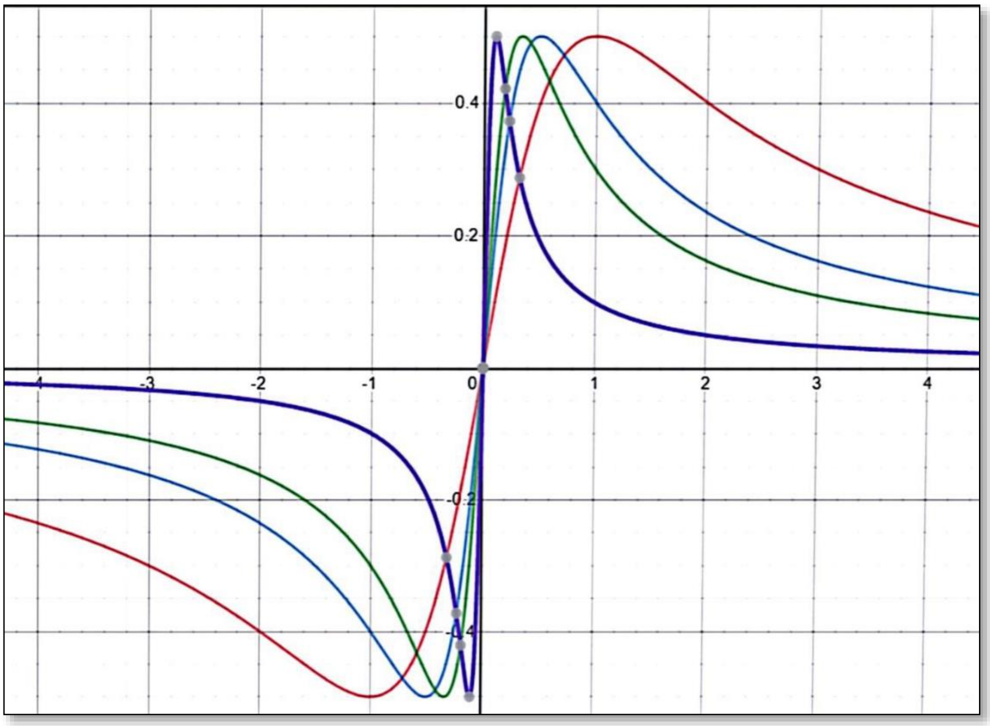
វិភាគទូទៅ៣



គាំទ្រថវិកាលើការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អដោយៈ

“មូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍”

២០២៣

អ្នកនិពន្ធដោយ៖

១. បណ្ឌិត មាច មន
២. លោក ឈាន ហាង

គណៈកម្មការរចនាទំព័រ ៖ លោកស្រី សំបាត់ អ៊ាត លោកស្រី ឈុំ ពៅ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យ៖

១. លោក ហ៊ុន វ៉ារី	ព្រឹទ្ធបុរសរង	ប្រធាន
២. លោក យុត ភា	គ្រូឧទ្ទេស	សមាជិក
៣. លោក ខាន់ ដារ៉ា	គ្រូឧទ្ទេស	សមាជិក

បុព្វកថា

ដំណើរអភិវឌ្ឍនៃព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជានៅក្នុងយុគសម័យទំនើបនេះ ជាមេរៀនដ៏ជោគជ័យបំផុតមួយដែលចាប់ឫសគល់ចេញពីការបញ្ចប់របបប្រល័យពូជសាសន៍ ការបញ្ចប់សង្គ្រាម ការផ្សះផ្សារជាតិ ការកសាងមូលដ្ឋានរឹងមាំនៃសន្តិភាពនិងស្ថេរភាព និងការអភិវឌ្ឍសេដ្ឋកិច្ច។ នៅក្រោយពេលដែលសន្តិភាពត្រូវបានកើតឡើងដោយបរិបូរណ៍នៅឆ្នាំ១៩៩៨ កម្ពុជាទទួលកំណើនសេដ្ឋកិច្ចខ្ពស់ គឺប្រមាណ៨%ក្នុងមួយឆ្នាំ។ លើសពីនេះទៀតអត្រានៃភាពក្រីក្រត្រូវបានកាត់បន្ថយពីប្រមាណ៥៣% នៅឆ្នាំ២០០៤មកនៅទាបជាង១០% នៅឆ្នាំ២០១៩។ ដំណើរនៃការអភិវឌ្ឍជាតិជាសកម្មភាពដែលបន្តទៅមុខជាប់ជានិច្ច ហើយគោលនយោបាយថ្មីៗដែលមានលក្ខណៈអន្តរវិស័យគ្របដណ្តប់ ក៏កំពុងលេចរូបរាងឡើងដើម្បីតម្រង់ទិសកម្ពុជាឆ្ពោះទៅកាន់ប្រទេសមានប្រាក់ចំណូលមធ្យមកម្រិតខ្ពស់នៅឆ្នាំ ២០៣០ និងឈានឡើងជាប្រទេសមានប្រាក់ចំណូលខ្ពស់ នៅឆ្នាំ២០៥០។ ការប្រែប្រួលឆាប់រហ័សនៃនិម្មាបនកម្មពិភពលោក និងតំបន់រួមទាំងទំនាក់ទំនងភូមិសាស្ត្រនយោបាយ បានផ្តល់កាលានុវត្តភាពសម្រាប់ការអភិវឌ្ឍឧស្សាហកម្មនៅកម្ពុជា ដែលត្រូវបានរាជរដ្ឋាភិបាលចាត់ទុកជាមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃកំណើនសេដ្ឋកិច្ចកម្ពុជា។ រាជរដ្ឋាភិបាលកម្ពុជាបានកំពុងបន្តពង្រឹង និងអភិវឌ្ឍវិស័យអប់រំឆ្ពោះទៅរកការស្រាវជ្រាវ និងនវានុវត្តន៍ដើម្បីពង្រឹងសមត្ថភាពនិងជំនាញរបស់ធនធានមនុស្សនៅកម្ពុជាឱ្យស្របទៅនឹងបរិបទថ្មីនៃការអភិវឌ្ឍ ជាពិសេសការពង្រឹងសហគ្រិនភាពក្នុងការរៀបចំម៉ូដែលធុរកិច្ចថ្មីៗ។ ដើម្បីចាប់យកកាលានុវត្តភាពពីបដិវត្តន៍ឧស្សាហកម្មទី៤ និងសេដ្ឋកិច្ចឌីជីថលដែលកំពុងផុសផុលឡើង ប្រព័ន្ធអេកូឡូហ្ស៊ីដែលបង្កលក្ខណៈអំណោយផលដល់ការបង្កើតថ្មី នវានុវត្តន៍ ការស្រាវជ្រាវ និងអភិវឌ្ឍន៍ ត្រូវតែមានការកែលម្អ។

បណ្តាប្រទេសនៅទ្វីបអាស៊ីកំពុងនាំមុខក្នុងការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍ ដោយមានភាគហ៊ុនប្រមាណ៤៤% នៃការវិនិយោគទាំងមូលរបស់ពិភពលោក។ ប្រទេសចិនកំពុងបន្តកសាងហេដ្ឋារចនាសម្ព័ន្ធនៃការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍ ក៏ដូចជាសមត្ថភាពមនុស្ស។ ផ្ទុយទៅវិញ ប្រទេសនៅទ្វីបអាមេរិកខាងត្បូង និងអាហ្វ្រិក កំពុងស្ថិតនៅឆ្ងាយពីការវិនិយោគនេះ ហើយជាលទ្ធផល ប្រទេសទាំងនោះក៏ពុំមានកំណើនសេដ្ឋកិច្ចគួរឱ្យកត់សម្គាល់ដែរ។ ទុនវិនិយោគសរុបលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍរបស់ប្រទេសនៅទ្វីបអាមេរិកខាងត្បូនិងអាហ្វ្រិក មានប្រមាណ៥%នៃការវិនិយោគទាំងមូលរបស់ពិភពលោក ក្នុងពេលដែលតំបន់ទាំង២នេះមានប្រជាជនប្រមាណ២០%នៃប្រជាជនពិភពលោក។ ប្រទេសចំនួន៦ដែលមានលំដាប់ខ្ពស់ជាងគេនៅក្នុងការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍ រួមមានសហរដ្ឋអាមេរិក ចិន ជប៉ុន អាល្លឺម៉ង់ ឥណ្ឌា និងកូរ៉េខាងត្បូង ដែលស្មើនឹងប្រមាណ ៧០%នៃទុនវិនិយោគសរុបរបស់ពិភពលោក។

តើចំណេះដឹង ផលិតផល និងសេវាកម្មថ្មីទាំងនេះកើតឡើងពីអ្វី? ហើយកើតឡើងដោយរបៀបណា? ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជាកំពុងតែកសាងមូលដ្ឋានសម្រាប់ការត្រៀមខ្លួនទទួល និងប្រកួតប្រជែងក្នុងយុគសម័យបដិវត្តឧស្សាហកម្មទី៤ នៅក្នុងសេដ្ឋកិច្ចដែលផ្អែកលើពុទ្ធិ ហើយដែលប្រការ

នេះចាំបាច់តម្រូវឱ្យពលរដ្ឋកម្ពុជា ត្រូវក្លាយខ្លួនជាពលរដ្ឋឌីជីថល ពលរដ្ឋសកល និងពលរដ្ឋដែលប្រកបដោយការទទួលខុសត្រូវ ដែលមានសមត្ថភាពក្នុងការផលិត ចែកចាយ និងប្រើប្រាស់ពុទ្ធិដើម្បីទទួលមនុញ្ញផល និងរួមចំណែកក្នុងកំណើន។ ធនាគារពិភពលោកបានធ្វើការកត់សម្គាល់តាំងពីឆ្នាំ២០០២នូវបម្លាស់ប្តូរនៃមូលដ្ឋានសេដ្ឋកិច្ច ពីសេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើកម្លាំងពលកម្ម និងធនធានអតិកម្ម (Laboure and Resource Based Economy) ទៅកាន់សេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើពុទ្ធិ (Knowledge Based-Economy) ដែលក្នុងន័យនេះ ពុទ្ធិគឺជាគន្លឹះនៃការអភិវឌ្ឍ។ អាស្រ័យហេតុនេះ នៅលើគន្លងដែលកម្ពុជាកំពុងធ្វើដំណើរឆ្ពោះទៅកាន់សេដ្ឋកិច្ចឌីជីថល សង្គមកម្ពុជាត្រូវតែមានសមត្ថភាពក្នុងការ ផលិត ជ្រើសរើស បន្សាំ បង្កើតមុខរបរ និងប្រើប្រាស់ពុទ្ធិ ដើម្បីរក្សានិរន្តរភាពនៃកំណើន និងកែលម្អជីវភាពរស់នៅ។ សមត្ថភាពទាំងនេះ អាចកើតឡើងនៅពេលពលរដ្ឋកម្ពុជាមានឱកាសក្នុងការទទួលបានបទពិសោធន៍ពីការស្រាវជ្រាវ ការបណ្តុះគំនិតច្នៃប្រឌិត និងការស្វែងរកនវានុវត្តន៍។

