3}\right)}{\left(2x+1+\sqrt{4x^2+3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x+1)^2-\left(4x^2+3\right)}{\left(2x+1+\sqrt{4x^2+3}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+4x+1-4x^2-3}{2x+1+x\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(4-\frac{2}{x}\right)}{x\left(2+\frac{1}{x}+\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(4-\frac{2}{x}\right)}{\left(2+\frac{1}{x}+\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}\right)}=\frac{4-0}{2+0+\sqrt{4+0}}=1$$

វិធាន៖ ដើម្បីគណនាលីមីតរាងមិនកំណត់ $+\infty-\infty$ គេត្រូវដាក់តួដែលមានដឺក្រេខ្ពស់ជាងគេជាកត្តារួម ហើយគណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី។

ប្រតិបត្តិ៖ គណនា

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x+1\right)$ ខ. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+1}-2x+1\right)$

គ. $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+1}-2x+1\right)$

១.៤ ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

១.៤.១ ភាពជាប់ត្រង់មួយចំណុច

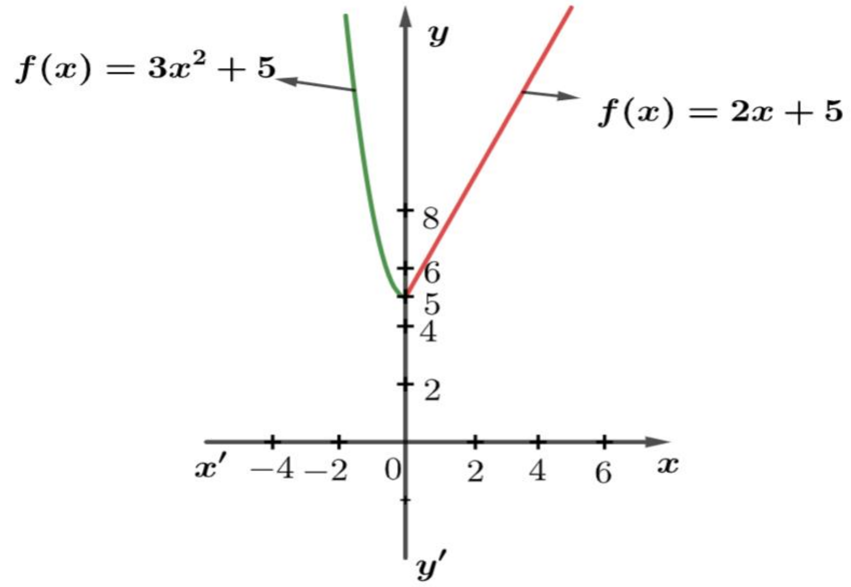
ឧទាហរណ៍១៖គេមានអនុគមន៍ $y=f(x)=\begin{cases}3x^2+5 & , x\le 0\\ 2x+5 & , x>0\end{cases}$ ។

យើងមាន៖ $f(0)=3\times 0^2+5=5$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(3x^2+5\right)=5$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(2x+5\right)=5$$

ដោយ $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=5$ នោះ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។



រូបភាព ១.៩

និយមន័យ៖ អនុគមន៍ $y=f(x)$ ជាប់ត្រង់ចំណុច $x=c$ កាលណា f បំពេញលក្ខខណ្ឌទាំងបីដូចខាងក្រោម៖

1. f កំណត់ចំពោះ $x=c$
2. f មានលីមីតកាលណា $x\to c$
3. $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$

សម្គាល់៖ បើអនុគមន៍ $y = f(x)$ មិនបំពេញលក្ខខណ្ឌណាមួយខាងលើ នោះគេថា f ជាអនុគមន៍ដាច់ត្រង់ $x = c$ ។

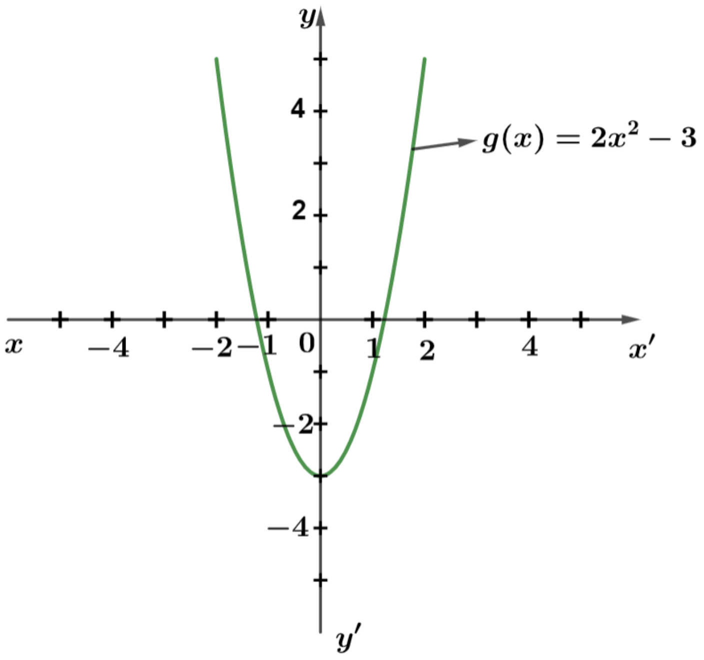
ឧទាហរណ៍ទី២៖គេមានអនុគមន៍ g កំណត់ដោយ $g(x) = 2x^2 - 3$ ។

សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ g ត្រង់ $x = -1$ ។

យើងមាន

- $g(-1) = 2(-1)^2 - 3 = -1$
- $\lim_{x \to -1} g(x) \lim_{x \to -1} g(x) = \lim_{x \to -1}\left(2x^2 - 3\right)$
  $= 2(-1)^2 - 3 = -1$

ដោយ $\lim_{x \to -1} g(x) = g(-1) = -1$ នោះអនុគមន៍ g ជាប់ត្រង់ $x = -1$ ។



រូបភាព១.១០

ឧទាហរណ៍ទី៣៖ គេមានអនុគមន៍ $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} & , x \neq 3 \\ 6 & , x = 3 \end{cases}$ ។

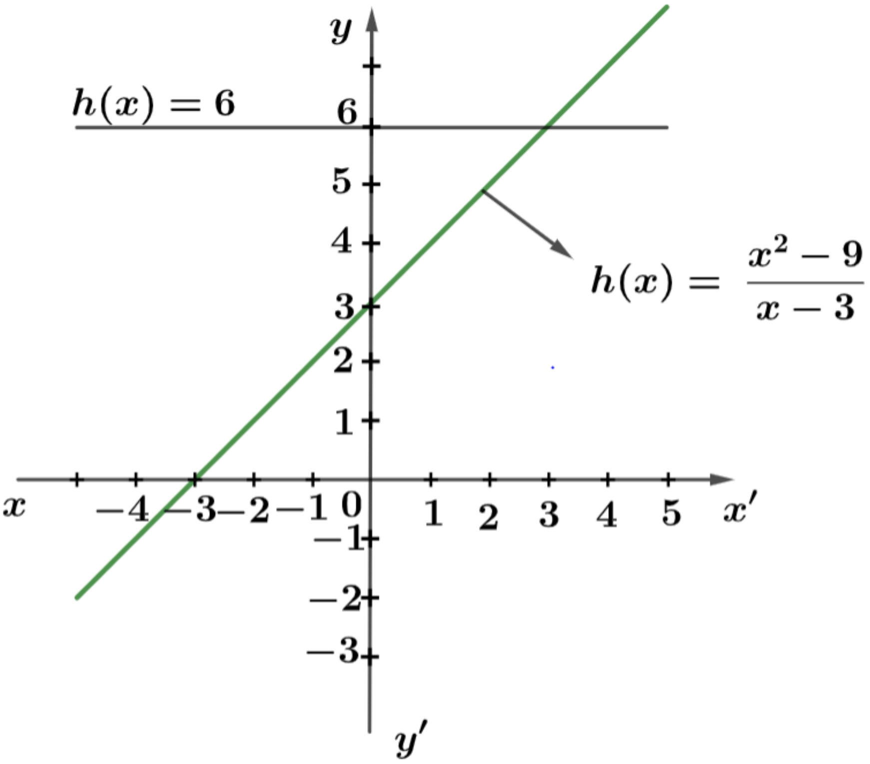
បង្ហាញថា h ជាប់ត្រង់ $x = 3$ ។

$$\lim_{x\to 3} h(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=3+3=6$$

យើងមាន $h(3)=6$

$$\lim_{x\to 3} h(x)=h(3)=6$$

ដូចនេះ h ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=3$ ។



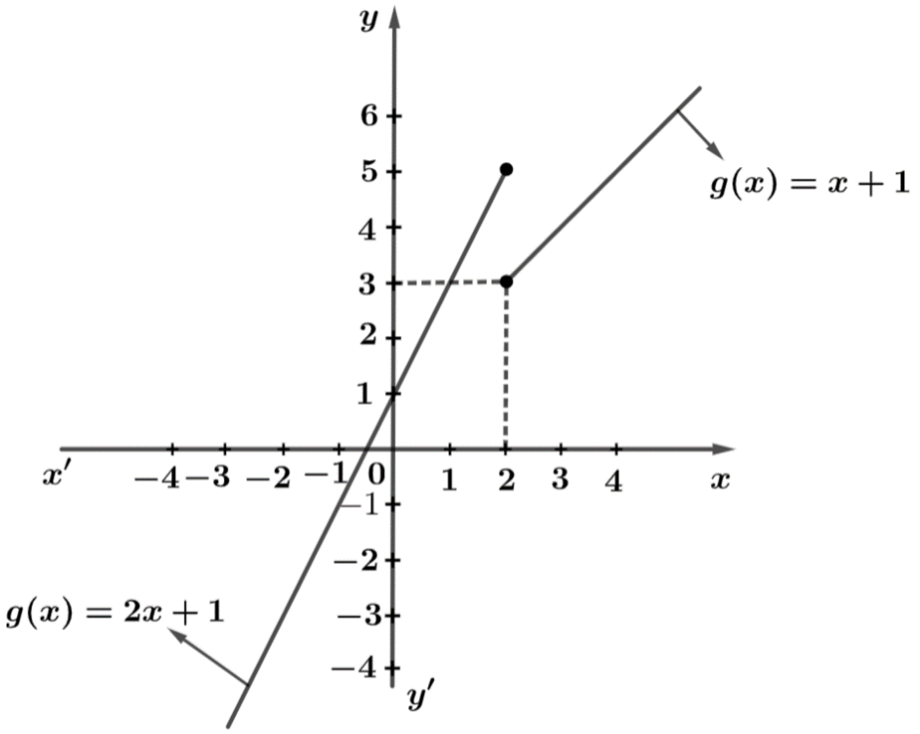
រូបភាព១.១១

ឧទាហរណ៍៤៖យើងមានអនុគមន៍ $g(x)=\begin{cases} x+1 & ,x>2 \\ 3 & ,x=2 \\ 2x+1 & ,\ x<2 \end{cases}$ ។

តើអនុគមន៍ g ជាប់ត្រង់ $x=2$ ដែរឬទេ ?

យើងមាន ៖ $g(2)=3$ និង $\lim_{x\to 2^-} g(\mathrm{x})=\lim_{x\to 2}(2x+1)=2\times 2+1=5$

ដោយ $\lim_{x\to 2^-} g(\mathrm{x})\neq g(2)$ នោះអនុគមន៍ g ដាច់ត្រង់ $x=2$ ។



រូបភាព ១.១២

ប្រតិបត្តិ៖១. គេឱ្យអនុគមន៍ $g(x)=\begin{cases}2+x & ,x>1\\ 3 & ,x=1\\ 2x+1 & ,\ x<1\end{cases}$ ។សង់ក្រាប និងសិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ g ត្រង់ $x=1$ ។

២. គេមានអនុគមន៍ $h(x)=\begin{cases}2+\frac{1}{3}x^2 & ,x>0\\ \sin x+1 & ,\ x\le 0\end{cases}$ ។

សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ $h(x)$ ។ តើអនុគមន៍ h ជាប់ត្រង់ $x=0$ ដែរឬទេ ?

លក្ខណៈនៃអនុគមន៍ជាប់៖ បើអនុគមន៍ f និង g ជាប់ត្រង់ $x=c$ នោះគេបាន៖

1. $f(x)+g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=c$
2. $f(x)-g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=c$
3. $f(x)\times g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=c$
4. $k\,f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=c$ (ដែល k ជាចំនួនថេរ)
5. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=c$ ហើយ $g(x)\neq 0$

ឧទាហរណ៍១៖ រកតម្លៃ x ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ខាងក្រោមជាអនុគមន៍ជាប់៖

ក. $f(x)=6x^5+\sin x$ ខ. $g(x)=(x^3+5)(\cos x-3)$ គ. $h(x)=\dfrac{e^x+5}{x^2-3}$

ចម្លើយ

ក. ដោយ $6x^5$ និង $\sin x$ ជាអនុគមន៍ជាប់ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x នោះគេបាន $f(x)=6x^5+\sin x$ ជាប់ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x ។

ខ. ដោយ (x^3+5) និង $(\cos x-3)$ ជាប់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x តាមលក្ខណៈទី3 គេបានអនុគមន៍ $g(x)=(x^3+5)(\cos x-3)$ ជាប់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

គ. ដោយ e^x+5 និង x^2-3 ជាប់ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x នោះតាមលក្ខណៈទី5 អនុគមន៍ $h(x)=\dfrac{e^x+5}{x^2-3}$ ជាប់ចំពោះគ្រប់គ្រប់តម្លៃ x ដែល $x^2-3\neq 0$ ឬ $x\neq\pm\sqrt{3}$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ បង្ហាញថាអនុគមន៍ $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3x}{x} & , x\neq 0\\ 3 & , x=0\end{cases}$ ជាប់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត។

ចម្លើយ

ដោយអនុគមន៍ $\sin 3x$ និង x ជាប់ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ នោះគេបានអនុគមន៍ $y=\dfrac{\sin 3x}{x}$ ជាប់ចំពោះគ្រប់ $x\neq 0$ ។

ម្យ៉ាងទៀតយើងមាន៖ $f(0)=3$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=3$$

ដោយ $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=3$ នាំឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

ដូចនេះអនុគមន៍ $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3x}{x} & , x\neq 0\\ 3 & , x=0\end{cases}$ ជាប់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត ឬចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

ឧទាហរណ៍៣៖ គេមានអនុគមន៍ $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1} & , x\neq 0\\ 3x+2a & , x=0\end{cases}$ ។

កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

អនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$

យើងមាន៖ $f(0)=3\times 0+2a=2a$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}+1\right)\sin 3x}{x+1-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}+1\right)\sin 3x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x+1}+1\right)\times\frac{\sin 3x}{3x}\times 3=2\times 3=6$$

គេបាន $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)\Leftrightarrow 2a=6\Rightarrow a=\frac{6}{2}=3$

ដូចនេះដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ $a=3$។

ប្រតិបត្តិ១៖ គេមានអនុគមន៍ដូចខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=\left(x^3+5\right)\left(\frac{1}{3}x^2-1\right)^3$ ខ. $g(x)=\frac{5x^4+3x-1}{2x^2+3}$

បង្ហាញថាអនុគមន៍នេះជាប់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

ប្រតិបត្តិ២៖ គេឱ្យអនុគមន៍ $h(x)=\begin{cases}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}, & x\neq 2\\ bx^3-2bx+1, & x=2\end{cases}$ ។កំណត់តម្លៃ b ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ h ជាប់ត្រង់ $x=2$ ។

១.៤.២ ភាពជាប់លើចន្លោះ

និយមន័យ

- អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបើក (a,b) លុះត្រាតែ f ជាប់ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x នៃចន្លោះបើកនោះ។

- អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ លុះត្រាតែ f ជាប់លើចន្លោះបើក (a,b) និងមានលីមីត $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ និង $\lim_{x\to b^-} f(x)=f(b)$ (អនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ខាងស្តាំ a និងជាប់ត្រង់ខាងឆ្វេង b)។

ឧទាហរណ៍១៖ គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\frac{2x+3}{3x-1}$ ។សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ។

អនុគមន៍ f កំណត់បានចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដែល $3x-1\neq 0$ ឬ $x\neq\frac{1}{3}$ ឬ $x\in\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$ ។

f ជាអនុគមន៍សនិទាន នោះ f ជាប់ចំពោះគ្រប់តម្លៃ $x\in\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$ និងជាប់ចំពោះគ្រប់ $x\in\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$។

ដូចនេះ តាមនិយមន័យ អនុគមន៍ f ជាប់លើ $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$ និង $\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$ ។

ឧទាហរណ៍២៖គេមានអនុគមន៍ $g(x)=\begin{cases}2x-3\ , & 1\leq x\leq 3\\ x^2-x-3, & 3<x\leq 4\end{cases}$ ។

1. បង្ហាញថា g ជាប់លើចន្លោះបើក $(1,3)$ និង $(3,4)$
   យើងមានអនុគមន៍ $g(x)=2x-3$ និង $g(x)=x^2-x-3$ សុទ្ធតែជាអនុគមន៍ពហុធា តាមលក្ខណៈខាងលើយើងបាន $g(x)=2x-3$ ជាប់គ្រប់ $x\in(1,3)$ និង $g(x)=x^2-x-3$ ជាប់គ្រប់ $x\in(3,4)$។
2. បង្ហាញថា g ជាប់ខាងស្តាំ 1 និង ខាងឆ្វេង 4
   យើងមាន
   $\lim\limits_{x\to 1^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 1}(2x-3)=2\times 1-3=-1$ និង $g(1)=2\times 1-3=-1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}g(x)=g(1)=-1$

គេបានអនុគមន៍ g ជាប់ខាងស្តាំ 1។

$\lim\limits_{x\to 4^-}g(x)=\lim\limits_{x\to 4}\left(x^2-x-3\right)=4^2-4-3=9$ និង $g(4)=4^2-4-3=9$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 4^-}g(x)=g(4)=9$

គេបានអនុគមន៍ g ជាប់ខាងឆ្វេង 4។

3. បង្ហាញថា g ជាប់ត្រង់ $x=3$

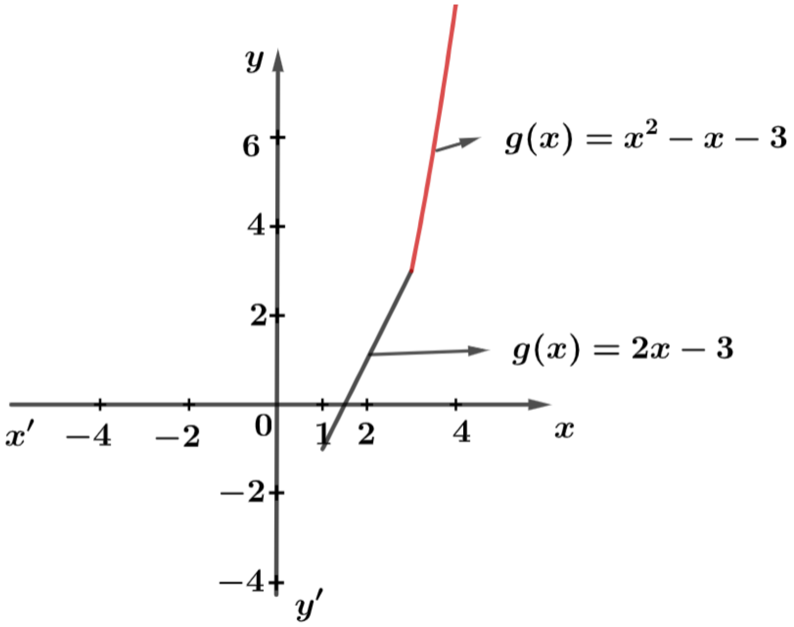
យើងមាន $g(3)=2\times 3-3=3$

$\lim_{x\to 3^-} g(x) = \lim_{x\to 3}(2x-3) = 2\times 3-3=3$ និង $\lim_{x\to 3^+} g(x) = \lim_{x\to 3}(x^2-x-3)=3^2-3-3=3$

$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-} g(x) = \lim_{x\to 3^+} g(x) = g(3)=3$

គេបានអនុគមន៍ g ជាប់ត្រង់ $x=3$ ។

ដូចនេះ តាមរយៈ $(1),(2)$ និង (3) យើងបានអនុគមន៍ g ជាប់នៅលើ $[1,4]$ ។



រូបភាព ១.១៣

ឧទាហរណ៍៣៖ គេមានអនុគមន៍ដូចខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=\dfrac{3}{x+2},(-2,0)$ ខ. $g(x)=\dfrac{x^2+3}{x-2},(0,3)$ គ. $h(x)=\sin 2x-1,[0,\pi]$

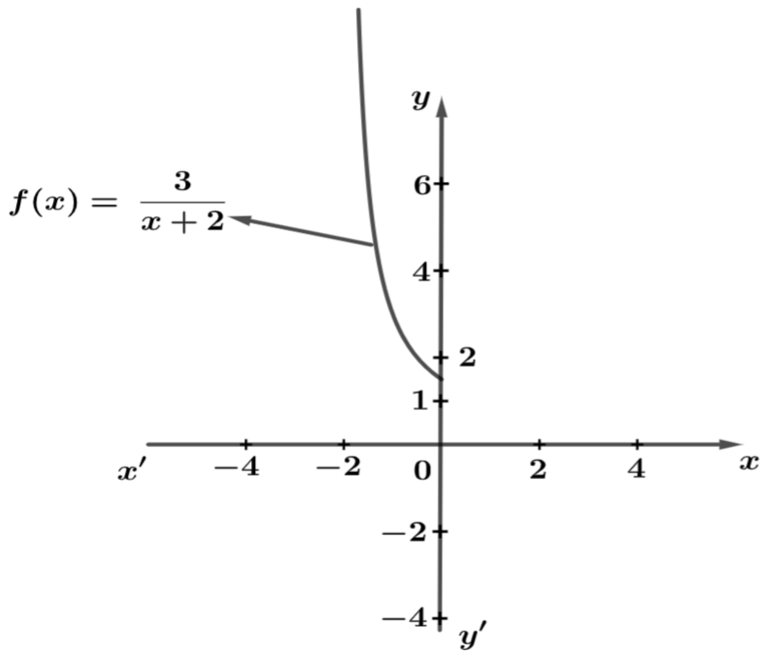
សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍រួចបញ្ជាក់ភាពជាប់លើចន្លោះដែលឱ្យ។

ចម្លើយ

ក. $f(x)=\dfrac{3}{x+2},(-2,0)$

ដោយ f ជាអនុគមន៍សនិទានមិនកំណត់ចំពោះ $x+2\neq 0$ ឬ $x\neq -2$ ។

ដូចនេះអនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះ $(-2,0)$ ។

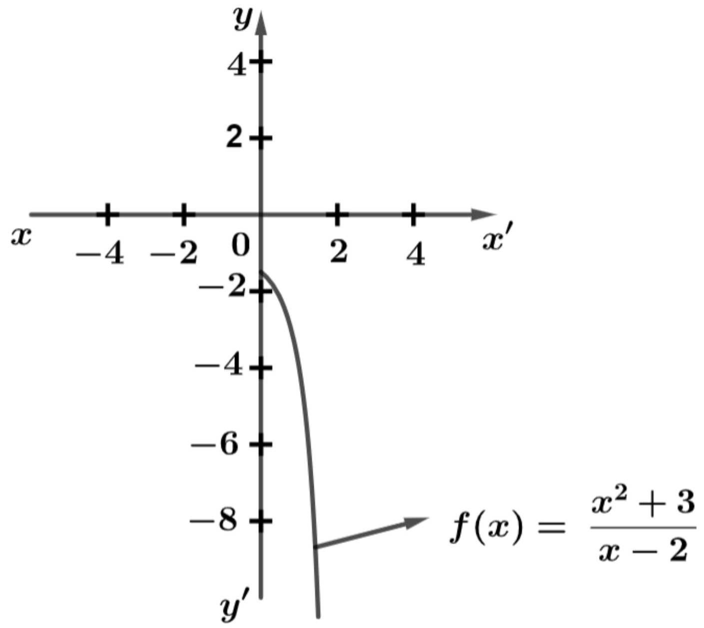


រូបភាព១.១៤

ខ. $g(x)=\dfrac{x^2+3}{x-2},(0,3)$

ដោយអនុគមន៍ g ជាអនុគមន៍សនិទាន មិនកំណត់ចំពោះ $x-2\neq 0$ ឬ $x\neq 2$ ។

នោះអនុគមន៍ g ដាច់ត្រង់ $x=2$ នាំឱ្យ អនុគមន៍ g មិនជាប់លើ $(0,3)$ទេ។



រូបភាព១.១៥

គ. $h(x)=\sin 2x-1,[0,\pi]$

អនុគមន៍ h កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។ នោះអនុគមន៍ h ជាប់លើ $(0,\pi)$ ។

ម្យ៉ាងទៀត

$\lim_{x\to 0^+} h(x)=\lim_{x\to 0}(\sin 2x-1)=-1$ និង $h(0)=\sin(2\times 0)-1=-1$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} h(x)=h(0)=-1$

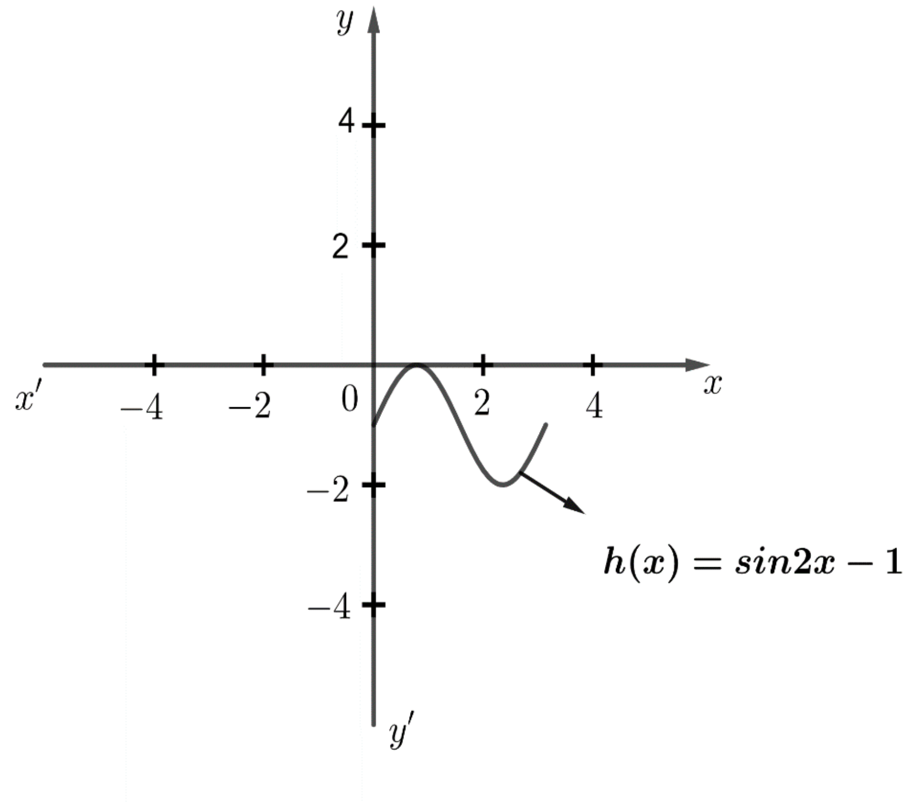
នោះអនុគមន៍ h ជាប់ខាងស្តាំ ០ ។

$\lim_{x\to \pi^-} h(x)=\lim_{x\to \pi}(\sin 2x-1)=0-1=-1$ និង $h(\pi)=\sin 2\pi-1=-1$

$\Rightarrow \lim_{x\to \pi^-} h(x)=h(\pi)=-1$

នោះអនុគមន៍ h ជាប់ខាងឆ្វេង π ។

ដូចច្នេះ អនុគមន៍ h ជាប់លើ $[0,\pi]$ ។



រូបភាព១.១៦

ប្រតិបត្តិ

1. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+1}$ ។

   សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍នៅលើ $(-3,1)$ និង $[0,3]$ ។

2. គេមានអនុគមន៍ $\text{h}(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+3} & ,0\le x\le 1\\ x+1 & ,1<x\le 3\end{cases}$ ។

   បង្ហាញថា h ជាប់លើ $[0,3]$ ។

១.៤.៣ ភាពជាប់នៃអនុគមន៍បណ្តាក់

> **ជាទូទៅ៖** បើអនុគមន៍ g ជាប់ត្រង់ c និងអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $g(c)$ នោះអនុគមន៍បណ្តាក់ $(f\circ g)(x)=f[g(x)]$ ជាប់ត្រង់ c ។

ឧទាហរណ៍១៖ គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$ ។

កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ជាប់។

យក $g(x)=\dfrac{x-1}{x+3}$ និង $h(x)=\sqrt{x}$ គេបាន $f(x)=(h\circ g)(x)=h[g(x)]$ ។

ដោយ g ជាប់ចំពោះ $x\neq -3$ ឬ $x\in(-\infty,-3)\cup(-3,+\infty)$ ហើយ h ជាប់ចំពោះ $x>0$

នាំឱ្យ អនុគមន៍ f ជាប់លើ $x\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}=0$ និង $f(1)=\sqrt{\dfrac{1-1}{1+3}}=0$

នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)$

ដូចនេះអនុគមន៍ f ជាប់លើ $x\in(-\infty,-3)\cup[1,+\infty)$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $g(x)=\left|3x^3-2\right|$ ត្រង់ $x=3$ ។

យក $f(x)=3x^3-2$ ជាអនុគមន៍ពហុធាជាប់ត្រង់ $x=3$ និង $h(x)=|x|$ ជាប់ត្រង់ $x=3$

នោះអនុគមន៍ $g(x)=(h\circ f)(x)=h[f(x)]$ ជាប់ត្រង់ $x=3$ ។

ប្រតិបត្តិ៖ កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ខាងក្រោមជាអនុគមន៍ជាប់៖

ក. $g(x)=\left|x^2+\cos 2x-1\right|$ ខ. $h(x)=\sqrt{\dfrac{2x+3}{x-1}}$

១.៤.៤ អនុវត្តន៍៖ អនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់

ជាទូទៅ៖ បើ f ជាអនុគមន៍មិនកំណត់ត្រង់ $x=a$ និងមានលីមីត $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$ នោះអនុគមន៍បន្លាយនៃ f តាមភាពជាប់ត្រង់ $x=a$ កំណត់ដោយ៖ $g(x)=\begin{cases} f(x) & , x\neq a \\ \ell & , x=a\end{cases}$ ។

ឧទាហរណ៍១៖ គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x+3}$ ។

តើអនុគមន៍ f មានអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់ត្រង់ $x=-3$ ដែរឬទេ?

យើងមាន៖

- អនុគមន៍ f កំណត់បានចំពោះគ្រប់ $x+3\neq 0$ ឬ $x\neq -3$ ។
- $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{x+3}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{(x-1)(x+3)}{x+3}=\lim_{x\to -3}(x-1)=-3-1=-4$$

បើយើងកំណត់យកអនុគមន៍ g កំណត់ដោយ៖

$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x-3}{x+3}, & x\neq -3\\ -4 & , x=-3\end{cases}$ នោះ g ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=-3$ ។

គេថា g ជាអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $x=-3$ ។

ឧទាហរណ៍១៖ គេមានអនុគមន៍ $g(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sin 3x}$ ។

រកអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នៃអនុគមន៍ g ត្រង់ $x=0$ ។

យើងមាន៖

អនុគមន៍ g មិនកំណត់ត្រង់ $x=0$

$$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sin3x}=\lim_{x\to0}\frac{x+2-2}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)\sin3x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}\times\frac{3x}{\sin3x}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6\sqrt{2}}$$

ដូចនេះអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពភាពជាប់នៃអនុគមន៍ g ត្រង់ $x=0$ កំណត់ដោយៈ

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sin3x}, & x\neq0\\ \dfrac{1}{6\sqrt{2}}, & x=0\end{cases}$$ ។

ប្រតិបត្តិ ៖ h ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $h(x)=\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}x}{\sqrt{x+2}-2}$ ។

រកអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នៃអនុគមន៍ h ត្រង់ $x=2$ ។

១.៥ ដេរីវេនៃអនុគមន៍

១.៥.១ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រង់មួយចំណុច

និយមន័យ ដេរីវេ $f'(a)$ នៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ នៅត្រង់ $x=a$ កំណត់ដោយៈ

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

ឬ $f'(a)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ដែល $x=a+h$ ឬ $h=x-a$

ឧទាហរណ៍១៖ រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)=2x^2-3$ ត្រង់ $x=2$ ។

យើងមានៈ

$$f(2)=2(2)^2-3=5$$

$$f(2+h)=2(2+h)^2-3=2\left(4+4h+h^2\right)-3=8+8h+2h^2-3=2h^2+8h+5$$

គេបាន $f'(2)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{2h^2+8h+5-5}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2h(h+4)}{h} = \lim_{h\to 0} 2(h+4) = 8$$

ដូចនេះដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)=2x^2-3$ ត្រង់ $x=2$ គឺ $f'(2)=8$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)=x^2-4x+5$ ត្រង់ $x=0$ ។

យើងមាន $f(0)=(0)^2-4(0)+5=5$ និង $f(0+h)=f(h)=h^2-4h+5$

$$\Rightarrow f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2-4h+5-5}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2-4h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(h-4)}{h}=\lim_{h\to 0}(h-4)=-4$$

ដូចនេះដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)=x^2-4x+5$ ត្រង់ $x=0$ គឺ $f'(0)=-4$ ។

ប្រតិបត្តិ រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោមត្រង់ចំណុចដែលឱ្យ៖

ក. $g(x)=\frac{1}{3}x^3+2$ ត្រង់ $x=-1$ ។ ខ. $y=2x^2+x-3$ ត្រង់ $x=0$ ។

១.៥.២ ភាពមានដេរីវេ និងភាពជាប់

ជាទូទៅ៖អនុគមន៍ f មានដេរីវេត្រង់ $x=x_0$ លុះត្រាតែ៖

- អនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=x_0$
- អនុគមន៍ f មានដេរីវេខាងឆ្វេង ស្មើនឹងដេរីវេខាងស្តាំ $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$

ដែល $f'_-(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ និង $f'_+(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ។

ឧទាហរណ៍១៖ គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases}4x+3\ , x\ge 2\\ x^2+7\ , x<2\end{cases}$ ។

សិក្សាភាពមានដេរីវេនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $x=2$ ។

ចម្លើយ

- សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $x=2$

យើងមាន $f(2)=4\times 2+3=11$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2}\left(4x+3\right)=4\times 2+3=11$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2}\left(x^2+7\right)=2^2+7=11$$

គេបាន $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=f(2)$ នោះអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=2$

- សិក្សាភាពមានដេរីវេ

យើងមាន $f'_-(2)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f\left(2+h\right)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(2+h\right)^2+7-11}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\left(4+h\right)=4$

$f'_+(2)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f\left(2+h\right)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4\left(2+h\right)+3-11}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4h}{h}=4$ នោះ $f'_-(2)=f'_+(2)$ ។

ដូចនេះអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases}4x+3\ , x\geq 2\\ x^2+7\ , x<2\end{cases}$ មានដេរីវេត្រង់ $x=2$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២៖ គេឱ្យអនុគមន៍ $g(x)=\begin{cases}x^2+ax+b,\ x\leq 1\\ 2x-3 \quad\quad ,\ x>1\end{cases}$ ។

កំណត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ g មានដេរីវេត្រង់ $x=1$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $g(1)=1+a\times 1+b=a+b+1$

$$\lim_{x\to 1^+} g(x)=\lim_{x\to 1}\left(2x-3\right)=-1$$

ដោយ g ជាប់ត្រង់ $x=1$ នោះគេបាន $g(1)=\lim_{x\to 1^+} g(x)\Leftrightarrow a+b+1=-1$ ឬ $a+b=-2 \quad (1)$

$$g'_-(1)=\lim_{h\to 0^-}\frac{g\left(1+h\right)-g\left(1\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(1+h\right)^2+a\left(1+h\right)+b-\left(a+b+1\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1+2h+h^2+a+ah+b-a-b-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\left(2+h+a\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(2+h+a\right)=2+a$$

$$g'_+(1)=\lim_{h\to 0^+}\frac{g\left(1+h\right)-g\left(1\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\left(1+h\right)-3-\left(2\times 1-3\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h}=2$$

ដោយ g មានដេរីវេត្រង់ $x=1$ នោះគេបាន $g'_-(1)=g'_+(1)\Leftrightarrow 2+a=2$ ឬ $a=0$

$(1)\Rightarrow b=-2-a=-2$

ដូចនេះដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ g មានដេរីវេត្រង់ $x=1$ លុះត្រាតែ $a=0, b=-2$ ។

ប្រតិបត្តិ

១. គេឱ្យអនុគមន៍ $h(x)=\begin{cases}3x^2+1, x\le -1\\ x+5 \quad , x>-1\end{cases}$ ។

តើអនុគមន៍ $h(x)$ មានដេរីវេត្រង់ $x=-1$ ដែរឬទេ ?

២. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases}6x-12, x\le 3\\ px^2+qx, x>3\end{cases}$ ។

កំណត់តម្លៃ p និង q ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ f មានដេរីវេត្រង់ $x=3$ ។

១.៥.៣ ដេរីវេនៃអនុគមន៍

និយមន័យ៖ ដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)$ គឺជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ៖

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

គេអាចប្រើនិមិត្តសញ្ញា $y', \frac{dy}{dx}, \frac{d}{dx}f(x)$ សម្រាប់តាងឱ្យដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ។

ឧទាហរណ៍១៖ គេឱ្យអនុគមន៍ $y=\frac{2}{3}x^3+4x-2$ ។

ក. រក y' ខ. គណនា $y'(1)$ និង $y'(-2)$ ។

ចម្លើយ

ក. រក y'

យើងមាន $y(x+h)=\frac{2}{3}(x+h)^3+4(x+h)-2$

$$=\frac{2}{3}\left(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3\right)+4x+4h-2=\frac{2}{3}x^3+2x^2h+2xh^2+\frac{2}{3}h^3+4x+4h-2$$

$$\Rightarrow y' = \lim_{h\to 0}\frac{y(x+h)-y(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{2}{3}x^3+2x^2h+2xh^2+\frac{2}{3}h^3+4x+4h-2\right)-\left(\frac{2}{3}x^3+4x-2\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2x^2h+2xh^2+\frac{2}{3}h^3+4h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h\left(2x^2+2xh+\frac{2}{3}h^2+4\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(2x^2+2xh+\frac{2}{3}h^2+4\right) = 2x^2+4$$

ដូចនេះដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y=\frac{2}{3}x^3+4x-2$ គឺ $y'=2x^2+4$ ។

ខ. គណនា $y'(1)$ និង $y'(-2)$

$$y'(1)=2(1)^2+4=6$$

$$y'(-2)=2(-2)^2+4=12$$

ឧទាហរណ៍២៖ គេឱ្យអនុគមន៍ $g(x)=\cos x+1$ ។

គណនា $g'(x)$ រួចទាញរក $g'(\pi)$ និង $g'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ។

យើងមាន៖ $g(x+h)=\cos(x+h)+1=\cos x\cosh-\sin x\sinh+1$

$$\Rightarrow g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\cos x\cosh-\sin x\sinh+1)-(\cos x+1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cosh-\sin x\sinh-\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\cos x\times\frac{-(1-\cosh)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{\sinh}{h}\times\sin x$$

$$=(\cos x)\times 0-1\times\sin x=-\sin x$$

គេបាន៖ $g'(\pi)=-\sin\pi=0$

$$g'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ដូចនេះ $g'(x)=-\sin x$, $g'(\pi)=0$ និង $g'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ។

ប្រតិបត្តិ

១. រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)=x^3+2x$ រួចទាញរក $f'(-2)$ និង $f'(0)$ ។

២. គេឱ្យអនុគមន៍ $g(x)=\sin x+3$ ។ គណនា $g'(x)$ រួចទាញរក $g'(\pi)$ និង $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ។

រូបមន្តមួយចំនួនក្នុងការគណនាដេរីវេ

អនុគមន៍ដើម	អនុគមន៍ដេរីវេ
$f(x)=c$, c ជាចំនួនថេរ	$f'(x)=0$
$f(x)=x^n$	$f'(x)=nx^{n-1}$
$f(x)=kf(x)$, k ជាចំនួនថេរ	$f'(x)=kf'(x)$
$y=f(x)\pm g(x)$	$y'=f'(x)\pm g'(x)$
$y=f(x)g(x)$	$y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
$y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\mathrm{g(x)}\neq 0$	$y'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$, $\mathrm{g(x)}\neq 0$
$y=u^n$	$y'=nu'u^{n-1}$
$y=\sin x$	$y'=\cos x$
$y=\cos x$	$y'=-\sin x$
$y=\tan x$	$y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$
$y=\mathrm{cotx}$	$\mathrm{y}'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-\left(1+\cot^2 x\right)$
$y=\sin u$	$y'=u'\cos u$
$y=\cos u$	$y'=-u'\sin u$
$y=\tan u$	$y'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}=u'\left(1+\tan^2 u\right)$
$y=\cot u$	$y'=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}=-u'\left(1+\cot^2 u\right)$
$y=e^x$	$y'=e^x$
$y=e^u$	$y'=u'e^u$
$y=\ln x$	$y'=\dfrac{1}{x}$
$y=\ln u$	$y'=\dfrac{u'}{u}$

ឧទាហរណ៍១៖ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $y=4x^5+3x^3-7x+10$ ខ. $f(x)=\left(x^4+5\right)\left(2x+5\right)$

គ. $g(x)=\left(3x^2+2x-5\right)^6$ ឃ. $h(x)=\dfrac{x^2+5}{6x-7}$

ចម្លើយ

ក. $y=4x^5+3x^3-7x+10$

$\Rightarrow y'=20x^4+9x^2-7$

ខ. $f(x)=\left(x^4+5\right)\left(2x+5\right)$

$$\Rightarrow f'(x)=\left(x^4+5\right)'\left(2x+5\right)+\left(x^4+5\right)\left(2x+5\right)'$$

$$=4x^3\left(2x+5\right)+2\left(x^4+5\right)=8x^4+20x^3+2x^4+5$$

គ. $g(x)=\left(3x^2+2x-5\right)^6$

$$\Rightarrow g'(x)=6\left(3x^2+2x-5\right)'\left(3x^2+2x-5\right)^5$$

$$=6\left(6x+2\right)\left(3x^2+2x-5\right)^5=12\left(3x+1\right)\left(3x^2+2x-5\right)^5$$

ឃ. $h(x)=\dfrac{x^2+5}{6x-7}$

$$\Rightarrow h'(x)=\frac{\left(x^2+5\right)'\left(6x-7\right)-\left(x^2+5\right)\left(6x-7\right)'}{\left(6x-7\right)^2}$$

$$=\frac{2x\left(6x-7\right)-6\left(x^2+5\right)}{\left(6x-7\right)^2}=\frac{12x^2-14x-6x^2-30}{\left(6x-7\right)^2}$$

$$=\frac{6x^2-14x-30}{\left(6x-7\right)^2}=\frac{2\left(3x^2-7x-15\right)}{\left(6x-7\right)^2}$$

ឧទាហរណ៍ទី២៖ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍៖

ក. $y=\sin x\cos 2x-2x+5$

ខ. $\text{f(x)}=\tan 3x-\cot^3 x+10$

គ. $g(x)=5\cot(2x+1)-\sin 4x+\cos^4 x$

ឃ. $h(x)=\dfrac{\cos 3x+5x}{\sin\left(3x-2\right)}$

ចម្លើយ

ក. $y = \sin x\cos 2x - 2x + 5$

$\Rightarrow y' = (\sin x)'\cos 2x + \sin x(\cos 2x)' - 2$

$= \cos x\cos 2x - (2x)'\sin x(\sin 2x) - 2$

$= \cos x\cos 2x - 2\sin x\sin 2x - 2$

ខ. $f(x) = \tan 3x - \cot^3 x + 10$

$\Rightarrow f'(x) = (3x)'(1+\tan^2 x) - 3(\cot x)'\cot^2 x$

$= 3(1+\tan^2 x) + 3(1+\cot^2 x)\cot^2 x$

គ. $g(x) = 5\cot(2x+1) - \sin 4x + \cos^4 x$

$\Rightarrow g'(x) = -5(2x+1)'\left[1+\cot^2(2x+1)\right] - (4x)'\cos 4x + 4(\cos x)'\cos^3 x$

$= -10\left[1+\cot^2(2x+1)\right] - 4\cos 4x - 4\sin x\cos^3 x$

$= -10\left[1+\cot^2(2x+1)\right] - 4\cos 4x - 2\sin 2x\cos x$

ឃ. $h(x) = \dfrac{\cos 3x + 5x}{\sin(3x-2)}$

$\Rightarrow h'(x) = \dfrac{(\cos 3x + 5x)'\sin(3x-2) - (\cos 3x + 5x)\left[\sin(3x-2)\right]'}{\sin^2(3x-2)}$

$= \dfrac{(-3\sin 3x + 5)\sin(3x-2) - 3\cos(3x-2)(\cos 3x + 5x)}{\sin^2(3x-2)}$

ឧទាហរណ៍ទី៣៖ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍៖

ក. $y = \ln x + 3x - 5e^x$

ខ. $y = 4e^{3x+2} + \ln(-x+5)$

គ. $h(x) = \ln\left(\dfrac{2x-3}{3x+7}\right)$

ឃ. $f(x) = \left(e^{-2x} + 1\right)(\ln x - 4)$

ចម្លើយ

ក. $y = \ln x + 3x - 5e^{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{x} + 3 - 5e^{x}$

ខ. $y = 4e^{3x+2} + \ln(-x+5)$

$$\Rightarrow y' = 4(3x+2)' e^{3x+2} + \frac{(-x+5)'}{(-x+5)} = 12e^{3x+2} - \frac{1}{(-x+5)}$$

គ. $h(x) = \ln\left(\frac{2x-3}{3x+7}\right) = \ln(2x-3) - \ln(3x+7)$

$$\Rightarrow h'(x) = \frac{(2x-3)'}{(2x-3)} - \frac{(3x+7)'}{(3x+7)} = \frac{2}{2x-3} - \frac{3}{3x+7} = \frac{6x+14-6x+9}{(2x-3)(3x+7)} = \frac{23}{(2x-3)(3x+7)}$$

ឃ. $f(x) = \left(e^{-2x}+1\right)(\ln x - 4)$

$$\Rightarrow f'(x) = \left(e^{-2x}+1\right)'(\ln x - 4) + \left(e^{-2x}+1\right)(\ln x - 4)'$$

$$= -2e^{-2x}(\ln x - 4) + \frac{1}{x}\left(e^{-2x}+1\right)$$

ប្រតិបត្តិ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $f(x) = \frac{\sin x - 4x}{\cos x + 5x}$

ខ. $g(x) = x^{3}e^{3x-1} + \ln\left(2x^{2} - 5x + 13\right)$

គ. $y = \left(\frac{4x+3}{x^{2}-5}\right)^{3}$

ឃ. $y = \tan^{2} 2x \cot^{2} 2x - 13x^{5} + 7$

១.៥.៤ ដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់

ជាទូទៅ៖ បើ $y = f(u)$ និង $u = g(x)$ នោះ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ ឬ $\frac{d}{dx} f[u(x)] = f'(u) \times u'(x)$ ដែលត្រូវមាន $\frac{dy}{du}$ និង $\frac{du}{dx}$ ។

ឧទាហរណ៍១៖ គេឱ្យអនុគមន៍ $y = \left(7x^{2} - 5\right)^{7}$ ។ គណនា $\frac{dy}{dx}$ ។

តាង $u = 7x^{2} - 5 \Rightarrow y = u^{7}$

យើងបាន៖ $\frac{du}{dx}=14x$ និង $\frac{dy}{du}=7u^6$

នាំឱ្យ $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=7u^6\times 14x=89x\left(7x^2-5\right)^6$

ដូចនេះ $\frac{dy}{dx}=89x\left(7x^2-5\right)^6$ ឬ $y'=89x\left(7x^2-5\right)^6$

ឧទាហរណ៍២៖ គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{9x^3+2x^2-15}$ ។ គណនា $\frac{d}{dx}f(x)$ ។

តាង $u=9x^3+2x^2-15 \Rightarrow u'(x)=27x^2+4x$

$$f(u)=\sqrt{u}=u^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(u)=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{u}}$$

គេបាន $f'(x)=f'(u)\times u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{u}}\times\left(27x^2+4x\right)=\frac{\left(27x^2+4x\right)}{2\sqrt{9x^3+2x^2-15}}$

ដូចនេះ $f'(x)=\frac{\left(27x^2+4x\right)}{2\sqrt{9x^3+2x^2-15}}$

១.៥.៥ វិធានច្រវ៉ាក់ (The Chain Rule)

បើ f និង g ជាអនុគមន៍មានដេរីវេ ហើយ F ជាអនុគមន៍ដែលកំណត់ដោយ $F(x)=f\left(g(x)\right)$ នោះដេរីវេនៃអនុគមន៍ F កំណត់ដោយ៖ $F'(x)=f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$ ។

ឧទាហរណ៍៖ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $y=\sqrt[4]{\left(2x^2+5\right)^3}$ ខ. $h(x)=\sin^5(3x^3+4x-3)$

ចម្លើយ

ក. $y=\sqrt[4]{\left(2x^2+5\right)^3}=\left(2x^2+5\right)^{\frac{3}{4}}$ យក $g(x)=\left(2x^2+5\right)\Rightarrow g'(x)=4x$

$$\Rightarrow f'\left(g(x)\right)=\frac{3}{4}\left(2x^2+5\right)^{\frac{3}{4}-1}=\frac{3}{4}\left(2x^2+5\right)^{-\frac{1}{4}}=\frac{3}{4\sqrt[4]{2x^2+5}}$$

យើងបាន $y'=f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)=\frac{3}{4\sqrt[4]{2x^2+5}}\times 4x=\frac{12x}{4\sqrt[4]{2x^2+5}}$

ដូចនេះ $y'=\dfrac{12x}{4\sqrt[4]{2x^2+5}}$ ។

ខ. $h(x)=\sin^5(3x^3+4x-3)=\left(\sin(3x^3+4x-3)\right)^5$

យក $g(x)=\sin(3x^3+4x-3)\Rightarrow g'(x)=\left(9x^2+4\right)\cos(3x^3+4x-3)$

$\Rightarrow f'\left(g(x)\right)=5\left(\sin(3x^3+4x-3)\right)^4=5\sin^4(3x^3+4x-3)$

យើងបាន៖

$h'(x)=f'\left(g(x)\right)\times g'(x)=5\sin^4(3x^3+4x-3)\times\left(9x^2+4\right)\cos(3x^3+4x-3)$

$=5\left(9x^2+4\right)\cos(3x^3+4x-3)\sin^4(3x^3+4x-3)$

ដូចនេះ $h'(x)=5\left(9x^2+4\right)\cos(3x^3+4x-3)\sin^4(3x^3+4x-3)$ ។

ប្រតិបត្តិ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $y=e^{5x^6-3x^3+2}$ ខ. $k(x)=\cos(x^4+2x-5)^6$

១.៥.៦ ដេរីវេបន្តបន្ទាប់

ជាទូទៅ៖ ដេរីវេទី1, ទី2, ទី 3,……,ទី n នៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ហៅថាដេរីវេបន្តបន្ទាប់ដែលតាងដោយ $f', f'', f''',\ldots\ldots, f^{(n)}$ ។

ឧទាហរណ៍១៖ គណនាដេរីវេទី២ នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $y=2x^5+\cos\left(3x-4\right)$ ខ. $f(x)=\dfrac{5x+3}{3x-2}$

ចម្លើយ

ក. $y=2x^5+\cos\left(3x-4\right)$

$y'=10x^4-\left(3x-4\right)'\sin\left(3x-4\right)=10x^4-3\sin\left(3x-4\right)$

$\Rightarrow y''=40x^3-3\left(3x-4\right)'\cos\left(3x-4\right)=40x^3-9\cos\left(3x-4\right)$

ដូចនេះដេរីវេទី២នៃអនុគមន៍ $y=2x^5+\cos\left(3x-4\right)$ គឺ $y''=40x^3-9\cos\left(3x-4\right)$ ។

ខ. $f(x)=\dfrac{5x+3}{3x-2}$

$$f'(x)=\frac{(5x+3)'(3x-2)-(5x+3)(3x-2)'}{(3x-2)^2}=\frac{5(3x-2)-3(5x+3)}{(3x-2)^2}$$

$$=\frac{15x-10-15x-9}{(3x-2)^2}=-\frac{19}{(3x-2)^2}$$

$$\Rightarrow f''(x)=-19\left\{\frac{-\left[(3x-2)^2\right]'}{\left[(3x-2)^2\right]^2}\right\}=\frac{19\times 6(3x-2)}{(3x-2)^4}=\frac{114}{(3x-2)^3}$$

ដូចនេះដេរីវេទី២នៃអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{5x+3}{3x-2}$ គឺ $f''(x)=\dfrac{114}{(3x-2)^3}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២៖ រក y' និង y'' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $2x^2-3y^2=6$ ខ. $x^2+3xy-5y^2=7$

ចម្លើយ

ក. $2x^2-3y^2=6$

ដេរីវេលើអង្គទាំងពីរ $\left(2x^2-3y^2\right)'=(6)'$

$$\Leftrightarrow\ 4x-6y'y=0\Rightarrow y'=\frac{2x}{3y}$$

$$\Rightarrow y''=\frac{2}{3}\left(\frac{x'y-xy'}{y^2}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{y-xy'}{y^2}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{y-x\times\frac{2x}{3y}}{y^2}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{3y^2-2x^2}{3y^2}\right)=-\frac{2}{9}\left(\frac{2x^2-3y^2}{y^2}\right)=-\frac{2}{9}\times\frac{6}{y^2}=-\frac{4}{3y^2}$$ ដ

ដូចនេះ $y'=\dfrac{2x}{3y}$ និង $y''=-\dfrac{4}{3y^2}$ ។

ខ. $x^2+3xy-5y^2=7$

ដេរីវេលើអង្គទាំងពីរ $\left(x^2+3xy-5y^2\right)'=\left(7\right)' \Leftrightarrow 2x+3\left(x'y+xy'\right)-10y'y=0$

$$2x-3y+3xy'-10y'y=0 \ \Rightarrow y'=\frac{-2x+3y}{3x-10y}$$

$$\Rightarrow y''=\frac{\left(-2x+3y\right)'\left(3x-10y\right)-\left(-2x+3y\right)\left(3x-10y\right)'}{\left(3x-10y\right)^2}$$

$$=\frac{\left(-2+3y'\right)\left(3x-10y\right)-\left(-2x+3y\right)\left(3-10y'\right)}{\left(3x-10y\right)^2}$$

$$=\frac{-6x+20y+9xy'-30yy'+6x-20xy'-9y+30yy'}{\left(3x-10y\right)^2}$$

$$=\frac{11y-11xy'}{\left(3x-10y\right)^2}=\frac{11\left(y-x\times\dfrac{-2x+3y}{3x-10y}\right)}{\left(3x-10y\right)^2}$$

$$=\frac{11\left(3xy-10y^2+2x^2-3xy\right)}{\left(3x-10y\right)^3}=\frac{22\left(x^2-5y^2\right)}{\left(3x-10y\right)^3}$$

ដូចនេះ $y'=\dfrac{-2x+3y}{3x-10y}$ និង $y''=\dfrac{22\left(x^2-5y^2\right)}{\left(3x-10y\right)^3}$

ឧទាហរណ៍ទី៣៖គេមានអនុគមន៍ $y=\cos x+\sin 2x$ ។គណនាដេរីវេទី 5 នៃអនុគមន៍នេះ។

យើងបាន៖

$$y'=-\sin x+2\cos 2x$$
$$y''=-\cos x-2^2\sin 2x$$
$$y'''=\sin x-2^3\cos 2x$$
$$y^{(4)}=\cos x+2^4\sin 2x$$
$$y^{(5)}=-\sin x+2^5\cos 2x$$

ដូចនេះដេរីវេទី 5 នៃអនុគមន៍ $y=\cos x+\sin 2x$ គឺ $y^{(5)}=-\sin x+2^5\cos 2x$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៤៖ គេឱ្យអនុគមន៍ $y=\left(3+x\right)^n$ ។

គណនាដេរីវេទី 250 និងដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍នេះ។

យើងបាន៖

$$y' = n(3+x)'(3+x)^{n-1} = n(3+x)^{n-1}$$
$$y'' = n(n-1)(3+x)^{n-2}$$
$$y''' = n(n-1)(n-2)(3+x)^{n-3}$$
....
$$y^{(250)} = n(n-1)(n-2)....(n-249)(3+x)^{n-250}$$
$$y^{(n)} = n(n-1)(n-2)....[n-(n-1)](3+x)^{n-n}$$
$$= n(n-1)(n-2)....(n-n+1)(3+x)^{0} = n(n-1)(n-2)....1 = \text{n}!$$

ដូចនេះ $y^{(250)} = n(n-1)(n-2)....(n-249)(3+x)^{n-250}$ និង $y^{(n)} = n!$

ប្រតិបត្តិ

១.គេមានអនុគមន៍ $y = \cos 3\text{x} - 5\text{e}^{2x}$ ។ គណនាដេរីវេទី 6 នៃអនុគមន៍។

២. គេឱ្យអនុគមន៍ $y = \dfrac{3}{(x+2)^2}$ ។ គណនាដេរីវេទី 150 និងទី n ។

១.៥.៧ រូបមន្ត Leibniz

> បើ f និង g ជាអនុគមន៍ដែលមានដេរីវេទី n នោះអនុគមន៍ផលគុណ $f \cdot g$ ក៏មានដេរីវេទី n ដែរ ដែលកំណត់ដោយ៖ $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$ ។

ឧទាហរណ៍១៖ គណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y = x^3 \ln(1-3x)$ ។

តាង $f(x) = x^3$ និង $g(x) = \ln(1-3x)$

យើងបាន

$$f'(x) = 3x^2$$
$$f''(x) = 6x$$
$$f'''(x) = 6$$
$$f^{(4)}(x) = 0$$
....
$$f^{(k)}(x) = 0 \ , \forall k \geq 4$$

$$g'(x)=\frac{\left(1-3x\right)'}{\left(1-3x\right)}=\frac{-3}{\left(1-3x\right)}$$

$$g''(x)=-3\left[\frac{-\left(1-3x\right)'}{\left(1-3x\right)^2}\right]=\frac{-3^2}{\left(1-3x\right)^2}$$

$$g'''(\text{x})=-3^2\left[\frac{-2\left(1-3x\right)'}{\left(1-3x\right)^3}\right]=\frac{-3^3\times 2}{\left(1-3x\right)^3}$$

$$g^{(4)}(x)=-3^3\times 2\left[\frac{-3\left(1-3x\right)'}{\left(1-3x\right)^4}\right]=\frac{-3^4\times 2\times 3}{\left(1-3x\right)^4}$$

....

$$g^{(k)}(x)=\frac{-3^k\left(k-1\right)!}{\left(1-3x\right)^k}$$

$$\Rightarrow (fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}g^{(n-k)}f^{(k)}$$

$$=\binom{n}{0}g^{(n)}f+\binom{n}{1}g^{(n-1)}f'+\binom{n}{2}g^{(n-2)}f''+\binom{n}{3}g^{(n-3)}f'''$$ ព្រោះ $f^{(k)}(x)=0\ ,\ \forall k\geq 4$

$$=\frac{n!}{\left(n-0!\right)0!}\times\frac{-3^n\left(n-1\right)!}{\left(1-3x\right)^n}\times x^3+\frac{n!}{\left(n-1\right)!1!}\times\frac{-3^{n-1}\left(n-2\right)!}{\left(1-3x\right)^{n-1}}\times 3x^2+\frac{n!}{\left(n-2\right)!2!}\times\frac{-3^{n-2}\left(n-3\right)!}{\left(1-3x\right)^{n-2}}\times 6x$$
$$+\frac{n!}{\left(n-3\right)!3!}\times\frac{-3^{n-3}\left(n-4\right)!}{\left(1-3x\right)^{n-3}}\times 6$$

$$=\frac{-3^n\left(n-1\right)!}{\left(1-3x\right)^n}\times x^3+n\times\frac{-3^{n-1}\left(n-2\right)!}{\left(1-3x\right)^{n-1}}\times 3x^2+\frac{n\left(n-1\right)}{2}\times\frac{-3^{n-2}\left(n-3\right)!}{\left(1-3x\right)^{n-2}}\times 6x$$
$$+\frac{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)}{6}\times\frac{-3^{n-3}\left(n-4\right)!}{\left(1-3x\right)^{n-3}}\times 6$$

$$=\frac{-3^n x^3\left(n-1\right)!}{\left(1-3x\right)^n}+\frac{-3^n nx^2\left(n-2\right)!}{\left(1-3x\right)^{n-1}}+\frac{-3^{n-1}\,\text{n}!}{\left(n-2\right)\left(1-3x\right)^{n-2}}+\frac{-3^{n-3}\,\text{n}!}{\left(n-3\right)\left(1-3x\right)^{n-3}}$$

$$=\frac{-3^n\,\text{n}!}{\left(1-3x\right)^n}\left[\frac{x^3}{n}+\frac{x^2\left(1-3x\right)}{n-1}+\frac{\left(1-3x\right)^2}{3\left(n-2\right)}+\frac{\left(1-3x\right)^3}{27\left(n-3\right)}\right]$$

ដូចនេះ $(fg)^{(n)}=\frac{-3^n\,\text{n}!}{\left(1-3x\right)^n}\left[\frac{x^3}{n}+\frac{x^2\left(1-3x\right)}{n-1}+\frac{\left(1-3x\right)^2}{3\left(n-2\right)}+\frac{\left(1-3x\right)^3}{27\left(n-3\right)}\right]$

ប្រតិបត្តិ គណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y=x^2\sin x$ ។

១.៥.៨ ឌីផេរ៉ង់ស្យែល

និយមន័យ បើអនុគមន៍ $y=f(x)$ មានដេរីវេនោះឌីផេរ៉ង់ស្យែល dy កំណត់១ដោយ $dy=f'(x)dx$ ។

ឧទាហរណ៍៖ គេមានអនុគមន៍ $y=3x^2+1$ ។

ក. រក dy នៅត្រង់ $x=1$ និង ន $dx=0.01$ ។

ខ. ប្រៀបធៀប dy និង Δy នៅត្រង់ $x=1$ និង $\Delta x=0.01$ ។

ចម្លើយ

ក. គណនា dy

យើងមាន $dy=f'(x)dx$

ដោយ $y=f(x)=3x^2+1\Rightarrow f'(x)=6x$

$$\Rightarrow dy=f'(x)dx=f'(1)\times 0.01=6\times 0.01=0.06$$

ដូចនេះ $dy=0.06$ ។

ខ. ប្រៀបធៀប dy និង Δy

ដោយ $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f(1+0.01)-f(1)$

$$=3(1.01)^2+1-\left(3\times 1^2+1\right)=4.0603-4=0.0603$$

$dy-\Delta y=0.0603-0.06=0.0003$

ដូចនេះ $dy\approx\Delta y$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២៖ ប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែលគណនាតម្លៃប្រហែលនៃ៖

ក. $\sqrt{26}$ ខ. $\cos 59^\circ$ គ. $4(1.001)^3-3(1.001)^2+0.001$

ចម្លើយ

ប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែលគណនាតម្លៃប្រហែលនៃ

ក. $\sqrt{26}$

$f(x)=\sqrt{x}$ ដែល $x=25$, $\Delta x=1 \Rightarrow 26=x+\Delta x$

យើងមាន $\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x) \Rightarrow f(x+\Delta x)=f(x)+\Delta y$

$f(26)=f(25)+\Delta y \Leftrightarrow \sqrt{26}=\sqrt{25}+\Delta y$

តែ $dy \approx \Delta y \Rightarrow \sqrt{26} \approx \sqrt{25}+dy$

ដោយ $dy = f'(x)dx = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx \Rightarrow dy = f'(25)=\dfrac{1}{2\sqrt{25}}=0.1$

យើងបាន $\sqrt{26} \approx \sqrt{25}+0.1=5.1$

ខ. $\cos 57^\circ$

តាង $f(x)=\cos x$ ដែល $x=60^\circ$, $dx=\Delta x=-3^\circ=-\dfrac{3\pi}{180}=-\dfrac{\pi}{60}$

ដោយ $f(x+\Delta x)\approx f(x)+dy \Leftrightarrow f(57^\circ)\approx f(60^\circ)+dy$

$$dy = f'(x)dx = -\sin x dx = -\sin 60^\circ \times \left(-\frac{\pi}{60}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\pi}{60}=0.0453$$

$\Rightarrow \cos 57^\circ \approx \cos 60^\circ + 0.0453 = 0.5+0.0453=0.5453$

ដូចនេះ $\cos 57^\circ \approx 0.5453$ ។

គ. $4(1.001)^3-3(1.001)^2+1.001$

តាង $f(x)=4x^3-3x^2+x$ ដែល $x=1,\ \Delta x=dx=0.001$

$f(x+\Delta x)\approx f(x)+dy \Leftrightarrow f(1.001)\approx f(1)+dy$

ដោយ $f(1)=4-3+1=2$

$dy = f'(x)dx = f'(1)\times 0.001$

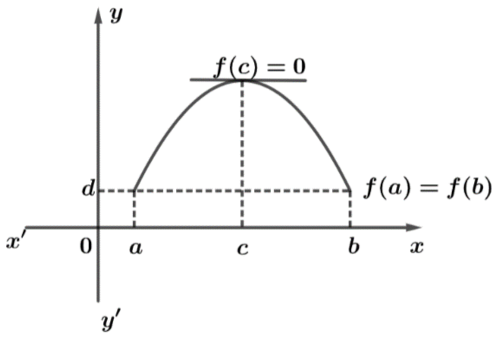
$f'(x)=12x^2-6x+1 \Rightarrow f'(1)=12-6+1=7 \Rightarrow dy = 7\times 0.001=0.007$

គេបាន $f(1.001) \approx 2 + 0.007 = 2.007$

ដូចនេះ $f(1.001) \approx 2.007$ ។

១.៥.៩ ទ្រឹស្តីបទរ៉ូល

បើ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ មានដេរីវេលើចន្លោះ (a,b) និង $f(a)=f(b)$ នោះមានចំនួនពិត $c\in(a,b)$ យ៉ាងតិចមួយដែល $f'(c)=0$



ឧទាហរណ៍១៖ គេឱ្យអនុគមន៍ f ដែលកំណត់ដោយ $f(x)=x^2+5x-6$ ។

ក. រកចំណុចប្រសព្វ x_1 និង x_2 រវាងក្រាបតាងអនុគមន៍ f នឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

ខ. បង្ហាញថាមានចំនួនពិត c មួយដែលស្ថិតនៅលើចន្លោះ (x_1,x_2) ដែល $f'(c)=0$ រួចគណនា c ។

ចម្លើយ

ក. អាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វនៃអ័ក្សអាប់ស៊ីស នឹងក្រាបត្រូវនឹង $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2+5x-6=0$

យើងបាន៖ $x_1=-6$ និង $x_2=1$ ។

ខ. f ជាអនុគមន៍ពហុធា នោះអនុគមន៍ f ជាប់ចំពោះគ្រប់តម្លៃ $x\in[-6,1]$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $f(-6)=f(1)=0$ តាមទ្រឹស្តីបទរ៉ូលមានចំនួន $c\in(-6,1)$ យ៉ាងតិចមួយដែល $f'(c)=0$ ។

យើងបាន $f'(x)=2x+5 \Rightarrow f'(c)=2c+5$

$$f'(c)=0 \Leftrightarrow 2c+5=0 \Rightarrow c=-\frac{5}{2}$$

ដូចនេះមាន c តែមួយគត់គឺ $c=-\frac{5}{2}$ ដែល $-\frac{5}{2}\in(-6,1)$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ គេមានអនុគមន៍ $g(x)=x^3+3x^2-4x-12$ ។ រកគ្រប់ $c\in(-2,2)$ ដែល $g'(c)=0$ ។

ចម្លើយ

$g(x)$ ជាអនុគមន៍ពហុធា នោះ $g(x)$ ជាប់ចំពោះគ្រប់ $x\in[-2,2]$

$g(-2)=(-2)^3+3(-2)^2-4(-2)-12=0$

$g(2)=(2)^3+3(2)^2-4(2)-12=0$

$\Rightarrow g(-2)=g(2)=0$

តាមទ្រឹស្តីបទរ៉ូល មានចំនួន $c\in(-2,2)$ យ៉ាងតិចមួយដែល $g'(c)=0$ ។

យើងបាន $g'(x)=3x^2+6x-4\Rightarrow g'(c)=3c^2+6c-4$

$g'(c)=0\Leftrightarrow 3c^2+6c-4=0$

$\Delta'=3^2-3(-4)=21$ នោះ $c_1=\dfrac{-3-\sqrt{21}}{3}\notin(-2,2)$ និង $c_2=\dfrac{-3+\sqrt{21}}{3}\in(-2,2)$

ដូចនេះ មាន $c=\dfrac{-3+\sqrt{21}}{3}$ តែមួយគត់ដែល $\dfrac{-3+\sqrt{21}}{3}\in(-2,2)$ ។

ប្រតិបត្តិ

១.គេឱ្យអនុគមន៍ g ដែលកំណត់ដោយ $g(x)=x^2-2x-15$ ។

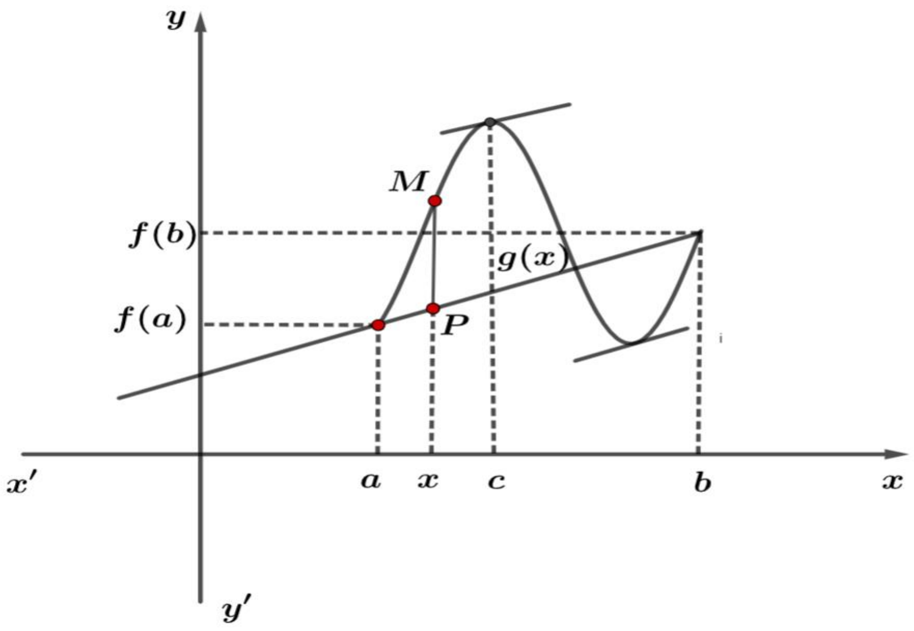
ក. រកចំណុចប្រសព្វ x_1 និង x_2 រវាងក្រាបតាងអនុគមន៍ g នឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