កំណែទម្រង់វិស័យអប់រំ គឺជាការត្រួសត្រាយមាគ៌ាសម្រាប់ដំណើរឆ្ពោះទៅកាន់សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិ និងប្រជាពលរដ្ឋប្រកបដោយភាពរស់រវើក។ តាមរយៈមូលដ្ឋានអប់រំ សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិនឹងប្រមូលផ្តុំ បង្កើត និងចែករំលែក ទៅកាន់សមាជិកក្នុងសង្គមនូវសម្បទាអប់រំ ពិសេសគឺពុទ្ធិសម្បទាក្នុងបុព្វហេតុនៃមនុស្សជាតិនិងឧត្តមប្រយោជន៍នៃប្រទេស។ សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិ គឺពុំគ្រាន់តែជាសង្គមដែលសម្បូរព័ត៌មានប៉ុណ្ណោះទេ តែជាសង្គមដែលប្រជាពលរដ្ឋអាចធ្វើបរិវត្តកម្មពីព័ត៌មានទៅជាមូលធនប្រកបដោយប្រសិទ្ធភាព។ ការរីកចម្រើនទៅមុខជាលំដាប់នៃបច្ចេកវិទ្យានិងតំណភ្ជាប់ បានពង្រីកព្រំដែននៃការចូលទៅកាន់ និងការទទួលបានព័ត៌មានជាសកល ហើយដែលក្នុងន័យនេះ ការអប់រំនឹងបន្តវិវត្តទៅមុខនិងមានការផ្លាស់ប្តូរ។ សង្គមមួយដែលមានអំណាន និងរបាប់ជាបុរេលក្ខខណ្ឌនៃជីវភាពប្រចាំថ្ងៃនៃប្រជាពលរដ្ឋ ពេលនោះបំណិននៃអំណាន និពន្ធ និងការគណនាលេខនព្វន្ត គឺជាចលករនៃការរៀនរបស់សិស្ស។ ជាតុដ៏ចម្បងមួយដែលស្ថិតនៅក្នុងការកសាងសង្គមដែលប្រកបដោយពុទ្ធិគឺសៀវភៅសិក្សា ហើយការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សាជាប្រចាំ គឺជានវានុវត្តន៍នៃវិស័យអប់រំដែលនាំទៅរកការសិក្សាពេញមួយជីវិត ការអភិវឌ្ឍសម្បទាអប់រំ និងការចែករំលែកចំណេះដឹង។ មូលដ្ឋានអប់រំ ជាពិសេសគឺគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សាត្រូវមានតួនាទីដែលប្រកបដោយការឆ្លើយតបចំពោះតម្រូវការខាងលើនេះ។ សាស្ត្រាចារ្យ អ្នកស្រាវជ្រាវ និងបុគ្គលិកអប់រំត្រូវបន្តសិក្សាជាប់ជានិច្ចតាមរយៈការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ហើយដែលសៀវភៅសិក្សាទាំងនេះនឹងក្លាយជា ស្ពាននៃទំនាក់ទំនងរវាងនវានុវត្តន៍នៃបច្ចេកវិទ្យា និងការរៀននិងបង្រៀននៅក្នុងថ្នាក់រៀន។

សង្គមដែលប្រកបពុទ្ធិ ក៏ជាសង្គមដែលបណ្តុះឱ្យមានរចនាសម្ព័ន្ធទន់នៃសេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើពុទ្ធិដែរ។ ឧទាហរណ៍ជាក់ស្តែងនៃបែបផែននេះរួមមាន Silicon Valley នៃសហរដ្ឋអាមេរិក សួនឧស្សាហកម្មវិស្វកម្មអាកាសយានយន្តនិងយានយន្តនៅទីក្រុង Munich ប្រទេសអាល្លឺម៉ង់ តំបន់ជីវបច្ចេកវិទ្យានៅក្រុង Hyderabad ប្រទេសឥណ្ឌា តំបន់ផលិតគ្រឿងអេឡិចត្រូនិក និងសារគមនាគមន៍ ឌីជីថលនៅទីក្រុង Seoul ប្រទេសកូរេខាងត្បូង ក៏ដូចជាសួនឧស្សាហកម្មថាមពល និង

ឥន្ទនគីមីសាស្ត្រនៃប្រទេសប្រេស៊ីល ហើយក៏នៅមានទីក្រុងនៃប្រទេសជាច្រើនទៀតនៅលើពិភពលោក លក្ខណៈសម្បត្តិនៃទីក្រុងទាំងនេះគឺការប្រើប្រាស់និន្នាការនៃការអភិវឌ្ឍដែលជំរុញ និងតម្រង់ទិសដោយចំណេះដឹង ហើយដែលចំណេះដឹងទាំងនោះកើតចេញជាដំបូងពីការវិនិយោគទៅលើគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា ស្ថាប័នស្រាវជ្រាវ មជ្ឈមណ្ឌលឧត្តមភាពនៃជំនាញជាន់ខ្ពស់ ការប្រកួតប្រជែងដោយគុណាធិបតេយ្យ និង ជាពិសេសគឺការបណ្តុះវប្បធម៌អំណាននិងនិពន្ធសៀវភៅ។ ល្បឿននៃការរីកចម្រើនផ្នែកពុទ្ធិ និងបច្ចេកវិទ្យាកំពុងមានសន្ទុះលឿនជាងអ្វីដែលសិស្ស និងនិស្សិតអាចទទួលបានពីគ្រូនៅគ្រឹះស្ថានសិក្សា ដែលធ្វើឱ្យគោលដៅនៃការអប់រំនៅពេលបច្ចុប្បន្ននេះ មានការប្រឈមខ្លាំងជាងពេលណាទាំងអស់។ ឧទាហរណ៍ ក្នុងមួយឆ្នាំ មានសៀវភៅជាង២,២លានចំណងជើង ត្រូវបានសរសេរ និងបោះពុម្ព ដែលក្នុងនោះប្រទេសចិនមាន៤៤០ពាន់ ចំណែកឯសហរដ្ឋអាមេរិកមាន ៣០៥ ពាន់ និងប្រទេសរុស្ស៊ីមាន ១២០ពាន់ចំណងជើង។

ខណៈពេលដែលបច្ចេកវិទ្យាកំពុងរីកចម្រើនជារៀងរាល់ថ្ងៃ មធ្យោបាយសម្រាប់អំណានក៏មានច្រើនជម្រើសសម្រាប់សិស្ស និស្សិត និងសាធារណៈជនរួមមានការអានសៀវភៅ ការអានលើឧបករណ៍អេឡិចត្រូនិក ការអានដោយប្រើទូរសព្ទវៃឆ្លាត និងការអានលើកុំព្យូទ័រ ដែលសុទ្ធសឹងជាមធ្យោបាយសំខាន់ៗដែលនាំអ្នកអានទាំងឡាយឱ្យសម្រេចគោលបំណងអានរបស់ខ្លួន។ ម្យ៉ាងវិញទៀត អំណានដោយប្រើមធ្យោបាយបច្ចេកវិទ្យាទំនើប ចំណាយពេលតិច ងាយស្រួលអាន និងជួយដល់បរិស្ថានមួយកម្រិតទៀត។ នាពេលបច្ចុប្បន្ន សិស្ស និស្សិត និងសាធារណៈជនកម្ពុជាដែលស្រឡាញ់អំណានកំពុងតែប្រើប្រាស់មធ្យោបាយអំណានទាំងនេះ។ បើយើងក្រឡេកមើលទៅប្រទេសជឿនលឿន ទោះបីជាបច្ចេកវិទ្យារីកចម្រើនខ្លាំងយ៉ាងណា អំណានតាមរយៈសៀវភៅនៅតែមានសន្ទុះដដែល។ ម្យ៉ាងវិញទៀត បច្ចេកវិទ្យាអានបែបទំនើបតាមរយៈឧបករណ៍ទំនើប អាស្រ័យលើលទ្ធភាពនៃធនធានអប់រំឌីជីថល និងមាតិកាឌីជីថលគ្រប់គ្រាន់ដែលបានផលិត និងបង្ហោះចែកចាយសម្រាប់អំណាន។

ក្នុងបរិបទកម្ពុជា ជាពិសេសក្នុងបរិការណ៍នៃការផ្ទុះរីករាលដាលនៃជំងឺកូវីដ-១៩ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានជំរុញឱ្យមានបរិវត្តកម្មឌីជីថលនៅក្នុងអេកូស៊ីស្តែមនៃការអប់រំ ជាពិសេសការអប់រំតាមប្រព័ន្ធអេឡិចត្រូនិកនិងការអប់រំពីចម្ងាយដើម្បីលើកកម្ពស់អំណានតាមរយៈការផលិតមាតិកាឌីជីថលដែលមានភាពចំរុះ ការកសាងសមត្ថភាពផ្នែកតំណភ្ជាប់និងវេទិកាឌីជីថល ការពង្រីកវិសាលភាពនៃមជ្ឈមណ្ឌលទិន្នន័យ និងការលើកកម្ពស់គុណភាពនៃការផលិតធនធានអប់រំឌីជីថល គួបផ្សំជាមួយការចែកសន្លឹកកិច្ចការឱ្យសិស្សយកទៅរៀននៅផ្ទះ និងការចុះទៅជួបជាមួយសិស្សជាបណ្តុំនៅតាមសហគមន៍។ ក្នុងន័យលើកកម្ពស់អំណាន និងភាពសម្បូរបែបនៃធនធានសៀវភៅសិក្សាឱ្យកាន់តែមានប្រសិទ្ធភាពនិងភាពសក្តិសិទ្ធិ និងផ្តល់ឱកាសអំណានកាន់តែច្រើនថែមទៀតដល់សិស្សានុសិស្ស និស្សិត និងសាធារណៈជន ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាលើកទឹកចិត្តនូវចំណុចមួយចំនួនដូចខាងក្រោម៖

1. សាស្ត្រាចារ្យ អ្នកស្រាវជ្រាវ និងបុគ្គលិកអប់រំ សូមបន្តនិងបង្កើនការបោះពុម្ពស្នាដៃបន្ថែមទៀត ដើម្បីធ្វើឱ្យធនធានសម្រាប់អំណានកាន់តែសម្បូរបែប ជាពិសេសធនធានអំណានជាខេមរភាសា
2. គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា សូមផ្តល់លទ្ធភាពគ្រប់បែបយ៉ាង ដើម្បីឱ្យបុគ្គលិកអប់រំគ្រប់លំដាប់ថ្នាក់ និង និស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សាអាចចូលរួមអាន និងសិក្សាស្រាវជ្រាវតាមគ្រប់លទ្ធភាពជាមួយធនធានអំណាន ជាពិសេសការរៀបចំឱ្យមានពេលវេលាសម្រាប់សហសិក្សា និងអំណានក្នុងបណ្ណាល័យ
3. សាស្ត្រាចារ្យតាមមុខវិជ្ជា និងអ្នកស្រាវជ្រាវតាមជំនាញឬវិស័យ ត្រូវរៀបចំដំណើរការរៀនបង្រៀន និងស្រាវជ្រាវដែលមានដាក់បញ្ចូលកិច្ចការស្វ័យសិក្សា សហសិក្សា ឬការស្រាវជ្រាវបណ្ណាល័យដែលតម្រូវឱ្យនិស្សិត ត្រូវអាននិងស្រាវជ្រាវជាមួយធនធានអំណាន
4. គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងមជ្ឈមណ្ឌលស្រាវជ្រាវ ត្រូវខិតខំឱ្យអស់លទ្ធភាពក្នុងការបង្កើតបណ្ណាល័យ មជ្ឈមណ្ឌលរក្សាឯកសារ ឬមជ្ឈមណ្ឌលអប់រំឌីជីថល ជាដើម ដើម្បីឱ្យបុគ្គលិកអប់រំគ្រប់លំដាប់ថ្នាក់និងនិស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សា អាចទទួលបាន និងស្វែងរកប្រភពសម្រាប់អំណាន កាន់តែសម្បូរបែប និងមានភាពបត់បែន ឆ្លើយតបតាមតម្រូវការអ្នកអាន
5. និស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សា ត្រូវខិតខំនិងចំណាយពេលអាន និងចាត់ទុកវប្បធម៌ និងអកប្បកិរិយាអំណានជាផ្នែកមួយ នៃពេលវេលានិងភាពស៊ីវិល័យនៃជីវិតប្រចាំថ្ងៃ
6. បងប្អូនជនរួមជាតិ ដែលជាមាតាបិតា ឬអ្នកអាណាព្យាបាល សូមជួយជំរុញនិងបង្កលក្ខណៈកាន់តែ ច្រើនថែមទៀត ជាពិសេសការលៃលកចំណាយនៅក្នុងគ្រួសារសម្រាប់ការទិញសម្ភារៈសិក្សា សៀវភៅអាន និងឧបករណ៍សម្រាប់អំណានដល់កូនៗ ដែលចាត់ទុកជាការវិនិយោគមួយដ៏សំខាន់ សម្រាប់ បង្កើនចំណេះដឹង និងអនាគតរបស់ពួកគេ។

ដោយមានការគាំទ្រពីក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ នៅឆ្នាំ២០២០ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានបង្កើតមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ដែលហៅកាត់ថា“មូលនិធិ ស.គ.ន” និងហៅជាភាសាអង់គ្លេសថា The Research Creativity and Innovation Fund ដែលហៅកាត់ជាភាសាអង់គ្លេសថា “RCI Fund”។ គោលដៅចម្បងនៃមូលនិធិនេះ គឺរួមចំណែកលើកកម្ពស់វប្បធម៌នៃការស្រាវជ្រាវ បំផុសគំនិតច្នៃប្រឌិត និងជំរុញការធ្វើនវានុវត្ត ដើម្បីជាប្រយោជន៍ដល់វិស័យអប់រំ យុវជន និងកីឡា ដែលឆ្លើយតបទៅនឹងទីផ្សារពលកម្ម និងសាកលភាវូបនីយកម្ម។ មូលនិធិ ស.គ.ន បានសម្រេចកំណត់ប្រធានបទ ជាអាទិភាពសម្រាប់ការគាំទ្រដោយមូលនិធិចំនួន៣ រួមមាន ឌីជីថលនីយកម្មសម្រាប់បដិវត្តឧស្សាហកម្ម៤.០ (Digitalization for IR.4.0) ការស្រាវជ្រាវអនុវត្តលើវិស័យកសិកម្ម (Applied Agricultural Research) និងការស្រាវជ្រាវគរុកោសល្យសតវត្សទី២១ (21st Century Pedagogy Research)។

ដោយមានការធ្វើអាទិភាពវូបនីយកម្មទៅលើទិសដៅនៃការប្រើប្រាស់ថវិកាមូលនិធិសម្រាប់ឆ្នាំ២០២០ ក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ និងក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានផ្តល់ការគាំទ្រ

ដល់ការ**រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អ សៀវភៅសិក្សា(Text book) ដែលនឹងត្រូវប្រើប្រាស់នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា**។ គោលបំណងនៃការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អ សៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា គឺដើម្បីបង្កើនបរិមាណ លើកកម្ពស់គុណភាព និងពង្រីកសមធម៌នៃធនធានសិក្សាជាខេមរភាសា ជូនដល់និស្សិតដែលកំពុងបន្តការសិក្សា និងត្រៀមខ្លួនធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។ លើសពីនេះទៀតការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា មានគោលដៅដូចខាងក្រោម ៖

- ឆ្លើយតបជាបន្ទាន់ចំពោះការខ្វះខាតធនធានសិក្សា ដែលជាតម្រូវការសិក្សារបស់និស្សិតនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា
- លើកកម្ពស់ទំនើបភាវូបនីយកម្ម និងឧត្តមានុវត្តន៍នៃការរៀននិងបង្រៀន និងការស្រាវជ្រាវនៅលើមុខវិជ្ជា កម្មវិធីសិក្សា ឬមុខជំនាញជាក់លាក់
- បង្កើនភាពស៊ីជម្រៅក្នុងការកសាងវិជ្ជាជីវៈនិងបទពិសោធន៍សម្រាប់ឋានៈសាស្ត្រាចារ្យ និងអ្នកស្រាវជ្រាវ
- រួមចំណែកដល់ការកសាងភាពជាសហគមន៍វិជ្ជាជីវៈ ការចែករំលែកបទពិសោធន៍ និងវប្បធម៌នៃការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានវាយតម្លៃខ្ពស់ចំពោះការបោះជំហានប្រកបដោយមនសិការវិជ្ជាជីវៈនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងបុគ្គលិកអប់រំទាំងអស់ ក្នុងការរៀបចំ រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ដើម្បីបង្កើនបរិមាណ លើកកម្ពស់គុណភាព និងពង្រឹងសមធម៌នៃធនធានសិក្សាជាខេមរភាសា ជូននិស្សិតដែលកំពុងបន្តការសិក្សា និងត្រៀមខ្លួនធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។ សៀវភៅសិក្សាជាផ្នែកមួយនៃការទទួលស្គាល់គុណភាពអប់រំនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងជាធនធានសិក្សាដែលជាមូលដ្ឋានមួយដ៏សំខាន់ ក្នុងការគាំទ្រដល់ការបង្រៀន និងរៀន ហើយត្រូវមានបរិមាណគ្រប់គ្រាន់ ឆ្លើយតបទៅនឹងកម្មវិធីអប់រំ និងតម្រូវការសិក្សាស្រាវជ្រាវ។ ជាគោលការណ៍ គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សាទាំងអស់ ត្រូវមានសៀវភៅសិក្សាដែលប្រើជាគោលសម្រាប់មុខវិជ្ជានីមួយៗ។ ចំនួនសៀវភៅសិក្សាដែលគ្រប់គ្រាន់សម្រាប់ការស្រាវជ្រាវ និងការសិក្សារបស់និស្សិត ត្រូវមានយ៉ាងតិចមួយចំណងជើងក្នុងមួយមុខវិជ្ជា ហើយត្រូវតម្កល់យ៉ាងតិច២ច្បាប់ នៅក្នុងបណ្ណាល័យ ឬអាចរកបានតាមប្រព័ន្ធអេឡិចត្រូនិក។ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា លើកទឹកចិត្តបន្ថែមទៀតជូនដល់គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សារដ្ឋ និងឯកជនដែលបានស្នើសុំថវិកាមូលនិធិរួច សូមចូលរួមបន្ថែមទៀតដើម្បីបង្កើនចំនួនចំណងជើងសៀវភៅ។ ចំណែកគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សារដ្ឋនិងឯកជនដែលពុំទាន់បានដាក់ពាក្យស្នើសុំ សូមចូលរួមដើម្បីជាគុណប្រយោជន៍ដល់តម្រូវការដ៏ទទូច និងថ្លៃថ្លានៃនិស្សិតកម្ពុជាក្នុងការសិក្សា និងស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។

សេចក្តីបញ្ជាក់
នៃមូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍

សៀវភៅសិក្សានេះជាលទ្ធផលនៃការស្នើសុំអនុវត្តថវិកាមូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ក្នុងគម្រោង**រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ដែលនឹងត្រូវប្រើប្រាស់នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។** សៀវភៅសិក្សានេះ ត្រូវបានរៀបរៀង និពន្ធ ឬកែលម្អដោយមានការធានាអះអាងថាជាស្នាដៃរបស់អ្នកនិពន្ធផ្ទាល់ និងបានឆ្លងកាត់ត្រួតពិនិត្យ ផ្តល់យោបល់ និងវាយតម្លៃដោយក្រុមប្រឹក្សាអប់រំ ក្រុមប្រឹក្សាស្រាវជ្រាវ ឬក្រុមប្រឹក្សាដែលមានតម្លៃស្មើនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងតាមរយៈកិច្ចសន្យាដែលបានធ្វើឡើង និងដែលបានតម្កល់ទុកនៅមូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍។ រាល់ខ្លឹមសារ ការបកស្រាយ និងរូបភាព គឺជាជំហរនិងទស្សនៈផ្ទាល់របស់អ្នកនិពន្ធ ហើយ ពុំឆ្លុះបញ្ចាំង ឬជាតំណាងដល់មូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍នៃក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ឡើយ។

មាតិកា

បុព្វកថា i

សេចក្តីបញ្ជាក់ vi

អារម្ភកថា xi

សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ xii

ការបរិយាយលើមុខវិជ្ជា xiii

មូលន័យសង្ខេប..xiv

មេរៀនទី១៖ មូលដ្ឋានសំខាន់ៗ..1

១.១.សំណុំ និងអនុគមន៍ 1

១.២.លំហមេទ្រិក...16

១.៣.លីមីត និងភាពជាប់...20

១.៤. លីមីតក្នុងលំហតូប៉ូ 23

១.៥. ភាពជាប់នៃអនុគមន៍..24

១.៦. ភាពមានដេរីវេត្រង់ចំណុច a មួយ 26

១.៧. ភាពជាប់ត្រង់ចំណុច a មួយ..36

១.៨.ស្វ៊ីត និងលីមីតលើ លីមីតក្រោម 41

១.៩. ភាពបំពេញនៃ$\boldsymbol{R}$...43

មេរៀនទី២៖ ទ្រឹស្តីរង្វាស់...46

២.១.ប្រវែង ក្រឡាផ្ទៃ មាឌសំណុំរងនៃ $\mathbb{R}^d$ 46

២.២.ប្រវែងសំណុំបើក និងបិទ...47

២.៣.σ- ពីជគណិតឬ**Tribu** និងសំណុំ**Borel**..48

២.៤. បញ្ញត្តិដោយរង្វាស់ 51

២.៥.រង្វាស់ក្នុង និងរង្វាស់ក្រៅ 52

២.៦. សំណុំដែលអាចវាស់បាន 52
២.៧. ឡឺបេសខាងក្រៅ ឬរង្វាស់ចំណុចខាងក្រៅ 53
២.៨. ទ្រឹស្តីរង្វាស់ 53
២.៩. ដំណោះស្រាយ 55
មេរៀនទី៣៖ អនុគមន៍វាស់បាន 66
៣.១.អនុគមន៍ងាយ និងអនុគមន៍មិនអវិជ្ជមាន 66
៣.២. ទ្រឹស្តីបទសំខាន់ៗ 66
៣.៣. ថ្នាក់ Baire និងទ្រឹស្តីបទ Egorov 67
៣.៤.ដំណោះស្រាយ 68
៣.៥. លំហាត់អនុវត្តន៍ 76
មេរៀនទី៤៖ អាំងតេក្រាល**Lebasque**លើសំណុំទាល់ 79
៤.១.អាំងតេក្រាលលើអនុគមន៍ងាយ និងអនុគមន៍មិនអវិជ្ជមាន 79
៤.២.អាំងតេក្រាលអនុគមន៍ ទូទៅ 82
៤.៣.អាំងតេក្រាលរីម៉ាន់ (Riemann integral) 83
៤.៤.អាំងតេក្រាលឡឺបេសលើអនុគមន៍វាស់បានទាល់ 84
៤.៥. ការចំណាំសម្រាប់អាំងតេក្រាលរីម៉ាន់ និងអាំងតេក្រាលឡឺបេស 85
៤.៦.ទ្រឹស្តីបទអាំងតេក្រាល Lebasque 86
៤.៧.ទ្រឹស្តីបទអាំងតេក្រាល Lebasque លើភាពរួមទាល់ 87
៤.៨.ទំនាក់ទំនងអាំងតេក្រាល Lebasque និងអាំងតេក្រាល Riemann..87
៤.៩. ពង្រីកការសិក្សាទៅក្នុងសំណុំកុំផ្លិច 88
៤.១០. លំហាត់ និងដំណោះស្រាយ 89
៤.១១. លំហាត់អនុវត្តន៍ 102
មេរៀនទី៥៖ អាំងតេក្រាលឡឺបេសលើសំណុំមិនទាល់ 105
៥.១.អាំងតេក្រាលឡឺបេសអនុគមន៍មិនអវិជ្ជមាន មិនទាល់ 105

៥.២.អាំងតេក្រាល Lebasque អនុគមន៍មិនទាល់ 105
៥.៣.ទ្រឹស្តីបទ 105
៥.៤. ទ្រឹស្តីបទផ្ទៀងផ្ទាត់រួមឡឺបេស 106
៥.៥.ផ្ទៀងផ្ទាត់ទ្រឹស្តីបទសម្រាប់ស៊េរីរួមមិនកំណត់ 107
៥.៦.ទ្រឹស្តីបទ Fatou 107
៥.៧.ទ្រឹស្តីបទម៉ូណូតូនរួម 108
៥.៨.ការប៉ានស្មានអាំងតេក្រាលដោយអនុគមន៍ជាប់ 108
៥.៩.អាំងតេក្រាលើសំណុំមិនទាល់ 108
៥.១០. ការប្រៀបធៀបជាមួយអាំងតេក្រាលរីម៉ាន់សម្រាប់សំណុំមិនទាល់ 109
៥.១១. ការដោះស្រាយលំហាត់ 109
មេរៀនទី៦៖ អាំងតេក្រាល និងឌីផេរ៉ង់ស្យែល 124
៦.១. អាំងតេក្រាលមិនកំណត់ 124
៦.២. អនុគមន៍ម៉ូណូតូន 124
៦.៣. អនុគមន៍ដោយបម្រែបម្រួលកំណត់ 125
៦.៤. ដេរីវេដោយអនុគមន៍ 126
៦.៥. ភាពជាប់ដាច់ខាត 127
៦.៦. ទ្រឹស្តីបទមួយចំនួនទៅលើអាំងតេក្រាលឡឺបេសមិនកំណត់ 127
៦.៧. អាំងតេក្រាលដោយផ្នែក 128
៦.៨. ការប្តូរអថេរ 128
៦.៩.ដោះស្រាយលំហាត់ 128
មេរៀនទី៧៖ ភាពរួមមធ្យម 146
៧.១. លំហ L^p 146
៧.២. លំហ Hilbert 146
៧.៣. វិសមភាពសំខាន់ៗ 146

៧.៤. លំហ L^p ជាលំហាមេទ្រិក 146
៧.៥. ទ្រឹស្តីបទពាក់ព័ន្ធនឹងអនុគមន៍ក្នុងលំហ L^p 147
៧.៦. ភាពរួមមធ្យម 147
៧.៧. ស្វ៊ីតកូស៊ីក្នុងលំហ L^p 148
៧.៨. ភាពពេញនៃ L^p និងទ្រឹស្តីបទ Riesz-Fischer 148
៧.៩. ភាពរួមក្នុងរង្វាស់ 148
៧.១០.លំហាត់និងដំណោះស្រាយ 149
៧.១១.លំហាត់អនុវត្តន៍ 154
ឯកសារពិគ្រោះ 156
សន្ទានុក្រម 156