ខ. បង្ហាញថាមានចំនួនពិត c មួយដែលស្ថិតនៅលើចន្លោះ (x_1,x_2) ដែល $g'(c)=0$ រួចគណនា c ។

២. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=x^3-4x^2-9x+36$ ។ រកគ្រប់ $c\in(-3,4)$ ដែល $f'(c)=0$ ។

១.៥.១០ ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម

បើ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ ហើយមានដេរីវេលើ (a,b) នោះមាន $c\in(a,b)$ មួយយ៉ាងតិចដែល $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ។



ឧទាហរណ៍២៖ គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x+3}{x+1}$ ជាប់ និងមានដេរីវេលើចន្លោះ $(1,3)$ ។

រកគ្រប់តម្លៃ $c\in(1,3)$ ដែល $f'(c)=\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}$ ។

ចម្លើយ

$$f'(c)=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{\frac{3+3}{3+1}-\frac{1+3}{1+1}}{2}=-\frac{1}{4}$$

$$f'(x)=\frac{(x+3)'(x+1)-(x+3)(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x-3}{(x+1)^2}=-\frac{2}{(x+1)^2}$$

$\Rightarrow f'(c)=-\dfrac{2}{(c+1)^2}$ គេបាន $-\dfrac{2}{(c+1)^2}=-\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow(c+1)^2=8$

$c+1=-2\sqrt{2}\Rightarrow c=-2\sqrt{2}-1\notin(1,3)\,,c+1=2\sqrt{2}\Rightarrow c=2\sqrt{2}-1\in(1,3)$

ដូចនេះ $c=2\sqrt{2}-1$ ។

ប្រតិបត្តិ៖ គេឱ្យអនុគមន៍ $g(x)=(x+1)(x^2+3)$ ជាប់និងមានដេរីវេលើចន្លោះ $[-2,3]$ ។ ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម រកគ្រប់តម្លៃ $c\in(-2,3)$ ដែល $g'(c)=\dfrac{g(3)-g(-2)}{3-(-2)}$ ។

លំហាត់អនុវត្តមេរៀនទី១

១. រកដែនកំណត់ និងសំណុំរូបភាពនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

$a)\ y=3x\left(x^2-1\right)$ $\quad b)\ y=\dfrac{8(x-2)}{x^2}$ $\quad c)\ y=\left|16-x^2\right|$ $\quad d)\ y=\dfrac{\ln x}{x}+1$

$e)\ y=\sin x+\cos x$ $\quad f)\ y=\sqrt{x-2}-1$ $\quad g)\ y=x^2e^{-x}$ $\quad h)\ y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$

២. រកអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

$a.\ f(x)=\dfrac{2x+3}{3x+5}$ $\quad b.\ f(x)=\dfrac{-x-7}{x+5}$ $\quad c.\ g(x)=x^3+3x^2+3x+1$

$d.\ g(x)=\sqrt{x-1}$ $\quad e.\ h(x)=\sqrt{(2x+4)^3-7}$ $\quad f.\ h(x)=\left(\dfrac{1}{8}\right)^{1-x}$

៣. ដោយប្រើនិយមន័យបង្ហាញលីមីតខាងក្រោម៖

$\text{a.}\ \lim\limits_{x\to5}(2x-1)=9$ $\quad \text{b.}\ \lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$ $\quad \text{c.}\ \lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{1}{x-2}=\infty$

$\text{d.}\ \lim\limits_{x\to-7^-}\dfrac{1}{x+7}=-\infty$ $\quad e.\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-4x-10\right)=+\infty$ $\quad f.\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+2x-4}{1-x}=+\infty$

៤. គេមានអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases}2x-1\ ,x\le-2\\ -x+2\ ,x>-2\end{cases}$ ។

ក. សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ $f(x)$ ។

ខ. តើអនុគមន៍ $f(x)$ មានលីមីតត្រង់ $x=-2$ ។

៥. គេឱ្យអនុគមន៍កំណត់ដោយ $g(x)=\dfrac{3|-x+2|}{-x+2}$ ។

សិក្សាភាពមានលីមីតនៃអនុគមន៍ $g(x)$ ត្រង់ $x=2$ ។

៦. $h(x)$ ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $h(x)=\begin{cases}3x+a\ ,x<4\\ 2-ax^2\ ,x\ge4\end{cases}$ ដែល a ជាចំនួនថេរ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to4^+}h(x)$ និង $\lim\limits_{x\to4^-}h(x)$ ។

ខ. កំណត់តម្លៃនៃ a ដើម្បីអនុគមន៍ $h(x)$ មានលីមីតត្រង់ $x=4$ ។

៧. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

$a.\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}$ $b.\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$ $c.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-1}{x\tan x}$

$d.\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{12x^3+x^2+x-1}{3x^3+5x-4}$ $e.\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x+3}}{x+3}$ $f.\lim\limits_{x\to +\infty}\left(2e^x-x^2-1\right)$

៨. ក. គេមានអនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases} x^2-e^x, x<0 \\ x-1 \quad , x\geq 0\end{cases}$ ។ សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ត្រង់ $x=0$ ។

ខ. គេឱ្យអនុគមន៍ $g(x)=\begin{cases}\dfrac{6x^2+x-2}{2x-1}, x\neq \dfrac{1}{2}\\ \dfrac{7}{2} \quad\quad , x=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ ។ តើអនុគមន៍ $g(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=\dfrac{1}{2}$ ដែរឬទេ ?

គ. កំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x+2}{x+2}, x\neq -2\\ k \quad\quad , x=-2\end{cases}$ ជាប់ត្រង់ $x=-2$ ។

៩. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x^2-3x+4}, x\neq 4$ ។

រកអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ត្រង់ $x=2$ ។

១០. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍៖

ក. $y=\sin 5x\cos 3x$ ខ. $y=x^3+\sin x\cos^2 x$ គ. $y=\dfrac{x^3-2x}{x+3}$

ឃ. $y=\dfrac{\tan x}{x^3+2}$ ង. $y=\left(x^4+\sin x\cos x\right)^3$ ច. $y=x\ln\left(e^{2x}+2\right)$

១១. ប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែលគណនាតម្លៃប្រហែលនៃ៖

ក. $5(1.0002)^4-2(1.0002)^2+7(1.0002)+5$ ខ. $\cos 89^\circ$

គ. $\sin 46^\circ$ ឃ. $\sqrt{48}$

មេរៀនទី២   ព្រីមីទីវ និងអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

២.១ ព្រីមីទីវ

២.១.១ និយមន័យ

$F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ កាលណា $F'(x)=f(x)$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x ក្នុងដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

ឧទាហរណ៍១៖ គេមានអនុគមន៍ $F(x)=2x^4+3x^3-5x+1$ និង $f(x)=8x^3+9x^2-5$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ។

បង្ហាញថា $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $F'(x)=8x^3+9x^2-5=f(x)$

ដូចនេះ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ រកព្រីមីទីវមួយនៃអនុគមន៍ $f(x)=\sin x+3$ និង $h(x)=e^x+2x-1$ ។

ចម្លើយ

$f(x)=\sin x+3 \Rightarrow F(x)=-\cos x+3x+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$

$h(x)=e^x+2x-1 \Rightarrow H(x)=e^x+x^2-x+c,\ c\in\mathbb{R}$

ប្រតិបត្តិ១. រកព្រីមីទីវ $G(x)$ មួយនៃអនុគមន៍ $g(x)=\cos 2x-3x^2+2$ ។

២. គេមានអនុគមន៍ $H(x)=(x+1)e^{-\frac{1}{x}}$ កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ។

បង្ហាញថា H ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $h(x)=\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}$ ។

២.១.២ ទ្រឹស្តីបទ

បើ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ នោះព្រីមីទីវទាំងអស់នៃ f មានទម្រង់ទូទៅ $F(x)+c$ ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍ទី១៖ រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃ $f(x)=x^3-3$ ដែល $F(-2)=5$ ។

ចម្លើយ

$f(x)=x^3-3 \Rightarrow F(x)=\frac{1}{4}x^4-3x+c$ ដែល $c\in\mathbb{R}$

តែ $F(-2)=5 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(-2)^4-3(-2)+c=5$

$4+6+c=5 \Rightarrow c=-5$

ដូចនេះ $F(x)=\frac{1}{4}x^4-3x-5$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២៖ រកព្រីមីទីវ $\mathrm{G}(x)$ នៃ $g(x)=\cos x\sin^5 x$ ដែល $G\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$ ។

ចម្លើយ

ដោយ $g(x)=\cos x\sin^5 x \Rightarrow \mathrm{G}(x)=\frac{1}{6}\sin^6 x+c$

តែ $G\left(\frac{\pi}{2}\right)=3 \Leftrightarrow \frac{1}{6}\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^6+c=3$

$\frac{1}{6}+c=3 \Rightarrow c=\frac{17}{6}$

ដូចនេះ $\mathrm{G}(x)=\frac{1}{6}\sin^6 x+\frac{17}{6}$ ។

ប្រតិបត្តិ រកព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ដែលកំណត់ដោយ៖

ក. $\mathrm{k}(x)=\sin x\cos^6 x$ និង $K\left(\frac{\pi}{3}\right)=10$ ។

ខ. $h(x)=\frac{2x}{\left(x^2+5\right)^6}$ និង $H(0)=3$ ។

២.២ អាំងតេក្រាលមិនកំណត់

២.២.១ និយមន័យ

បើ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ នោះអាំងតេក្រាលមិនកំណត់នៃ $f(x)$ កំណត់ដោយ $\int f(x)dx=F(x)+c$ ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ឧទាហរណ៍៖ យើងមានអនុគមន៍ $g(x)=\cos x+3x^2+2$ មានព្រីមីទីវ $G(x)=\sin x+x^3+2x+c$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

យើងបាន $\int\left(\cos x+3x^2+2\right)dx=\sin x+x^3+2x+c$ ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

២.២.២ រូបមន្តគ្រឹះនៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

- បើ $k\neq 0$ នោះ $\int k\,dx=kx+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$
- បើ $k\neq 0$ នោះ $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$
- $\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$
- បើ $n\neq -1$ នោះ $\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$
- បើ $x\neq 0$ នោះ $\int x^{-1}dx=\int\dfrac{1}{x}dx=\ln|x|+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$
- $\int\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$
- $\int e^x dx=e^x+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$
- $\int\sin x dx=-\cos x+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$
- $\int\cos x dx=\sin x+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$
- $\int\left(\tan^2 x+1\right)dx=\int\dfrac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$
- $\int\left(\cot^2 x+1\right)dx=\int\dfrac{1}{\sin^2 x}dx=-\cot x+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$

ឧទាហរណ៍ទី១៖ គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $\int\left(5x^9-4x^5+7x^3+3x^2-5\right)dx$ ខ. $\int\left(3\sqrt{x}+4x^6-\dfrac{1}{x^2}\right)dx$

គ. $\int\left(\dfrac{-3}{\sqrt{x}}+\dfrac{5}{x}-6e^x\right)dx$ ឃ. $\int\left(\dfrac{3x^5+5x^4-3x^3+\sqrt{x}+1}{x^5}\right)dx$

ចម្លើយ

ក. $\int\left(5x^9-4x^5+7x^3+3x^2-5\right)dx$

$=5\int x^9\,dx-4\int x^5\,dx+7\int x^3dx+3\int x^2dx-\int 5dx$

$$=\frac{5}{10}x^{10}-\frac{4}{6}x^6+\frac{7}{4}x^4+\frac{3}{3}x^3-5x+c,\ c\in\mathbb{R}$$

$$=\frac{1}{2}x^{10}-\frac{2}{3}x^6+\frac{7}{4}x^4+x^3-5x+c,\ c\in\mathbb{R}$$

ខ. $\int\left(3\sqrt{x}+4x^6-\frac{1}{x^2}\right)dx=3\int x^{\frac{1}{2}}dx+4\int x^6dx-\int x^{-2}dx$

$$=\frac{3}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}+\frac{4}{7}x^7-\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}+c=2x\sqrt{x}+\frac{4}{7}x^7+\frac{1}{x}+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$$

គ. $\int\left(\frac{-3}{\sqrt{x}}+\frac{5}{x}-6e^x\right)dx=-3\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx+5\int\frac{1}{x}dx-6\int e^x\,dx$

$$=-6\sqrt{x}+5\ln|x|-6e^x+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$$

ឃ. $\int\left(\frac{3x^5+5x^4-3x^3+\sqrt{x}+1}{x^5}\right)dx$

$$=\int\frac{3x^5}{x^5}dx+\int\frac{5x^4}{x^5}dx-\int\frac{3x^3}{x^5}dx+\int\frac{\sqrt{x}}{x^5}dx+\int\frac{1}{x^5}dx$$

$$=\int 3\,dx+5\int\frac{1}{x}dx-3\int\frac{1}{x^2}dx+\int x^{\frac{1}{2}-5}dx+\int x^{-5}dx$$

$$=3x+5\ln|x|-3\left(-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{-\frac{9}{10}+1}x^{-\frac{9}{10}+1}+\frac{1}{-5+1}x^{-5+1}+c,\ c\in\mathbb{R}$$

$$=3x+5\ln|x|+\frac{3}{x}+10\sqrt[10]{x}-\frac{1}{4x^4}+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$$

ឧទាហរណ៍ទី២៖ គណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $\int\left(6\sin x+\frac{2}{3}\cos x\right)dx$ ខ. $\int\left(\frac{5}{\sin^2 x}-3\tan^2 x+2\right)dx$ គ. $\int\left(\frac{5}{\cos^2 x}-\cot^2 x\right)dx$

ចម្លើយ

ក. $\int\left(6\sin x+\frac{2}{3}\cos x\right)dx=6\int\sin x\,dx+\frac{2}{3}\int\cos x\,dx=-6\cos x+\frac{2}{3}\sin x+c,\ c\in\mathbb{R}$

ខ. $\int\left(\frac{5}{\sin^2 x}-3\tan^2 x+2\right)dx=5\int\frac{1}{\sin^2 x}dx-3\int\tan^2 x\,dx+\int 2\,dx$

$=-5\cot x-3\int\left(\tan^2 x+1-1\right)dx+2x=-5\cot x-3\tan x+3x+2x+c$

$=-5\cot x-3\tan x+5x+c,\ c\in\mathbb{R}$

គ. $\int\left(\frac{5}{\cos^2 x}-\cot^2 x\right)dx=5\int\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int\cot^2 x\,dx$

$=5\tan x-\int\left(\cot^2 x+1-1\right)dx=5\tan x+\cot x+x+c,\ c\in\mathbb{R}$

ប្រតិបត្តិ គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $\int\left(6x^{10}+\frac{5}{x^2}+3\sqrt{x}-\frac{15}{\sqrt{x}}-\frac{3}{x^5}\right)dx$

ខ. $\int\left(\frac{5e^x}{4}-7\ln 5+\frac{13}{x}\right)dx$

គ. $\int\left(\tan x-\cot x\right)^2dx$

ឃ. $\int\left(\frac{13}{\sin^2 x}-\frac{7}{\cos^2 x}+\sin^2 x+\cos^2 x\right)dx$

២.២.៣ អាំងតេក្រាលប្តូរអថេរ

ឧទាហរណ៍ទី១៖ គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $\int(2x-3)\left(x^2-3x+5\right)^7dx$

ខ. $\int\frac{\cos x}{(7+\sin x)^5}dx$

ចម្លើយ

ក. $\int(2x-3)\left(x^2-3x+5\right)^7dx$

តាង $t=x^2-3x+5\Rightarrow dt=(2x-3)dx$

គេបាន $\int(2x-3)\left(x^2-3x+5\right)^7dx=\int t^7dt=\frac{t^8}{8}+c=\frac{\left(x^2-3x+5\right)^8}{8}+c,\ c\in\mathbb{R}$

ខ. $\int\frac{\cos x}{(7+\sin x)^5}dx$

តាង $t=7+\cos x\Rightarrow dt=-\sin x\,dx\Leftrightarrow -dt=\sin x\,dx$

យើងបាន $\int \frac{\sin x}{(7+\cos x)^5}dx = \int \frac{-1}{t^5}dt = -\left(\frac{-1}{4t^4}\right)+c = \frac{1}{4(7+\cos x)^4}+c,\ c\in\mathbb{R}$

ជាទូទៅ

- $\int kf'(x)dx = kf(x)+c,\ c\in\mathbb{R}$
- $\int f'(x)[f(x)]^n dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+c,\ c\in\mathbb{R},\ n\neq -1$
- $\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)}+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$
- $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n}dx = -\frac{1}{(n-1)[f(x)]^{n-1}}+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$
- $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2}dx = -\frac{1}{f(x)}+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$
- $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)}+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$
- $\int f'(x)\sin[f(x)]dx = -\cos[f(x)]+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$
- $\int f'(x)\cos[f(x)]dx = \sin[f(x)]+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$
- $\int f'(x)\{1+\tan^2[f(x)]\}dx = \int \frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]}dx = \tan[f(x)]+c,\ c\in\mathbb{R}$
- $\int f'(x)\{1+\cot^2[f(x)]\}dx = \int \frac{f'(x)}{\sin^2[f(x)]}dx = -\cot[f(x)]+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$

ឧទាហរណ៍ទី២៖ គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$A = \int \frac{3x^2+4x-5}{\sqrt{x^3+2x^2-5x+3}}dx \qquad B = \int (2\cos x+6)e^{(\sin x+3x-5)}dx$$

ចម្លើយ

$$A = \int \frac{3x^2+4x-5}{\sqrt{x^3+2x^2-5x+3}}dx = \int \frac{(x^3+2x^2-5x+3)'}{\sqrt{x^3+2x^2-5x+3}}dx = 2\sqrt{x^3+2x^2-5x+3}+c,\ c\in\mathbb{R}$$

$$B = \int (2\cos x+6)e^{(\sin x+3x-5)}dx = 2\int(\cos x+3)e^{(\sin x+3x-5)}dx$$

$$= 2\int(\sin x+3x-5)'e^{(\sin x+3x-5)}dx = 2e^{(\sin x+3x-5)}+c\ ,c\in\mathbb{R}$$

ប្រតិបត្តិ គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $\int 10\cos 2x\sin^7 2x dx$ ខ. $\int \frac{5e^x}{\left(e^x+3\right)^9}dx$ គ. $\int 6x^2\cot^2\left(x^3+4\right)dx$

២.២.៤ អាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

គេមានអនុគមន៍ពីរ f និង g ដែលមានដេរីវេ f' និង g' ។

គេបាន៖ $(fg)' = f'g + fg' \Leftrightarrow \int (fg)' dx = \int (f'g + fg')dx$

$$fg = \int f'g\,dx + \int fg'dx \Rightarrow \int fg'dx = fg - \int f'g\,dx$$

គេអាចសរសេរ $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

❖ **កំណត់ចំណាំ**

បើ $P(x)\begin{bmatrix}\cos\left(ax+b\right)\\ \sin\left(ax+b\right)\\ e^{(ax+b)}\end{bmatrix}$ ដែល $P(x)$ ជាពហុធា នោះយើងត្រូវតាង $f(x)=P(x)$ ។

បើ $\mathrm{P}(x)\cdot[\ln(ax+b)]$ ដែល $P(x)$ ជាពហុធា នោះយើងត្រូវតាង $g'(x)=P(x)$ ។

ឧទាហរណ៍៖ ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកគណនា៖

ក. $\int (2x+1)\cos 3x\,dx$ ខ. $\int x^2\ln x\,dx$ គ. $\int e^{3x}\cos 2x\,dx$

ចម្លើយ

ក. $\int (2x+1)\cos 3x\,dx$

តាង $f(x)=2x+1 \Rightarrow f'(x)=2$

$g'(x)=\cos 3x \Rightarrow g(x)=\int \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\sin 3x$

$\Rightarrow \int (2x+1)\cos 3x\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

$=\frac{1}{3}(2x+1)\sin 3x - \int 2\times\frac{1}{3}\sin 3x\,dx = \frac{1}{3}(2x+1)\sin 3x + \frac{2}{9}\cos 3x + c,\ c\in\mathbb{R}$

ខ. $\int x^2 \ln x\,dx$

$$f(x)=\ln x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}\ ,\ g'(x)=x^2 \Rightarrow g(x)=\frac{1}{3}x^3$$

$$\Rightarrow \int x^2 \ln x\,dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \int \frac{1}{x}\times\frac{1}{3}x^3\,dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + c\ ,\ c\in\mathbb{R}$$

គ. $\int e^{3x}\cos 2x\,dx$

តាង $f(x)=e^{3x} \Rightarrow f'(x)=3e^{3x}\ ,\ g'(x)=\cos 2x \Rightarrow g(x)=\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2\text{x}$

$$\Rightarrow \int e^{3x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2\text{x} - \int 3e^{3x}\times\frac{1}{2}\sin 2\text{x}\,dx = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2\text{x} - \frac{3}{2}\int e^{3x}\sin 2x\,dx \quad (*)$$

យក $I=\int e^{3x}\sin 2x\,dx$ គណនាអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកម្តងទៀត

តាង $f(x)=e^{3x} \Rightarrow f'(x)=3e^{3x}\ ,\quad g'(x)=\sin 2x \Rightarrow g(x)=\int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x$

$$\Rightarrow \int e^{3x}\sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x - \int 3e^{3x}\times\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx = -\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{2}\int e^{3x}\cos 2x\,dx$$

$$(*) \Leftrightarrow \int e^{3x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{2}\int e^{3x}\cos 2x\,dx\right)$$

$$\Leftrightarrow \int e^{3x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\cos 2x - \frac{9}{4}\int e^{3x}\cos 2x\,dx$$

$$\Leftrightarrow \int e^{3x}\cos 2x\,dx + \frac{9}{4}\int e^{3x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\cos 2x$$

$$\frac{13}{4}\int e^{3x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\cos 2x$$

$$\Rightarrow \int e^{3x}\cos 2x\,dx = \frac{2}{13}e^{3x}\sin 2x + \frac{3}{13}e^{3x}\cos 2x + c, c\in\mathbb{R}$$

ប្រតិបត្តិ ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $\int (3x+5)\ln x\,dx$

ខ. $\int (x^2+1)e^x dx$

២.២.៥ អាំងតេក្រាលប្រភាគសនិទាន

ជាទូទៅ បើយើងមានចនួនសនិទាន $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ដើម្បីងាយស្រួលក្នុងការគណនាអាំងតេក្រាលយើងត្រូវបំបែកវាជាប្រភាគងាយតាមករណី $Q(x)$ ដូចខាងក្រោម៖

ក. ករណី $Q(x)=(ax+b)(cx+d)(ex+f)...$

យើងបាន $\frac{P(x)}{Q(x)}=A(x)+\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{cx+d}+\frac{A_3}{ex+f}+...$ ដែលចំនួនថេរ $A_1, A_2, A_3...$ ជាចំនួនដែលត្រូវកំណត់។

ខ. ករណី $Q(x)=(ax+b)^n$

យើងបាន $\frac{P(x)}{Q(x)}=A(x)+\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\frac{A_3}{(ax+b)^3}+...+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$ ដែលចំនួនថេរ $A_1, A_2, A_3..., A_n$ ជាចំនួនដែលត្រូវកំណត់។

❖ **ចំណាំ**

បើដឺក្រេនៃ $P(x)$ ខ្ពស់ជាងដឺក្រេនៃ $Q(x)$ នោះ $A(x)$ ជាពហុធា

បើដឺក្រេនៃ $P(x)$ ស្មើនឹងដឺក្រេនៃ $Q(x)$ នោះ $A(x)$ ជាចំនួនថេរ

បើដឺក្រេនៃ $P(x)$ ទាបជាងដឺក្រេនៃ $Q(x)$ នោះ $A(x)=0$

ឧទាហរណ៍៖ គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $\int\frac{5}{(2x-1)(x+2)}dx$ ខ. $\int\frac{3x^2-2}{x^2-3x+2}dx$ គ. $\int\frac{x^3+1}{x^2-4x+4}dx$

ចម្លើយ

ក. $\int\frac{5}{(2x-1)(x+2)}dx$

តាង $\frac{5}{(2x-1)(x+2)}=\frac{A_1}{2x-1}+\frac{A_2}{x+2}=\frac{A_1(x+2)+A_2(2x-1)}{(2x-1)(x+2)}$

$$5=(A_1+2A_2)x+(2A_1-A_2)\Rightarrow\begin{cases}A_1+2A_2=0\\2A_1-A_2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A_1+2A_2=0\\4A_1-2A_2=10\end{cases}$$

$$5A_1 = 10 \Rightarrow A_1 = 2,\ A_2 = 2A_1 - 5 = 4 - 5 = -1$$

គេបាន $\dfrac{5}{(2x-1)(x+2)} = \dfrac{2}{2x-1} - \dfrac{1}{x+2}$

$$\int \frac{5}{(2x-1)(x+2)}dx = \int\left(\frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x+2}\right)dx = \int \frac{(2x-1)'}{(2x-1)}dx - \int \frac{(x+2)'}{(x+2)}dx$$

$$= \ln|2x-1| - \ln|x+2| + c\ ,\ c \in \mathbb{R}$$

ខ. $\displaystyle\int \frac{3x^2-2}{x^2-3x+2}dx$

យើងបាន $\dfrac{3x^2-2}{x^2-3x+2} = 3 + \dfrac{9x-8}{x^2-3x+2} = 3 + \dfrac{9x-8}{(x-1)(x-2)} = 3 + \dfrac{A_1}{x-1} + \dfrac{A_2}{x-2}$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2 = 3\left(x^2 - 3x + 2\right) + A_1(x-2) + A_2(x-1) = 3x^2 + \left(-9 + A_1 + A_2\right)x + \left(6 - 2A_1 - A_2\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -9 + A_1 + A_2 = 0 \\ 6 - 2A_1 - A_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = 9 \\ -2A_1 - A_2 = -8 \end{cases} \Rightarrow A_1 = -1, A_2 = 10$$

$$\frac{3x^2-2}{x^2-3x+2} = 3 + \frac{-1}{x-1} + \frac{10}{x-2}$$

$$\int \frac{3x^2-2}{x^2-3x+2}dx = \int\left(3 + \frac{-1}{x-1} + \frac{10}{x-2}\right)dx = 3x - \ln|x-1| + 10\ln|x-2| + c,\ c \in \mathbb{R}$$

គ. $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^2-4x+4}dx$

យើងបាន $\dfrac{x^3+1}{x^2-4x+4} = x + 4 + \dfrac{12x-16}{(x-2)^2} = x + 4 + \dfrac{A_1}{x-2} + \dfrac{A_2}{(x-2)^2}$

$$x^3 + 1 = x^3 - 4x^2 + 4x + 4x^2 - 16x + 16 + A_1x - 2A_1 + A_2 = x^3 + (-12 + A_1)x + \left(-2A_1 + A_2 + 16\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -12 + A_1 = 0 \\ -2A_1 + A_2 + 16 = 1 \end{cases} \Rightarrow A_1 = 12\ ,\ A_2 = 2A_1 - 16 + 1 = 9$$

នាំឱ្យ $\dfrac{x^3+1}{x^2-4x+4} = x + 4 + \dfrac{12}{x-2} + \dfrac{9}{(x-2)^2}$

$$\int \frac{x^3+1}{x^2-4x+4}dx = \int\left(x + 4 + \frac{12}{x-2} + \frac{9}{(x-2)^2}\right)dx = \frac{x^2}{2} + 4x + 12\ln|x-2| - \frac{9}{x-2} + c\ ,\ c \in \mathbb{R}$$

ប្រតិបត្តិ គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$A=\int\frac{2x^3+3x}{x^3-4x}dx \qquad B=\int\frac{x^4}{3x^2-13x-10}dx$$

លំហាត់អនុវត្តមេរៀនទី២

១. គណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍៖

$$I=\int\left(5x^2-3\right)^2dx \qquad J=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{3}{x^2}\right)dx \qquad K=\int\frac{2x-1}{x^2-x+3}dx$$

$$L=\int\sin x\cos^6 xdx \qquad M=\int(2x+3)\sin 3xdx \qquad N=\int e^{2x}\sin xdx$$

$$O=\int(\sin x+\cos x)^2dx \qquad P=\int\frac{3x+5}{(x+1)(x+3)}dx \qquad Q=\int x^3\ln xdx$$

២. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់លើ$[0,+\infty)$ដោយ $f(x)=\dfrac{1+(2-x)e^x}{\left(e^x+1\right)\left(e^x+x\right)}$ ។

ក. កំណត់ A និង Bដើម្បីឱ្យ $f(x)=\dfrac{A\left(e^x+1\right)}{\left(e^x+x\right)}+\dfrac{Be^x}{\left(e^x+1\right)}$ ។

ខ. គណនា $I=\displaystyle\int\frac{1+(2-x)e^x}{\left(e^x+1\right)\left(e^x+x\right)}dx$ ។

៣. $h(x)$ ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $h(x)=\dfrac{4x^2-x+1}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}$ $,x\neq-1$ ។

ក. រកតម្លៃ m,n និង p ដើម្បីឱ្យ $h(x)=\dfrac{m}{x+1}+\dfrac{nx+p}{x^2-x+1}$ ។

ខ. គណនា $K=\int h(x)\,dx$ ។

៤. គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I=\int x\sin^2 xdx$ និង $J=\int x\cos^2 xdx$ ។

គណនា $I+J$ និង $I-J$ រួចទាញរកI និង J ។

មេរៀនទី៣ អាំងតេក្រាលកំណត់

៣.១អាំងតេក្រាលកំណត់

៣.១.១ និយមន័យ

អាំងតេក្រាលកំណត់ពី a ទៅ b នៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ គឺជាកំណើននៃអនុគមន៍ព្រីមីទីវ $F(x)$ ដែលត្រូវនឹងកំណើននៃ x ពី a ទៅ b ។
គេកំណត់សរសេរ $\int_a^b f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-\mathrm{F(a)}$ ។

ឧទាហរណ៍៖ គណនាអាំងតេក្រាល

ក. $\int_2^4\left(2x^2+3\right)^2dx$ ខ. $\int_{\ln 2}^{\ln 3}e^x\left(e^x+3\right)dx$

ចម្លើយ

ក. $\int_{-1}^1\left(2x^2+3\right)^2dx=\int_2^4\left(4x^4+12x^2+9\right)dx=\left(\frac{4}{5}x^5+\frac{12}{3}x^3+9x\right)_{-1}^1$

$$=\left(\frac{4}{5}(1)^5+4(1)^3+9(1)\right)-\left(\frac{4}{5}(-1)^5+4(-1)^3+9(-1)\right)=\frac{138}{5}$$

ដូចនេះ $\int_{-1}^1\left(2x^2+3\right)^2dx=\frac{138}{5}$

ខ. $\int_{\ln 2}^{\ln 3}e^x\left(e^x+3\right)dx=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\left(e^{2x}+3e^x\right)dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}+3e^x\right]_{\ln 2}^{\ln 3}$

$$=\left(\frac{1}{2}e^{2\ln 3}+3e^{\ln 3}\right)-\left(\frac{1}{2}e^{2\ln 2}+3e^{\ln 2}\right)=\left(\frac{9}{2}+9\right)-\left(2+6\right)=\frac{11}{2}$$

ដូចនេះ $\int_{\ln 2}^{\ln 3}e^x\left(e^x+3\right)dx=\frac{11}{2}$ ។

៣.១.២ លក្ខណៈ

1. បើអនុគមន៍ f កំណត់និងជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះ $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$ ។
2. $\int_a^a f(x)\,dx=0$

3. បើអនុគមន៍ f កំណត់និងជាប់លើចន្លោះ $[a,c]$ និង $a<b<c$ នោះ

$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx$$

4. $\int_a^b kf(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx\ ,\ k\in\mathbb{R}$

5. បើ $\int_a^b f(x)dx$ និង $\int_a^b g(x)dx$ នោះ $\int_a^b\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx$

6. បើ $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ នោះ $\int_a^b\left[\alpha f(x)\pm\beta g(x)\right]dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx\pm\beta\int_a^b g(x)\,dx$

ឧទាហរណ៍៖ គណនាអាំងតេក្រាល៖

ក. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\tan^2 x+\cot^2 x+2\right)dx$ ខ. $\int_{-2}^{-1}\left(e^x+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}+2x\right)dx$

ចម្លើយ

ក. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\tan^2 x+\cot^2 x+2\right)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\tan^2 x+1+\cot^2 x+1\right)dx$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\tan^2 x+1\right)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(1+\cot^2 x\right)dx=\left[\tan x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}-\left[\cot x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\left(\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}\right)-\left(\cot\frac{\pi}{3}-\cot\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}-1-\frac{\sqrt{3}}{3}+1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

ដូចនេះ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\tan^2 x+\cot^2 x+2\right)dx=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

ខ. $\int_{-2}^{-1}\left(e^x+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}+2x\right)dx=\left[e^x\right]_{-2}^{-1}+\left[3\ln|x|\right]_{-2}^{-1}+\left[\frac{5}{x}\right]_{-2}^{-1}+\left[x^2\right]_{-2}^{-1}$

$$=\left(e^{-1}-e^{-2}\right)+3\left(\ln 1-\ln 2\right)+5\left(-1+\frac{1}{2}\right)+\left(1-4\right)=\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}-3\ln 2-\frac{5}{2}-3=\frac{e-1}{e^2}-\frac{11}{2}-3\ln 2$$

ដូចនេះ $\int_{-1}^{1}\left(e^x+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}+2x\right)dx=\frac{e-1}{e^2}-\frac{11}{2}-3\ln 2$

៣.១.៣ គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ដោយប្ដូរអថេរ

ជាទូទៅ៖ បើ $u=g(x)$ ជាប់ និងមានដេរីវេលើ $[a,b]$ នោះ $\int_a^b f\left[g(x)\right]g'(x)\,dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$ ។

ឧទាហរណ៍៖ គណនាអាំងតេក្រាល៖

ក. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\sin^3(2x)\,dx$ ខ. $\int_1^2 (4x-2)e^{x^2-x+1}dx$ គ. $\int_{-1}^{1}\left(\frac{6x^2+8x}{x^3+2x^2+5}\right)dx$

ចម្លើយ

ក. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\sin^3(2x)\,dx$

តាង $u=\sin 2x \Rightarrow du = 2\cos 2x\,dx \Leftrightarrow \frac{1}{2}du = \cos 2x\,dx$

$x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow u = \sin 2\times\frac{\pi}{4} = 1, x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=\sin\pi = 0$

គេបាន $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\sin^3(2x)\,dx = \int_1^0 u^3\times\frac{1}{2}du = \frac{1}{8}\left[u^4\right]_1^0 = \frac{1}{8}(0-1) = -\frac{1}{8}$

ដូចនេះ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\sin^3 3(2x)\,dx = -\frac{1}{8}$

ខ. $\int_1^2 (4x-2)e^{x^2-x+1}dx = 2\int_1^2 (2x-1)e^{x^2-x+1}dx$

តាង $u = x^2-x+1 \Rightarrow du = (2x-1)dx$

បើ $x=1 \Rightarrow u=1, x=2 \Rightarrow u=3$

គេបាន $\int_1^2 (4x-2)e^{x^2-x+1}dx = 2\int_1^3 e^u du = \left[2e^u\right]_1^3 = 2\left(e^3-e\right) = 2e\left(e^2-1\right)$