អារម្ភកថា

សៀវភៅ គណិតវិភាគទូទៅ៣ នេះមានខ្លឹមសារសំខាន់ៗដូចខាងក្រោម៖

១. មូលដ្ឋានគ្រឹះសំខាន់ៗ

២. ទ្រឹស្តីរង្វាស់

៣. អនុគមន៍វាស់បាន

៤. អាំងតេក្រាលLebasqueលើសំណុំទាល់

៥. អាំងតេក្រាលLebasqueលើសំណុំមិនទាល់

៦. អាំងតេក្រាល និងឌីផេរ៉ង់ស្យែល

៧. ភាពរួមមធ្យម

ដើម្បីឱ្យការសិក្សារទទួលបានលទ្ធផលពេញលេញ និស្សិតត្រូវសិក្សាលើឧទាហរណ៍បន្ថែមទៀតពីប្រភពផ្សេងៗអនុវត្តន៍ចំណេះដឹងទៅមុខវិជ្ជាដទៃទៀត និងធ្វើលំហាត់ដែលមានក្នុងសៀវភៅនេះនិងក្នុងឯកសារផ្សេងទៀតជាប្រចាំ។

ខ្ញុំបាទសង្ឃឹមថា មិត្តអ្នកអានពិតជានឹងផ្តល់រាល់ការរិះគន់ស្ថាបនា និងជួយកែលម្អសៀវភៅនេះឱ្យកាន់តែប្រសើរឡើង។

សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ

ជាការពិតសៀវភៅ «គណិតវិភាគទូទៅ ៣ » ដែលលេចចេញជារូបរាងនៅពេលនេះគឺបានកើតឡើងពីការខិតខំ និងយកចិត្តទុកដាក់ចូលរួមពីភាគី និងស្ថាប័នពាក់ព័ន្ធជាច្រើន។

ខ្ញុំបាទសូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅបំផុតដល់ភាគី និងស្ថាប័នពាក់ព័ន្ធទាំងអស់ដូចជា ៖

- ក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ ដែលបានគាំទ្រយ៉ាងពេញទំហឹងដល់ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាឱ្យបង្កើតមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ហៅកាត់ថា «មូលនិធិ ស.គ.ន»។

- ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាដែលបានបង្កើតមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ដែលហៅកាត់ថា «មូលនិធិ ស.គ.ន» ដើម្បីរួមចំណែកលើកកម្ពស់វប្បធម៌នៃការស្រាវជ្រាវ បំផុសគំនិតច្នៃប្រឌិត និងជំរុញការធ្វើនវានុវត្ត ដើម្បីជាប្រយោជន៍ដល់វិស័យអប់រំ យុវជន និងកីឡា ដែលឆ្លើយតបទៅនឹងទីផ្សារពលកម្ម និងសាកលភាវូបនីយកម្ម។

- មូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ដែលបានគាំទ្រដល់ការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា (Text book) ដែលនឹងត្រូវប្រើប្រាស់នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា ដើម្បីបង្កើនបរិមាណ លើកកម្ពស់គុណភាព និងពង្រីកសមធម៌នៃធនធានសិក្សាជាខេមរភាសាជូនដល់និស្សិតដែលកំពុងបន្តការសិក្សា និងត្រៀមខ្លួនធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។

- ឯកឧត្តមវិទ្យាស្ថានគរុកោសល្យបាត់ដំបងដែលបានចាត់តាំងជាគណៈកម្មការនិពន្ធចូលរួមការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សានេះ។

- នាយកដ្ឋានបណ្តុះបណ្តាលដែលបានចាត់តាំងជាគណៈកម្មការនិពន្ធ និងគណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យ លើស្នាដៃនៃការចូលរួមការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សានេះ។

- លោកប្រធាន នាយកដ្ឋានបណ្តុះបណ្តាលដែលព្រមព្រៀងទទួលសិទ្ធិជាតំណាងអ្នករៀបរៀងក្នុងការចាត់ចែង និងសម្របសម្រួលជាមួយក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ចុះហត្ថលេខាលើកិច្ចព្រមព្រៀង និងកិច្ចដំណើការទូទាត់ថវិកាតាមរយៈការស្នើសុំ និងទទួលថវិកា បោះពុម្ព និងផ្សព្វផ្សាយបន្តនូវស្នាដៃរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អរបស់អ្នករៀបរៀងក្នុងការរៀន និងបង្រៀនក្នុងគ្រឹះស្ថានសិក្សា និងប្រគល់សិទ្ធិស្របតាមការកំណត់នៃកិច្ចព្រមព្រៀង ស្តីពីការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា ក្រោមការគាំទ្រនៃមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍។

- គ្រូឧទ្ទេសមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យានៃវិទ្យាស្ថានគរុកោសល្យបាត់ដំបងដែលបានផ្តល់មតិកែលម្អលើខ្លឹមសារ នៃមេរៀននីមួយៗឱ្យកាន់តែមានភាពសុក្រឹត និងមានលក្ខណៈវិទ្យាសាស្ត្រ។

ខ្ញុំបាទសង្ឃឹមថា សៀវភៅនេះនឹងឆ្លើយតបជាបន្ទាន់ចំពោះការខ្វះខាតធនធានសិក្សា ដែលជាតម្រូវការសិក្សារបស់សិស្ស និស្សិត នៅកម្រិតវិទ្យាល័យ និងឧត្តមសិក្សា។

ការបរិយាយលើមុខវិជ្ជា

ការសិក្សាលម្អិតលើកម្មវិធីដែលអាចឱ្យអ្នកសិក្សាចេះប្រើប្រាស់បានដូចជា៖ មេរៀន ឧទាហរណ៍ លំហាត់អនុវត្តន៍ និងលំហាត់ស្រាវជ្រាវរួមមានវិធីផ្សេងក្នុងការដោះស្រាយដោយវិភាគ ការគិតត្រិះរិះពិចារណា ជាដើម។ មុខវិជ្ជាគណិតវិភាគទូទៅ៣ផ្តោតសំខាន់ទៅលើមូលដ្ឋានគ្រឹះសំខាន់ៗបន្ថែមទៀតនៃវិភាគទូទៅដែលមានមាតិកាសំខាន់ៗរួមមាន៖ គំនិតមូលដ្ឋាន ទ្រឹស្តីវង្វាស់ អនុគមន៍វាស់បាន អាំងតេក្រាលឡឺបេសលើសំណុំទាល់ អាំងតេក្រាលឡឺបេសលើសំណុំមិនទាល់ អាំងតេក្រាលនិងឌីផេរ៉ង់ស្យែល និងភាពរួមមធ្យម។

ខ្លឹមសារមេរៀនដែលបានលើកឡើងក្នុងសៀវភៅនេះអាចជួយដោះស្រាយបញ្ហាក្នុងការបង្រៀន និងរៀនណិតវិទ្យាដែលបង្កលក្ខណៈងាយស្រួលដល់គ្រូឧទ្ទេស គ្រូបង្រៀន គរុនិស្សិត គរុសិស្ស សិស្សានុសិស្សអាចអនុវត្តន៍ និងស្រាវជ្រាវសម្រាប់សាធារណៈជនទូទៅ។ ជាមូលដ្ឋានគ្រឹះសម្រាប់ហ្វឹក ហាត់ គរុនិស្សិត សិស្សសិក្សានូវរាល់ខ្លឹមសារស្របតាមកម្មវិធីដែលធ្វើឱ្យមេរៀននីមួយៗមានទំនាក់ទំនងគ្នាពីមួយចំណុចទៅមួយចំណុច។

មូលន័យសង្ខេប

សៀវភៅនេះផ្តោតសំខាន់ទៅការវិភាគដែលមានមេរៀនសង្ខេប និយមន័យ ទ្រឹស្តីបទ ឧទាហរណ៍ លំហាត់អនុវត្តន៍ជាដើមព្រមទាំងមានទំនាក់ទំនងនៃមេរៀននីមួយៗ។ នៅក្នុងមេរៀនគំនិតមូលដ្ឋាន ទ្រឹស្តីរង្វាស់ អនុគមន៍វាស់បាន អាំងតេក្រាលឡឺបេសលើសំណុំទាល់ អាំងតេក្រាលឡឺបេសលើសំណុំមិនទាល់ អាំងតេក្រាលនិងឌីផេរ៉ង់ស្យែល និងភាពរួមមធ្យមក្នុងគោលបំណងដើម្បីឱ្យគរុនិស្សិតទទួលបានចំណេះដឹងអំពីមូលដ្ឋានគ្រឹះស្តីពីទ្រឹស្តីរង្វាស់ សំខាន់ៗ រង្វាស់ក្រៅ រង្វាស់ក្នុង សំណុំវាស់បាន អនុគមន៍វាស់បាន អាំងតេក្រាលឡឺបេសយល់ពីពីការអនុវត្ត៍សំណុំវាស់បាន និងអាំងតេក្រាលនៃសំណុំវាស់បានក្នុងប្រូបាន ភាពខុសគ្នានៃអាំងតេក្រាលរីម៉ាន់និងអាំងតេក្រាលឡឺបេស អាំងតេក្រាលនិងឌីផេរ៉ង់ស្យែល និងភាពរួមមធ្យមជាដើម។ នៅផ្នែកនៃមេរៀនការដោះស្រាយបញ្ហាដែលទាក់ទងនឹងអាំងតេក្រាលរីម៉ាន់ និងអាំងតេក្រាលឡឺបេសខាងលើ ដើម្បីបណ្តុះគំនិតគរុនិស្សិតឱ្យប្រើប្រាស់ទ្រឹស្តីរង្វាស់ សម្រាប់ការបង្រៀន និងដើម្បីដោះស្រាយបញ្ហាដែលទាក់ទងនឹងជីវភាពប្រចាំថ្ងៃបានត្រឹមត្រូវ។

មេរៀនទី១៖ មូលដ្ឋានសំខាន់ៗ

១.១.សំណុំ និងអនុគមន៍

១.១.១. សំណុំ

សំណុំជាទូទៅគេកំណត់សរសេរដោយអក្សរពុម្ព៖ $A,B,C,D,...,S,T,...$ ។ គ្រួសារនៃសំណុំគឺជាសំណុំដែលជាតុរបស់វាគឺជាសំណុំ។ គេកំណត់សរសេរវាដោយអក្សរធ្លាក់(ក្បាច់ $\mathscr{A},,\mathscr{B},\mathscr{C},\mathscr{D},...,\mathscr{F},\mathscr{P},...$ ។ ម្យ៉ាងទៀតធាតុនៃសំណុំគេកំណត់តាងដោយអក្សរដៃ(តូច) $a,b,c,d,...,s,t...$ ។

និម្មិតសញ្ញា៖

- $\forall$ មានន័យថា″គ្រប់″ (For all, for every)
- $\exists$ មានន័យថា″មាន″ (There exists)
- $\Rightarrow$ មានន័យថា″នាំឱ្យ″ (Implies that, Implies)
- $\Leftrightarrow$ មានន័យថា″សមមូល″ (iff, or if and only if)
- $\subset$ មានន័យថា″នៅក្នុង″ (Contain in)
- $\supset$ មានន័យថា″ផ្ទុក″ (Contain)
- $\varnothing$ មានន័យថា″សំណុំទទេ″ (Empty set)

យើងសរសេរ $x \in X$ បើ x ជាធាតុមួយនៃ X ម្យ៉ាងទៀត $x \notin X$ ។ បើ Y ជាសំណុំរងនៃ X នោះគឺបើ $x \in Y$ នោះគេបាន $x \in X$ ដែលគេកំណត់សរសេរដោយ $Y \subseteq X$ ។

បើ $Y \subseteq X \;\&\; X \subseteq Y \Rightarrow X = Y$

បើ $Y \subseteq X \;\&\; Y \neq X$ នោះ Y ជាសំណុំរងផ្ទាល់នៃ X ។

គេសង្កេតឃើញថា $\varnothing \subseteq X$ ជាសំណុំនៅក្នុងគ្រប់សំណុំទាំងអស់នៃ X ។

គេឱ្យពីរសំណុំ X និង Y យើងអាចឱ្យជាទម្រង់នៃសំណុំថ្មីដូចខាងក្រោម៖

$$X \bigcup Y = \{x : x \in X \;\; or \;\; x \in Y\}$$

$$X \bigcap Y = \{x : x \in X \;\; and \; x \in Y\}$$

$X \bigcup Y$ និង $X \bigcap Y$ គឺជាប្រជុំ និងប្រសព្វរៀងគ្នានៃសំណុំ X និង Y ។ បើ $\{X_\alpha\}$ គឺជាបណ្តុំនៃសំណុំដែល α ជាសន្ទស្សន៍ចន្លោះនៃសំណុំ Λ គេកំណត់សរសេរដោយ៖