ដូចនេះ $\int_1^2 (4x-2)e^{x^2-x+1}dx = 2e\left(e^2-1\right)$

គ. $\int_{-1}^{1}\left(\frac{6x^2+8x}{x^3+2x^2+5}\right)dx = 2\int_{-1}^{1}\left(\frac{3x^2+4x}{x^3+2x^2+5}\right)dx = 2\int_{-1}^{1}\frac{\left(x^3+2x^2+5\right)'}{\left(x^3+2x^2+5\right)}dx$

$= 2\left[\ln\left|x^3+2x^2+5\right|\right]_{-1}^{1} = 2\left(\ln|1+2+5| - \ln|-1+2+5|\right) = 2\left(\ln 8 - \ln 6\right) = 2\ln\frac{8}{6} = 2\ln\frac{4}{3}$

ដូចនេះ $\int_{-1}^{1}\left(\frac{6x^2+8x}{x^3+2x^2+5}\right)dx = 2\ln\frac{4}{3}$

៣.១.៣ គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ដោយផ្នែក

បើ f និង g ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ និងមានដេរីវេលើចន្លោះ (a,b) នោះ

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)dx$$ ។

ឧទាហរណ៍៖ គណនាអាំងតេក្រាល៖

ក. $\int_{-1}^{1} \ln(2x+3)\,dx$ ខ. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 \sin x dx$

ចម្លើយ

ក. $\int_{-1}^{1} \ln(2x+3)\,dx$

តាង $f(x)=\ln(2x+3) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{2}{2x+3}, g'(x)=1 \Rightarrow g(x)=x$

គេបាន $\int_{-1}^{1} \ln(2x+3)\,dx = f(x)g(x) - \int_{-1}^{1} f'(x)g(x)dx = \left[x\ln(2x+3)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\dfrac{2x}{2x+3}dx$

$$=\left(\ln 5+\ln 1\right)-\int_{-1}^{1}\frac{2x+3-3}{2x+3}dx=\ln 5-\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{3}{2x+3}\right)dx=\ln 5-\left[x\right]_{-1}^{1}+\frac{3}{2}\ln\left|2x+3\right|_{-1}^{1}$$

$$=\ln 5-(1+1)+\frac{3}{2}\left(\ln 5-\ln 1\right)=\ln 5-2+\frac{3}{2}\ln 5=\frac{5}{2}\ln 5-2$$

ដូចនេះ $\int_{-1}^{1} \ln(2x+3)\,dx = \dfrac{5}{2}\ln 5-2$

ខ. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 \sin x dx$

$f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x, g'(x)=\sin x \Rightarrow g(x)=-\cos x$

គេបាន $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 \sin x dx = \left[-x^2\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos x dx \quad (*)$

គណនា $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos x dx$ អាំងតេក្រាលដោយផ្នែកម្តងទៀត

$f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1,\; g'(x)=\cos x \Rightarrow g(x)=\sin x$

យើងបាន $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos x dx = \left[x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = \left[x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$$(*)\ \int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2\sin x dx=\left[-x^2\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+2\left\{\left[x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\left[\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}\right\}$$

$$=-\left(\frac{\pi}{3}\right)^2\cos\frac{\pi}{3}+2\left(\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}\right)+2\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos 0\right)=-\frac{\pi^2}{9}\times\frac{1}{2}+2\left(\frac{\pi}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos 0\right)$$

$$=-\frac{\pi^2}{18}+\frac{\pi\sqrt{3}}{3}-1$$

ដូចនេះ $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2\sin x dx=-\frac{\pi^2}{18}+\frac{\pi\sqrt{3}}{3}-1$

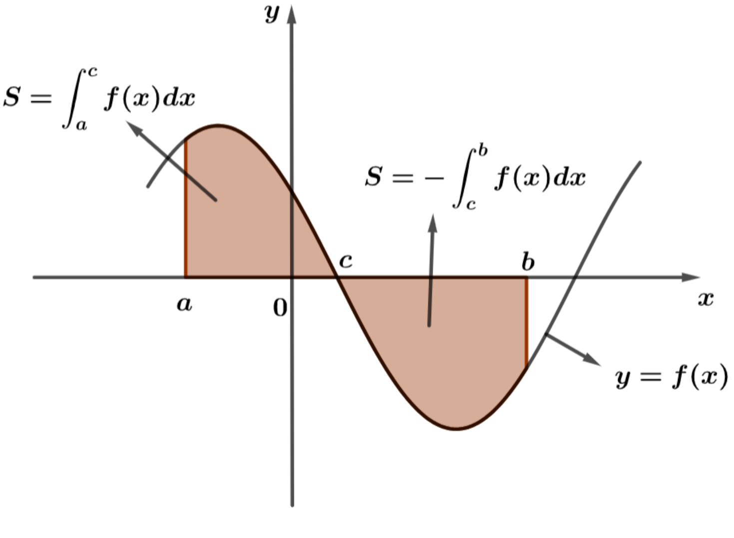
ប្រតិបត្តិ គណនាអាំងតេក្រាលៈ

ក. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x^2\cos x dx$ ខ. $\int_1^3 (3x+2)e^x dx$

៣.២ ផ្ទៃក្រឡាផ្នែកនៃប្លង់

៣.២.១ផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ អ័ក្សអាប់ស៊ីសនិងបន្ទាត់ឈរ

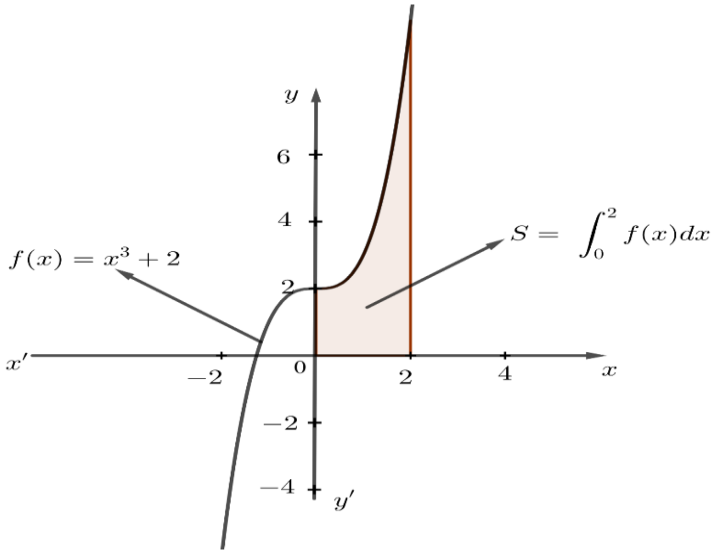
ជាទូទៅៈ បើអនុគមន៍ $y=f(x)$ ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ឈរ $x=a$ និង $x=b$ កំណត់ដោយៈ $S=\int_a^b f(x)dx$ បើ $f(x)\geq 0$ និង $S=-\int_a^b f(x)dx$ បើ $f(x)\leq 0$ ។



រូបភាព ៣.១

ឧទាហរណ៍១៖ គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=x^3+2$ និងអ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រូវនឹងចន្លោះ $[0,2]$ ។

ចម្លើយ



រូបភាព ៣.២

តាមក្រាបយើងបាន $S=\int_0^2\left(x^3+2\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^4+2x\right]_0^2=\left(\frac{1}{4}\times 2^4+2\times 2\right)-0=8$

ដូចនេះ $S=8$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា

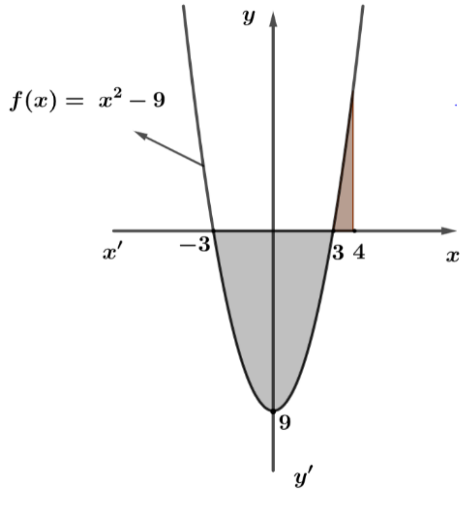
ឧទាហរណ៍២៖ គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=x^2-9$ និងអ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រូវនឹងចន្លោះ $[-3,4]$ ។

ចម្លើយ

តាមរូបយើងបាន៖

$$S=-\int_{-3}^{3}\left(x^2-9\right)dx+\int_3^4\left(x^2-9\right)dx$$

$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-9x\right]_{-3}^{3}+\left[\frac{1}{3}x^3-9x\right]_3^4$$



រូបភាព៣.៣

$$=-\left[\left(\frac{1}{3}\cdot 3^3-9\times 3\right)-\left(\frac{1}{3}(-3)^3-9(-3)\right)\right]+\left[\left(\frac{1}{3}\cdot 4^3-9\times 4\right)-\left(\frac{1}{3}\times 3^3-9\times 3\right)\right]$$

$$=-(-18-18)+\left(\frac{64}{3}-36+18\right)=\frac{118}{3}$$ ឯកតាផ្ទៃ

ប្រតិបត្តិ ១.គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=x^2+x-2$ និងអ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រូវនឹងចន្លោះ $[-2,2]$ ។

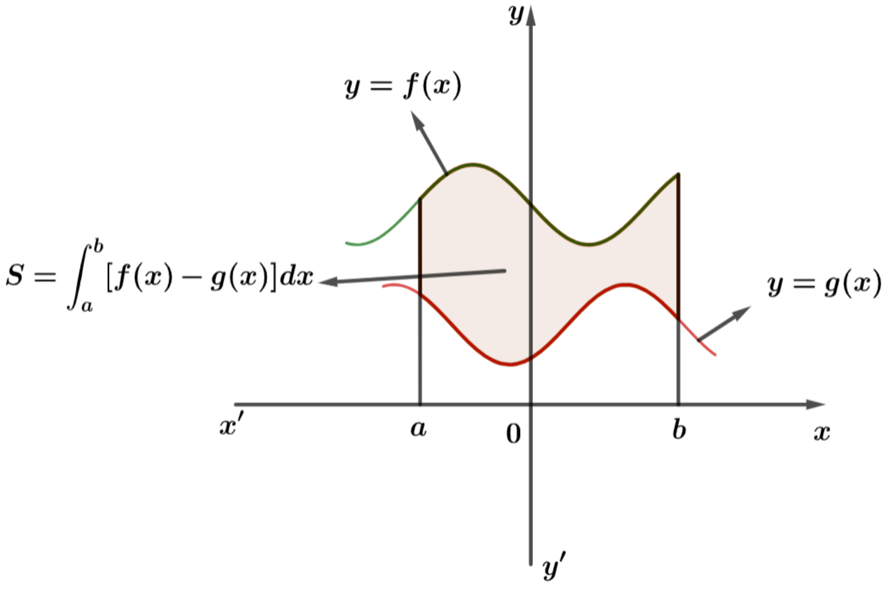
២.គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=\frac{5}{2x+1}$ និងអ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រូវនឹងចន្លោះ $[-4,-1]$ ។

៣.២.២ ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាបពីរ

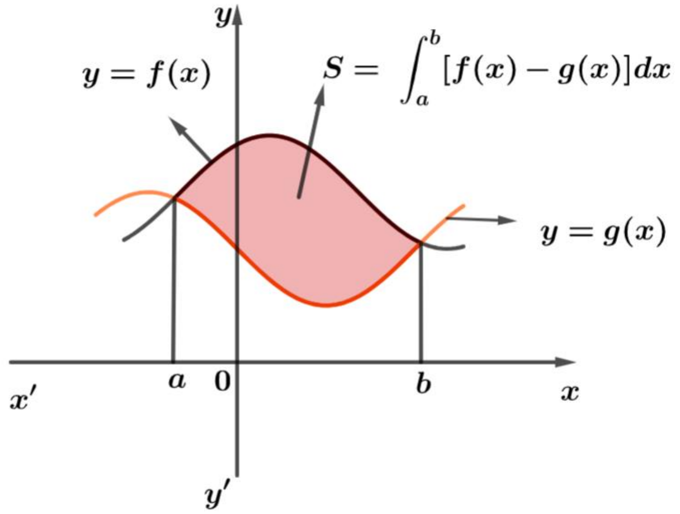
ជាទូទៅ៖

-បើ f និង g ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះគេបានផ្ទៃក្រឡានៅចន្លោះខ្សែកោង តាងអនុគមន៍ទាំងពីរកំណត់ដោយ $S=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx$ ដែល $f(x)\geq g(x)$ ។

-បើក្រាបតាង f និង g ប្រសព្វគ្នាត្រង់ $x=a$ និង $x=b$ នោះគេបានផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់ដែលនៅចន្លោះខ្សែកោងទាំងពីរគឺ $S=\int_a^b[g(x)-f(x)]dx$ ដែល $f(x)\leq g(x)$ ។



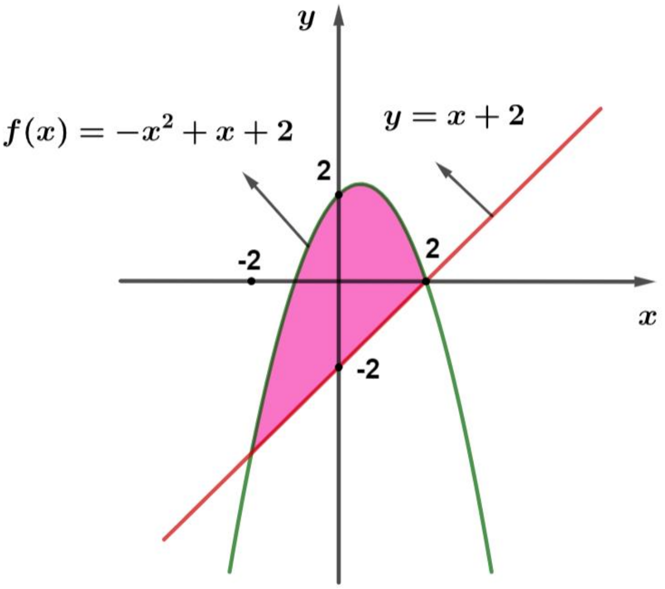
រូបភាព ៣.៤



រូបភាព ៣.៥

ឧទាហរណ៍ទី១៖ គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកនៃប្លង់ដែលខណ្ឌដោយក្រាបពីរដែលតាងដោយអនុគមន៍ $f(x) = -x^2 + x + 2$ និង $y = x - 2$។

ចម្លើយ



រូបភាព ៣.៦

រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបទាំងពីរ៖

$-x^2+x+2=x-2$

$x^2=4 \Rightarrow x=\pm\sqrt{4}=\pm 2$

ក្រាបទាំងពីរប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច $x=-2$ និង $x=2$ ម្យ៉ាងទៀតនៅលើចន្លោះនេះ ក្រាបតាងឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=-x^2+x+2$ នៅលើក្រាបតាងឱ្យអនុគមន៍ $y=x-2$។

គេបាន៖ $S=\int_{-2}^{2}[f(x)-y]dx=\int_{-2}^{2}\left[\left(-x^2+x+2\right)-(x-2)\right]dx$

$$=\int_{-2}^{2}\left(-x^2+4\right)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_{-2}^{2}=\left(-\frac{1}{3}(2)^3+4\times 2\right)-\left(-\frac{1}{3}(-2)^3+4(-2)\right)=\frac{32}{3}$$

ដូចនេះផ្ទៃក្រឡានៃក្រាបដែលខណ្ឌដោយក្រាបទាំងពីរគឺ $S=\frac{32}{3}$ ឯកតាផ្ទៃ។

ឧទាហរណ៍ទី២៖ គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកនៃប្លង់ដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ $f(x)=x^3$ និង $g(x)=-x^2+2$ និងបន្ទាត់ឈរ $x=-1$, $x=2$ ។

ចម្លើយ

រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបទាំងពីរ

$x^3=-x^2+2 \Leftrightarrow x^3+x^2-2=0$

$(x-1)(x^2+2x+2)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$

យើងបានផ្ទៃក្រឡាកំណត់ដោយ៖

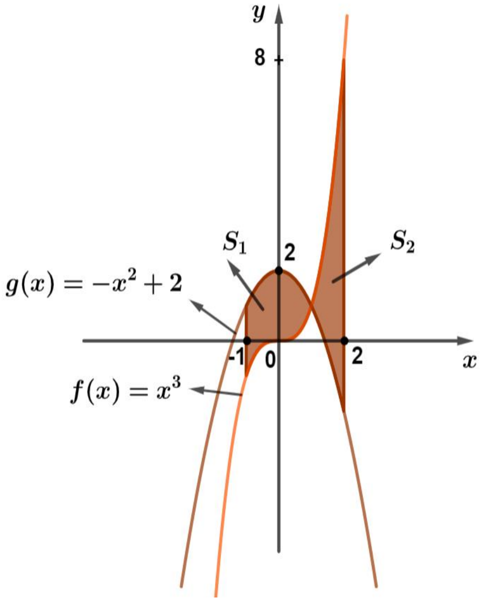
$S=\int_{-1}^{1}[g(x)-f(x)]dx+\int_{1}^{2}[f(x)-g(x)]dx$

$=\int_{-1}^{1}\left[\left(-x^2+2\right)-x^3\right]dx+\int_{1}^{2}\left[x^3-\left(-x^2+2\right)\right]dx$

$=\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+2x\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-2x\right]_{1}^{2}$

$=\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+2\right)-\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-2\right)$

$+\left(\frac{1}{4}(2)^4+\frac{1}{3}(2)^3-2(2)\right)-\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+2\right)=\frac{89}{12}$



រូបភាព ៣.៧

ដូចនេះផ្ទៃក្រឡាផ្នែកនៃប្លង់គឺ $S=\frac{89}{12}$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា។

ប្រតិបត្តិ

១. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកនៃប្លង់ដែលខណ្ឌដោយក្រាបពីរដែលតាងដោយអនុគមន៍ $g(x)=x^2-x-2$ និង $y=x+6$ ។

២. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកនៃប្លង់ដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ $f(x)=x^2-2x-3$ និង $y=x-3$ និងបន្ទាត់ឈរ $x=-2,\ x=4$ ។

៣.៣ មាឌនៃសូលីត

៣.៣.១ មាឌនៃសូលីតបរិវត្តដែលបានពីរង្វិលជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីសនៃផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោង និងអ័ក្សអាប់ស៊ីស

ជាទូទៅ៖ អនុគមន៍ $y=f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់មិនអវិជ្ជមានលើចន្លោះ $[a,b]$ នោះមាឌសូលីតបរិវត្តដែលកកើតឡើងដោយរង្វិលជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីសនៃផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ និងអក្សអាប់ស៊ីស បន្ទាត់ឈរ $x=a$ និង $x=b$ កំណត់ដោយ៖

$$V=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\pi\left[f(x_k)\right]^2\Delta x=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx \text{ ។}$$

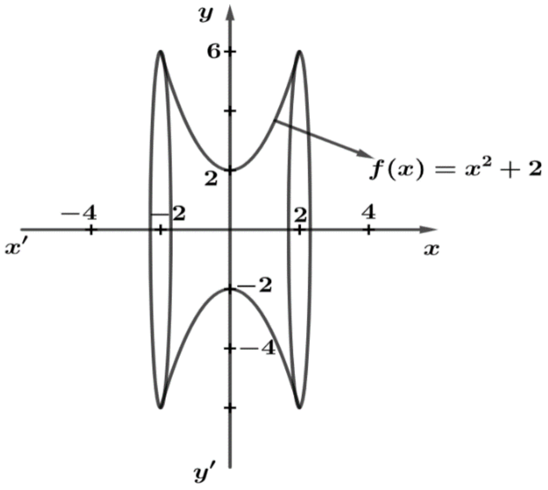
ឧទាហរណ៍១៖ គណនាមាឌសូលីតបរិវត្តដែលកំណត់បានពីរង្វិលជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីសនៃផ្ទៃដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=x^2+2$ អ័ក្ស $x'ox$ ហើយត្រូវនឹងចន្លោះ $[-2,2]$ ។

ចម្លើយ

មាឌសូលីតបរិវត្តដែលកំណត់បានពីរង្វិលជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីសនៃផ្ទៃដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=x^2+2$ អ័ក្ស $x'ox$ ហើយត្រូវនឹងចន្លោះ $[-2,2]$ កំណត់ដោយ៖

$$V=\pi\int_{-2}^{2}y^2\,dx=\pi\int_{-2}^{2}\left(x^2+2\right)^2dx$$

$$=\pi\int_{-2}^{2}\left(x^4+4x^2+4\right)dx=\pi\left(\frac{1}{5}x^5+\frac{4}{3}x^3+4x\right)_{-2}^{2}$$



រូបភាព ៣.៨

$$V=\pi\int_{-2}^{2}y^2\,dx=\pi\int_{-2}^{2}\left(x^2+2\right)^2dx=\pi\int_{-2}^{2}\left(x^4+4x^2+4\right)dx=\pi\left(\frac{1}{5}x^5+\frac{4}{3}x^3+4x\right)_{-2}^{2}$$

$$=\pi\left[\left(\frac{1}{5}\times 2^5+\frac{4}{3}\times 2^3+4\times 2\right)-\left(\frac{1}{5}(-2)^5+\frac{4}{3}(-2)^3+4(-2)\right)\right]=2\pi\left(\frac{32}{5}+\frac{32}{3}+8\right)=\frac{752\pi}{15}$$

ដូចនេះ $V=\dfrac{752\pi}{15}$ ឯកតាមាឌ។

ឧទាហរណ៍២៖ គណនាមាឌសូលីតបរិវត្តដែលកំណត់បានពីរង្វិលជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីសនៃផ្ទៃដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=e^x+1$ អ័ក្ស $x'ox$ ហើយត្រូវនឹងចន្លោះ $[-2,0]$។

ចម្លើយ

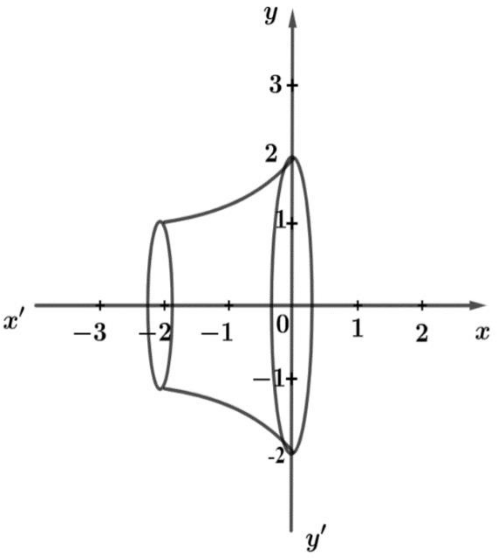
មាឌសូលីតបរិវត្តដែលកំណត់បានពីរង្វិលជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីសនៃផ្ទៃដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=e^x+1$ អ័ក្ស $x'ox$ ហើយត្រូវនឹងចន្លោះ $[-2,0]$ កំណត់ដោយ៖

$$V=\pi\int_{-2}^{0}\left(e^{-x}+1\right)^2dx=\pi\int_{-2}^{0}\left(e^{-2x}+2e^{-x}+1\right)dx$$

$$=\pi\left(\frac{1}{2}e^{-2x}+2e^{-x}+x\right)_{-2}^{0}$$

$$=\pi\left[\left(\frac{1}{2}e^{-2\times 0}+4e^0+0\right)-\left(\frac{1}{2}e^{-2(-2)}+4e^2-2\right)\right]$$

$$=\pi\left(\frac{1}{2}+4-\frac{1}{2}e^4+4e^2-2\right)=\left(\frac{5+8e^2-e^4}{2}\right)\pi$$



រូបភាព ៣.៩

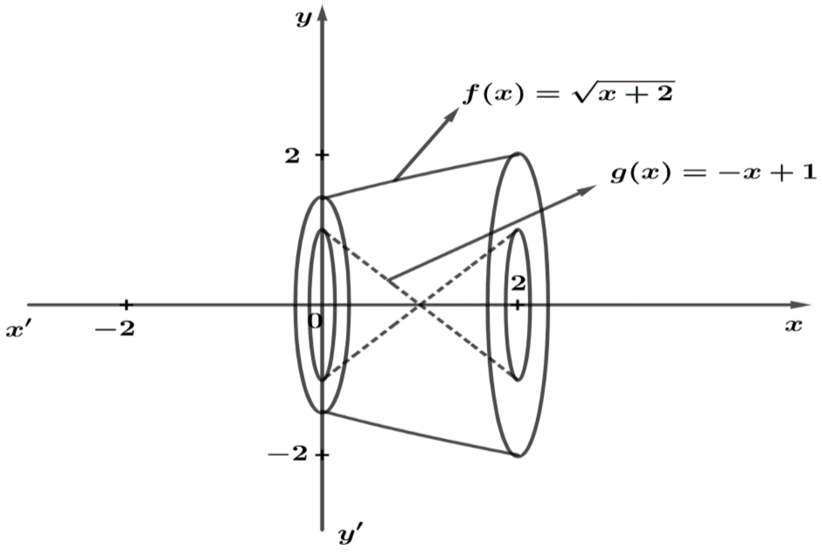
ដូចនេះ $V=\left(\dfrac{5+8e^2-e^4}{2}\right)\pi$ ឯកតាមាឌ

ជាទូទៅ៖ មាឌសូលីតបរិវត្តកំណត់បានពីរង្វិលជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីសនៃផ្ទៃដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ និង $y=g(x)$ លើចន្លោះ $[a,b]$ ដែលខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ ស្ថិតនៅលើខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $y=g(x)$ កំណត់ដោយ៖

$$V=\pi\int_a^b[f(x)]^2dx-\pi\int_a^b[g(x)]^2dx \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍៖ គណនាមាឌសូលីតដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{x+2}$ និង $g(x)=-x+1$ នៅចន្លោះ $[0,2]$ ។

ចម្លើយ



រូបភាព ៣.១០

$$V=\pi\int_0^2[f(x)]^2dx-\pi\int_0^2[g(x)]^2dx \quad =\pi\int_0^2\left[\sqrt{x+2}\right]^2dx-\pi\int_0^2[-x+1]^2dx$$

$$=\pi\int_0^2(x+2)\,dx-\pi\int_0^2\left(x^2-2x+1\right)dx \quad =\pi\left(\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{3}x^3+x^2-x\right)_0^2$$

$$=\pi\left(-\frac{1}{3}\times2^3+\frac{3}{2}\times2^2+2\right)=\frac{16\pi}{3}$$

ដូចនេះមាឌសូលីតគឺ $V=\frac{16\pi}{3}$ ឯកតាមាឌ។

លំហាត់អនុវត្តន៍មេរៀនទី៣

១. គណនាអាំងតេក្រាលៈ

ក. $\int_1^2\left(2-x+x^2\right)dx$ ខ. $\int_2^3\left(3x-2+\frac{1}{x-1}\right)dx$ គ. $\int_0^1\left(x^2+1\right)^2dx$

ឃ. $\int_0^{\ln 6}\left(e^x-1\right)^2dx$ ង. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos 2x-\frac{1}{2}\cos 4x\right)dx$ ច. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-2\sin^2 x\right)dx$

ឆ. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin 3x+\sin^4 x\cos x\right)dx$ ជ. $\int_0^1\frac{x^2+(x+1)^2}{x^2+1}dx$ ឈ. $\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

២. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{(x+1)(x+4)}{x^2+x+2}, x\in\mathbb{R}$ ។

ក. កំណត់តម្លៃ m, n **និង** p ដើម្បីឱ្យ $f(x)=m+\dfrac{nx+p}{x^2+x+2}$ ។

ខ. គណនា $\int_1^5 f(x)\,dx$ ។

៣. $h(x)$ ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $h(x)=\dfrac{1+\sin x+x\cos x}{(1+\sin x)(x+\cos x)}, x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ ។

ក. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $h(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}-\dfrac{1-\sin x}{x+\cos x}, x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ ។

ខ. គណនា $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\sin x+x\cos x}{(1+\sin x)(x+\cos x)}dx$ ។

៤. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $[0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=\dfrac{1+(2-x)e^x}{(e^x+1)(e^x+x)}$ ។

ក. ចូរបង្ហាញថាគេអាចកំណត់ពីរចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ f ខាងលើអាចសរសេរជារាង $f(x)=\dfrac{A(e^x+1)}{(e^x+x)}+\dfrac{Be^x}{(e^x+x)}$ ។

ខ. គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ $I=\int_0^1\dfrac{1+(2-x)e^x}{(e^x+1)(e^x+x)}dx$ ។

៥. គេឱ្យអាំងតេក្រាល $K=\int_0^2\dfrac{x^2+3x+3}{x^2+x+2}dx$ និង $L=\int_0^2\dfrac{2x+1}{x^2+x+2}dx$ ។

គណនា $K-L$ និង $K+L$ រួចទាញរក K និង L ។

៦. គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1+\cos x}{2+\cos x+\sin x}dx$ និង $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1+\sin x}{2+\cos x+\sin x}dx$ ។

ក. គណនា $I+J$ និង $I-J$ ។

ខ. ទាញរក I និង J ។

៧.គេមានអនុគមន៍ពីរកំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=\left(2x^2+2\sqrt{3}x+3\right)^2 e^{x^2}$ និង
$F(x)=\left(2x^3+4\sqrt{3}x^2+9x+2\sqrt{3}\right)e^{x^2}$ ។

ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ លើ $\mathbb{R}$ ។

ខ. គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1\left(2x^2+2\sqrt{3}x+3\right)^2 e^{x^2}dx$ ។

៨. គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ $h(x)=x^2+2x-3$ នឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសលើចន្លោះ $x\in[1,3]$ ។

៩. គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ $g(x)=2-x^3$ អ័ក្សអាប់ស៊ីស នឹងអ័ក្សឈរ $x=-3, x=-2$ ។

១០. គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ពីរគឺ $f(x)=\sqrt{2x+1}$ និង $g(x)=3x+2$ លើចន្លោះ $[0,2]$ ។

១១.គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ពីរគឺ $h(x)=e^{x-1}$ និង $g(x)=x$ លើចន្លោះ $[1,4]$ ។

១២. គណនាមាឌសូលីតបរិវត្តន៍ដែលកំណត់បានពីរង្វិលជុំវិញអ័ក្ស $x'ox$ នៃផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ $f(x)=x^2-2x+3$ និង $g(x)=9-x$ ។

មេរៀនទី៤ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

៤.១ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១

៤.១.១ និយមន័យ

- សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១ ជាទំនាក់ទំនងរវាងអនុគមន៍ ដេរីវេទី១របស់អនុគមន៍នេះ អថេរ និងចំនួនថេរ ។
- ចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ជាអនុគមន៍មួយដែលអនុគមន៍នេះ និងដេរីវេរបស់វាផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ។

សម្គាល់៖ អនុគមន៍ចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានច្រើនរាប់មិនអស់។ គ្រប់ខ្សែកោងដែលតាងចម្លើយនីមួយៗរបស់សមីការបង្កើតបានជាគ្រួសារខ្សែកោង។

ឧទាហរណ៍ទី១៖ គេមានអនុគមន៍ $y = Ax + 6$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត A ។

គណនាដេរីវេទី១ រួចសរសេរទំនាក់ទំនងរវាងអនុគមន៍នេះ នឹងដេរីវេទី១ របស់វា។

ចម្លើយ

យើងមាន $y = Ax + 6 \Rightarrow y' = A$

យើងបាន $y = y'x + 6 \Leftrightarrow \frac{y}{x} = y' + \frac{6}{x} \Rightarrow y' - \frac{1}{x}y = -\frac{6}{x}$

ដូចនេះទំនាក់ទំនងរវាងអនុគមន៍ នឹងដេរីវេទី១របស់វាគឺ $y' - \frac{1}{x}y = -\frac{6}{x}$ ហៅថាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី ១ដែលមានអនុគមន៍ $y = Ax + 6$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនេះ។

ឧទាហរណ៍ទី២៖ គេឱ្យអនុគមន៍ $y = Be^{4x}$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត B ។

សរសេរសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលមានសមីការ $y = Be^{4x}$ ជាចម្លើយទូទៅ។

ចម្លើយ

យើងមាន $y = Be^{4x} \Rightarrow y' = 4Be^{4x} \Leftrightarrow y' = 4y \Leftrightarrow y' - 4y = 0$

ដូចនេះ $y' - 4y = 0$ ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលមានអនុគមន៍ $y = Be^{4x}$ ជាចម្លើយទូទៅ។

ឧទាហរណ៍ទី៣៖ បង្ហាញថាអនុគមន៍ $y = x + \ln x$ ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $xy' - y = 1 - \ln x$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $y = x + \ln x \Rightarrow y' = 1 + \frac{1}{x}$ ជំនួសក្នុងសមីការ $xy' - y = 1 - \ln x$ យើងបាន

$x\left(1 + \frac{1}{x}\right) - (x + \ln x) = 1 - \ln x \Leftrightarrow x + 1 - x - \ln x = 1 - \ln x \Leftrightarrow 1 - \ln x = 1 - \ln x$ ពិត

ដូចនេះអនុគមន៍ $y = x + \ln x$ ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $xy' - y = 1 - \ln x$ ។

ប្រតិបត្តិ

១. គេឱ្យអនុគមន៍ $y = 2x + e^{3x}$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត B ។

សរសេរសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលមានសមីការ $y = 2x + e^{3x}$ ជាចម្លើយទូទៅ។

២. បង្ហាញថាអនុគមន៍ $y = \frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{x}$ ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y' + \frac{1}{x}y = x^3$ ។

៤.១.២ ដំណោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១

៤.១.២.១ សមីការមានទម្រង់ $\frac{dy}{dx} = f(x)$

វិធាន៖ ដើម្បីដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលមានទម្រង់ $\frac{dy}{dx} = f(x)$ យើងត្រូវ៖

- សរសេរ $\frac{dy}{dx} = f(x)$ ជាទម្រង់ $dy = f(x)dx$ ។
- រកអាំងតេក្រាលនៃអង្គទាំងពីរ $\int dy = \int f(x)dx$ ឬ $y = \int f(x)dx + c$ ដែល $c \in \mathbb{R}$ ។
- $y = \int f(x)dx + c$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $\frac{dy}{dx} = f(x)$ ។
- ដើម្បីរកចម្លើយពិសេសតាមលក្ខខណ្ឌដើម $y(x_0) = y_0$ គឺយក x_0 និង y_0 ទៅជំនួសក្នុងចម្លើយទូទៅ រួចទាញរក $c = y_0 - F(x_0)$ ។
- $y = \int f(x)dx + y_0 - F(x_0)$ ជាចម្លើយពិសេសតាមលក្ខខណ្ឌដើម $y(x_0) = y_0$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១៖ ដោះស្រាយសមីការ $y' = (4x + 8)e^{x^2 + 4x - 5}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $y' = (4x + 8)e^{x^2 + 4x - 5} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = (4x + 8)e^{x^2 + 4x - 5}$

$$dy=\left(4x+8\right)e^{x^2+4x-5}dx \Leftrightarrow \int dy=\int\left(4x+8\right)e^{x^2+4x-5}dx$$

$$\Rightarrow y=2\int\left(2x+4\right)e^{x^2+4x-5}dx=2\int\left(x^2+4x-5\right)'e^{x^2+4x-5}dx=2e^{x^2+4x-5}+c,c\in\mathbb{R}$$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលគឺ $y=2e^{x^2+4x-5}+c,c\in\mathbb{R}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២៖ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'=\left(\sin x+\cos x\right)^2$ តាមលក្ខខណ្ឌ $y(0)=\dfrac{3}{2}$ ។

ចម្លើយ

យើងបាន $y'=\left(\sin x+\cos x\right)^2 \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx}=\left(\sin x+\cos x\right)^2 \Rightarrow dy=\left(\sin x+\cos x\right)^2 dx$

$$\int dy=\int\left(\sin x+\cos x\right)^2 dx \Leftrightarrow y=\int\left(\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x\right)dx$$

$$\int dy=\int\left(\sin x+\cos x\right)^2 dx \Leftrightarrow y=\int\left(\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x\right)dx=\int\left(1+\sin 2x\right)dx=x-\frac{1}{2}\cos 2x+c,c\in\mathbb{R}$$