$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \text{ និង } \bigcap_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$$

ចំពោះប្រជុំ និងប្រសព្វរៀងគ្នានៃ X_α ៖

$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha = \{x : x \in X_\alpha \text{ ចំពោះ យ៉ាងហោចណាស់មួយ } \alpha \in \Lambda\}$$

$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha = \{x : x \in X_\alpha \text{ ចំពោះ គ្រប់ } \alpha \in \Lambda\}$$

បើ $\Lambda = \mathbb{N}$ សំណុំនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ កំណត់ដោយនិម្មិតសញ្ញា $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ និង $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ ។

បើមិនមានពីរធាតុនៃ $\{X_\alpha\}$ ដែលមានធាតុផ្សេងរួមគ្នា នោះ $\{X_\alpha\}$ ត្រូវបានគេនិយាយថាជាគួបណ្តុំនៃសំណុំដាច់គ្នា។

ឧទាហរណ៍១៖ គេឱ្យសំណុំ $X_1=(1,8), X_2=(4,14)$ និង $X_3=(7,20)$ ។

គណនាសំណុំ $\bigcup_{i=1}^{3} X_i$ និង $\bigcap_{i=1}^{3} X_i$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងគណនាសំណុំ $\bigcup_{i=1}^{3} X_i$ និង $\bigcap_{i=1}^{3} X_i$ ដូចតទៅ៖

$$\bigcup_{i=1}^{3} X_i = X_1 \cup X_2 \cup X_3 = (1,8)\cup(4,14)\cup(7,20)=(1,20)$$

និង $\bigcap_{i=1}^{3} X_i = X_1 \cap X_2 \cap X_3 = (1,8)\cap(4,14)\cap(7,20)=(7,8)$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ គេឱ្យ $A_n=\{1,2,3,...,n\}$ ។ ចូរគណនា $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ និង $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមានដំណោះស្រាយដូចតទៅ៖

យើងបាន

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n\cup A_{n+1}\cup\ldots$$

$$=\{1,2,...,n,n+1,...\}=\mathbb{N}$$

និង $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n\cap A_{n+1}\cap\ldots = A_1 = \{1\}$ ។

ឧទាហរណ៍៣៖ គេឱ្យ $I=\mathbb{N}$ និង $A_i=\left\{x\in\mathbb{R}: 0\le x\le 1-\left(\frac{1}{2}\right)^i\right\}$ ។

បើ $Y\subseteq X$ ជាបំពេញនៃ Y នៅក្នុង X គឺជាសំណុំនៃធាតុដែលនៅក្នុង X ប៉ុន្តែមិនមាននៅក្នុង Y កំណត់ដោយ៖ $X\setminus Y=\{x: x\in X, x\notin Y\}$ ។

បំពេញនៃ Y កំណត់ដោយ Y^c ។

បើ $\{X_\alpha\}$ ជាបណ្តុំនៃសំណុំរង X នោះច្បាប់**De Morgan**កំណត់ដោយ៖

$$\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in\Lambda}(X_\alpha)^c \text{ និង } \left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in\Lambda}(X_\alpha)^c$$

១.១.២. លំហតូប៉ូ

និយមន័យ១៖ តូប៉ូ

គេមានសំណុំ E មួយ។ $\mathcal{T}$ ជាសំណុំមួយនៃផ្នែកនៃ E គេថា $\mathcal{T}$ ជាតូប៉ូមួយនៅលើ E កាលណាវាផ្ទៀងផ្ទាត់ស្វ័យសត្យទាំងបីខាងក្រោម៖

1. $\varnothing \in \mathcal{T}, E \in \mathcal{T}$
2. ចំពោះគ្រប់គ្រួសារ $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ នៃជាតុនៃ $\mathcal{T}, \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i \in \mathcal{T}$
3. គ្រប់ $U \in \mathcal{T}, V \in \mathcal{T}, U \cap V \in \mathcal{T}$ ។

ជាតុនៃ $\mathcal{T}$ ហៅថាសំណុំបើកនៃ E សម្រាប់តូប៉ូ $\mathcal{T}$ ។ គេថា $(E,\mathcal{T})$ ជាលំហតូប៉ូមួយ។

- $\mathcal{T} = \{\varnothing, E\}$ ហៅថា Topologies Grossiere
- $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$ ហៅថា Discrete Topologies

ឧទាហរណ៍ទី៤៖ គេឱ្យ $E = \{a,b,c,d,e\}$ ។ តើ $\mathcal{T}_1 = \{E, \varnothing, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}\}$ និង $\mathcal{T}_2 = \{E, \varnothing, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$ ជាតូប៉ូមួយលើ E ដែរឬទេ?

ដំណោះស្រាយ

- ចំពោះ $\mathcal{T}_1$

យើងមាន $E = \{a,b,c,d,e\}$ និង $\mathcal{T}_1 = \{E, \varnothing, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}\}$

- $E \in \mathcal{T}_1$ និង $\varnothing \in \mathcal{T}_1$ (ផ្ទៀងផ្ទាត់ស្វ័យសត្យទី1)
- $U = \{a\}$ និង $V = \{a,c,d\}$ នោះ $U \cup V = \{a,b,c,d\} \notin \mathcal{T}_1$ (មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ស្វ័យសត្យទី3)

ដូចនេះ $\mathcal{T}_1$ មិនមែនជាតូប៉ូមួយលើ E នោះទេ។

- ចំពោះ $\mathcal{T}_2$

យើងមាន $E = \{a,b,c,d,e\}$ និង $\mathcal{T}_2 = \{E, \varnothing, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$

- $E \in \mathcal{T}_1$ និង $\varnothing \in \mathcal{T}_1$ (ផ្ទៀងផ្ទាត់ស្វ័យសត្យទី1)
- $E \cup \varnothing \cup \{a\} \cup \{c,d\} \cup \{a,c,d\} \cup \{b,c,d,e\} = E \in \mathcal{T}_2$ (ផ្ទៀងផ្ទាត់ស្វ័យសត្យទី2)
- តារាងប្រជុំគ្រប់ជាតុនៃ $\mathcal{T}_2$

$\cup$	E	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{c,d\}$	$\{a,c,d\}$	$\{b,c,d,e\}$
E	$E \in \mathcal{T}_2$	$E \in \mathcal{T}_2$	$E \in \mathcal{T}_2$	$E \in \mathcal{T}_2$	$E \in \mathcal{T}_2$	$E \in \mathcal{T}_2$
$\varnothing$	$E \in \mathcal{T}_2$	$\varnothing \in \mathcal{T}_2$	$\{a\} \in \mathcal{T}_2$	$\{c,d\} \in \mathcal{T}_2$	$\{a,c,d\} \in \mathcal{T}_2$	$\{b,c,d,e\} \in \mathcal{T}_2$
$\{a\}$	$E \in \mathcal{T}_2$	$\{a\} \in \mathcal{T}_2$	$\{a\} \in \mathcal{T}_2$	$\{a,c,d\} \in \mathcal{T}_2$	$\{a,c,d\} \in \mathcal{T}_2$	$E \in \mathcal{T}_2$
$\{c,d\}$	$E \in \mathcal{T}_2$	$\{c,d\} \in \mathcal{T}_2$	$\{a,c,d\} \in \mathcal{T}_2$	$\{c,d\} \in \mathcal{T}_2$	$\{a,c,d\} \in \mathcal{T}_2$	$\{b,c,d,e\} \in \mathcal{T}_2$
$\{a,c,d\}$	$E \in \mathcal{T}_2$	$\{a,c,d\} \in \mathcal{T}_2$	$\{a,c,d\} \in \mathcal{T}_2$	$\{a,c,d\} \in \mathcal{T}_2$	$\{a,c,d\} \in \mathcal{T}_2$	$E \in \mathcal{T}_2$
$\{b,c,d,e\}$	$E \in \mathcal{T}_2$	$\{b,c,d,e\} \in \mathcal{T}_2$	$E \in \mathcal{T}_2$	$\{b,c,d,e\} \in \mathcal{T}_2$	$E \in \mathcal{T}_2$	$\{b,c,d,e\} \in \mathcal{T}_2$

តាមតារាង បញ្ជាក់ថាគ្រប់ជាតុនៃ $\mathcal{T}_2$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ស្វ័យសត្យទី3

ដូច្នេះ $\mathcal{T}_2$ ជាតូប៉ូមួយលើ E ។

ឧទាហរណ៍ទី៥៖ គេឱ្យសំណុំ $E=\{x,y,z\}$ ។ ចូររក $P(X)$ សំណុំនៃសំណុំរងទាំងអស់នៃ E រួចរកឱ្យបាន $\mathcal{T}_i$ ចំនួនប្រាំយ៉ាងតិច ដែល $\mathcal{T}_i$ ជាតូប៉ូលើ E ។

ដំណោះស្រាយ

- រក $P(X)$ សំណុំនៃសំណុំរងទាំងអស់នៃ E

យើងមាន សំណុំ $E=\{x,y,z\}$ មានធាតុចំនួន 3 នោះ $P(X)$ មានធាតុសរុប $2^3=8$

គេបាន $P(X)=\{\varnothing,\{x\},\{y\},\{z\},\{x,y\},\{x,z\},\{y,z\},E\}$ ។

ដូចនេះ សំណុំនៃសំណុំរងទាំងអស់នៃ E គឺ $P(X)=\{\varnothing,\{x\},\{y\},\{z\},\{x,y\},\{x,z\},\{y,z\},E\}$ ។

- រក $\mathcal{T}_i$ ដែលជាតូប៉ូលើ E ឱ្យបានយ៉ាងតិចចំនួន ៥

យើងដឹងថា គ្រប់ $\mathcal{T}_i$ មានផ្ទុក $\varnothing\in\mathcal{T}_i$ និង $E\in\mathcal{T}_1$

គេបាន $\mathcal{T}_1=\{\varnothing,E\},\mathcal{T}_2=\{\varnothing,\{x\},E\},\mathcal{T}_3=\{\varnothing,\{y\},E\},\mathcal{T}_4=\{\varnothing,\{z\},E\}$

$\mathcal{T}_5=\{\varnothing,\{x\},\{y\},\{z\},E\}$

ដូចនេះ

$$\boxed{\mathcal{T}_1=\{\varnothing,E\},\mathcal{T}_2=\{\varnothing,\{x\},E\},\mathcal{T}_3=\{\varnothing,\{y\},E\},\mathcal{T}_4=\{\varnothing,\{z\},E\},\mathcal{T}_5=\{\varnothing,\{x\},\{y\},\{z\},E\}}$$

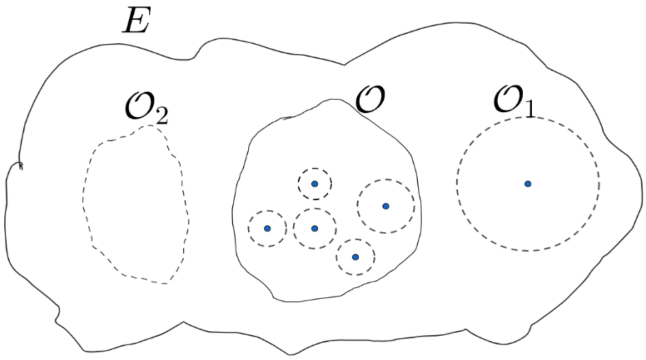
១.១.៣. សំណុំបើក

និយមន័យ២៖ សំណុំបើក

បើ (E,d) ជាលំហាមេទ្រិក។ $(\mathcal{O}\subset E)$ ជាសំណុំបើកមួយលុះត្រាតែ $\forall x\in\mathcal{O},\exists r>0$ ដែល $B(x,r)\subset\mathcal{O}$ ។

លក្ខណៈសំណុំបើក

- ចំពោះគ្រប់គ្រួសារ $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ នៃសំណុំបើកនៃ E នោះ $\bigcup_{i\in I}\mathcal{O}_i$ ក៏ជាសំណុំបើកដែរ។
- បើ $\mathcal{O}_1$ និង $\mathcal{O}_2$ ជាសំណុំបើកនោះ $\mathcal{O}_1\cap\mathcal{O}_2$ ក៏ជាសំណុំបើក។



រូបភាពទី១

ឧទាហរណ៍ទី៦៖ នៅក្នុង $\mathbb{R}$ តើចន្លោះ $(1,6)$ ជាសំណុំបើកដែរឬទេ ?