តែ $y\left(0\right)=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow 0-\dfrac{1}{2}\cos\left(2\times 0\right)+c=\dfrac{3}{2}\Rightarrow c=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}=2$

ដូចនេះចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលគឺ $y=x-\dfrac{1}{2}\cos 2x+2$ ។

ប្រតិបត្តិ

១. ដោះស្រាយសមីការ $y'=\dfrac{\sin x}{\left(3+\cos x\right)^5}$ ។

២. ដោះស្រាយសមីការ $y'=\dfrac{6e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ ក្នុងលក្ខខណ្ឌ $y(1)=e$ ។

៤.១.២.២ សមីការមានទម្រង់ $g(y)\dfrac{dy}{dx}=f(x)$ (សមីការដែលអាចញែកអថេរបាន)

និយមន័យ៖ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១ ដែលអាចញែកអថេរបានជាសមីការដែលក្រោយពីសម្រួលរួចមានទម្រង់ទូទៅ $g(y)\dfrac{dy}{dx}=f(x)$ ។

វិធាន៖ ដើម្បីដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១ ដែលអាចញែកអថេរបានយើងត្រូវ៖

- សរសេរសមីការឱ្យទៅជារាង $g(y)\frac{dy}{dx}=f(x)$ ។
- គណនាអាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ ធៀបនឹងអថេរ x គឺ៖

$$g(y)dy=f(x)dx \Leftrightarrow \int g(y)dy=\int f(x)dx \Rightarrow G(y)=F(x)+c, c\in\mathbb{R}$$

ឧទាហរណ៍ទី១៖ ដោះស្រាយសមីការ $y'=3x(2y+5)$ ។

ចម្លើយ

យើងបាន $y'=3x(2y+5) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=3x(2y+5) \Leftrightarrow \frac{1}{(2y+5)}dy=3xdx$

$$\int\frac{1}{(2y+5)}dy=\int 3xdx \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int\frac{(2y+5)'}{(2y+5)}dy=3\int xdx \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln|2y+5|=\frac{3}{2}x^2+c \text{ , } c\in\mathbb{R}$$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលគឺ៖ $\frac{1}{2}\ln|2y+5|=\frac{3}{2}x^2+c \text{ , } c\in\mathbb{R}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២៖ ដោះស្រាយសមីការ $\frac{dy}{dx}+\frac{3y-5}{x^2-1}=0$ ក្នុងលក្ខខណ្ឌ $y(0)=1$ ។

ចម្លើយ

យើងបាន $\frac{dy}{dx}+\frac{3y-5}{x^2-1}=0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{3y-5}{x^2-1}$

$$\frac{1}{3y-5}dy=-\frac{1}{x^2-1}dx \Leftrightarrow \int\frac{1}{3y-5}dy=-\int\frac{1}{(x-1)(x+1)}dx$$

$$\frac{1}{3}\int\frac{(3y-5)'}{3y-5}dy=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)dx \Leftrightarrow \frac{1}{3}\ln|3y-5|=-\frac{1}{2}\left(\ln|x-1|+\ln|x+1|\right)+c$$

តែ $y(0)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\ln|3\times1-5|=-\frac{1}{2}\left(\ln|0-1|+\ln|0+1|\right)+c \Rightarrow c=\frac{1}{3}\ln 2$

ដូចនេះ ចម្លើយពិសេសនៃសមីការគឺ $\frac{1}{3}\ln|3y-5|=-\frac{1}{2}\left(\ln|x-1|+\ln|x+1|\right)+\frac{1}{3}\ln 2$ ។

ប្រតិបត្តិ ១. ដោះស្រាយសមីការ $y'-\frac{\cos x}{\sin 2y(\sin x+3)^5}=0$ ។

២. រកអនុគមន៍ចម្លើយមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $\left(y^2-9\right)\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}\ln x=2$ ដែលក្រាបនៃអនុគមន៍ចម្លើយនោះកាត់តាមចំណុច $A(1,0)$ ។

៤.១.២.៣ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី១ មេគុណថេរអូម៉ូសែន(អង្គទី២ស្មើសូន្យ)

> សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី១ មេគុណថេរអូម៉ូសែន(អង្គទី២ស្មើសូន្យ) ជាសមីការដែលមានរាងទូទៅ $y'+ay=0$ (a ជាចំនួនថេរ)។
>
> ចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $y=Ae^{-ax}$ ដែល $A\in\mathbb{R}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១៖ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $-2y'+4y=0$ ។

ចម្លើយ

យើងបាន $-2y'+4y=0 \Leftrightarrow y'-2y=0 \Rightarrow y=Ae^{-(-2)x}=Ae^{2x}$, $\mathrm{A}\in\mathbb{R}$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $y=Ae^{2x}$, $\mathrm{A}\in\mathbb{R}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២៖ រកអនុគមន៍ចម្លើយមួយនៃសមីការ $3y'+2y=0$ ដែលក្រាបនៃអនុគមន៍ចម្លើយនេះកាត់តាមចំណុច $I\left(3,\frac{1}{e}\right)$។

ចម្លើយ

យើងបាន $3y'+2y=0 \Leftrightarrow y'+\frac{2}{3}y=0 \Rightarrow y=Ae^{-\frac{2}{3}x}$

តែក្រាបនៃចម្លើយកាត់តាម $I\left(3,\frac{1}{e}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{e}=Ae^{-\frac{2}{3}\times 3} \Rightarrow A=\frac{e^2}{e}=e \Rightarrow y=e\times e^{-\frac{2}{3}x}=e^{-\frac{2}{3}x+1}$

ដូចនេះ អនុគមន៍ $y=e^{-\frac{2}{3}x+1}$ ជាចម្លើយមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល។

ប្រតិបត្តិ គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $\frac{2}{3}y'-2y=0$ ។

ក. ដោះស្រាយរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ។

ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការដែលក្រាបនៃអនុគមន៍ចម្លើយកាត់តាមចំណុច $Q(1,2)$ ។

៤.១.២.៣ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី១ មេគុណថេរមិនអូម៉ូសែន(អង្គទី២ ខុសពីសូន្យ)

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី១ មេគុណថេរមិនអូម៉ូសែន(អង្គទី២ ខុសពីសូន្យ) ជាសមីការដែលមានរាងទូទៅ $y'+ay=p(x)$ ដែល a ជាចំនួនថេរ និង $p(x)$ ជាអនុគមន៍នៃ x ។

វិធីទី១៖ ដើម្បីដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី១ មេគុណថេរមិនអូម៉ូសែន(អង្គទី២ ខុសពីសូន្យ) ដែលមានរាងទូទៅ $y'+ay=p(x)$, $p(x)\neq 0$ យើងត្រូវ៖

- ដោះស្រាយរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y'+ay=0$
- រកអនុគមន៍ចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $y'+ay=p(x)$
- ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y'+ay=p(x)$ គឺជាផលបូកនៃអនុគមន៍ចម្លើយទាំងពីរខាងលើ។

ឧទាហរណ៍៖ ដោះស្រាយសមីការ $y'+4y=3x^2+5 \ \ (E)$ ។

ចម្លើយ

- ដោះស្រាយសមីការ $y'+4y=0 \Rightarrow y_c = Ae^{-4x}$, $A\in\mathbb{R}$
- ដោះស្រាយរកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $y'+4y=3x^2+5 \ \ (E)$

  តាង $y_p = ax^2+bx+c \Rightarrow y_p' = 2ax+b$ ជំនួសក្នុងសមីការ (E) យើងបាន៖

  $$(\mathrm{E}): ax^2+bx+c+4(2ax+b)=3x^2+5 \Leftrightarrow ax^2+(b+8a)x+(4\mathrm{b}+\mathrm{c})=3x^2+5$$

  $$\Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b+8a=0 \\ 4b+c=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-24 \\ c=101 \end{cases} \Rightarrow y_p = 3x^2-24x+101$$

  ដូចនេះសមីការទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ៖ $y=y_c+y_p = Ae^{-4x}+3x^2-24x+101$, $A\in\mathbb{R}$

វិធីទី២(បម្រែបម្រួលចំនួនថេរ)៖

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី១

មេគុណថេរមិនអូម៉ូសែន(អង្គទី២ ខុសពីសូន្យ) $y'+ay=p(x)$, $p(x)\neq 0$ យើងត្រូវ៖

- រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y'+ay=0$ ដែលមានទម្រង់ $y=Ae^{-ax}$, $A\in\mathbb{R}$

- ក្នុងអនុគមន៍ចម្លើយ $y=Ae^{-ax}$ ជំនួស A ដោយ $A(x)$ យើងបាន $y=A(x)e^{-ax}$

- គណនា y' រួចយក y' និង y ទៅជំនួសក្នុងសមីការ $y'+ay=p(x)$ ដើម្បីទាញរក $A(x)$

ឧទាហរណ៍១៖ ដោះស្រាយសមីការ $y' - y = 3e^{2x}$ (E) ។

ចម្លើយ

រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y' - y = 0 \Rightarrow y = Ae^{x}$

ជំនួស A ដោយ $A(x)$ យើងបាន $y = A(x)e^{x} \Rightarrow y' = A'(x)e^{x} + A(x)e^{x}$

យក y និង y' ជំនួសចូលក្នុងសមីការ $(E): A'(x)e^{x} + A(x)e^{x} - A(x)e^{x} = 3e^{2x} \Rightarrow A'(x) = 3e^{x}$

$\Rightarrow A(x) = \int 3e^{x}dx = 3e^{x} + c$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ៖ $y = A(x)e^{x} = \left(3e^{x} + c\right)e^{x}$, $c \in \mathbb{R}$

ឧទាហរណ៍៖ ដោះស្រាយសមីការ $2y' + 2y = \cos x$ រកចម្លើយមួយដែលក្រាបនៃចម្លើយកាត់តាមចំណុច $\left(0, -\frac{7}{4}\right)$ ។

ចម្លើយ

រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $2y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y' + y = 0 \Rightarrow y = Ae^{-x}$

ជំនួស A ដោយ $A(x)$ យើងបាន $y = A(x)e^{-x} \Rightarrow y' = A'(x)e^{-x} - A(x)e^{-x}$

យក y និង y' ជំនួសចូលក្នុងសមីការដើម យើងបាន៖

$$2\left(A'(x)e^{-x} - A(x)e^{-\frac{3}{2}x}\right) + 2A(x)e^{-\frac{3}{2}x} = \cos x \Leftrightarrow 2A'(x)e^{-x} = \cos x$$

$$A'(x) = \frac{1}{2}e^{x}\cos x \Rightarrow A(x) = \frac{1}{2}\int e^{x}\cos x dx$$

គណនាអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

តាង $f(x) = e^{x} \Rightarrow f'(x) = e^{x}$, $g'(x) = \cos x \Rightarrow g(x) = \sin x$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x}\sin x - \int e^{x}\sin x dx\right) \quad (*)$$

គណនាអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកម្តងទៀត

- $\int e^{x}\sin x dx$

តាង $f(x)=e^x \Rightarrow f'(x)=e^x$, $g'(x)=\sin x \Rightarrow g(x)=-\cos x$

$$\Rightarrow \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + 2A(x)$$

ជំនួសក្នុង $(*)$ $A(x)=\frac{1}{2}\left[e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + 2A(x)\right)\right]$

$$\Leftrightarrow A(x)=\frac{1}{2}e^x \sin x + \frac{1}{2}e^x \cos x - A(x)$$

$$2A(x)=\frac{1}{2}e^x \sin x + \frac{1}{2}e^x \cos x \Rightarrow A(x)=\frac{1}{4}e^x\left(\sin x+\cos x\right)+c$$

$$\Rightarrow y = A(x)e^{-x} = \left[\frac{1}{4}e^x\left(\sin x+\cos x\right)+c\right]e^{-x} = \frac{1}{4}\left(\sin x+\cos x\right)+ce^{-x}, c\in\mathbb{R}$$

តែក្រាបនៃចម្លើយកាត់តាមចំណុច $\left(0,-\frac{7}{4}\right) \Leftrightarrow -\frac{7}{4}=\frac{1}{4}\left(\sin 0+\cos 0\right)+ce^0 \Rightarrow c=-2$

ដូចនេះចម្លើយមួយនៃសមីការគឺ៖ $y=\frac{1}{4}\left(\sin x+\cos x\right)-2e^{-x}$

ប្រតិបត្តិ ដោះស្រាយសមីការ៖

១. $y'+\frac{2}{3}y=2x-4$ តាមលក្ខខណ្ឌដើម $y(0)=\frac{1}{2}$ ។

២. $-3y'+6y=e^{3x}+1$ ក្រាបនៃអនុគមន៍ចម្លើយកាត់តាមចំណុច $(0,0)$ ។

៤.២ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី ២

៤.២.១ និយមន័យ

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី២ អូម៉ូសែន និងមានមេគុណថេរជាសមីការដែលអាចសរសេរជារាងទូទៅ $ay''+by'+cy=0$ ដែល a,b,c ជាចំនួនពិត និង $a\neq 0$ ។

ឧទាហរណ៍១៖ គេមានអនុគមន៍ $y=(2x+1)e^{-x}$ ។

ក. គណនាដេរីវេទី១ និងដេរីវេទី២ នៃអនុគមន៍នេះ។

ខ. រួចរកទំនាក់ទំនងរវាង អនុគមន៍នេះ ដេរីវេទី១ និងដេរីវេទី២របស់វា។

ចម្លើយ

ក. $y=(2x+1)e^{-x}\Rightarrow y'=2e^{-x}-(2x+1)e^{-x}=(-2x+1)e^{-x}$

$$y''=-2e^{-x}-2e^{-x}+(2x+1)e^{-x}=(2x-3)e^{-x}$$

ខ. ទំនាក់ទំនងរវាង អនុគមន៍នេះ ដេរីវេទី១ និងដេរីវេទី២

យើងមាន $y'=2e^{-x}-(2x+1)e^{-x}=2e^{-x}-y$

$\Rightarrow y''=-2e^{-x}-y'=-(y'+y)-y'$ ព្រោះ $\left(2e^{-x}=y'+y\right)$

$y''=-2y'-y\Leftrightarrow y''+2y+y=0$

ដូចនេះទំនងរវាង អនុគមន៍នេះ ដេរីវេទី១ និងដេរីវេទី២គឺ $y''+2y+y=0$ ហៅថាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី២អូម៉ូសែន។

ឧទាហរណ៍ទី២៖ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាអនុគមន៍ $h(x)=(2\cos 3x-3\sin 3x)e^{x}$ ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $h''(x)-2h'(x)+10h(x)=0$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $h(x)=(2\cos 3x-3\sin 3x)e^{x}$

$\Rightarrow h'(x)=(-6\sin 3x-9\cos 3x)e^{x}+(2\cos 3x-3\sin 3x)e^{x}=(-9\sin 3x-7\cos 3x)e^{x}$

$h''(x)=(-27\cos 3x+21\sin 3x)e^{x}+(-9\sin 3x-7\cos 3x)e^{x}=(12\sin 3x-34\cos 3x)e^{x}$

យើងបាន $h''(x)-2h'(x)+10h(x)=0$

$\Leftrightarrow (12\sin 3x-34\cos 3x)e^{x}-2(-9\sin 3x-7\cos 3x)e^{x}+10(2\cos 3x-3\sin 3x)e^{x}=0$

$0=0$ ពិត

ដូចនេះអនុគមន៍ $h(x)=(2\cos 3x-3\sin 3x)e^{x}$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $h''(x)-2h'(x)+10h(x)=0$ ។

៤.២.២ ដំណោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី២ អូម៉ូសែន មានមេគុណថេរ

ជាទូទៅ៖ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី២ អូម៉ូសែន និងមានមេគុណថេរមានរាងទូទៅ

$y''+by'+cy=0\ (E)$ ដែល $b,c\in\mathbb{R}$ ហើយមានសមីការសម្គាល់ $r^2+br+c=0$ ដែលមានឫស r_1 និង r_2 យើងបាន៖

ក. បើសមីការសម្គាល់មានឫសពីរជាចំនួនពិតផ្សេងគ្នាគឺ $r_1=\alpha, r_2=\beta$ នោះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ៖ $y=Ae^{\alpha x}+Be^{\beta x}$, $A,B\in\mathbb{R}$ ។

ខ. បើសមីការសម្គាល់មានឫសពីរស្មើគ្នា(ឫសឌុប)គឺ $r_1=r_2=\alpha$ នោះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ៖ $y=Axe^{\alpha x}+Be^{\alpha x}=(Ax+B)e^{\alpha x}, A,B\in\mathbb{R}$ ។

គ. បើសមីការសម្គាល់មានឫសពីរជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នាគឺ $r_1=\alpha+i\beta, r_2=\alpha-i\beta$ នោះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ៖ $y=e^{\alpha x}(C\cos\beta x+D\sin\beta x)$, $C,D\in\mathbb{R}$ ។

ឧទាហរណ៍៖ ដោះស្រាយសមីការ ៖

ក. $y''-6y'+9y=0$ តាមលក្ខខណ្ឌដើម $y(1)=e^3$ និង $y'(0)=5$ ។

ខ. $3y''-5y'+2y=0$ ។

គ. $y''-2y'+5y=0$ តាមលក្ខខណ្ឌដើម $y(0)=2$ និង $y'(0)=3$ ។

ចម្លើយ

ក. $y''-6y'+9y=0$ តាមលក្ខខណ្ឌដើម $y(1)=e^3$ និង $y'(0)=5$

សមីការសម្គាល់ $r^2-6r+9=0$

$\Delta'=(-3)^2-9=0\Rightarrow r_1=r_2=3$

នោះចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $y=(Ax+B)e^{3x}$, $A,B\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow y'=Ae^{3x}+3(Ax+B)e^{3x}$

ដោយ $\begin{cases} y(1)=e^3 \\ y'(0)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A+B)e^3=e^3 \\ A+3B=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=2 \end{cases}$

ដូចនេះចម្លើយមួយនៃសមីការគឺ $y=(-x+2)e^{3x}$ ។

ខ. $3y''-5y'+2y=0$

សមីការសម្គាល់ $3r^2-5r+2=0 \Rightarrow r_1=1, r_2=\frac{2}{3}$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $y=Ae^x+Be^{\frac{2}{3}x}$, $A,B\in\mathbb{R}$ ។

គ. $y''-2y'+5y=0$ តាមលក្ខខណ្ឌដើម $y(0)=2$ និង $y'(0)=3$

សមីការសម្គាល់ $r^2-2r+5=0$

$\Delta'=(-1)^2-5=-4=4i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta'}=2i$ នោះ $r_1=1+2i$, $r_2=1-2i$

យើងបានចម្លើយទូទៅ $y=(C\cos 2x+D\sin 2x)e^x, C,D\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow y'=(-2C\sin 2x+2D\cos 2x)e^x+(C\cos 2x+D\sin 2x)e^x$

តែ $\begin{cases} y(0)=2 \\ y'(0)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=2 \\ 2D+C=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=2 \\ D=\frac{1}{2} \end{cases}$

ដូចនេះចម្លើយមួយនៃសមីការគឺ $y=\left(2\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)e^x$ ។

ប្រតិបត្តិ ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

ក. $y''+y'-6y=0$ តាមលក្ខខណ្ឌដើម $y(0)=3, y'(0)=2$ ។

ខ. $2y''+8y=0$ តាមលក្ខខណ្ឌដើម $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=3$, $y'\left(\frac{\pi}{12}\right)=0$ ។

៤.១.៣ ដំណោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី២ មិនអូម៉ូសែន មានមេគុណថេរ

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី២ មិនអូម៉ូសែន មានមេគុណថេរ ជាអនុគមន៍ដែលមានរាងទូទៅ $ay''+by'+cy=p(x)$ ដែល $a\neq 0, p(x)\neq 0$ និង $a,b,c\in\mathbb{R}$ ។

របៀបដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី២ មិនអូម៉ូសែន មានមេគុណថេរ $ay''+by'+cy=p(x)$ ដែល $a\neq 0, p(x)\neq 0$ និង $a,b,c\in\mathbb{R}$ ៖

- រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $ay''+by'+cy=0$ ។
- រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $ay''+by'+cy=p(x)$ ដែលមានទម្រង់ដូចអង្គទី២ ។
- ចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលគឺជាផលបូកនៃចម្លើយទូទៅ និងចម្លើយពិសេស។

ឧទាហរណ៍ទី១៖ ដោះស្រាយសមីការ $y''-4y=x^2\,(E)$ ។

ចម្លើយ

- រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y''-4y=0$

សមីការសម្គាល់ $r^2-4=0\Rightarrow r_1=-2, r_2=2\ \Rightarrow y_c=Ae^{-2x}+Be^{2x}, (A,B\in\mathbb{R})$

- រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $y''-4y=x^2\,(E)$

តាង $y_p=ax^2+bx+c\Rightarrow y'=2ax+b, y''=2a$

ជំនួសក្នុងសមីការ $(E):2a-4\left(ax^2+bx+c\right)=x^2\Leftrightarrow -4ax^2-4bx+2a-4c=x^2$

$$\Rightarrow\begin{cases}-4a=1\\-4b=0\\2a-4c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{1}{4}\\b=0\\c=-\dfrac{1}{8}\end{cases}\Rightarrow y_p=-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}$$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ៖ $y=y_c+y_p=Ae^{-2x}+Be^{2x}-\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{8}, \left(A,B\in\mathbb{R}\right)$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២៖ គេមានសមីការ $y''+4y'+13y=40\sin x\,(E)$ ។

ក. រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E) ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ (E) ក្នុងលក្ខខណ្ឌដើម $y(0)=2, y'(0)=0$ ។

ចម្លើយ

ក. រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

តាង $y_p = A\sin x + B\cos x \Rightarrow y_p' = A\cos x - B\sin x, y'' = -A\sin x - B\cos x$

ជំនួសក្នុង $(E): -A\sin x - B\cos x + 4(A\cos x - B\sin x) + 13(A\sin x + B\cos x) = 40\sin x$

$$\Leftrightarrow (12A - 4B)\sin x + (4A + 12B)\cos x = 40\sin x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12A - 4B = 40 \\ 4A + 12B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3A - B = 10 \\ A + 3B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9A - 3B = 30 \\ A + 3B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = -1 \end{cases}$$

ដូចនេះចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E) គឺ $y_p = 3\sin x - \cos x$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ (E)

សមីការសម្គាល់ $r^2 + 4r + 13 = 0 \Rightarrow \Delta' = 2^2 - 13 = -9, \sqrt{\Delta'} = 3i$

$r_1 = -2 - 3i,\ r_2 = -2 + 3i \Rightarrow y_c = (A\cos 3x + B\sin 3x)e^{-2x}, (A, B \in \mathbb{R})$

ចម្លើយទូទៅនៃ (E) គឺ $y = y_c + y_p = (A\cos 3x + B\sin 3x)e^{-2x} + 3\sin x - \cos x, (A, B \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow y' = (-3A\sin 3x + 3B\cos 3x)e^{-2x} - 2e^{-2x}(A\cos 3x + B\sin 3x) + 3\cos x + \sin x$

ដោយ $\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A - 1 = 2 \\ 3B - 2A + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = 1 \end{cases}$

ដូចនេះចម្លើយនៃសមីការ (E) គឺ $y = (3\cos 3x + \sin 3x)e^{-2x} + 3\sin x - \cos x$ ។

ប្រតិបត្តិ

១. គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' + 2y' + y = x^2 + 2x - 2$ ។

ក. រកអនុគមន៍ពហុធាដឺក្រេទី២ ដែលជាចម្លើយពិសេសនៃ (E) ។

ខ. ដោះស្រាយរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ។

២. គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'' + y = \sin x\ (E)$ ។

ក. ដោះស្រាយសមីការ $y'' + y = 0$ ។

ខ. កំណត់ចំនួនពិត A ដែលអនុគមន៍ $g(x) = Ax\cos x$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E) ។

គ. ដោះស្រាយសមីការ (E) ក្នុងលក្ខខណ្ឌដើម $y(0) = 3$, $y'(0) = \frac{5}{2}$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍មេរៀនទី៤

១. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖

ក. $f'(x)=x^3+2x^2-5$ ខ. $y'=\dfrac{2}{2x+5}$ គ. $\dfrac{dy}{dt}=(2t+3)(t^2+3t-6)$

ឃ. $\dfrac{dz}{dx}=xe^{x^2}+2x-3$ ង. $y'=\dfrac{6x^2+4x}{(x^3+x^2-2)}$ ច. $f'(t)=t\cos 3t$

ឆ. $(y+2)\dfrac{dy}{dx}=y(x-3)$ ជ. $y'+y^2=25$ ឈ. $\dfrac{x}{y}dy=(2x^2+3x-1)dx$

២. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតាមលក្ខខណ្ឌដែលឱ្យ៖

ក. $\dfrac{dy}{dx}=3x+x^2$, $y(1)=4$ ខ. $\dfrac{dy}{dx}=x^2+1+\cos x$, $y(0)=1$

គ. $\dfrac{xy'}{y}=x^2+2$, $y(0)=5$ ឃ. $\dfrac{1}{\cot x}y'=1$, $y\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\ln 2$

ង. $(3x^2-2)f'(x)=6x$, $y(1)=4$ ច. $y'e^{-2x}=1$, $y(0)=5$

ឆ. $\dfrac{1}{y+1}\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{2x}{y}$, $y(2)=0$ ជ. $\dfrac{xy'}{y-1}=(x+2)$, $y(1)=e+1$

៣. រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $y'-3y=0$ ខ. $\dfrac{dy}{dx}-\sqrt{5}y=0$ គ. $3y'-2y=0$

ឃ. $2\dfrac{dy}{dx}-y\ln 6=0$ ង. $y'-y=1-x$ ច. $y'+y=x^2+3x$

ឆ. $y'+2y=e^{-2x}$ ជ. $y'+y=2cosx$ ឈ. $y+\dfrac{dy}{dx}=\cos x+\sin x$

៤. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតាមលក្ខខណ្ឌដែលឱ្យដូចខាងក្រោម៖

$a.\ \dfrac{dy}{dx}-1=-y$, $y(0)=0$ $b.\ 2y'+y=0$, $y(1)=-3$ $c.\ 2y-y'=0$, $y(3)=-2$

$d.\ 7y'+4y=\ln 1$, $y(7)=e^5$

៥. គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E_1): y'-2y=0$ និង $(E_2): y'=y$ ។

ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E_1) និង (E_2) រួចរកចម្លើយពិសេស y_1 នៃ (E_1)ដែល $y_1(0)=4$ និង y_2 នៃ (E_2) ដែល $y_2(0)=1$។

ខ. គេឱ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=y_1-y_2$។ ដោះស្រាយសមីការ $f(x)=0$។

៦. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E):y'+2y=x^2$។

ក. កំណត់ពហុធាដឺក្រេទី២ g ដែលជាចម្លើយពិសេសនៃ (E)។

ខ. តាង h ជាអនុគមន៍ដែល $h(x)=f(x)-g(x)$។ បើ h ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'+2y=0$ នោះបង្ហាញថា f ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E)។

គ. ដោះស្រាយសមីការ $y'+2y=0$ រួចទាញរកអនុគមន៍ f ដែលជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ(E)។

៧. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

$a.\ y''+2y'+y=0$ $\quad b.\ y''+2y'+2y=0$ $\quad c.\ y''-13y'+y=0$

$d.\ y''-2y'=0$ $\quad e.\ -4y''+7y'+2y=0$ $\quad f.\ y''+2\sqrt{11}y'+11y=0$

$g.\ y''+2y'-3y=6$ $\quad h.\ y''-2y'+4y=e^x$ $\quad i.\ y''-3y'+5y=4x^3-2x$

៨. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតាមលក្ខខណ្ឌដែលឱ្យដូចខាងក្រោម៖

ក. $\frac{1}{4}y''+y=0\ ,\ y(0)=\frac{3\sqrt{2}}{2},y'(0)=3\sqrt{2}$ $\quad$ ខ. $y''+6y'+13y=0\ ,y(0)=1,y'(0)=0$

គ. $y''+4y'+y=0\ ,y(0)=e,y'(0)=2e$ $\quad$ ឃ. $5y''+y'=-6x\ ,y(0)=0,y'(0)=-10$

ង. $y''+4y'+5y=35e^{-4x}\ ,y(0)=-3,y'(0)=-1$ $\quad$ ច. $y''+4y=\sin x\ ,y(0)=1,y'(0)=2$

៩. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''+9y=2\cos x\ (E)$។ គេតាង $y=z+k\cos x$ ដែល z ជាអនុគមន៍នៃ x និង k ជាចំនួនថេរ។

ក. រក k ដែល z ជាចម្លើយនៃសមីការ $z''+9z=0$ កាលណា $y=z+k\cos x$ ជាចម្លើយនៃ (E)។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $z''+9z=0$ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E)។

គ. រកចម្លើយមួយនៃ (E) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $y(0)=0$ និង $y'(\pi)=3$។

១០. គេឱ្យសមីការ $-y''+2y'+4y=-2\cos 2x\ (E)$។

ក. ដោះស្រាយសមីការ $-y''+2y'+4y=0$ ។

ខ. កំណត់ចនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x)=a\cos 2x+b\sin 2x$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ (E) ។

១១. ក. ដោះស្រាយសមីការ $(E): y''+4y=0$ (តាង $g(x)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E))។

ខ. រកចម្លើយនៃ (E) ដោយដឹងថា $g(0)=1$ និង $g'(0)=4$ ។

គ. កំណត់ចំនួនពិត m និង n ដើម្បីឱ្យ $f(x)=mx+n$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $(F): y''+4y=x-1$ ។

ឃ. បង្ហាញថា $g(x)+f(x)$ ជាចម្លើយនៃ (F) ។

មេរៀនទី៥ ចំនួនកុំផ្លិច

៥.១ ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពិជគណិត

៥.១.១ សញ្ញាណនៃចំនួនកុំផ្លិច

ជាទូទៅ៖

- ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពិជគិតជាចំនួនដែលមានរាង $z=a+bi$ ដែល $a,b\in\mathbb{R}$ ហើយ a ហៅថាផ្នែកពិត b ហៅថាផ្នែកនិមិត្ត ។ i ជាឯកតានិមិត្តដែល $i^2=-1$។
- ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ $z=a+bi$ គឺ $\overline{z}=a-bi$ ។
- ចំនួនកុំផ្លិចផ្ទុយនៃ $z=a+bi$ គឺ $-z=-a-bi$ ។

ឧទាហរណ៍៖ យើងមានចំនួនកុំផ្លិច $3+2i,-2+5i,1-4i,7,-9i,0,i$ ។

រកផ្នែកពិត ផ្នែកនិមិត្ត ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់ និងចំនួនកុំផ្លិចផ្ទុយនៃចំនួនកុំផ្លិចទាំងនេះ។

ចម្លើយ

ចំនួនកុំផ្លិច	ផ្នែកពិត	ផ្នែកនិមិត្ត	ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់	ចំនួនកុំផ្លិចផ្ទុយ
$3+2i$	3	2	$3-2i$	$-3-2i$
$-2+5i$	-2	5	$-2-5i$	$2-5i$
$1-4i$	1	-4	$1+4i$	$-1+4i$
7	7	0	7	-7
$-9i$	0	-9	$9i$	$9i$
0	0	0	0	0
i	0	1	$-i$	$-i$

ប្រតិបត្តិ គេមានចំនួនកុំផ្លិច $-5+i,\frac{2}{3}i,-\frac{1}{2}-6i,-10,-13i$ ។

រកផ្នែកពិត ផ្នែកនិមិត្ត ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់ និងចំនួនកុំផ្លិចផ្ទុយនៃចំនួនកុំផ្លិចនេះ។

៥.១.២ ប្រមាណវិធីលើចំនួនកុំផ្លិច

ជាទូទៅ៖ បើគេមានចំនួនកុំផ្លិចពីរ $z_1=a+bi,\ z_2=c+di$ នោះគេបាន៖

- $z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$
- $z_1-z_2=(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$
- $z_1z_2=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

- $\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}$

សម្គាល់៖ បើចំនួនកុំផ្លិចពីរស្មើគ្នា $z_1=z_2$ ឬ $a+bi=c+di \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$

ឧទាហរណ៍១៖ គណនា z_1+z_2, z_1-z_2, z_1z_2 និង $\frac{z_1}{z_2}$ ចំពោះលក្ខខណ្ឌខាងក្រោម៖

ក. $z_1=-6+i,\ z_2=5i$ ខ. $z_1=2-3i,\ z_2=1+2i$

ចម្លើយ

ក. $z_1=-6+i,\ z_2=5i$

$$z_1+z_2=-6+i+5i=-6+6i$$
$$z_1-z_2=-6+i-5i=-6-4i$$
$$z_1z_2=5i(-6+i)=-30i-5i^2=5-30i$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{-6+i}{5i}=\frac{(-6+i)i}{5i\times i}=\frac{-6i+i^2}{5i^2}=\frac{-1-6i}{-5}=\frac{1}{5}+\frac{6}{5}i$$

ខ. $z_1=2-3i,\ z_2=1+2i$

$$z_1+z_2=2-3i+1+2i=3-i$$
$$z_1-z_2=2-3i-(1+2i)=1-5i$$
$$z_1z_2=(2-3i)(1+2i)=2+4i-3i-6i^2=8+i$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2-3i}{1+2i}=\frac{(2-3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{2-4i-3i+6i^2}{1^2-(2i)^2}=\frac{-4-7i}{5}=-\frac{4}{5}-\frac{7}{5}i$$

ឧទាហរណ៍ទី២៖ គេមានចំនួនកុំផ្លិចពីរ $z_1=1-i, z_2=2+2i$ ។

សរសេរ $A=\frac{z_2{}^2+2z_1}{z_1z_2-3i}$ ជាទម្រង់ពិជគណិត។

ចម្លើយ

$$A=\frac{z_2{}^2+2z_1}{z_1z_2-3i}=\frac{(2+2i)^2+2(1-i)}{(1-i)(2+2i)-3i}=\frac{4+8i+4i^2+2-2i}{2+2i-2i-2i^2-3i}$$

$$=\frac{2+6i}{4-3i}=\frac{(2+6i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}=\frac{8+6i+24i+18i^2}{4^2-(3i)^2}=\frac{-10+30i}{16+9}=-\frac{2}{5}+\frac{6}{5}i$$

ដូចនេះ $A=-\frac{2}{5}+\frac{6}{5}i$ ជាទម្រង់ពិជគណិត។

ឧទាហរណ៍ទី៣៖ កំណត់តម្លៃ a,b ចំពោះសមីការ $(2a+3i)+(1+2bi)=5+12i$ ។

ចម្លើយ

កំណត់តម្លៃ a,b

$(2a+3i)+(1+2bi)=5+12i \Leftrightarrow (2a+1)+(2b+3)i=5+12i$

$\Rightarrow \begin{cases} 2a+1=5 \\ 2b+3=12 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} a=2 \\ b=\frac{9}{2} \end{cases}$

ដូចនេះ $a=2\ ,b=\frac{9}{2}$ ។

ប្រតិបត្តិ

១. គណនារួចសរសេរជាទម្រង់ពិជគណិត៖

ក. $(-4-7i)-(10+30i)$

ខ. $\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{3}i\right)+\left(\frac{5}{6}+\frac{7}{6}i\right)$

គ. $(4+3i)(11-5i)$

ឃ. $\frac{(3-2i)}{5i+4}$

២. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{3+3i}\right)^2$ និង $z'=(x+1)+(y-2)i$ ។