ដំណោះស្រាយ

បើនៅក្នុង $\mathbb{R}$ ចន្លោះ $(1,6)$ ជាសំណុំបើក នោះគេនឹងរកបាន $\forall x\in(1,6),\exists r>0$ ដែល

$B(x,r)\subset(1,6)$ យក $x=3\in(1,6)$ និង $r=0.5$ នោះ $B(3,0.5)=(2.5,3.5)\in(1,6)$
យក $x=2\in(1,6)$ និង $r=0.001$ នោះ $B(2,0.0001)=(1.9999,2.0001)\in(1,6)$
នោះបញ្ជាក់ថា ចន្លោះ $(1,6)$ ជាសំណុំបើក ក្នុង $\mathbb{R}$ ។

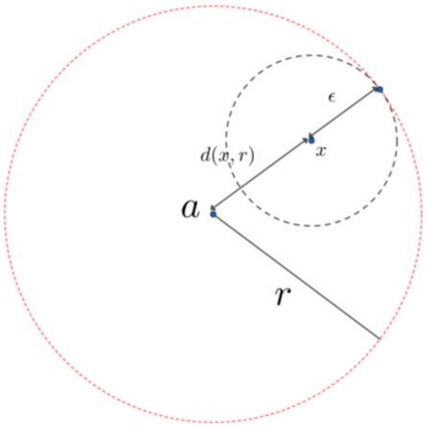
ឧទាហរណ៍ទី៧៖ បង្ហាញថាប៊ូល $B(a,r)$ ដែលមានផ្ចិត $a\in\mathbb{R}^n$ និងកាំ $r>0$ ជាសំណុំបើកក្នុង $\mathbb{R}^n$
ដូច្នេះ យើងនឹងហៅវាថាជា ប៊ូលបើក (Open ball) ហើយចន្លោះបើកក្នុង $\mathbb{R}$ ជាសំណុំបើក។

សម្រាយបញ្ជាក់

ចំពោះគ្រប់ $x\in B(a,r)$ នោះ $d(x,a)<r$
ដូច្នេះបើយើងយក $\varepsilon=r-d(x,a)$ យើងនឹងបាន
$B(x,\varepsilon)\subset B(a,r)$
ព្រោះ បើ $y\in B(x,\varepsilon)$ នោះ $d(y,x)<\varepsilon$ ។
តាមវិសមភាពត្រីកោណ

$$d(y,a)\le d(y,x)+d(x,a)$$
$$d(y,a)<\varepsilon+d(x,a)$$
$$d(y,a)\le r \quad \text{ព្រោះ } \varepsilon=r-d(x,a)$$

ដូច្នេះ $y\in B(a,r)$ ដែលនាំឱ្យ $B(x,\varepsilon)\in B(a,r)$
យើងឃើញថា $B(a,r)$ និយមន័យនៃសំណុំបើក
ដូច្នេះវា ជាសំណុំបើក។

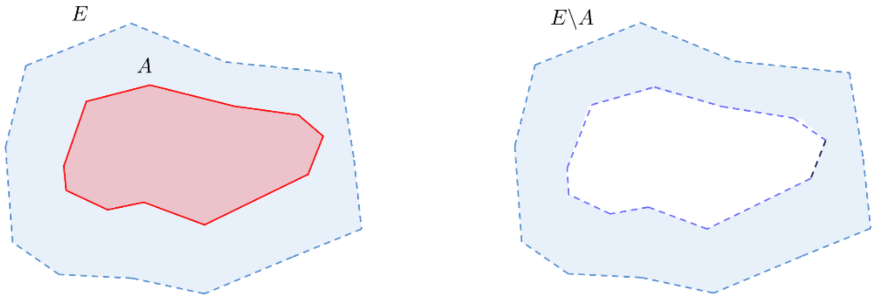


រូបភាពទី២

១.១.៤. សំណុំបិទ

និយមន័យ៣៖ សំណុំបិទ

A សំណុំរងមួយ នៃតូប៉ូ $(E,\mathcal{T})$ ជាសំណុំបិទលុះត្រាតែ សំណុំ $E\setminus A$ ជាសំណុំបើក។[1]



រូបភាពទី៣

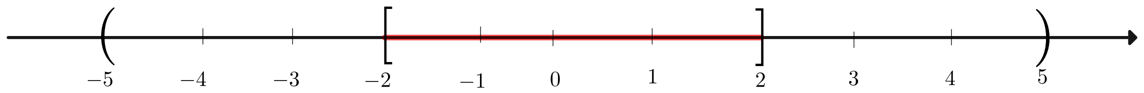
E ជាសំណុំបើក A ជាសំណុំបិទ $E\setminus A$ ជាសំណុំបើក

ចំណាំ

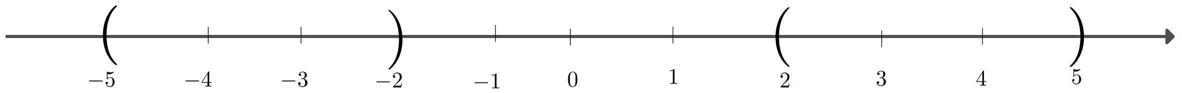
- $E\setminus\mathcal{O}$ អានថា បំពេញនៃ $\mathcal{O}$ ក្នុង E ។
- បំពេញនៃសំណុំបើកហៅថាសំណុំបិទនៃ E នៃតូប៉ូនៃ $\mathcal{T}$ ។
- $f:]0,1[\to\mathbb{R}$, អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះ $]0,1[=\mathcal{D}_f, 0\notin\mathcal{D}_f, 1\notin\mathcal{D}_f$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៨៖ ក្នុង $\mathbb{R}$ នៅលើបន្ទាត់ចំនួនពិតសំណុំបើក $E=(-5,5)$ និង សំណុំ $A=[-2,2]$ ។

[1] Introduction to Topology Pure and Applied, Colin Adams, Robert Franzosa, Page 56



បន្ទាត់ចំនួនក្នុង ℝ បង្ហាញពី $E=(-5,5)$ និង $A=[-2,2]$



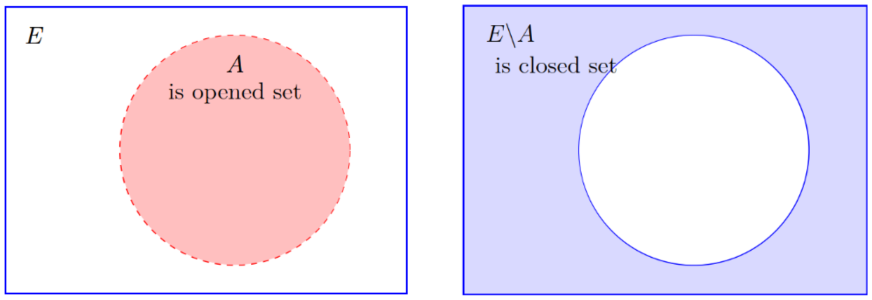
បន្ទាត់ចំនួនក្នុង ℝ បង្ហាញពី $E\setminus A$

គេបាន $E\setminus A=(-5,-2)\cup(2,5)$ ជាសំណុំបើក នោះ $A=[-2,2]$ ជាសំណុំបិទ។

លក្ខណៈ:[2]

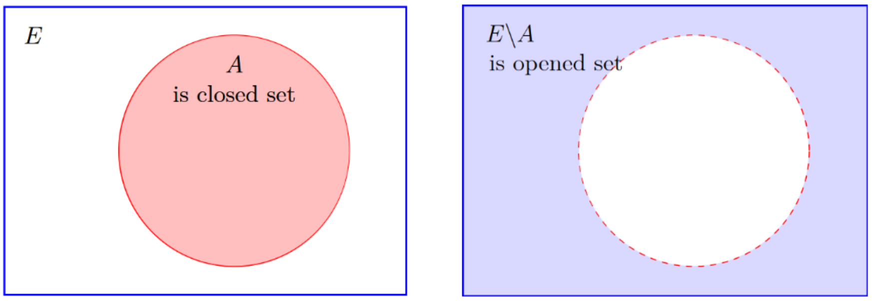
គេមាន $(E,\mathcal{T})$ ជាលំហតូប៉ូមួយ និង $A\subset E$ ។

- បើ A ជាសំណុំបើក $E\setminus A$ ជាសំណុំបិទ។



រូបភាពទី៤

- បើ A ជាសំណុំបិទ $E\setminus A$ ជាសំណុំបើក។



រូបភាពទី៥

---

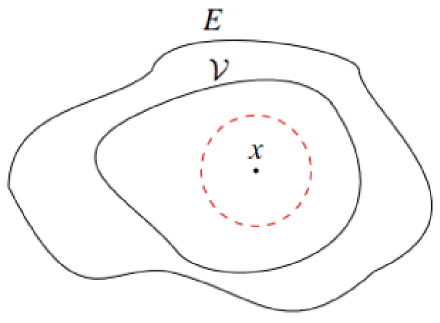
[2] Introduction to Topology Pure and Applied, Colin Adams, Robert Franzosa, Page 58

១.១.៥. វ័រស៊ីណា (Voisinage)

និយមន័យ៤៖ វ័រស៊ីណា (Voisinage)

គេមាន $(E,\mathcal{T})$ ជាលំហតូប៉ូ $x \in E$ និង $V \subset E$ ។ គេថា V ជាវ័រស៊ីណាមួយនៃ x លុះត្រាតែមានសំណុំបើ $\mathcal{O} \in \mathcal{T}$ ដែល $x \in \mathcal{O}$ និង $\mathcal{O} \subset V$ ។ គេតាង $v(x)$ ជាសំណុំ វ័រស៊ីណានៃ x ។

ចំណាំ៖ $\mathcal{O}$ គឺជាសំណុំបើក។

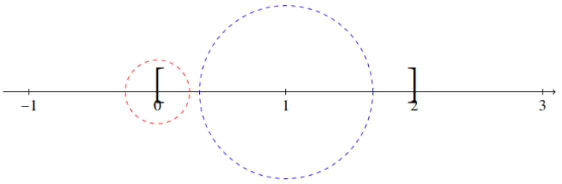


រូបភាពទី៦

ឧទាហរណ៍ទី៩៖ ក្នុង $\mathbb{R}$ តើ $[0,2]$ ជាវ័រស៊ីណានៃ 0 ឬទេ? ជាវ័រស៊ីណានៃ1ឬទេ?

ដំណោះស្រាយ

ពិនិត្យមើលបន្ទាត់ចំនួនខាងក្រោម៖



តាមបន្ទាត់ចំនួនខាងលើគេមិនអាចរកសំណុំបើក ដែលផ្ទុក 0 ក្នុង $[0,2]$ នោះទេ គេអាចរកបានសំណុំបើកមួយយ៉ាងតិចក្នុង $[0,2]$ ដែលផ្ទុក 1 នោះគេថា $[0,2]$ មិនមែនជាវ័រស៊ីណានៃ 0 តែជាវ័រស៊ីណានៃ1 ។

ឧទាហរណ៍ទី១០៖ គេឱ្យសំណុំ $\mathcal{V} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3\}$ ។ បង្ហាញថា $\mathcal{V}$ គឺជាវ័រស៊ីណានៃចំណុច $x = 2$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\mathcal{V}$ គឺជាវ័រស៊ីណានៃចំណុច $x = 2$

យើងមាន $\mathcal{V} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3\}$ និងចំណុច $x = 2$

$\mathcal{V}$ ជាវ័រស៊ីណានៃ $x = 2$ លុះត្រាតែ មានសំណុំបើក $\mathcal{O} \in \mathcal{T}$ ដែល $x \in \mathcal{O}$ និង $\mathcal{O} \subset \mathcal{V}$

- យក $\mathcal{O}_1 = (1.5, 2.5)$ នោះយើងបាន $x = 2 \in \mathcal{O}_1$ និង $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{V}$ (ផ្ទៀងផ្ទាត់តាមនិយមន័យ)
- យក $\mathcal{O}_2 = (0.5, 2.95)$ នោះយើងបាន $x = 2 \in \mathcal{O}_2$ និង $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{V}$ (ផ្ទៀងផ្ទាត់តាមនិយមន័យ)