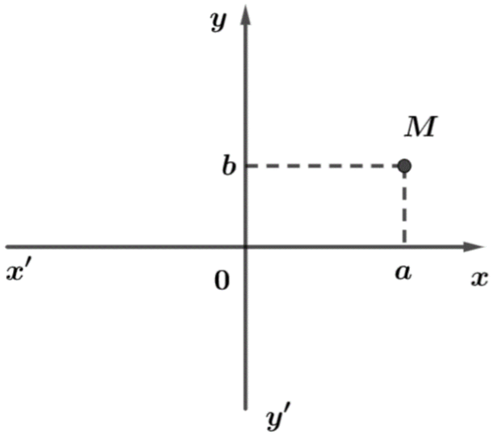
ក. សរសេរ z ជាទម្រង់ពិជគណិត ។

ខ. គណនា x,y ដើម្បីឱ្យ $z=z'$ ។

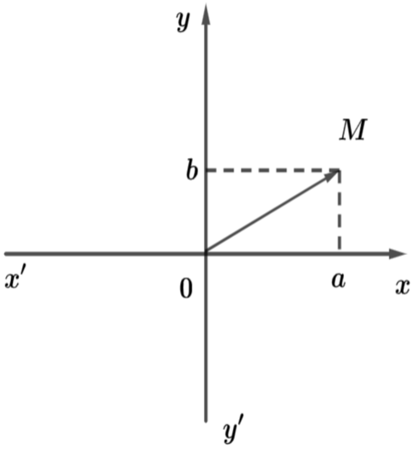
៥.១.២ ចំនួនកុំផ្លិចលើប្លង់កុំផ្លិច

គេអាចតាងចំនួនកុំផ្លិច $z=a+bi$ ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ (xoy) ដោយចំណុច $M(a,b)$។ គេថា ចំណុច M ជាចំណុចរូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $z=a+bi$ ដែលកំណត់សរសេរ $M(z)$។

ម្យ៉ាងទៀតគេក៏អាចតាងចំនួនកុំផ្លិច $z=a+bi$ ដោយវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OM}=(a,b)$។ គេថាវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OM}$ ជាវ៉ិចទ័ររូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $z=a+bi$ ហើយកំណត់សរសេរដោយ $\overrightarrow{OM}(z)$។



រូបភាព ៥.១



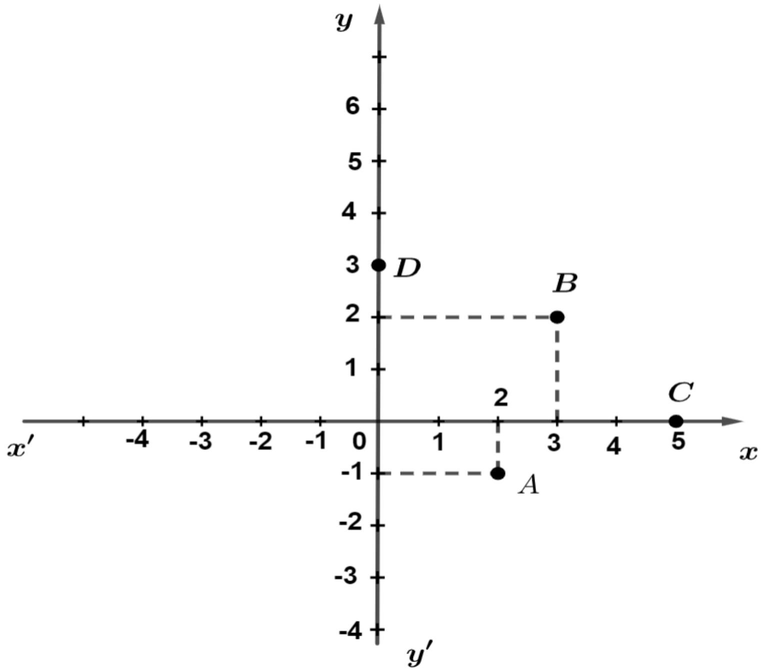
រូបភាព ៥.២

ឧទាហរណ៍៖ ក.តាងរូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិ $2-i, 3+2i, 5, 3i$ ដោយចំណុចនៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច។

ខ.តាងរូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $1+2i, -4-i, -3, -2i$ ដោយវ៉ិចទ័រនៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច។

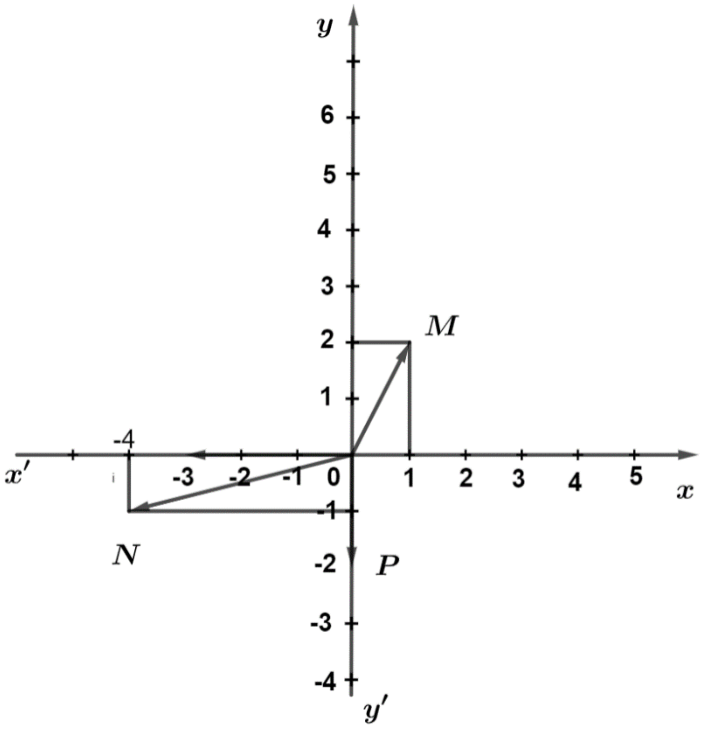
ចម្លើយ

ក. តាងចំណុច A, B, C, D ជារូបភាពរៀងគ្នានៃចំនួនកុំផ្លិច $2-i, 3+2i, 5, 3i$



រូបភាព ៥.៣

ខ. តាងចំណុច M, N, O, P ជារូបភាពរៀងគ្នានៃចំនួនកុំផ្លិច $1+2i, -4-i, -3, -2i$ ។



រូបភាព ៥.៤

ប្រតិបត្តិ៖ កំណត់រូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $-5-3i, 2i+3, -4i+1, -7, i$ ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច។

៥.១.៣ វិចទ័ររូបភាពនៃផលបូក ផលដកចំនួនកុំផ្លិច និងផលគុណចំនួនកុំផ្លិចនឹងចំនួនពិតលើប្លង់កុំផ្លិច

ឧទាហរណ៍៖ គេមានចំនួនកុំផ្លិចពីរ $z_1 = 1+2i, z_2 = 2-i$ ។

កំណត់រូបភាពនៃចំនកុំផ្លិច $z_1+z_2, z_1-z_2, 3z_1, -2z_2$ ដោយវិចទ័រក្នុងប្លង់កុំផ្លិច។

កំណត់រូបភាពនៃចំនកុំផ្លិច $z_1+z_2, z_1-z_2, 3z_1, -2z_2$ ដោយវិចទ័រក្នុងប្លង់កុំផ្លិច។

ចម្លើយ

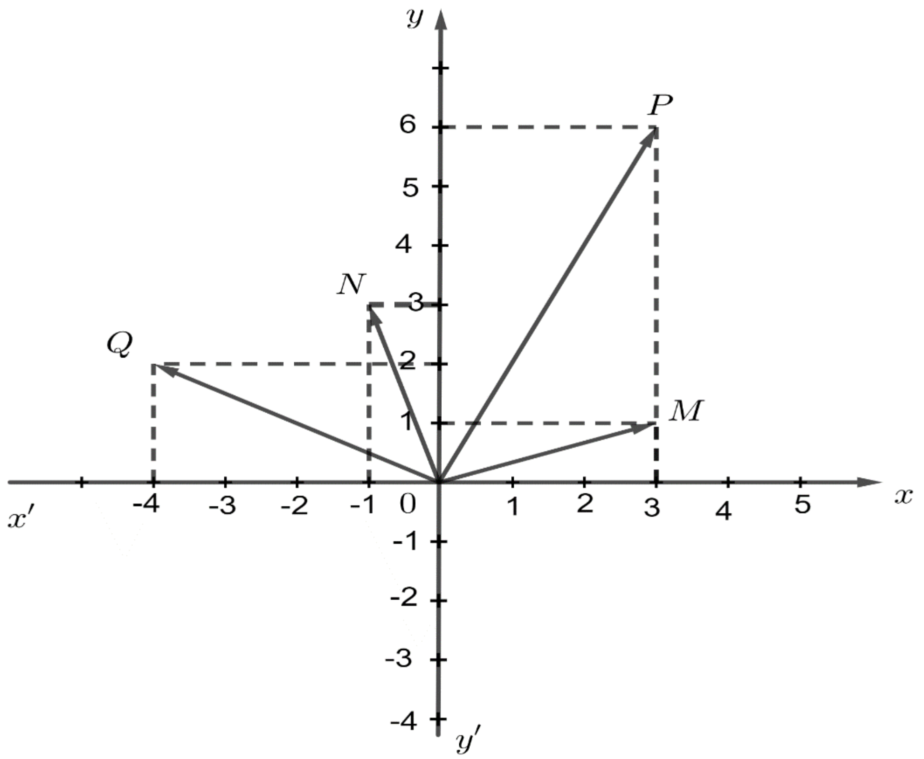
តាងវិចទ័រ $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}, \overrightarrow{\mathrm{OP}}, \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ ជារូបភាពរៀងគ្នានៃចំនួនកុំផ្លិច $z_1+z_2, z_1-z_2, 3z_1, -2z_2$

$z_1 = 1+2i$, $z_2 = 2-i$

$z_1 + z_2 = 1+2i+2-i = -1+3i$

$3z_1 = 3(1+2i) = 3+6i$

$-2z_2 = -2(2-i) = -4+2i$



រូបភាព ៥.៥

ប្រតិបត្តិ គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិចពីរ $z_1 = 3+3i,\ z_2 = 6-5i$ ។

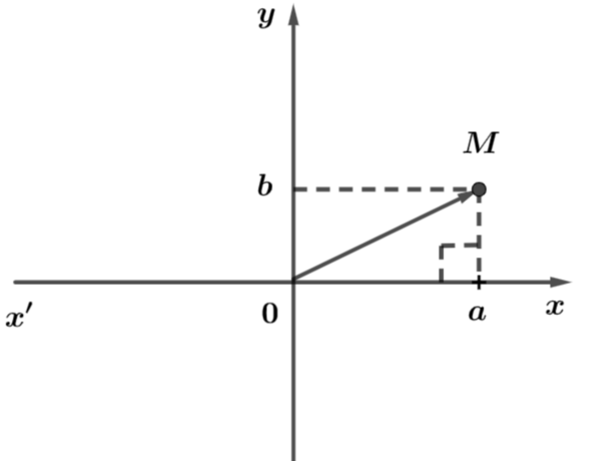
កំណត់រូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $z_1+z_2, z_2-z_1, \frac{1}{3}z_1+z_2, 2z_1-z_2, -\frac{2}{3}z_1$ ដោយវ៉ិចទ័រក្នុងប្លង់កុំផ្លិច។

៥.២ ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

៥.២.១ ម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច

បើយើងមានចំនួនកុំផ្លិច $z = a+bi$ ហើយ M ជាចំណុចរូបភាពនៃ z ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច (xoy) នោះប្រវែង OM ជាម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិចនដែលកំណត់ដោយ៖

$OM^2 = a^2+b^2 \Rightarrow OM = \sqrt{a^2+b^2}$ គេតាងម៉ូឌុលនៃ z ដោយ $|z|$ ឬ r ហើយគេកំណត់សរសេរ៖ $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$



រូបភាព ៥.៦

ឧទាហរណ៍ទី១៖គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1=4+3i,\ z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ។ គណនា $|z_1|,|z_2|$ ។

ចម្លើយ

$$|z_1|=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

$$|z_2|=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1$$

ឧទាហរណ៍ទី២៖ គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=1+\sqrt{3}i$ ។ គណនា $|z|,|-z|,|\overline{z}|$ ។

ចម្លើយ

$$z=1+\sqrt{3}i, -z=-1-\sqrt{3}i, \overline{z}=1-\sqrt{3}i$$

យើងបាន

$$|z|=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$$

$$|-z|=\sqrt{(-1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$$

$$|\overline{z}|=\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$$

លក្ខណៈម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច

បើ z_1,z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិចនោះគេបាន ៖

- $|z_1|=|-z_1|=|\overline{z}_1|$
- $|z_1|^2=z_1\overline{z}_1$
- $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$
- $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$

ឧទាហរណ៍ទី៣៖ គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=2+2i, z_2=-1+i$ ។ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា៖

ក. $|z_1|^2=z_1\overline{z}_1$ ខ. $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$ គ. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$ ឃ. $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$

ចម្លើយ

ក. $|z_1|^2 = z_1\bar{z}_1$

យើងមាន $|z_1| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{2\cdot 2^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow |z_1|^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8$

$$z_1\bar{z}_1 = (2+2i)(2-2i) = 2^2-(2i)^2 = 4+4 = 8$$

ដូចនេះ $|z_1|^2 = z_1\bar{z}_1$ ពិត។

ខ. $|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$

យើងមាន $z_1\cdot z_2 = (2+2i)(-1+i) = -2+2i-2i+2i^2 = -4 \Rightarrow |z_1\cdot z_2| = 4$

$$|z_1|\cdot|z_2| = \sqrt{2^2+2^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2} = 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 4$$

ដូចនេះ $|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$ ពិត។

គ. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

យើងមាន $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+2i}{-1+i} = \frac{(2+2i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{-2-2i-2i-2i^2}{(-1)^2-i^2} = \frac{-4i}{2} = -2i \Rightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = 2$

$$\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{2^2+2^2}}{\sqrt{(-1)^2+1^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$$

ដូចនេះ $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ពិត។

យើងមាន $z_1+z_2 = 2+2i+-1+i = 1+3i \Rightarrow |z_1+z_2| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

$$|z_1|+|z_2| = \sqrt{2^2+2^2}+\sqrt{(-1)^2+1^2} = 2\sqrt{2}+\sqrt{2} = 3\sqrt{2} = \sqrt{11}$$

ដូចនេះ $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$ ពិត។

ប្រតិបត្តិ គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិចពីរ $z = 3-2i, w = 4+i$ ។ គណនា $|z+w|, |z\cdot w|, |z|\cdot|w|, \left|\frac{z}{w}\right|, \frac{|z|}{|w|}$ ។

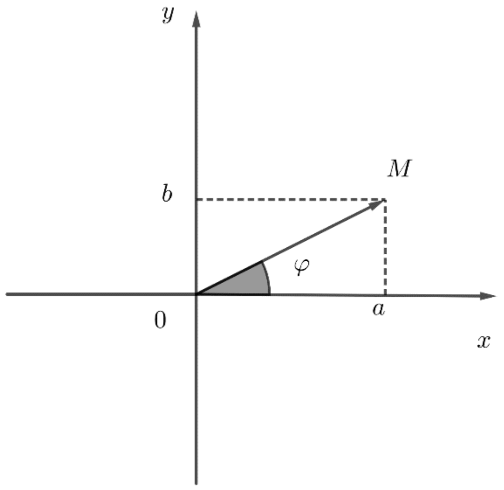
៥.២.២ អាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច

បើគេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=a+bi$ ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច (xoy) ហើយ $\overrightarrow{OM}$ ជាវ៉ិចទ័ររូបភាពនៃ z

នោះមុំដែលកំណត់ដោយ $\left(\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OM}\right)$ ហៅថាអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច z ដែលតាងដោយ φ ឬ $\arg z$ ។

ដើម្បីរកអាគុយម៉ង់នៃ z យើងត្រូវដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ៖

$$\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{a}{r}\\ \sin\varphi=\dfrac{b}{r}\end{cases} \text{ ដែល } r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$



រូបភាព ៥.៧

ឧទាហរណ៍៖ គណនាអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច ៖

ក. $z=1+i$ ខ. $z=-1+\sqrt{3}i$ គ. $z=-4i$ ឃ. $z=7$

ចម្លើយ

ក. $z=1+i\Rightarrow r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

យើងបាន $\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Rightarrow\varphi=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$

ដូចនេះ $\text{argz}=\varphi=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$ ។

ខ. $z=-1+\sqrt{3}i\Rightarrow r=\sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{4}=2$

យើងបាន $\begin{cases}\cos\varphi=-\dfrac{1}{2}\\ \sin\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Rightarrow\varphi=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$

ដូចនេះ $\text{argz}=\varphi=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$ ។

គ. $z=-4i \Rightarrow r=\sqrt{0^2+(-4)^2}=4$

យើងបាន $\begin{cases}\cos\varphi=0\\ \sin\varphi=\dfrac{-4}{4}=-1\end{cases} \Rightarrow \varphi=\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

ដូចនេះ $\arg z=\varphi=\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

ឃ. $z=7 \Rightarrow r=\sqrt{7^2+0^2}=7$

យើងបាន $\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{7}{7}=1\\ \sin\varphi=\dfrac{0}{7}=0\end{cases} \Rightarrow \varphi=2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

ដូចនេះ $\text{argz}=\varphi=2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

ប្រតិបត្តិ រកអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $z=-3-3i, w=2\sqrt{3}+2i, v=1-\sqrt{3}i$ ។

៥.២.៣ ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច

យើងមានចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពិជគណិត $z=a+bi$ ដោយ $\cos\varphi=\dfrac{a}{r}\Rightarrow a=r\cos\varphi$ និង $\sin\varphi=\dfrac{b}{r}\Rightarrow b=r\sin\varphi$ នោះយើងបាន $z=r\cos\varphi+ir\sin\varphi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ ហៅថាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច។

ជាទូទៅ៖ ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពិជគណិត $z=a+bi$ អាចសរសេរទៅជាទម្រង់ធរណីមាត្រ $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១៖ បំប្លែងចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ៖

ក. $5+5i$ ខ. $-2\sqrt{3}+2i$ គ. $-3-3\sqrt{3}i$ ឃ. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{1}{4}i$

ចម្លើយ

ក. $5+5i \Rightarrow r=\sqrt{5^2+5^2}=\sqrt{2\cdot5^2}=5\sqrt{2}$

$$\begin{cases}\cos\varphi = \dfrac{5}{5\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi = \dfrac{5}{5\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

ដូចនេះទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិចគឺ $5+5i = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ។

ខ. $-2\sqrt{3}+2i \Rightarrow r = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{12+4} = 4$

$$\begin{cases}\cos\varphi = \dfrac{-2\sqrt{3}}{4} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{5\pi}{6}$$

ដូចនេះទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិចគឺ $-2\sqrt{3}+2i = 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ ។

គ. $-3-3\sqrt{3}i \Rightarrow r = \sqrt{(-3)^2 + \left(-3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6$

$$\begin{cases}\cos\varphi = \dfrac{-3}{6} = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\varphi = \dfrac{-3\sqrt{3}}{6} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}\end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{4\pi}{3}$$

ដូចនេះទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិចគឺ $-3-3\sqrt{3}i = 6\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$ ។

ឃ. $\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

ដូចនេះទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិចគឺ $\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i = \frac{1}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២៖ សរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ៖

ក. $z = \frac{3}{2}\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ ខ. $w = 5\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

ចម្លើយ

ក. $z=\frac{3}{2}\left(-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}\left[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right]=\frac{3}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

ដូចនេះទម្រង់ត្រីកោណមាត្រគឺ $z=\frac{3}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ ។

ខ. $w=5\left(-\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)=5\left[\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right]=5\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

ដូចនេះទម្រង់ត្រីកោណមាត្រគឺ $w=5\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ ។

ប្រតិបត្តិ បំប្លែងចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមទៅជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ៖

ក. $z=-3i$ ខ. $w=-\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{6}i$ គ. $v=-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}i$ ឃ. $u=7\left(-\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

៥.២.៤ ផលគុណនិងផលចែកនៃចំនួនកុំផ្លិចតាមទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ជាទូទៅ៖ បើយើងមានចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ និង $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ នោះយើងបាន៖

$z_1\cdot z_2=r_1r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]$ និង $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]$

(សម្រាយបញ្ជាក់មើលក្នុងសៀវភៅគណិតថ្នាក់ទី១១កម្រិតខ្ពស់ទំព័រ ១៥២ ១៥៣ និង ១៥៥)

ឧទាហរណ៍ទី១៖ គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=4\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ និង $w=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ។

គណនា $z\cdot w$ និង $\frac{z}{w}$ ។

ចម្លើយ

$$z\cdot w=4\times2\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right]=8(\cos\pi+\text{i}\sin\pi)$$

$$\frac{z}{w}=\frac{4}{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\right]=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

ឧទាហរណ៍ទី២៖ គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}i$ និង $z_2=-3i$ ។ ដោយប្រើទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ គណនា $z_1\cdot z_2$ និង $\frac{z_2}{z_1}$ ដោយឱ្យចម្លើយជាទម្រង់ពិជគណិត។

ចម្លើយ

យើងមាន

$$z_1=-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}i\Rightarrow r_1=\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}\sqrt{2}$$

$$\begin{cases}\cos\varphi_1=\dfrac{-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\varphi_1=\dfrac{-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Rightarrow \varphi_1=\frac{5\pi}{4},\ z_1=\frac{2}{3}\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$z_2=-3i=3(0-i)=3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right),$$

គេបាន

$$z_1\cdot z_2=\frac{2}{3}\sqrt{2}\times3\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}\right)\right]=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{4}+i\sin\frac{11\pi}{4}\right)$$

$$=2\sqrt{2}\left[\cos\left(2\pi+\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(2\pi+\frac{3\pi}{4}\right)\right]=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-2+2i$$

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{3}{\frac{2}{3}\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{5\pi}{4}\right)\right]=\frac{9\sqrt{2}}{4}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{9\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\frac{9}{4}+\frac{9}{4}i$$

ដូចនេះ $z_1\cdot z_2=-2+2i$ និង $\frac{z_2}{z_1}=\frac{9}{4}+\frac{9}{4}i$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៣៖ គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=\dfrac{3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{1-\sqrt{3}i}$ ។ គណនា z ដោយឱ្យលទ្ធផលជា

ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{7\pi}{12}$ និង $\sin\frac{7\pi}{12}$ ។

ចម្លើយ

$$z=\frac{3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{1-\sqrt{3}i}=\frac{3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}=\frac{3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\right]=\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{7\pi}{12}$ និង $\sin\frac{7\pi}{12}$

រក z ជាទម្រង់ពិជគណិត

$$z=\frac{3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{1-\sqrt{3}i}=\frac{3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}{1-\sqrt{3}i}=\frac{(3+3i)\left(1+\sqrt{3}i\right)}{\left(1-\sqrt{3}i\right)\left(1+\sqrt{3}i\right)}$$

$$=\frac{3+3\sqrt{3}i+3i+3i^2\sqrt{3}}{1^2+3}=\frac{3-3\sqrt{3}}{4}+\frac{3+3\sqrt{3}}{4}i$$

ដោយ $\begin{cases}z=\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)\\ z=\frac{3-3\sqrt{3}}{4}+\frac{3+3\sqrt{3}}{4}i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{3-3\sqrt{3}}{4}\\ \frac{3\sqrt{2}}{2}\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{3+3\sqrt{3}}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\\ \sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{cases}$

ដូចនេះ $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ និង $\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ ។

ប្រតិបត្តិ១ គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=5i$ និង $w=3\left(-\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ ។ ដោយប្រើទម្រង់ត្រីកោណមាត្រគណនា $z\cdot w$ និង $\frac{w}{z}$ ។

ប្រតិបត្តិ២ គេមានចំនួនកុំផ្លិច $w=\frac{4+4\sqrt{3}i}{3+3i}$ ។ រកទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ w រួចទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$ ។

៥.២.៥ ស្វ័យគុណទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច

ជាទូទៅ៖ បើគេមានចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ នោះស្វ័យគុណទី n នៃ z កំណត់ដោយ $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ ដែល n ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន។

(សម្រាយបញ្ជាក់មើលសៀវភៅគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១១កម្រិតខ្ពស់ទំព័រ ១៦៤)។

តាមរយៈរូបមន្តនេះគេទាញបាន៖ $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ ហៅថារូបមន្តដឺម័រ។

ឧទាហរណ៍ទី១៖ គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}\right)$ និង $w = (5-5i)^8$។

គណនា z^5 និង w ដោយឱ្យលទ្ធផលជាទម្រង់ពិជគណិត។

ចម្លើយ

$$z = 3\left(\cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}\right) \Rightarrow z^5 = 3^5\left(\cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}\right)^5 = 243\left(\cos 5\cdot\frac{\pi}{10} + i\sin 5\cdot\frac{\pi}{10}\right)$$

$$= 243\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 243(0+i) = 0 + 243i$$

ដូចនេះ $z^5 = 0 + 243i$ ។

$$w = (5-5i)^8 = \left[5\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right]^8 = \left(5\sqrt{2}\right)^8\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]^8$$

$$= 50^4\left[\cos 8\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin 8\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = 50^4\left[\cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi)\right]$$

$$= 50^4(\cos 2\pi - i\sin 2\pi) = 50^4(1-0i) = 50^4 + 0i$$

ដូចនេះ $w = 50^4 + 0i$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២៖ គណនា $z = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}\right)^{36}$ ។

$$= \left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)^{36} = \left(\cos 36\cdot\frac{\pi}{12} + i\sin 36\cdot\frac{\pi}{12}\right) = \cos 3\pi + i\sin 3\pi = -1 + 0i$$

ដូចនេះ $z = -1 + 0i$ ។

ប្រតិបត្តិ គេឱ្យ $z_1=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{21}$ និង $z_2=\left[(1-i)\left(2\sqrt{3}+2i\right)\right]^{48}$។

សរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ពិជគណិត។

៥.២.៦ ឫសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច

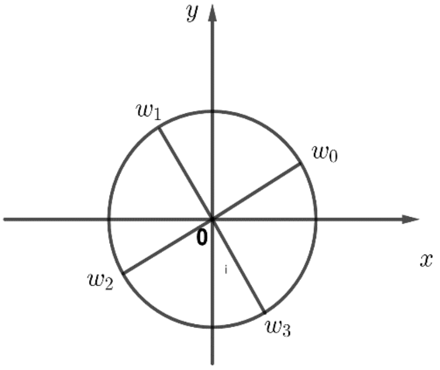
ជាទូទៅ៖ បើគេមានចំនួនកុំផ្លិចមិនសូន្យទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ ហើយ n ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន នោះ z មាន n ឫសទី n កំណត់ដោយ៖

$$w_k=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)z+i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right],k=0,1,2,...,\mathrm{n}-1$$

ឧទាហរណ៍ទី១៖ គណនាឫសទី4 នៃចំនួនកុំផ្លិច $z=-8+8\sqrt{3}i$ រួចតាងឫសទាំងនោះលើរង្វង់។

ចម្លើយ

$$z=-8+8\sqrt{3}i=16\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=16\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$



រូបភាព ៥.៨

ឫសទី4 នៃចំនួនកុំផ្លិច $z=-8+8\sqrt{3}i$ កំណត់ដោយ៖

$$w_k=\sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}\right)$$

$$=2\left(\cos\frac{2\pi+6k\pi}{12}+i\sin\frac{2\pi+6k\pi}{12}\right)$$ ដែល $k=0,1,2,3$

$$k=0: w_0=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}+i$$

$$k=1:\ w_1=2\left(\cos\frac{8\pi}{12}+i\sin\frac{8\pi}{12}\right)=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-1+\sqrt{3}i$$

$$k=2: w_2=2\left(\cos\frac{14\pi}{12}+i\sin\frac{14\pi}{12}\right)=2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=-\sqrt{3}-i$$

$$k=3:w_3=2\left(\cos\frac{20\pi}{12}+i\sin\frac{20\pi}{12}\right)=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=1-\sqrt{3}i$$

ឧទាហរណ៍ទី2៖ ដោះស្រាយសមីការ $z^5+243=0$ ។

ចម្លើយ

$z^5+243=0 \Rightarrow z^5=-243$

ឫសទី 5 នៃ -243 កំណត់ដោយ៖

$$z_k=\sqrt[5]{243}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{5}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{5}\right)=3\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{5}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{5}\right) \quad ,k=0,1,2,3,4$$

បើ $k=0:\ z_0=3\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)$

បើ $k=1:\ z_1=3\left(\cos\frac{3\pi}{5}+i\sin\frac{3\pi}{5}\right)$

បើ $k=2:\ z_2=3\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)$

បើ $k=3:\ z_3=3\left(\cos\frac{7\pi}{5}+i\sin\frac{7\pi}{5}\right)$

បើ $k=4:\ z_4=3\left(\cos\frac{9\pi}{5}+i\sin\frac{9\pi}{5}\right)$

ឧទាហរណ៍ទី3៖ គណនា $\sqrt[4]{\left(-1+\sqrt{3}i\right)^3}$ ។

ចម្លើយ

$$\left(-1+\sqrt{3}i\right)^3=2^3\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=8\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^3=8\left(\cos3\cdot\frac{2\pi}{3}+i\sin3\cdot\frac{2\pi}{3}\right)=8\left(\cos2\pi+i\sin2\pi\right)$$

ឫសទី4 នៃ $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^3$ កំណត់ដោយ៖

$$w_k=\sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{2\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{2\pi+2k\pi}{4}\right),k=0,1,2,3$$

បើ $\mathrm{k}=0:\ w_0=\sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{2\pi}{4}+i\sin\frac{2\pi}{4}\right)=\sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=i\sqrt[4]{8}$

បើ $\mathrm{k}=1:\ w_1=\sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{4\pi}{4}+i\sin\frac{4\pi}{4}\right)=\sqrt[4]{8}\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)=-\sqrt[4]{8}$

បើ $k=2: w_2=\sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{6\pi}{4}+i\sin\frac{6\pi}{4}\right)=\sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=-i\sqrt[4]{8}$

បើ $\mathrm{k}=3: w_3=\sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{8\pi}{4}+i\sin\frac{8\pi}{4}\right)=\sqrt[4]{8}\left(\cos 2\pi+i\sin 2\pi\right)=\sqrt[4]{8}$

ប្រតិបត្តិ

១. គណនាឫសទី 6 នៃ $-2-2\sqrt{3}i$ រួចតាងឫសទាំងនោះលើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ។

២. ដោះស្រាយសមីការ $z^3+4+4i=0$ ។

៣. គណនា $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^4}$ ។

៥.២.៧ ទម្រង់អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនៃចំនួនកុំផ្លិច

ជាទូទៅ៖ ទម្រង់អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនៃចំនួនកុំផ្លិចកំណត់ដោយ៖

$z=re^{i\varphi}$ ដែល $r=|z|$ និង $\varphi=\arg z$

ដោយ $z=re^{i\varphi}=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ នោះ $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$

ឧទាហរណ៍១៖ រកទម្រង់ពិជគណិតនៃចំនួនកុំផ្លិច៖ ក. $e^{-i\pi}$ ខ. $e^{i\frac{\pi}{6}}$ គ. $e^{i\frac{\pi}{4}}$ ។

ចម្លើយ

ក. $e^{-i\pi}=\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)=\cos\pi-i\sin\pi=-1+0i$

ខ. $e^{i\frac{\pi}{6}}=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

គ. $e^{i\frac{\pi}{4}}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

ឧទាហរណ៍២៖ រកទម្រង់អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម៖

ក. $z=3\left(\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ ខ. $w=-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i$

ចម្លើយ

ក. $z=3\left(\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=3\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]=3e^{-\frac{2\pi}{3}i}$

ខ. $w=-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i=\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}e^{\frac{7\pi}{6}i}$

ប្រតិបត្តិ

១. សរសេរចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលទៅជាទម្រង់ពិជគណិត៖

ក. $e^{-\frac{5\pi}{4}i}$ ខ. $e^{5\pi i}$

២. សរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមទៅជាទម្រង់អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល៖

ក. $z=4\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^4$ ខ. $w=\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}i\right)^8$

លំហាត់អនុវត្តមេរៀនទី៥

១. សរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ពិជគណិត៖

ក. $z=(2+i)(3-2i)$ ខ. $v=(1-3i)^2$ គ. $w=(1+i)(2+i)^2$

ឃ. $z=(2+3i)^3$ ង. $w=\frac{5+3i}{1+i}$ ច. $z=\frac{7+4i}{3-2i}$

ឆ. $u=\frac{5(1-3i)}{(1+i)(2+i)}$ ជ. $w=\left(\frac{1+5i}{3+2i}\right)^3$

២. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ និង $z_2=2\sqrt{3}+2i$ ។

ក. គណនា $z_1.z_2$ និង $\frac{z_1}{z_2}$ ។

ខ. សរសេរ $z_1, z_2, z_1.z_2$ និង $\frac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

៣. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{6},\ z_2=2+2i$ និង $z_3=\frac{z_1}{z_2}$ ។

ក. សរសេរ z_1, z_2 និង z_3 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ខ. ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$ ។

គ. គណនាជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ z_3^{2023} ។

៤. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $A=\left(\sqrt{3}-1\right)+i\left(\sqrt{3}+1\right)$ និង $B=\frac{x+iy}{1+i}$ ដែល x និង y ជាចំនួនពិត។

ក. សរសេរ A^2 ជាទម្រង់ពិជគណិត រួចជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ខ. សរសេរ B ជាទម្រង់ពិជគណិត រួចទាញរក x និង y ដើម្បីឱ្យ $2\overline{B}-A^2=0$ ដែល $\overline{B}$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ B ។

៥. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1=\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)}{1+i\sqrt{3}}$ និង $z_2=(1-i)x+(1-y)(1+i)$ ។

ក. សរសេរ z_1 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ និងជាទម្រង់ពិជគណិត។

ខ. កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឱ្យ $2\overline{z_1}-(z_2+y-1)=0$ ។

៦. សរសេរ $z_1=2+2i\sqrt{3}$ និង $z_2=1+e^{i\frac{\pi}{4}}$ ជាទម្រង់អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល។

៧. ដោះស្រាយសមីការ $\sin x=-3$ ក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច។

៨. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ និង $w=3e^{i\frac{\pi}{12}}$ ។ គណនា $z.w$ និង $\frac{z}{w}$ ។

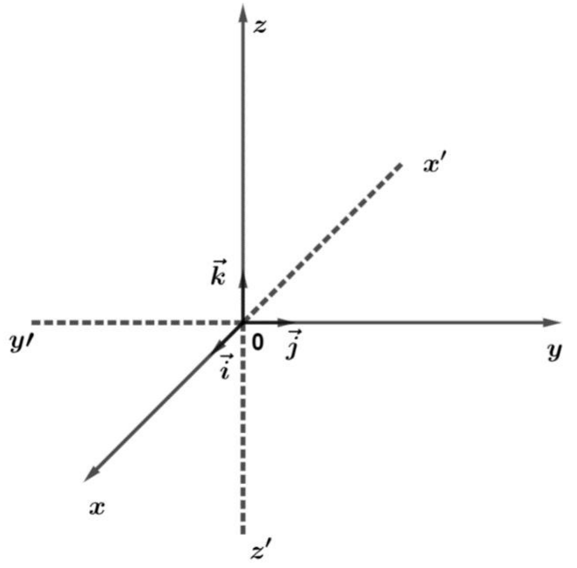
មេរៀនទី៦ ធរណីមាត្រវិភាគក្នុងលំហ

៦.១ កូអរដោនេក្នុងលំហ

៦.១.១ តម្រុយក្នុងលំហ

និយមន័យ៖ គេហៅតម្រុយក្នុងលំហគឺគ្រប់ចតុធាតុ $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ដែល o ជាចំណុចមួយក្នុងលំហ និង $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ ជាបីវ៉ិចទ័រមិនស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ។

- ចំណុច o ហៅថាគល់តម្រុយ
- $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ ហៅថាវ៉ិចទ័រឯកតានៃអ័ក្ស $(x'x),(y'y),(z'z)$ រៀងគ្នា
- $(x'x),(y'y),(z'z)$ ហៅថាអ័ក្ស



រូបភាព ៦.១

៦.១.២ កូអរដោនេនៃចំណុច

ទ្រឹស្តីបទ និងនិយមន័យ៖ គេមានម្រុតយ $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ មួយនៅក្នុងលំហចំពោះគ្រប់ចំណុច P មានត្រីធាតុ (x,y,z) តែមួយគត់ដែល $\overrightarrow{OP}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ ។ ត្រីធាតុ (x,y,z) ហៅថាកូអរដោនេនៃចំណុច P គេកំណត់សរសេរ $P(x,y,z)$ ហើយ x ជាអាប់ស៊ីស y ជាអរដោនេ និង z ជាកូត។

(សម្រាយបញ្ជាក់មើលក្នុងសៀវភៅគណិតថ្នាក់ទី១១កម្រិតខ្ពស់ទំព័រ ១៩៦ និង ១៩៧)

ករណីពិសេស

- វ៉ិចទ័រឯកតាមានកូអរដោនេ $\vec{i}=(1,0,0),\vec{j}=(0,1,0),\vec{k}=(0,0,1)$ ។
- បើ $(x,y,z)=(x',y',z')\Leftrightarrow x=x',y=y',z=z'$ ។

ឧទាហរណ៍១៖ គេមានពីរចំណុច $A(3,-1,2)$ និង $B(0,5,-6)$ នៅក្នុងតម្រុយ $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ។

សរសេរវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OA}$ និង $\overrightarrow{OB}$ ជាអនុគមន៍នៃវ៉ិចទ័រឯកតា $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ ។

ចម្លើយ

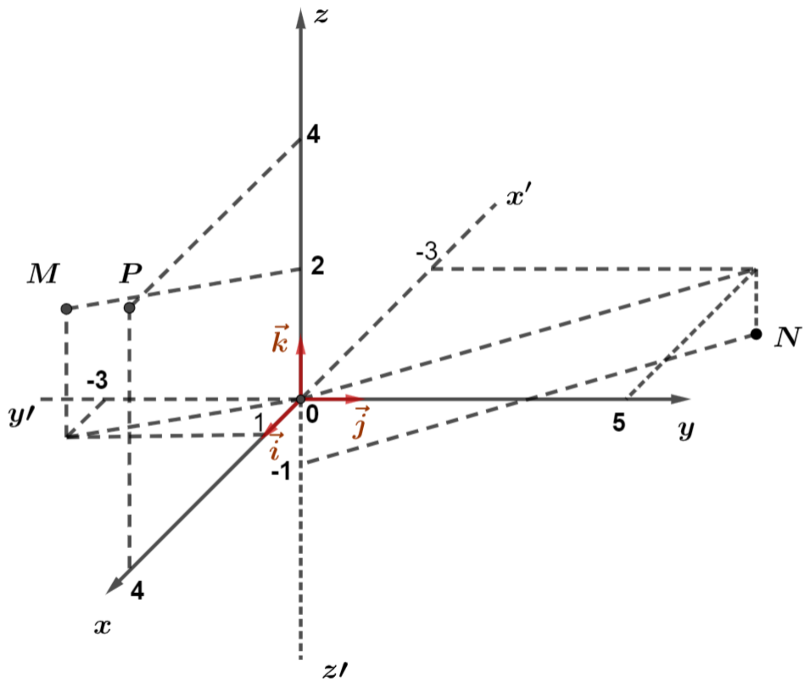
$\overrightarrow{OA}=3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ និង $\overrightarrow{OB}=5\vec{j}-6\vec{k}$

ឧទាហរណ៍ទី២៖ គេមានវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OM}=\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$, $\overrightarrow{ON}=-3\vec{i}+5\vec{j}-\vec{k}$, $\overrightarrow{OP}=4\vec{i}+4\vec{k}$ ។

រកកូអរដោនេ និងសង់ចំណុច M,N,P ក្នុងតម្រុយ $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ។

ចម្លើយ

កូអរដោនេនៃចំណុចគឺ $M(1,-3,2), N(-3,5,-1), P(4,0,4)$



រូបភាព ៦.២

ប្រតិបត្តិ គេមានចំណុច $M(0,1,4), N\left(-2,\frac{3}{2},0\right), Q(-1,-3,-5)$ និង $\overrightarrow{OA}=10\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$,

$\overrightarrow{OB}=-\frac{3}{4}\vec{j}+7\vec{k}$,$\overrightarrow{OC}=-8\vec{j}$ ។

ក. សរសេរវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OM}$,$\overrightarrow{ON}$ និង $\overrightarrow{OQ}$ ជាអនុគមន៍នៃវ៉ិចទ័រឯកតា $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ ។

ខ. រកកូអរដោនេនៃចំណុច A,B និង C ។

គ. សង់ចំណុច M,N,Q,A,B និង C ក្នុងតម្រុយ $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ តែមួយ។

៦.១.៣ លក្ខណៈកូអរដោនេ

ក. បើ $P(x,y,z)$ និង $P'(x',y',z')$ ជាពីរចំណុចនៅក្នុងលំហប្រកបដោយតម្រុយ $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ នោះគេបាន៖

- $P=P' \Leftrightarrow x=x'$ និង $y=y'$ និង $z=z'$ ។
- $\overrightarrow{PP'}$ មានកូអរដោនេ $\overrightarrow{PP'}=\left(x'-x,y'-y,z'-z\right)$ ។
- I ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ $\overrightarrow{PP'}$ នោះគេបាន $I\left(\frac{x+x'}{2},\frac{y+y'}{2},\frac{z+z'}{2}\right)$ ។

ខ. បើ $\vec{u}=\left(x,y,z\right)$ និង $\vec{v}=\left(x',y',z'\right)$ ជាពីរវ៉ិចទ័រនៅក្នុងលំហប្រកបដោយតម្រុយ $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ នោះគេបាន៖

- $\vec{u}=\vec{v} \Leftrightarrow x=x'$ និង $y=y'$ និង $z=z'$ ។
- $\vec{u}+\vec{v}$ មានកូអរដោនេ $\vec{u}+\vec{v}=\left(x+x',y+y',z+z'\right)$ ។
- $\vec{u}-\vec{v}$ មានកូអរដោនេ $\vec{u}-\vec{v}=\left(x-x',y-y',z-z'\right)$ ។
- $\forall k\in\mathbb{R}$ វ៉ិចទ័រ $k\vec{u}$ មានកូអរដោនេ $k\vec{u}=\left(kx,ky,kz\right)$ ។
- $\forall\left(k,k'\right)\in\mathbb{R}^2$ វ៉ិចទ័រ $k\vec{u}+k'\vec{v}$ មានកូអរដោនេរ $k\vec{u}+k'\vec{v}=\left(kx+kx',ky+ky',kz+kz'\right)$ ។

ឧទាហរណ៍១៖ គេមាន $A(-5,3,1),B(1,-6,0)$ និង $C\left(x+1,y-2,3-z\right)$ ជាបីចំណុចស្ថិតនៅក្នុងលំហប្រកបដោយតម្រុយ $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ។

ក. រកតម្លៃ x,y និង z បើ ចំណុច C ស្ថិតនៅត្រួតលើចំណុច A ។

ខ. រកកូអរដោនេ នៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BC}$ និងកូអរដោនេនៃចំណុចកណ្ដាលនៃវ៉ិចទ័រនេះដែលតាងដោយ I ។

ចម្លើយ

ក. រកតម្លៃ x,y និង z

$$C(x+1,y-2,3-z)=A(-5,3,1)\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=-5\\y-2=3\\3-z=1\end{cases}$$ ឬ $$\begin{cases}x=-6\\y=5\\z=2\end{cases}$$

ខ. $B(1,-6,0)$ និង $C(-5,3,1)$

$\overrightarrow{BC}=(-5-1,3+6,1-0)=(-6,9,1)$ និង $I\left(\frac{1-5}{2},\frac{-6+3}{2},\frac{0+1}{2}\right)=\left(-2,-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$

ឧទាហរណ៍២៖ គេមាន $\vec{a}=(-1,4,2),\vec{b}=(5,0,-6)$ និង $\vec{c}=(10,2,0)$ ជាបីវ៉ិចទ័រដែលស្ថិតនៅក្នុងលំហប្រកបដោយតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$។

រកកូអរដោនេនៃវ៉ិច$\vec{u}$ និង $\vec{v}$ បើ $\vec{u}=2\vec{b}-5\vec{a}$ និង $\vec{v}=3\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{b}$។

ចម្លើយ

$\vec{u}=2\vec{b}-5\vec{a}=2(5,0,-6)-5(-1,4,2)=(10,0,-12)-(-5,20,10)=(15,-20,-22)$

$\vec{v}=3\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{b}=3(-1,4,2)+\frac{1}{2}(10,2,0)-(5,0,-6)=(-3,12,6)+(5,1,0)-(5,0,-6)$

$=(-3+5-5,12+1-0,6+0+6)=(-3,13,12)$

ដូចនេះ $\vec{u}=(15,-20,-22)$ និង $\vec{v}=(-3,13,12)$។

ប្រតិបត្តិ គេមាន $D(x,y,z),E(0,-2,4),F(5,0,10)$ និង $G(6,3,9)$ ជាបួនចំណុចស្ថិតនៅក្នុងលំហប្រកបដោយតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$។

ក. រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{EF}$,$\overrightarrow{EG}$ និង $\overrightarrow{FG}$ ។

ខ.រកកូអរដោនេចំណុចកណ្តាលនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{EF}$,$\overrightarrow{EG}$ និង $\overrightarrow{FG}$ ដែលតាងដោយM,N និង Q រៀងគ្នា។

គ. រកកូអរដោនេចំណុច $D(x,y,z)$ បើ $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{FG}$ ។

ឃ. តាង $\vec{u}=\overrightarrow{EF},\vec{v}=\overrightarrow{EG}$ និង $\vec{w}=\overrightarrow{FG}$ ។ គណនា $\vec{a}=4\vec{u}-3\vec{w}$ និង $\vec{b}=-3\vec{u}+5\vec{v}+2\vec{w}$ ។

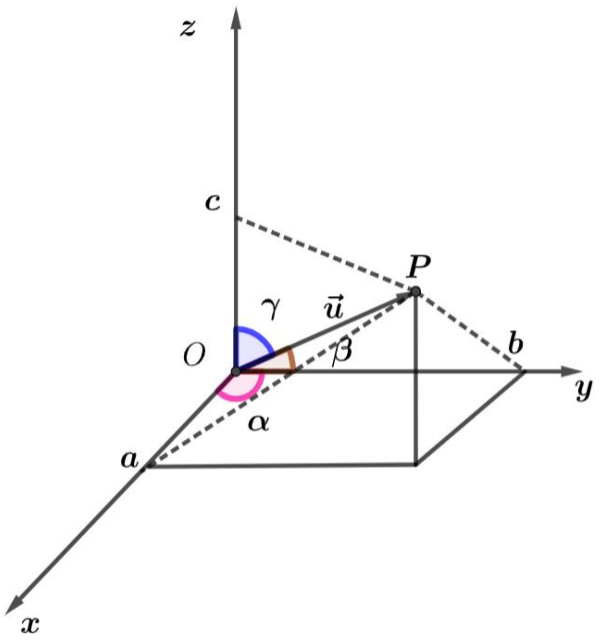
៦.១.៤ ទិសដៅកូស៊ីនុស

គេឱ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(a,b,c)$ និងចំណុច P នៅក្នុងលំហប្រកបដោយតម្រុយ$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ដែល $\vec{u}=\overrightarrow{OP}$ ។ យក α,β និង γ ជាមុំដែលបង្កើតឡើងដោយ OP នឹងអ័ក្ស $(Ox),(Oy),(Oz)$ រៀងគ្នា។

តាមទំនាក់ទំនងមាត្រក្នុងត្រីកោណកែង យើងបាន៖

- $\cos\alpha=\dfrac{a}{|\overrightarrow{OP}|},\ a=|\overrightarrow{OP}|\cos\alpha$
- $\cos\beta=\dfrac{b}{|\overrightarrow{OP}|},\ b=|\overrightarrow{OP}|\cos\beta$
- $\cos\gamma=\dfrac{c}{|\overrightarrow{OP}|},\ c=|\overrightarrow{OP}|\cos\gamma$

តម្លៃ $\cos\alpha,\cos\beta$ និង $\cos\gamma$ បញ្ជាក់ពីទិសដៅកូស៊ីនុសនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=\overrightarrow{OP}$ ។



រូបភាព ៦.៣

យើងមាន

$$|\overrightarrow{OP}|^2=|\vec{u}|^2=a^2+b^2+c^2=\left(|\overrightarrow{OP}|\cos\alpha\right)^2+\left(|\overrightarrow{OP}|\cos\beta\right)^2+\left(|\overrightarrow{OP}|\cos\gamma\right)^2$$

$$|\overrightarrow{OP}|^2=|\overrightarrow{OP}|^2\left(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\right)\Leftrightarrow\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

ដូចនេះ $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

ឧទាហរណ៍១៖ គេឱ្យចំណុច $A(1,2,-3)$ និង $B(-1,-2,1)$ ។

រកទិសដៅកូស៊ីនុសនៃ $\overrightarrow{OA}$ និង $\overrightarrow{AB}$ ។

ចម្លើយ

រកទិសដៅកូស៊ីនុសនៃ $\overrightarrow{OA}$

យើងមាន $|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$

នោះយើងបាន $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{14}, \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{7}, \cos\gamma = \frac{-3}{\sqrt{14}} = \frac{-3\sqrt{14}}{14}$

រកទិសដៅកូស៊ីនុសនៃ $\overrightarrow{AB} = (-2,-4,4)$

យើងមាន $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + (4)^2} = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6$

នោះយើងបាន $\cos\alpha = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}, \cos\beta = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}, \cos\gamma = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

ឧទាហរណ៍ទី២៖ គេឱ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ ។

រកទិសដៅកូស៊ីនុសនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ រួចបង្ហាញថា $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ ។

ចម្លើយ

រកទិសដៅកូស៊ីនុសនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$

យើងមាន $\left|\vec{u}\right| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

នោះ $\cos\alpha = \frac{3}{5\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{10}, \cos\beta = \frac{4}{5\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{5}, \cos\gamma = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

បង្ហាញថា $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

យើងមាន

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \left(\frac{3\sqrt{2}}{10}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{18}{100} + \frac{8}{25} + \frac{2}{4} = \frac{18+32+50}{100} = 1$ ពិត

ប្រតិបត្តិ

១. រកទិសដៅកូស៊ីនុសនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OM}$ បើចំណុច $M(-1,5,1)$ រួចបង្ហាញថា $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ ។

២. រកទិសដៅកូស៊ីនុសនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{v} = 7\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}$ រួចទាញបង្ហាញថា $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

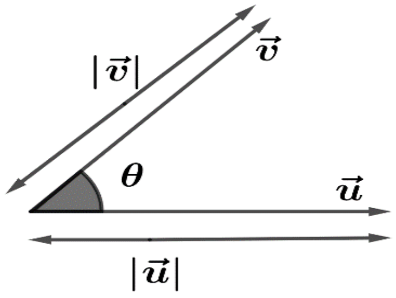
៦.២ ផលគុណស្កាលែនៃវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

៦.២.១ និយមន័យ

\` ផលគុណស្កាលែនៃពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ក្នុងលំហគឺជាចំនួនពិត k មួយដែលកំណត់ដោយៈ

- $k=\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ បើ $\vec{u}=\vec{0}$ ឬ $\vec{v}=\vec{0}$ ។

- $k=\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$ បើ $\vec{u}\neq\vec{0}$ និង $\vec{v}\neq\vec{0}$ ហើយ θ ជាមុំផ្គុំដោយវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ។



រូបភាព ៦.៤

ឧទាហរណ៍ទី១៖ គេឱ្យពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ដែល $|\vec{u}|=\sqrt{5}$,$|\vec{v}|=2\sqrt{5}$ និង $\theta=180^\circ$ ដែល θ ជាមុំផ្គុំឡើងដោយវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ។

ចម្លើយ

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta=\sqrt{5}\times2\sqrt{5}\times\cos180^\circ=10\times(-1)=-10$$

ដូចនេះ $\vec{u}\cdot\vec{v}=-10$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២៖ គេឱ្យពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ដែល $\vec{a}\cdot\vec{b}=16$,$|\vec{a}|=4$ និង $|\vec{b}|=8$ ។

គណនា $\cos\alpha$ រួចទាញរក α ដែល α ជាមុំដែលផ្គុំឡើងដោយវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{16}{4\times8}=\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$ ។

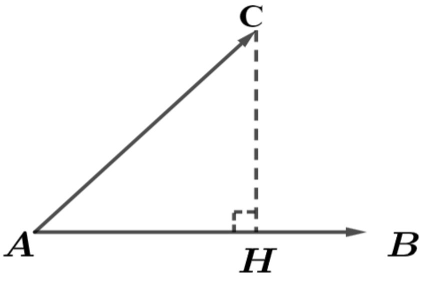
ទាញរក α

ដោយ $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\alpha=60^\circ$

ប្រតិបត្តិ គេឱ្យត្រីកោណសម័ង្ស MNP ដែលមានរង្វាស់ជ្រុង $3cm$ ។គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}$ និង $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{NP}$ ។

៦.២.២ លក្ខណៈ:

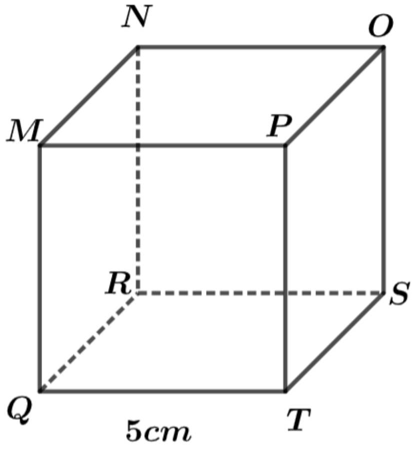
- ចំពោះបីចំណុច A,B,C ដែល $A\neq B$ និង $A\neq C$ គេបាន $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\theta$ ដែល θ ជាមុំផ្តុំឡើងដោយវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ ។



រូបភាព ៦.៥

- បើ H ជាចំណោលកែងនៃ C លើ AB គេបាន៖
  - $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AH}\right|$ បើ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AH}$ មានទិសដៅដូចគ្នា
  - $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AH}\right|$ បើ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AH}$ មានទិសដៅផ្ទុយគ្នា។
- ចំពោះគ្រប់វ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ គេបាន $\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{u}^2=\left|\vec{u}\right|^2$ ហៅថាការេស្កាលែនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ ហើយ $\left|\vec{u}\right|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$ ហៅថាណមនៃ $\vec{u}$ ។
- ចំពោះពីរចំណុចផ្សេងគ្នា $A(x_A,y_A,z_A)$ និង $B(x_B,y_B,z_B)$ គេបាន $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{AB}\right)^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=AB^2$ ហើយ $d(A,B)=AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$ ហៅថាចម្ងាយរវាងចំណុច A និង B ។
- ចំពោះគ្រប់ $\vec{u},\vec{v}$ និង ចំនួនពិត m មួយគេបាន៖
  - $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
  - $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, $\left(\vec{u}\neq\vec{0},\vec{v}\neq\vec{0}\right)$
  - $\left(m\vec{u}\right)\cdot\vec{v}=m\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$
  - $\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right|\leq\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|$ ហៅថាវិសមភាពកូស៊ី។

ឧទាហរណ៍៖ គេឱ្យគូបមួយដែលមានរង្វាស់ជ្រុង $5cm$ ដូចរូប។គណនា ៖ $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}, \overrightarrow{TM}\cdot\overrightarrow{NS}, \overrightarrow{MR}\cdot\overrightarrow{NS}, \overrightarrow{MT}\cdot\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{MR}\cdot\overrightarrow{PS}$ ។



រូបភាព ៦.៦

ចម្លើយ

- $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}=\left|\overrightarrow{MN}\right|\cdot\left|\overrightarrow{MR}\right|\cos(\angle NMR)$

ដោយ $\left|\overrightarrow{MN}\right| = 5cm, \left|\overrightarrow{MR}\right| = 5\sqrt{2}, \cos\left(\angle NMR\right) = \cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MR} = 5 \times 5\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 25$

- $\overrightarrow{TM} \cdot \overrightarrow{NS} = \left|\overrightarrow{TM}\right|\left|\overrightarrow{NS}\right|\cos 180^\circ$ ដោយ $\left|\overrightarrow{TM}\right| = 5\sqrt{2}, \left|\overrightarrow{NS}\right| = 5\sqrt{2}, \cos 180^\circ = -1$

$\Rightarrow \overrightarrow{TM} \cdot \overrightarrow{NS} = 5\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} \times (-1) = -50$

- $\overrightarrow{MR} \cdot \overrightarrow{NS} = \left|\overrightarrow{MR}\right|\left|\overrightarrow{NS}\right|\cos 60^\circ$ ដោយ $\left|\overrightarrow{MR}\right| = \left|\overrightarrow{NS}\right| = 5\sqrt{2},\ \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MR} \cdot \overrightarrow{NS} = 5\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} \times \dfrac{1}{2} = 25$

- $\overrightarrow{MT} \cdot \overrightarrow{OR} = \left|\overrightarrow{MT}\right|\left|\overrightarrow{OR}\right|\cos 90^\circ$ ដោយ $\left|\overrightarrow{MT}\right| = \left|\overrightarrow{OR}\right| = 5\sqrt{2}, \cos 90^\circ = 0$

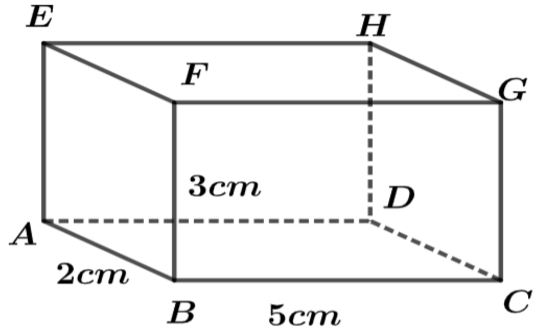
$\Rightarrow \overrightarrow{MT} \cdot \overrightarrow{OR} = 5\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} \times 0 = 0$

- $\overrightarrow{MR} \cdot \overrightarrow{PS} = \left|\overrightarrow{MR}\right|\left|\overrightarrow{PS}\right|\cos 0^\circ$ ដោយ $\left|\overrightarrow{MR}\right| = \left|\overrightarrow{PS}\right| = 5\sqrt{2}, \cos 0^\circ = 1$

$\Rightarrow \overrightarrow{MR} \cdot \overrightarrow{PS} = 5\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} \times 1 = 50$

ប្រតិបត្តិ

គេឱ្យប្រលេពីប៉ែតកែងមួយដូចរូប។ គណនា $\overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB}$ ។



រូបភាព ៦.៧

៦.២.៣ ផលគុណស្កាលែក្នុងគោលអរតូណរម៉ាល់

ទ្រឹស្តីបទ៖ ក្នុងគោលអរតូណរម៉ាល់នៃលំហ ផលគុណស្កាលែនៃពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(x,y,z)$ និង $\vec{v}=(x',y',z')$ គឺ $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$ ។

ក្សរលែ

ក. ពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(x,y,z)$ និង $\vec{v}=(x',y',z')$ អរតូកូណាល់គ្នាលុះត្រាតែ $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ ឬ $xx'+yy'+zz'=0$ មានន័យថា៖

$$\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \text{ ឬ } xx'+yy'+zz'=0$$

ខ. ស្កាលែ និងណមនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(x,y,z)$ កំណត់ដោយ៖

$$\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{u}^2=x^2+y^2+z^2 \text{ និង } \left|\vec{u}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

គ. θ (គិតជារ៉ាដ្យង់) ជាមុំដែលបង្កើតឡើងដោយពីរវ៉ិចទ័រមិនសូន្យ $\vec{u}=(x,y,z)$ និង $\vec{v}=(x',y',z')$ នោះផលគុណស្កាលែនៃពីរវ៉ិចទ័រនេះកំណត់ដោយ៖

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|}=\frac{xx'+yy'+zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$

ឧទាហរណ៍ទី១៖ គេមានពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{a}=(-1,-3,1)$ និង $\vec{b}=(7,-3,-2)$ ។

គណនា $\left|\vec{a}\right|,\left|\vec{b}\right|,\vec{a}\cdot\vec{b}$ និង θ (មុំដែលផ្គុំឡើងដោយវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$) ។

ចម្លើយ

$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-3)^2+1^2}=\sqrt{1+9+1}=\sqrt{11}$, $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{(7)^2+(-3)^2+(-2)^2}=\sqrt{49+9+4}=\sqrt{62}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1)(7)+(-3)(-3)+(1)(-2)=-7+9-2=0$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{0}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{62}}=0\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}$$

ដូចនេះ $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{11},\left|\vec{b}\right|=\sqrt{62},\vec{a}\cdot\vec{b}=0,\theta=\frac{\pi}{2}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២៖ គេមានពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$ និង $\vec{v}=-4\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}$ ។

គណនា $|\vec{u}|,|\vec{v}|,\vec{u}\cdot\vec{v}$ និង β (មុំដែលផ្គុំឡើងដោយ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$)។

ចម្លើយ

$$|\vec{u}|=\sqrt{2^2+1^2+(-3)^2}=\sqrt{4+1+9}=\sqrt{14}$$

$$|\vec{v}|=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2+6^2}=\sqrt{16+4+36}=\sqrt{4\times14}=2\sqrt{14}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=2(-4)+1(-2)+6(-3)=-8-2-18=-28$$

$$\cos\beta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{-28}{\sqrt{14}\times2\sqrt{14}}=-1\Rightarrow\beta=\pi$$

ដូចនេះ $|\vec{u}|=\sqrt{14}$, $|\vec{v}|=2\sqrt{14}$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=-28, \beta=\pi$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៣៖ គេមានបីចំណុច $A(4,5,-1), B(5,3,1)$ និង $C(2,3,-2)$ ។

ក. គណនា $|\overrightarrow{AB}|,|\overrightarrow{AC}|$ និង $|\overrightarrow{BC}|$ ខ. គណនា $|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|$ រួចទាញរកប្រភេទនៃ ΔABC ។

ចម្លើយ

ក. គណនា $|\overrightarrow{AB}|,|\overrightarrow{AC}|$ និង $|\overrightarrow{BC}|$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}=\sqrt{(5-4)^2+(3-5)^2+(1+1)^2}=\sqrt{9}=3$$

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2+(z_C-z_A)^2}=\sqrt{(2-4)^2+(3-5)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{9}=3$$

$$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2+(z_C-z_B)^2}=\sqrt{(2-5)^2+(3-3)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{9\times2}=3\sqrt{2}$$

ខ. គណនា $|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|$ រួចទាញរកប្រភេទនៃ ΔABC

$$|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|=1(-2)+(-2)(-2)+2(-1)=-2+4-2=0$$

ដោយ $\begin{cases}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|=0\Leftrightarrow|\overrightarrow{AB}|\perp|\overrightarrow{AC}|\\|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=3\end{cases}\Rightarrow\Delta ABC$ ជាត្រីកោណកែងសមបាត។

ប្រតិបត្តិ

១. គេមានពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(-1,3,5)$ និង $\vec{v}=(-2,6,10)$។

គណនា $|\vec{u}|,|\vec{v}|,\vec{u}\cdot\vec{v}$ និង α (មុំផ្គុំឡើងដោយ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$)។

២. គេមានពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ និង $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$ ។

គណនា $|\vec{a}|,|\vec{b}|,\vec{a}\cdot\vec{b}$ និង φ (មុំដែលផ្គុំឡើងដោយវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$)។

- ❖ លក្ខណៈផលគុណស្កាលែវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ
  - $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
  - $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$
  - $(m\vec{u})\cdot\vec{v}=m(\vec{u}\cdot\vec{v})$
  - $\vec{u}\cdot(m\vec{v})=m(\vec{u}\cdot\vec{v})$

(សម្រាយបញ្ជាក់មើលសៀវភៅគណិតថ្នាក់ទី១១ កម្រិតខ្ពស់ទំព័រ ២០៧)

ឧទាហរណ៍៖ គេមានបីវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(2,3,-4),\vec{v}=(2,-2,1)$ និង $\vec{w}=\vec{u}-k\vec{v}$ ដែល k ជាចំនួនពិត។

កំណត់ចំនួនពិត k និង វ៉ិចទ័រ $\vec{w}$ បើ $\vec{v}\perp\vec{w}$។

ចម្លើយ

យើងមាន $\vec{w}=\vec{u}-k\vec{v}=(2,3,-4)-k(2,-2,1)=(2-2k,3+2k,-4-k)$

ដោយ $\vec{v}\perp\vec{w}\Leftrightarrow\vec{v}\cdot\vec{w}=0\Rightarrow 2(2-2k)-2(3+2k)+1(-4-k)=0$

$$4-4k-6-4k-4-k=0\Rightarrow k=-\frac{6}{9}=-\frac{2}{3}$$

គេបាន $\vec{w}=\left(2-2\cdot\frac{-2}{3},3+2\cdot\frac{-2}{3},-4+\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{10}{3},\frac{5}{3},-\frac{10}{3}\right)$

ដូចនេះ $\mathrm{k}=-\frac{2}{3},\vec{w}=\left(\frac{10}{3},\frac{5}{3},-\frac{10}{3}\right)$។

ឧទាហរណ៍ទី២៖ គេឱ្យបីវ៉ិចទ័រ $\vec{a}=7\vec{i}+9\vec{j}-8\vec{k}$, $\vec{b}=(4,-2,5)$ និង $\vec{c}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ ។

រកវ៉ិចទ័រ $\vec{c}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $3\vec{b}-4\vec{a}+2\vec{c}=4\vec{c}-\vec{b}$ ។

ចម្លើយ

រកវ៉ិចទ័រ $\vec{c}$

យើងមាន $3\vec{b}-4\vec{a}+2\vec{c}=4\vec{c}-\vec{b} \Leftrightarrow 3(4,-2,5)-4(7,9,-8)+2(x,y,z)=4(x,y,z)-(4,-2,5)$

$(12-28+2x,-6-36+2y,15+32+2z)=(4x-4,4y+2,4z-5)$

យើងបាន៖

$$\begin{cases}-16+2x=4x-4\\-42+2y=4y+2\\47+2z=4z-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=-12\\2y=-44\\2z=52\end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases}x=-6\\y=-22\\z=26\end{cases}$$

ដូចនេះ $\vec{c}=(-6,-22,26)$ ឬ $\vec{c}=-6\vec{i}-22\vec{j}+26\vec{k}$ ។

ប្រតិបត្តិ

១. គេឱ្យពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(-1,4,-3)$ និង $\vec{v}=(3,-5,0)$ ។ រកវ៉ិចទ័រ $\vec{c}=(x-1,y+3,z-5)$ ដើម្បីផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $2\vec{u}-3\vec{v}=\vec{c}+7\vec{u}-4\vec{v}$ ។

២. គេមានពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{a}=(k+3,2k-1,4k)$ និង $\vec{b}=(3,6,-2)$ ។ កំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឱ្យ $\vec{a}\perp\vec{b}$ ។

៦.៣ ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

៦.៣.១ និយមន័យ

គេមានពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}$ និង $\vec{v}=v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k}$ ជាពីរវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ។ ផលគុណនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ គឺជាវ៉ិចទ័រកំណត់ដោយ៖ $\vec{u}\times\vec{v}=(u_2v_3-u_3v_2)\vec{i}-(u_1v_3-u_3v_1)\vec{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\vec{k}$ ។

សម្គាល់៖ ដើម្បីងាយស្រួលក្នុងការគណនាផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ គេប្រើដេទែរមីណង់លំដាប់បីដូចខាងក្រោម៖

$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}$ (ដាក់វ៉ិចទ័រឯកតាជួរទី១ កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ ជួរទី២ និងកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{v}$ ជួរទី៣)។ គេបាន៖ $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}\vec{k}$

$$=\left(u_2v_3-u_3v_2\right)\vec{i}-\left(u_1v_3-u_3v_1\right)\vec{j}+\left(u_1v_2-u_2v_1\right)\vec{k}$$

ឧទាហរណ៍ទី១៖ គេឱ្យពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{a}=-2\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$ និង $\vec{b}=(3,-2,1)$ ។

គណនា $\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\times\vec{a}$ និង $\vec{a}\times\vec{a}$ ។

ចម្លើយ

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 1 & 4\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 4\\ -2 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 3 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(1+8)\vec{i}-(-2-12)\vec{j}+(4-3)\vec{k}=9\vec{i}+24\vec{j}+\vec{k}$$

$$\vec{b}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & 1\\ -2 & 1 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}3 & 1\\ -2 & 4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}3 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(-8-1)\vec{i}-(12+2)\vec{j}+(3-4)\vec{k}=-9\vec{i}-24\vec{j}-\vec{k}$$

$$\vec{a}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 1 & 4\\ -2 & 1 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-2 & 4\\ -2 & 4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(4-4)\vec{i}-(-8+8)\vec{j}+(-2+2)\vec{k}=0\vec{i}-0\vec{j}+0\vec{k}$$

ដូចនេះ $\vec{a}\times\vec{b}=9\vec{i}+24\vec{j}+\vec{k}$ ឬ $\vec{a}\times\vec{b}=(9,24,1)$ $,\vec{b}\times\vec{a}=-9\vec{i}-24\vec{j}-\vec{k}$ ឬ $\vec{b}\times\vec{a}=(-9,-24,-1)$ $,\vec{a}\times\vec{a}=0\vec{i}-0\vec{j}+0\vec{k}$ ឬ $\vec{a}\times\vec{a}=(0,0,0)$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២៖ គេឱ្យបីចំណុច $A(2,-1,3)$, $B(3,2,-2)$ និង $C(1,3,-5)$ ។គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $\overrightarrow{AB}=(3-2,2+1,-2-3)=(1,3,-5),\overrightarrow{AC}=(1-2,3+1,-5-3)=(-1,4,-8)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 3 & -5\\ -1 & 4 & -8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -5\\ 4 & -8\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -5\\ -1 & -8\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 4\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(-24+20)\vec{i}-(-8-5)\vec{j}+(4+3)\vec{k}=-4\vec{i}+13\vec{j}+7\vec{k}$$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=-4\vec{i}+13\vec{j}+7\vec{k}$ ឬ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-4,13,7)$ ។

ប្រតិបត្តិ

១. គេឱ្យពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(1,3,4)$ និង $\vec{v}=(2,7,-5)$ ។ គណនា $\vec{u}\times\vec{v},\vec{v}\times\vec{u},\vec{v}\times\vec{v}$ ។

២. គេមានបីចំណុច $M(0,1,-3),N(4,-2,1)$ និង $P(5,1,-3)$ ។ គណនា $\overrightarrow{NM}\times\overrightarrow{NP}$ ។

៦.៣.២ លក្ខណៈផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ

បើ $\vec{u},\vec{v}$ និង $\vec{w}$ ជាបីវ៉ិចទ័រនៅក្នុងលំហ ហើយ c ជាចំនួនពិតនោះគេបាន៖