ឃើញថា មានសំណុំបើក $\mathcal{O} \in \mathcal{T}$ ដែល $x \in \mathcal{O}$ និង $\mathcal{O} \subset \mathcal{V}$ បញ្ជាក់ថា $\mathcal{V}$ ជាវ័រស៊ីណានៃចំណុច $x = 2$

ដូចនេះ៖ $\mathcal{V} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3\}$ ជាវ័រស៊ីណា នៃចំណុច $x = 2$ ។

១.១.៦. អាត់ដេរ៉ង់

និយមន័យ៥៖ អាត់ដេរ៉ង់ Adherence

គេមាន $(E,\mathcal{T})$ ជាលំហតូប៉ូមួយ។

$A\subset E$ និង $a\in E$ ។

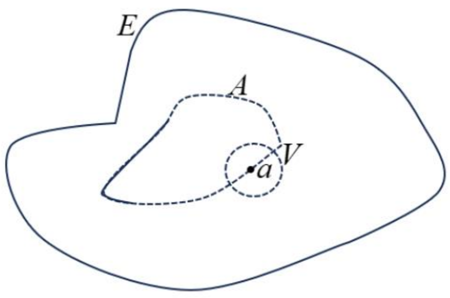
គេថា a ជាចំណុចអាត់ដេរ៉ង់នៃ A លុះត្រាតែ

គ្រប់ $\mathcal{V}\in v(a),\mathcal{V}\cap A\neq\varnothing$ ។

សំណុំនៃគ្រប់ចំណុចអាត់ដេរ៉ង់នៃ A ហៅថា

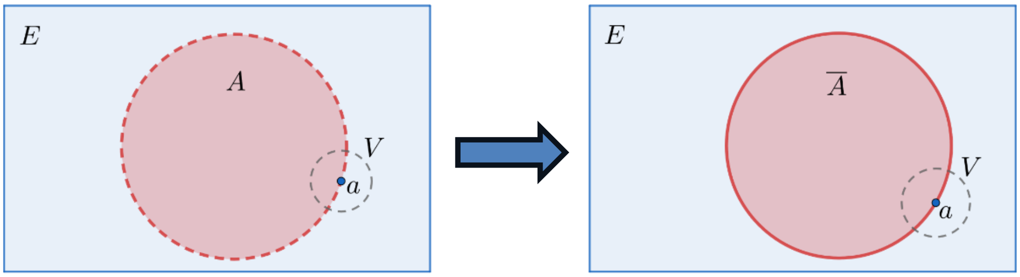
អាត់ដេរ៉ង់នៃ A ដែលតាងដោយ $\overline{A}$ ។

បើ $A\subset B$នោះ $\overline{A}\subset\overline{B}$



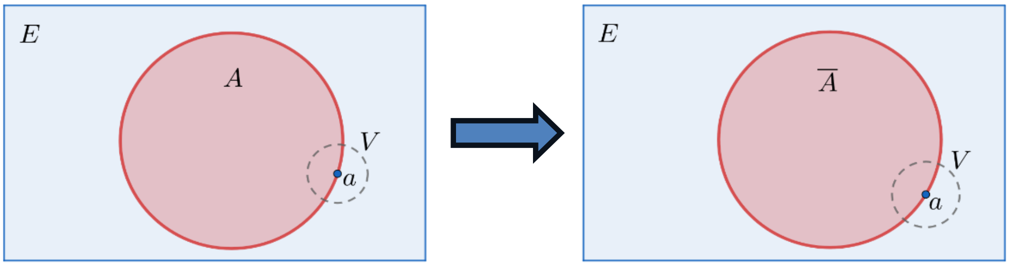
រូបភាពទី៧

+ ករណី A ជាសំណុំបើក



រូបភាពទី៨

+ ករណី A ជាសំណុំបិទ



រូបភាពទី៩

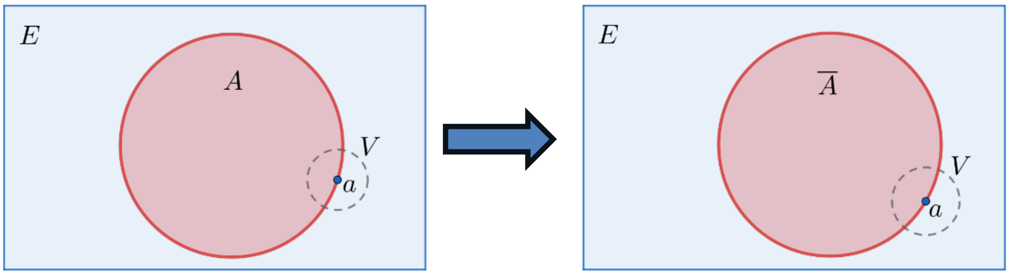
ឧទាហរណ៍ទី១១៖ សំណុំចំនួនសនិទាន $\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q}\right.$ ដែល $\left.p,q\in\mathbb{Z},q\neq 0\right\}$ គេបាន អាត់ដេរ៉ង់នៃចំនួនសនិទាន $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១២៖ ក្នុង $\mathbb{R}$ គេបាន

- អាត់ដេរ៉ង់នៃ $]2,3[$ កំណត់ដោយ $[2,3]$
- អាត់ដេរ៉ង់នៃ $[4,6)$ កំណត់ដោយ $[4,6]$
- អាត់ដេរ៉ង់នៃ $(10,15)$ កំណត់ដោយ $[10,15]$។

លក្ខណៈ

គេមាន $(E,\mathcal{T})$ ជាលំហតូប៉ូមួយ។ គ្រប់ $A\subset E$ គេមាន A ជាសំណុំបិទលុះត្រាតែ $\overline{A}=A$។



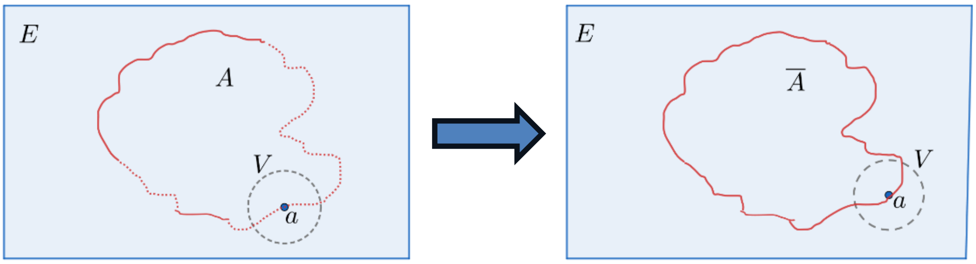
រូបភាពទី១០

ឧទាហរណ៍ទី១៣៖ អាត់ដេរ៉ង់នៃ $B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\right\}$ គឺ
$\overline{B}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\right\}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១៤៖ អាត់ដេរ៉ង់ នៃ $[2,9]$ គឺ $\overline{[2,9]}=[2,9]$ ។

លក្ខណៈ

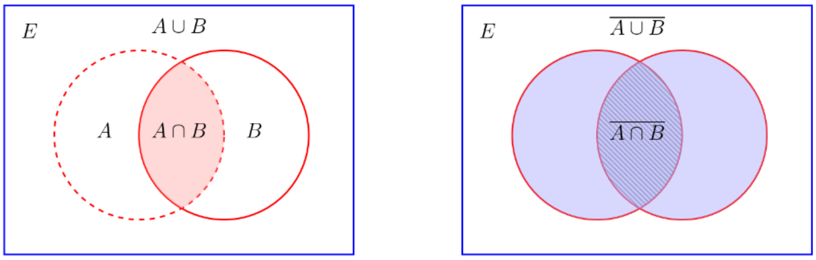
គេមាន $(E,\mathcal{T})$ ជាលំហតូប៉ូមួយ។ $\forall A\subset E,\overline{A}$ គឺជាសំណុំបិទដែលតូចជាងគេផ្ទុក A ។



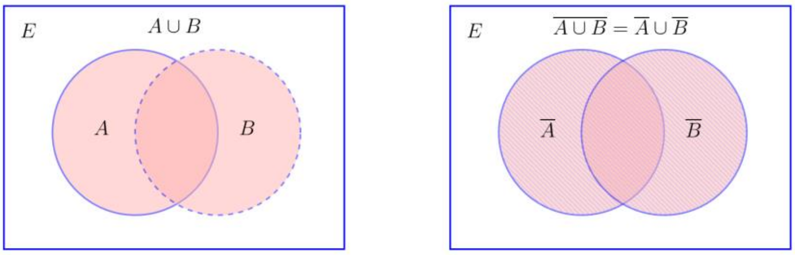
រូបភាពទី១១

លក្ខណៈ: ប្រជុំ និងប្រសព្វ

គេមាន $(E,\mathcal{T})$ លំតូប៉ូមួយ។ $\forall A,B\subset E,\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cup\overline{B},\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ ។



រូបភាពទី១២តំណាង $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}$



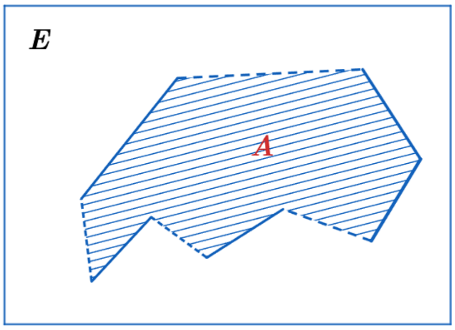
រូបភាពទី១៣តំណាង $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

១.១.៧. ចំណុចក្នុង

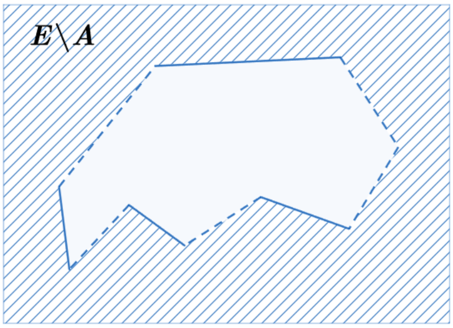
និយមន័យ៦៖ ចំណុចក្នុង

គេមាន $(E,\mathcal{T})$ ជាលំហតូប៉ូមួយ។ គេមាន $A\subset E$ និង $a\in E$ ។ គេថា a ជាចំណុចក្នុងនៃលុះត្រាតែ A ជាវ៉ស៊ីណានៃ a ។ សំណុំដែលផ្ទុកគ្រប់ចំណុចក្នុងនៃ A ហៅថាសំណុំក្នុងនៃ A ដែលតាងដោយ $\overset{o}{A}$ ឬ $\text{int}(A)$ ។

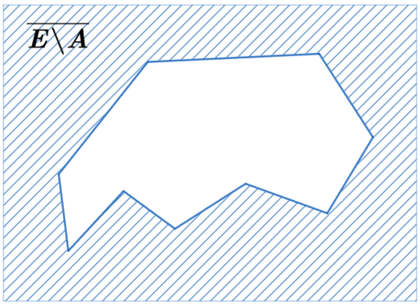
$$\left.\begin{array}{l}\overset{o}{A}\subset A\\ A\subset\overline{A}\end{array}\right|\Rightarrow \overset{o}{A}\subset A\subset\overline{A}$$ ។



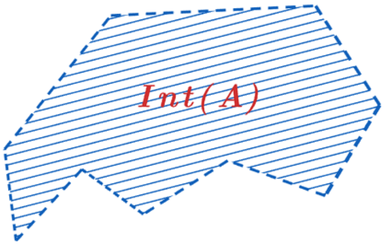
រូបភាពទី១៤តំណាង $A\subset E$



រូបភាពទី១៥តំណាង $E\setminus A$



រូបភាពទី១៦តំណាង $\overline{E\setminus A}$



រូបភាពទី១៧តំណាង $\overset{o}{A}$ ឬ $Int(A)$

តាមរូបខាងលើគេទាញបាន

1. $\left(\overline{E\setminus A}\right)\cap\overset{o}{A}=\varnothing$
2. $\left(\overline{E\setminus A}\right)\cup\overset{o}{A}=E$
3. $E\setminus\left(\overline{E\setminus A}\right)=\overset{o}{A}$
4. មានន័យថា $\overline{E\setminus A}=E\setminus\overset{o}{A}$

កំណត់សម្គាល់ ៖

$E\setminus A$អានថាបំពេញនៃ Aក្នុងE មានន័យថាបើ $x\in A$នោះ $x\notin E\setminus A$នាំឱ្យ $A\cap(E\setminus A)=\varnothing$