- $\vec{u}\times\vec{v}=-(\vec{v}\times\vec{u})$
- $\vec{u}\times\vec{0}=\vec{0}\times\vec{v}=\vec{0}$
- $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})+(\vec{u}\times\vec{w})$
- $\vec{u}\times\vec{u}=\vec{0}$
- $c(\vec{u}\times\vec{v})=(\overrightarrow{cu})\times\vec{v}=\vec{u}\times(c\vec{v})$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$

(សម្រាយបញ្ជាក់មើលសៀវភៅគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២ កម្រិតខ្ពស់ទំព័រ ១៧៦ និង ១៧៧)

ឧទាហរណ៍៖ គេមានពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=(2,0,-3)$ និង $\vec{p}=(1,-2,0)$ ។

គណនា $\vec{n}\times\vec{p}$, $\vec{p}\times\vec{n}$, $\vec{n}\times\vec{n}$ និង $\vec{p}\times\vec{p}$ ។

ចម្លើយ

$$\vec{n}\times\vec{p}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 0 & -3\\ 1 & -2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -3\\ -2 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & -2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(0-6)\vec{i}-(0+3)\vec{j}+(-4-0)\vec{k}=-6\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$$

តាមលក្ខណៈយើងបាន៖

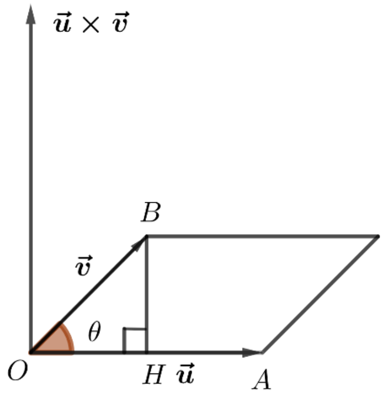
$\vec{p}\times\vec{n}=-\left(\vec{n}\times\vec{p}\right)=6\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{n}\times\vec{n}=\vec{0}$, $\vec{p}\times\vec{p}=\vec{0}$

ដូចនេះ $\vec{n}\times\vec{p}=-6\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k},\vec{p}\times\vec{n}=-\left(\vec{n}\times\vec{p}\right)=6\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{n}\times\vec{n}=\vec{0}$, $\vec{p}\times\vec{p}=\vec{0}$ ។

៦.៣.៣ បំណកស្រាយផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រតាមបែបធរណីមាត្រ

បើ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាពីរវ៉ិចទ័រខុសពី $\vec{0}$ នៅក្នុងលំហ និង θ ជាមុំផ្គុំរវាង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ នោះគេបាន៖

- $\vec{u}\times\vec{v}$ អរតូកូណាល់ទៅនឹង $\vec{u}$ ផងនឹង $\vec{v}$ ផង មានន័យថា $\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\perp\vec{u}$ និង $\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\perp\vec{v}$ ។
- $\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\sin\theta$ ។
- បើ $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$ នោះ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែគ្នា មានន័យថា $\vec{u}\parallel\vec{v}$ ។
- $\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=$ ផ្ទៃក្រឡារបស់ប្រលេឡូក្រាមដែលសង់លើវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ។
- $\frac{1}{2}\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=$ ផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណដែលសង់លើវ៉ិចទ័រ $\vec{v}\times\vec{u}$ ។



រូបភាព ៦.៨

(សម្រាប់សម្រាយបញ្ជាក់មើលសៀវភៅគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២ កម្រិតខ្ពស់ទំព័រ ១៧៨)

វិបាក

ក. បើ $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រឯកតា ហើយអរតូកូណាល់ទៅនឹង $\vec{u}$ ផងនឹង $\vec{v}$ ផង នោះ $\vec{u}\times\vec{v}=\pm\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|\cdot\vec{n}$ ។

ខ. គេសង្កេតឃើញថា $\vec{u}\times\vec{v}$ និង $\vec{v}\times\vec{u}$ ជាវ៉ិចទ័រដែលកែងទៅនឹងប្លង់ដែលកំណត់ដោយ $\vec{v}\times\vec{u}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១៖ គេមានពីរវ៉ិច $\vec{a}=\left(1,0,2\right)$ និង $\vec{b}=\left(-1,1,0\right)$ ។

គណនាផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាម និងត្រីកោណដែលសង់លើវ៉ិចទ័រទាំងពីរនេះ។

ចម្លើយ

តាមរូបមន្ត $S_{\square}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, $S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$

តែ $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$

$$=(0-2)\vec{i}-(0+2)\vec{j}+(1+0)\vec{k}=-2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$$

$\Rightarrow S_{\square}=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{4+4+1}=3$ ឯកតាផ្ទៃ

$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\times 3=\frac{3}{2}$ ឯកតាផ្ទៃ

ដូចនេះ $S_{\square}=3$ ឯកតាផ្ទៃ និង $S_{\Delta}=\frac{3}{2}$ ឯកតាផ្ទៃ។

ឧទាហរណ៍ទី២៖ គេមានបួនចំណុច $A(2,-1,3), B(4,5,1), C(-3,-2,0)$ និង $D(-1,4,-2)$ ។

ក. បង្ហាញថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ និងផ្ទៃក្រឡា ΔABC ។

ចម្លើយ

ក. បង្ហាញថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម

យើងមាន៖ $\overrightarrow{AB}=(4-2,5+1,1-3)=(2,6,-2), \overrightarrow{DC}=(-1+3,4+2,-2-0)=(2,6,-2)$

យើងបាន $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

ដូចនេះ ចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ និងផ្ទៃក្រឡា ΔABC

តាមរូបមន្ត $S_{ABCD}=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

តែ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 6 & -2\\ -5 & -1 & -3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6 & -2\\ -1 & -3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & -2\\ -5 & -3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 6\\ -5 & -1\end{vmatrix}\vec{k}$

$$=(-18-2)\vec{i}-(-6-10)\vec{j}+(-2+30)\vec{k}=-20\vec{i}+16\vec{j}+18\vec{k}$$

$\Rightarrow S_{ABCD}=\sqrt{(-20)^2+16^2+18^2}=\sqrt{980}=\sqrt{14^2\times 5}=14\sqrt{5}$ ឯកតាផ្ទៃ

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\times 14\sqrt{5}=7\sqrt{5}$ ឯកតាផ្ទៃ

ដូចនេះ $S_{ABCD}=14\sqrt{5}$ ឯកតាផ្ទៃ , $S_{\Delta ABC}=7\sqrt{5}$ ឯកតាផ្ទៃ។

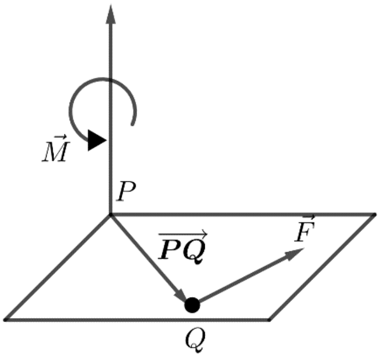
ប្រតិបត្តិ ក្នុងលំហប្រកបដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់គេមានបួនចំណុច $M(7,-2,1), N(5,-1,1)$, $P(3,-3,4)$ និង $Q(a,b,c)$ ។

ក. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច Q ដើម្បីឱ្យចតុកោណ $MNPQ$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃប្រលេឡូក្រាម $MNPQ$ និងផ្ទៃក្រឡា ΔMNP ។

៦.៤ អនុវត្តផលគុណពីរទិសចទ័រនៅក្នុងរូបវិទ្យា៖ ម៉ូម៉ង់ $\vec{M}$ នៃកម្លាំង $\vec{F}$ ចំពោះចំណុច P

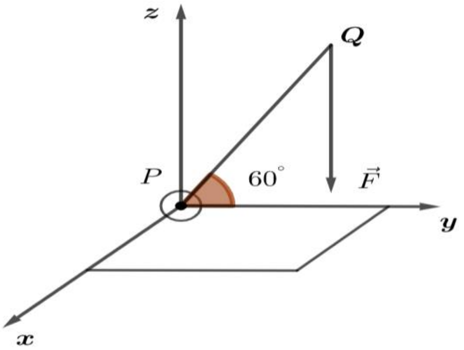
បើ Q ជាចំណុចចាប់នៃកម្លាំង $\vec{F}$ នោះម៉ូម៉ង់នៃកម្លាំង $\vec{F}$ ចំពោះចំណុច P គឺ $\left|\overrightarrow{M}\right|=\left|\overrightarrow{PQ}\times\vec{F}\right|$ ។



រូបភាព ៦.៩

ឧទាហរណ៍៖ កម្លាំងបញ្ឈរ $50N$ មានអំពើត្រង់ចុងនៃដងថ្លឹងមួយដែលជើងនៃដងថ្លឹងនេះភ្ជាប់ត្រង់ចំណុច P ដូចបង្ហាញក្នុងរូប ។រកម៉ូម៉ង់នៃកម្លាំងនេះចំពោះចំណុច P កាលណាមុំ $\theta=60^{\circ}$ ។

ចម្លើយ



រូបភាព ៦.១០

យើងតាងកម្លាំង $50N$ ដោយ $\vec{F}=-50\vec{k}$

និង $\overrightarrow{PQ}=\left(\cos 60^{\circ}\right)\vec{j}+\left(\sin 60^{\circ}\right)\vec{k}=\frac{1}{2}\vec{j}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{k}$

នោះយើងបាន៖

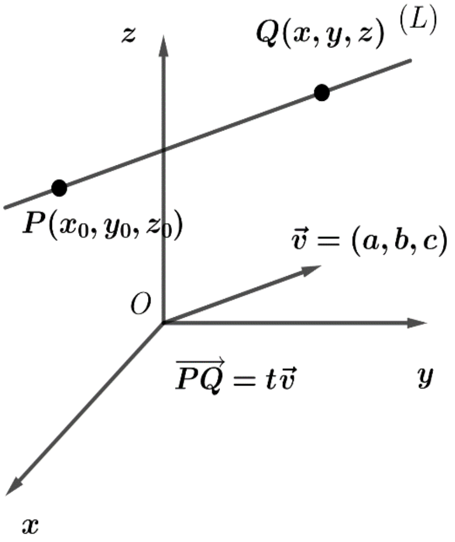
$$\vec{M}=\overrightarrow{PQ}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & 0 & -50\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & -50\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0 & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & -50\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0\end{vmatrix}\vec{k}=-25\vec{i}$$

$$\Rightarrow\left|\vec{M}\right|=\left|\overrightarrow{PQ}\times\vec{F}\right|=\sqrt{(-25)^2}=25Nm$$

៦.៥ បន្ទាត់ និងប្លង់ក្នុងលំហ

៦.៥.១ បន្ទាត់ក្នុងលំហ

ទ្រឹស្តីបទ៖ គេមានបន្ទាត់ (L) ស្របទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{v}=(a,b,c)$ ហើយកាត់តាមចំណុច $P(x_0,y_0,z_0)$ ។



រូបភាព ៦.១១

- **សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់** (L) កំណត់ដោយ៖

$x=x_0+at$, $y=y_0+bt$, $z=z_0+ct$ $(t\in\mathbb{R})$

ឬ $(L):\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\\ z=z_0+ct\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

- បើ a,b និង c ខុសពីសូន្យ នោះសមីការឆ្លុះនៃ

បន្ទាត់ (L) គឺ: $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១៖ រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និងសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (L) ដែលកាត់តាមចំណុច $M(2,4,-5)$ ហើយស្របទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(1,3,7)$ ។

ចម្លើយ

- សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតមានរាង $(L):\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

– ចំណុចកាត់ $M(2,4,-5)$ និងវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u} = (1,3,7)$

យើងបាន $(L):\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + 3t \\ z = -5 + 7t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

- សមីការឆ្លុះមានរាង $(L): \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$

– ចំណុចកាត់ $M(2,4,-5)$ និងវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u} = (1,3,7)$

យើងបាន $(L): \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z+5}{7}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២៖ គេមានពីរចំណុច $A(10,2,-3)$ និង $B(6,8,5)$ នៅក្នុងលំហ។

រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត និងសមីការឆ្លុះដែលកាត់តាមចំណុច A និង B ។

ចម្លើយ

- សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតមានរាង $(AB):\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$
  - កាត់គឺចំណុច $A(10,2,-3)$
  - វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសគឺ $\overrightarrow{AB} = (6-10, 8-2, 5+3) = (-4,6,8)$

យើងបានសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត៖

$$(AB):\begin{cases} x = 10 - 4t \\ y = 2 + 6t \\ z = -3 + 8t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

- សមីការឆ្លុះមានរាង $(AB): \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$
  - កាត់គឺចំណុច $A(10,2,-3)$
  - វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសគឺ $\overrightarrow{AB} = (6-10, 8-2, 5+3) = (-4,6,8)$

យើងបានសមីការឆ្លុះគឺ៖ $(AB): \frac{x-10}{-4} = \frac{y-2}{6} = \frac{z+3}{8}$ ។

ប្រតិបត្តិ រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត និងសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ក្នុងលក្ខខណ្ឌខាងក្រោម៖

ក. កាត់តាមពីរចំណុច $P(13,-10,7)$ និង $Q(11,-8,5)$ ។

ខ. កាត់តាមចំណុច $M(0,5,-3)$ ហើយស្របទៅនឹងបន្ទាត់ $(D): \begin{cases} x = 2-t \\ y = 5t \\ z = 3-11t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ ។

៦.៥.២ ប្លង់ក្នុងលំហ

ទ្រឹស្តីបទ៖ បើប្លង់មួយកាត់តាមចំណុច $P(x_0, y_0, z_0)$ និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = (a,b,c)$ នោះសមីការប្លង់កំណត់ដោយ៖

- $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ ហៅថាសមីការស្តង់ដានៃប្លង់
- $ax+by+cz+d=0$ ឬ $d=-(ax_0+by_0+cz_0)$ ហៅថាសមីការទូទៅនៃប្លង់ ដែលបានមកពីការពន្លាតសមីការស្តង់ដា។

ឧទាហរណ៍ទី១៖ រកសមីការនៃប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុច $M(5,-6,3)$ និងកែងទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{n} = (1,3,-5)$ ។

ចម្លើយ

សមីការមានរាង $(P): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

ចំណុចកាត់ $M(5,-6,3)$ និងវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = (1,3,-5)$ យើងបាន៖

$(x-5)+3(y+6)-5(z-3)=0 \Leftrightarrow x+3y-5z-5+18+15=0$

$(P): x+3y-5z+28=0$

ដូចនេះសមីការប្លង់គឺ $(P): x+3y-5z+28=0$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២៖ រកសមីការប្លង់ដែលកាត់តាមបីចំណុច $A(1,0,-2), B(0,-2,3)$ និង $C(4,-2,0)$ ។

ចម្លើយ

រកសមីការប្លង់ (ABC)

សមីការមានរាង $(ABC): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

– ចំណុចកាត់ $A(1,0,-2)$

– រកវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

យើងមាន $\overrightarrow{AB}=(0-1,-2-0,3+2)=(-1,-2,5),\ \overrightarrow{AC}=(4-1,-2-0,0+2)=(3,-2,2)$

$$\Rightarrow \vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -2 & 5\\ 3 & -2 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & 5\\ -2 & 2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1 & 5\\ 3 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 3 & -2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(-4+10)\vec{i}-(-2-15)\vec{j}+(2+6)\vec{k}=6\vec{i}+17\vec{j}+8\vec{k}$$

យើងបាន $(ABC): 6(x-1)+17(y-0)+8(z+2)=0$

$6x-6+17y+8z+16=0 \Leftrightarrow 6x+17y+8z+10=0$

ដូចនេះសមីការប្លង់គឺ $(ABC): 6x+17y+8z+10=0$ ។

ប្រតិបត្តិ

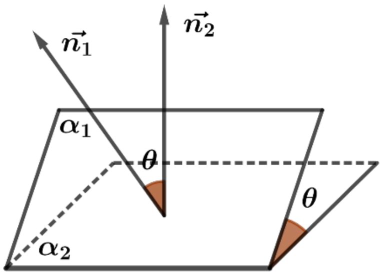
១. រកសមីការប្លង់ដែលកាត់តាមបីចំណុច $M(1,-2,3), N(0,3,-1)$ និង $P(5,0,1)$ ។

២. រកសមីការប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុច $Q(6,2,1)$ ហើយស្របទៅនឹងប្លង់ $(\alpha): -2x+3y+z+15=0$ ។

៦.៥.៣ មុំរវាងប្លង់ពីរ

បើប្លង់ពីរផ្សេងគ្នា α_1 និង α_2 ហើយមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{n_1}$ និង $\overrightarrow{n_2}$ រៀងគ្នា។ បើប្លង់ទាំងពីរប្រសព្វគ្នា ហើយ θ ជាមុំដែលបង្កើតឡើងដោយវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ទាំងពីរនោះគេបាន៖

$$\cos\theta=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}$$



រូបភាព ៦.១២

វិបាក៖

ក. ប្លង់ទាំងពីរកែងគ្នាលុះត្រាតែវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ទាំងពីរកែងគ្នា មានន័យថា $(\alpha_1)\perp(\alpha_2)\Leftrightarrow\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$ ។

ខ. ប្លង់ទាំងពីរស្របគ្នាលុះត្រាតែវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ទាំងពីរស្របគ្នាគឺ $(\alpha_1)\parallel(\alpha_2)\Leftrightarrow\overrightarrow{n_1}=k\overrightarrow{n_2}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១៖ រកមុំដែលបង្កើតឡើងដោយប្លង់ $(\alpha): x-4y+2z=0$ និង $(\beta): 3x+2y-z-7=0$ ។

ចម្លើយ

$$\cos\theta=\frac{\left|\overrightarrow{n_\alpha}\cdot\overrightarrow{n_\beta}\right|}{\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|\left|\overrightarrow{n_\beta}\right|}$$

យើងមាន $\overrightarrow{n_\alpha}=(1,-4,2),\ \overrightarrow{n_\beta}=(3,2,-1)$

$$\overrightarrow{n_\alpha}\cdot\overrightarrow{n_\beta}=1\times3+(-4)\times2+2(-1)=-7$$

$$\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|=\sqrt{1^2+(-4)^2+2^2}=\sqrt{21},\left|\overrightarrow{n_\beta}\right|=\sqrt{3^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{14}$$

យើងបាន៖ $\cos\theta=\frac{|-7|}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{14}}=\frac{7}{\sqrt{7^2\times6}}=\frac{1}{\sqrt{6}}=0.4082\Rightarrow\theta=65.9^\circ$

ដូចនេះ $\theta=65.9^\circ$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២៖ គេមានប្លង់ពីរ $(\alpha_1):\ 2x+5y-7z+3=0$ និង $(\alpha_2):-3x+4y+2z+1=0$ ។

១. រកមុំដែលបង្កើតឡើងដោយប្លង់ទាំងពីរ។

២. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ប្រសព្វរវាងប្លង់ទាំងពីរ។

ចម្លើយ

១. រកមុំដែលបង្កើតឡើងដោយប្លង់ទាំងពីរ

យើងមាន $\overrightarrow{n_1}=(2,5,-7),\ \overrightarrow{n_2}=(-3,4,2)$

$$\Rightarrow\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=2(-3)+5\times4+(-7)\times2=-6+20-14=0$$

ដោយ $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\Leftrightarrow(\alpha_1)\perp(\alpha_2)\Rightarrow\theta=90^\circ$

២. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ប្រសព្វរវាងប្លង់ទាំងពីរ

$\begin{cases}2x+5y-7z+3=0\\-3x+4y+2z+1=0\end{cases}$ យក $z=t$ យើងបាន៖

$$\begin{cases}2x+5y-7t+3=0\\-3x+4y+2t+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+5y=-3+7t\ (1)\\-3x+4y=-1-2t\ (2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x+15y=-9+21t\\-6x+8y=-2-4t\end{cases}$$

$\Rightarrow 23y=-11+17t,\ y=-\frac{11}{23}+\frac{17}{23}t$ ជំនួសក្នុង (1)

$$(1)\Rightarrow 2x=-3+7t-5\left(-\frac{11}{23}+\frac{17}{23}t\right)=-\frac{14}{23}+\frac{76}{23}t,x=-\frac{7}{23}+\frac{38}{23}t$$

ដូចនេះសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតគឺ $(L):\begin{cases}x=-\frac{7}{23}+\frac{38}{23}t\\y=-\frac{11}{23}+\frac{17}{23}t\\z=t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$

ប្រតិបត្តិ៖ យើងមានប្លង់ពីរ (α) និង (β)។ ប្លង់ (α) កាត់តាមចំណុច $A(0,-1,2)$ ហើយកែងទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(3,-1,2)$។ ប្លង់ (β) កាត់តាមបីចំណុច $M(1,3,5), N(0,1,2)$ និង $P(-1,0,-2)$ ។

ក. រកសមីការប្លង់ (α) និង (β)។

ខ. រកមុំដែលបង្កើតឡើងដោយប្លង់ទាំងពីរ។

គ. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ប្រសព្វរវាងប្លង់ទាំងពីរ។

៦.៥.៤ ចម្ងាយពីចំណុចមួយទៅប្លង់មួយក្នុងលំហ

ទ្រឹស្តីបទ៖ យើងមានប្លង់មួយ $\alpha: ax+by+cz+d=0$ ដែលមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(a,b,c)$ និង $P(x_p,y_p,z_p)$ ជាចំណុចមួយដែលស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ α។ បើ $Q(x_0,y_0,z_0)$ ជាចំណុចមួយដែលមិនស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ α នោះចម្ងាយពីចំណុច Q ទៅប្លង់ α កំណត់ដោយ៖

$$D=\frac{\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|} \text{ ឬ } D=\frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១៖ រកចម្ងាយពីចំណុច $M(3,5,7)$ ទៅប្លង់ $P:-x+4y+2z=3$។

ចម្លើយ

របៀបទី១៖

តាមរូបមន្ត $D=\frac{\left|\overrightarrow{PM}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}$

យើងមាន $\vec{n}=(-1,4,2)$។ រកកូអរដោនេចំណុច P ៖

យក $y=z=0,\ x=-3 \Rightarrow P(-3,0,0)$ នោះ $\overrightarrow{PM}=(3+3,5-0,7-0)=(6,5,7)$

$$\Rightarrow D=\frac{\left|6(-1)+5(4)+7(2)\right|}{\sqrt{(-1)^2+4^2+2^2}}=\frac{28}{\sqrt{21}}=\frac{4\sqrt{21}}{3}$$ ឯកតាប្រវែង

របៀបទី២

តាមរូបមន្ត $D=\frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

ដោយ $M(3,5,7)=(x_0,y_0,z_0),\vec{n}=(-1,4,2)=(a,b,c),d=-3$

$$\Rightarrow D=\frac{|3(-1)+5(4)+7(2)-3|}{\sqrt{(-1)^2+4^2+2^2}}=\frac{28}{\sqrt{21}}=\frac{4\sqrt{21}}{3}$$ ឯកតាប្រវែង

ឧទាហរណ៍ទី២៖ គេមានប្លង់ពីរស្របគ្នា $\alpha:3x-y+5z-12=0$ និង $\beta:-6x+2y-10z=-5$ ។

រកចម្ងាយរវាងប្លង់ទាំងពីរ។

ចម្លើយ

ចម្ងាយរវាងប្លង់ពីរគឺចម្ងាយពីចំណុចមួយដែលស្ថិតនៅក្នុងប្លង់មួយទៅប្លង់មួយទៀត។

បើ $Q\in(\alpha)\Rightarrow Q(4,0,0),\overrightarrow{n_\beta}=(-6,2,-10),d=5$

$$D=d(Q,\beta)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|4(-1)+5|}{\sqrt{(-6)^2+2^2+(-10)^2}}=\frac{1}{\sqrt{36+4+100}}=\frac{\sqrt{35}}{70}$$ ឯកតាប្រវែង

ប្រតិបត្តិ

១. រកចម្ងាយពីចំណុច $A(1,-2,5)$ ទៅប្លង់ $\beta:4x+2y+-5z=9$ ។

២. គេមានប្លង់ពីរស្របគ្នា $\alpha_1:x+3y-2z-2=0$ និង $\alpha_2:-3x-9y+6z=-10$ ។

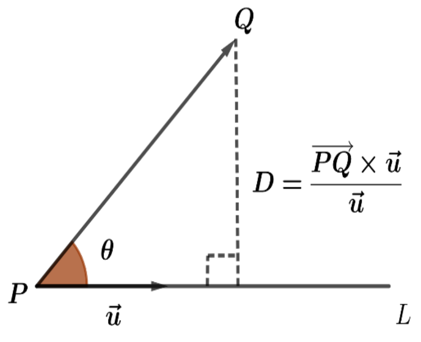
រកចម្ងាយរវាងប្លង់ទាំងពីរ។

៦.៥.៥ ចម្ងាយពីចំណុចមួយទៅបន្ទាត់មួយក្នុងលំហ

ទ្រឹស្តីបទ៖ ចម្ងាយពីចំណុច Q ទៅបន្ទាត់ L

ដែលមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}$ និង P ជាចំណុច

នៅលើបន្ទាត់ L កំណត់ដោយ៖ $D=\frac{|\overrightarrow{PQ}\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}$ ។



ឧទាហរណ៍១៖ រកចម្ងាយពីចំណុច $M(-1,5,2)$ ទៅបន្ទាត់

$$(L):\begin{cases} x=2-3t \\ y=1+2t \\ z=-t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$ ។

ចម្លើយ

តាមរូបមន្ត $D=\dfrac{\left|\overrightarrow{PM}\times\vec{u}\right|}{\left|\vec{u}\right|}$

រកកូអរដោនេចំណុច P ដែលស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ L

បើ $t=0\Rightarrow\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases},\ P(2,1,0)\in(L)$

យើងបាន $\overrightarrow{PM}=(-1-2,5-1,2-0)=(-3,4,2)$ និង $\vec{u}=(-3,2,-1)$

$$\overrightarrow{PM}\times\vec{u}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}\vec{k}=-8\vec{i}-9\vec{j}+6\vec{k}$$

$\Rightarrow D=\dfrac{\left|\overrightarrow{PM}\times\vec{u}\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\dfrac{\sqrt{(-8)^2+(-9)^2+6^2}}{\sqrt{(-3)^2+2^2+(-1)^2}}=\dfrac{\sqrt{181}}{\sqrt{14}}=3.6$ ឯកតាប្រវែង

ឧទាហរណ៍ទី២៖ រកចម្ងាយពីចំណុច $Q(1,4,-1)$ ទៅបន្ទាត់ $D:x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ ។

ចម្លើយ

តាមរូបមន្ត $D=\dfrac{\left|\overrightarrow{PQ}\times\vec{u}\right|}{\left|\vec{u}\right|}$

រកកូអរដោនេចំណុច P ដែលស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ D

$D:x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}\Leftrightarrow D:\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=3t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$,បើ $t=0\Rightarrow\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}\Rightarrow P(0,0,0)\in D$

យើងបាន $\overrightarrow{PQ}=(1,4,-1)$, $\vec{u}=(1,2,3)$

$$\overrightarrow{PQ}\times\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 4 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}\vec{k}=14\vec{i}-4\vec{j}-2\vec{k}$$

$$\Rightarrow D=\frac{\left|\overrightarrow{PQ}\times\vec{u}\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\frac{\sqrt{(14)^2+(-4)^2+(-2)^2}}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\frac{\sqrt{6^2\times 6}}{\sqrt{14}}=\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{6\sqrt{21}}{7}$$ ឯកតាប្រវែង

ប្រតិបត្តិ គេមានបីចំណុច $A(-1,3,1),B(0,1,3)$ និង $C(2,0,-1)$ ។

ក. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត និងសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (BC) ។

ខ. រកចម្ងាយពីចំណុច A ទៅបន្ទាត់ (BC) ។

៦.៥.៦ ចម្ងាយរវាងបន្ទាត់ពីរក្នុងលំហ

វិធាន៖ បើគេមានបន្ទាត់ពីរ L_1 និង L_2 ដែល $L_1 \parallel L_2$ នោះចម្ងាយរវាងបន្ទាត់ទាំងពីរកំណត់ដោយ៖

$$D=\frac{\left|\overrightarrow{PQ}\times\vec{u}\right|}{\left|\vec{u}\right|}$$ ដែល $Q\in L_1$ និង $P\in L_2$,$\vec{u}$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ L_2 ។

ឧទាហរណ៍ទី១៖ គេមានបន្ទាត់ពីរ $L_1:\begin{cases}x=2-t\\ y=1+3t\\ z=-2t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$ និង $L_2:-x+1=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{-z+1}{2}$ នៅក្នុងលំហ។ គណនាចម្ងាយរវាងបន្ទាត់ទាំងពីរ។

ចម្លើយ

តាមរូបមន្ត $D=\dfrac{\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_2}\right|}$

រកកូអរដោនេចំណុច Q ដែលស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ L_1

$$L_1:\begin{cases}x=2-t\\ y=1+3t\\ z=-2t\end{cases},\text{ បើ } t=0\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ y=1\\ z=0\end{cases}\Rightarrow Q(2,1,0)\in L_1$$

រកកូអរដោនេចំណុច P ដែលស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ L_2

$$L_2 : -x+1=\frac{y+2}{3}=\frac{-z+1}{2} \Leftrightarrow L_2 : \begin{cases} x=1-t \\ y=-2+3t \\ z=1-2t \end{cases} \text{ បើ } t=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow P(1,-2,1)\in L_2$$

យើងបាន $\overrightarrow{PQ}=(1,3,-1), \overrightarrow{u_2}=(-1,3,-2)$

$$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{u_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\vec{k}=-3\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}$$

$$\Rightarrow D=\frac{\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_2}\right|}=\frac{\sqrt{(-3)^2+3^2+6^2}}{\sqrt{(-1)^2+3^2+(-2)^2}}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{21}}{7} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

ប្រតិបត្តិ គេមានបន្ទាត់ $d_1 : \frac{x-2}{3}=y+1=-z$ និងបន្ទាត់ d_2 កាត់តាមចំណុច $M(0,4,5)$ ហើយស្របទៅនឹងបន្ទាត់ d_1។ គណនាចម្ងាយរវាងបន្ទាត់ទាំងពីរ។

លំហាត់មេរៀនទី៦

១. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មួយគេឱ្យចំណុច $A(3,0,0)$ និងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}=(-3,3,0)$, $\overrightarrow{AC}=(-3,0,3)$ និង $\overrightarrow{AD}=(-2,2,2)$។

ក. រកកូអរដោនេចំណុច B,C និង D។

ខ. បង្ហាញថា ΔABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស។ រកសមីការប្លង់ ABC រួចគណនាផ្ទៃក្រឡា ΔABC។

គ. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាមចំណុច A ហើយស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BC}$។

ឃ. គេឱ្យចំណុច $M(x,y,z)$។ កំណត់សមីការមួយដែលជាប់ទាក់ទងនឹង x,y,z ដើម្បីឱ្យវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AM}$ កែងនឹងបន្ទាត់ (L)។ តើសំណុំ M ជាអ្វី?

ង. រកសមីការស្វ៊ែ (S) ដែលកាត់តាមចំណុច A,B,C និង D។

២. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ទិសដៅវិជ្ជមានគេឱ្យចំណុច $A(2,2,1), B(3,1,1)$, $C(-2,4,5)$ និង $D(1,-1,0)$។

ក. គណនា $\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}$ រួចទាញថាបីចំណុច A,B,C រត់មិនត្រង់គ្នា។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃ ΔABC និងកំណត់សមីការប្លង់ (ABC)។

គ. គណនា $\left(\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{BD}$ រួចទាញរកមាឌតេត្រាអែត $ABCD$។

ឃ. ទាញរកចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (ABC)។

៣. គេឱ្យប្លង់ $(P): 2x+2y+z-9=0$ និងបន្ទាត់ $(\Delta): x=2-t, y=6-4t, z=2+t\ (t\in\mathbb{R})$។

ក. រកកូអរដោនេចំនុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ (Δ) និងប្លង់(P)។

ខ. កំណត់រង្វាស់មុំស្រួចផ្តុំរវាងបន្ទាត់ (Δ) និងប្លង់(P)។

គ. កំណត់សមីការប្លង់ (β)កែងនឹងបន្ទាត់ (Δ) ត្រង់ចំណុច A។

ឃ. កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ដែលជាប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និងប្លង់(β)។

៤. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$គេឱ្យបីចំណុច $M(-1,0,2), N(2,3,-1)$និង $P(-2,3,0)$ ។

ក. គណនាប្រវែង MN, MP និង NP។

ខ. កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (D)ដែលកាត់តាមចំណុច M និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស

$\overrightarrow{NP}$ រួចទាញសមីការរកសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (D)។

គ. គណនា$\overrightarrow{MN}\times\overrightarrow{MP}$រួចកំណត់សមីការប្លង់ (MNP)។

ឃ. គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ΔMNP រួចគណនាចម្ងាយពីចំណុច $O(1,-4,0)$ ទៅប្លង់ $O(1,-4,0)$។

៥. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឱ្យប្លង់ពីរ $P: 3x+4y+6z-12=0$ និង $Q: x+y+z=0$។

ក. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ D ដែលជាប្រសព្វរវាងប្លង់ P និងប្លង់ Q។

បញ្ជាក់កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}$ នៃបន្ទាត់ D។

ខ. តាង $\vec{p}$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃប្លង់ P និង $\vec{q}$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃប្លង់ Q។

គណនា $\vec{p}\times\vec{q}$ រួចបង្ហាញថា $\vec{p}\times\vec{q}$ ស្របនឹង $\vec{u}$ ។

គ. យក A,B,C ជាចំណុចប្រសព្វរវាងប្លង់ P នឹងអ័ក្ស $\overrightarrow{ox},\overrightarrow{oy},\overrightarrow{oz}$ ។ ចូរប្រាប់កូអរដោនេនៃចំណុច A,B និង C ។ គណនាផ្ទៃក្រឡា ΔABC ។

ឃ. គណនាចម្ងាយ d ពីរចំណុច O ទៅប្លង់ P រួចទាញរកមាឌចតុមុខ $OABC$ ។

៦. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឱ្យចំណុច $S(0,0,3)$ និងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(1,1,1)$ ។

ក. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាមចំណុច S ហើយស្របនឹងបន្ទាត់ L ។

ខ. $M(x,y,z)$ ជាចំណុចមួយនៅក្នុងតម្រុយ $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ។ គណនាផលគុណស្កាលែ $\vec{u}\cdot\overrightarrow{SM}$ ។ កំណត់សមីការមួយដែលជាប់ទាក់ទងនឹង x,y,z ដើម្បីឱ្យ $\overrightarrow{SM}$ អរតូកូណាល់នឹង $\vec{u}$ ។ តើសំណុំចំណុច M ជាអ្វី?

គ. គេឱ្យចំណុច $A(3,0,0)$ និង $B(0,3,0)$ ។ បង្ហាញថា ΔSAB ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

ឃ. គណនាផលគុណ $\overrightarrow{SA}\times\overrightarrow{SB}$ ។ រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡា ΔSAB ។

ង. រកសមីការស្វ៊ែដែលមានផ្ចិត O ហើយកាត់តាមចំណុច S,A និង B ។

ឯកសារពិគ្រោះ

សៀវភៅគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១០ ភាគ១ និងភាគ២ បោះពុម្ពឆ្នាំ២០១៧

សៀវភៅគណិតថ្នាក់ទី១១ កម្រិតមូលដ្ឋាន និងកម្រិតខ្ពស់ បោះពុម្ពឆ្នាំ២០១៧

សៀវភៅគណិតថ្នាក់ទី១២ កម្រិតមូលដ្ឋាន និងកម្រិតខ្ពស់ បោះពុម្ពឆ្នាំ២០១៧