លក្ខណៈ

គេមាន $(E,\mathcal{T})$ លំហតូប៉ូមួយ។ គ្រប់ $A\subset E$ គេមាន $\overline{E\setminus A}=E\setminus\overset{o}{A}$ ។ A ជាសំណុំបើកសមមូល និង $A=\overset{o}{A}$ ។ A ជាសំណុំបើក $\Leftrightarrow E\setminus A$ ជាសំណុំបិទ

$$\Leftrightarrow E\setminus A=E\setminus\overset{o}{A}$$

$$\Leftrightarrow E\setminus A=\overline{E\setminus A}$$

$\Leftrightarrow A=\overset{o}{A}$ ($\overset{o}{A}$ អានថាអារ៉ុង)

ចូរសម្រាយបញ្ជាក់ថា $\forall x\in E$ គេបាន $\overline{E\setminus A}=E\setminus\overset{o}{A}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ដើម្បីសម្រាយបញ្ជាក់ថា គេបាន $\overline{E\setminus A}=E\setminus\overset{o}{A}$ គឺត្រូវស្រាយថា (ក). $\overline{E\setminus A}\subset E\setminus\overset{o}{A}$ និង (ខ). $E\setminus\overset{o}{A}\subset\overline{E\setminus A}$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ $x\in E$

(ក). ស្រាយថា $\forall A\subset E$ គេបាន $\overline{E\setminus A}\subset E\setminus\overset{o}{A}$

បើ $x\in\overline{E\setminus A}$ នោះ $\forall V\in v(x), V\cap(E\setminus A)\neq\varnothing$

ដោយ $A\cap(E\setminus A)=\varnothing$

គេទាញបានថា A មិនមែនជាវ៉ស៊ីណានៃ x នាំឱ្យ $x\notin\overset{o}{A}$

បានន័យថា $x\in\overline{E\setminus A}$ នោះ $x\in E\setminus\overset{o}{A}$

ដូចនេះ $\forall A\subset E$ គេបាន $\overline{E\setminus A}\subset E\setminus\overset{o}{A}$ (1)

(ខ). ស្រាយថា $\forall A\subset E$ គេបាន $E\setminus\overset{o}{A}\subset\overline{E\setminus A}$

បើ $x\in E\setminus\overset{o}{A}$ នោះ $x\notin\overset{o}{A}$ មានន័យថា A មិនមែនជាវ៉ស៊ីណា នៃ x

នាំឱ្យ $\forall V\in v(x), V\not\subset A$

បញ្ជាក់ថា $\forall V\in v(x), V\cap(E\setminus A)\neq\varnothing$ មានន័យថា $x\in\overline{E\setminus A}$

គេឃើញថា $x\in E\setminus\overset{o}{A}$ នោះ $x\in\overline{E\setminus A}$

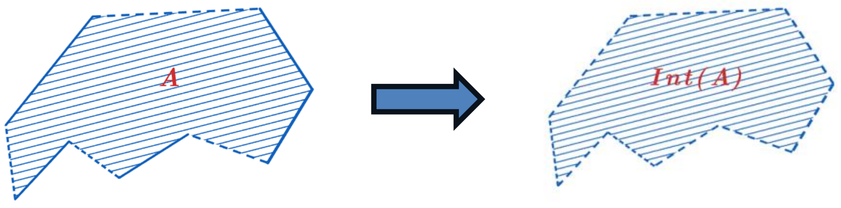
ដូចនេះ $\forall A\subset E$ គេទាញបាន $E\setminus\overset{o}{A}\subset\overline{E\setminus A}$ (2)

តាម (1) និង (2) គេទាញបានថា គ្រប់ $A\subset E$ គេបាន $\overline{E\setminus A}=E\setminus\overset{o}{A}$

ដូចនេះ គ្រប់ $A\subset E$ គេបាន $\overline{E\setminus A}=E\setminus\overset{o}{A}$ ត្រូវបានសម្រាយបញ្ជាក់។

លក្ខណៈ

$\overset{o}{A}$ ឬ $Int(A)$ ជាសំណុំបើក ដែលធំជាងគេនៅក្នុង A ។



រូបភាពទី១៨តំណាងសំណុំ A រូបភាពទី១៩តំណាង $\overset{o}{A}$ ឬ $Int(A)$

ឧទាហរណ៍ទី១៥៖ គេឱ្យ $A=\{x\in\mathbb{R}\mid -3\leq x\leq 3\}$ ។ រកសំណុំក្នុងនៃ A ។

ដំណោះស្រាយ

រកសំណុំក្នុងនៃ A

យើងមាន $A=\{x\in\mathbb{R}\mid -3\le x\le 3\}$ គេបាន $\overset{o}{A}=\{x\in\mathbb{R}\mid -3<x<3\}$

ដូចនេះ សំណុំក្នុងនៃ A គឺ $\overset{0}{A}=\{x\in\mathbb{R}\mid -3<x<3\}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១៦៖ គេឱ្យសំណុំ $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\le 1\}$ ។

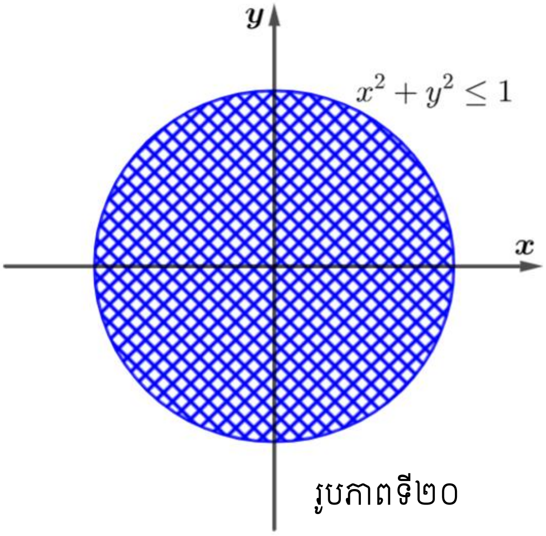
ក. ពន្យល់លក្ខណៈធរណីមាត្ររបស់សំណុំ S ក្នុង $\mathbb{R}^2$ ។

ខ. រកសំណុំក្នុងនៃ S តាងដោយ $Int(S)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ពន្យល់លក្ខណៈធរណីមាត្ររបស់សំណុំ S ក្នុង $\mathbb{R}^2$

យើងមាន $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\le 1\}$ នោះ S ជាប៊ូលបិទឯកតា ដែលមានកាំ $r=1$ និងផ្ចិត $(0,0)$ សំណុំ S គឺគ្រប់ចំណុចក្នុងរង្វង់ ដែលមានផ្ចិត $(0,0)$ កាំ $r=1$ និងគ្រប់ចំណុចលើរង្វង់ (ដូចរូប)

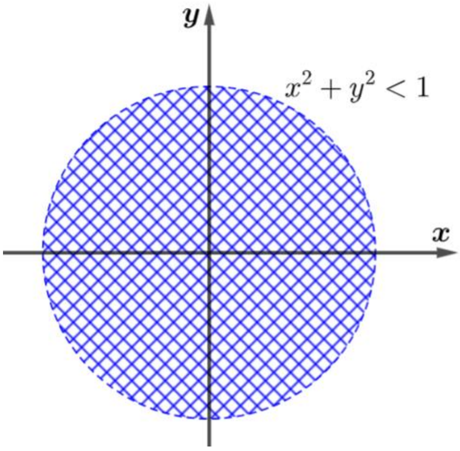


រូបភាពទី២០

ខ. រកសំណុំក្នុងនៃ S តាងដោយ $Int(S)$

ដោយ $Int(S)$ គឺជាសំណុំបើក ធំជាងគេក្នុង S នោះគេបាន

$Int(S)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2<1\}$



រូបភាពទី២១

ដូចនេះ សំណុំក្នុងនៃ S គឺ $Int(S)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$ ។

លក្ខណៈ ប្រជុំ និង ប្រសព្វ

គេមាន $(E,\mathcal{T})$ ជាលំហតូប៉ូមួយ។ $\forall A,B\subset E, \overset{o}{\overline{A\cap B}}=\overset{o}{A}\cap\overset{o}{B}$ និង $\overset{o}{A}\subset\overset{o}{B}\subset\overset{o}{\overline{A\cup B}}$

បើ $A\subset B$ នោះ $\overset{o}{A}\subset\overset{o}{B}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១៧៖ ចូរសម្រាយបញ្ជាក់ថា $\operatorname{int}(A\cap B)=\operatorname{int}(A)\cap\operatorname{int}(B)$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

សម្រាយបញ្ជាក់ថា $\operatorname{int}(A\cap B)=\operatorname{int}(A)\cap\operatorname{int}(B)$

ដើម្បីសម្រាយបញ្ជាក់ថា $\operatorname{int}(A\cap B)=\operatorname{int}(A)\cap\operatorname{int}(B)$ គេត្រូវស្រាយតាមពីរតំណាក់កាល៖

(ក). ស្រាយថា $\operatorname{int}(A\cap B)\subseteq\operatorname{int}(A)\cap\operatorname{int}(B)$

គ្រប់ $x\in\operatorname{int}(A\cap B)$ មានវ៉ស៊ីណាននៃ x គឺ V ដែល $x\in V\subseteq(A\cap B)$

ដោយ $V\subseteq(A\cap B)$ នោះគេបាន $V\subseteq A$ និង $V\subseteq B$

ឃើញថា $x\in V$ និង V គឺជាសំណុំបើក នោះគេបាន $x\in\operatorname{int}(A)$ និង $x\in\operatorname{int}(B)$

ដូចនេះ គេអាចសរសេរបាន $x\in\operatorname{int}(A)\cap\operatorname{int}(B)$ (1)

(ខ). ស្រាយថា $\operatorname{int}(A)\cap\operatorname{int}(B)\subseteq\operatorname{int}(A\cap B)$

គ្រប់ $x\in\operatorname{int}(A)\cap\operatorname{int}(B)$ មានន័យថា $x\in\operatorname{int}(A)$ និង $x\in\operatorname{int}(B)$

មានវ៉ស៊ីណាននៃ x គឺ V_1 និង V_2 ដែល $x\in V_1\subseteq A$ និង $x\in V_2\subseteq B$

ដោយសារតែ V_1 និង V_2 ជាសំណុំបើក គេបាន $V=V_1\cap V_2$ ក៏ជាសំណុំបើក

នោះគេទាញបានថា $x\in V\subseteq A$ និង $x\in V\subseteq B$

ដូចនេះ គេអាចសរសេរបាន $x\in\operatorname{int}(A\cap B)$ (2)

តាម (1) និង (2) យើងទាញបានថា $\operatorname{int}(A\cap B)=\operatorname{int}(A)\cap\operatorname{int}(B)$

ដូចនេះ $\operatorname{int}(A\cap B)=\operatorname{int}(A)\cap\operatorname{int}(B)$ ត្រូវបានសម្រាយបញ្ជាក់។

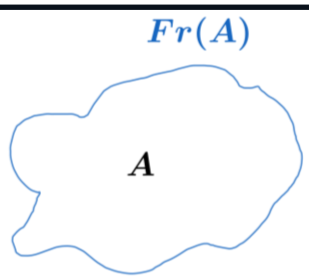
១.១.៨. សំណុំព្រំដែន

និយមន័យ៧៖ សំណុំព្រំដែន

គេមាន $(E,\mathcal{T})$ ជាលំហតូប៉ូមួយ និង $A\subset E$ ។

គេហៅសំណុំព្រំដែននៃ A ដែលតាងដោយ $\operatorname{Fr}(A)$

ឬ $\partial(A)$ គឺសំណុំ $\left(\overline{A}\setminus\overset{o}{A}\right)$ ។



រូបភាពទី២២

ឧទាហរណ៍ទី១៨៖ គេឱ្យ S គឺជាសំណុំរងនៃសំណុំចំនួនពិត $\mathbb{R}$ ដែលកំណត់ដោយ

$S=\{x\in\mathbb{R}\mid -5<x<5\}$។ រកសំណុំព្រំដែន នៃសំណុំ S ។

ដំណោះស្រាយ

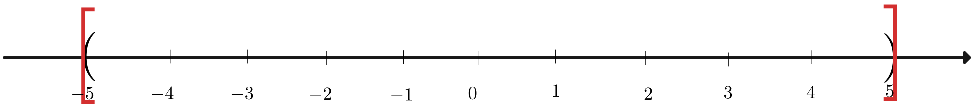
រកសំណុំព្រំដែន នៃសំណុំ S

យើងមាន $S=\{x\in\mathbb{R}\mid -5<x<5\}$ ឬអាចសរសេរ $S=(-5,5)$ គេបាន $\overset{o}{S}=(-5,5)$

$\overline{S}=\{x\in\mathbb{R}\mid -5\le x\le 5\}$ ឬអាចសរសេរ $\overline{S}=[-5,5]$

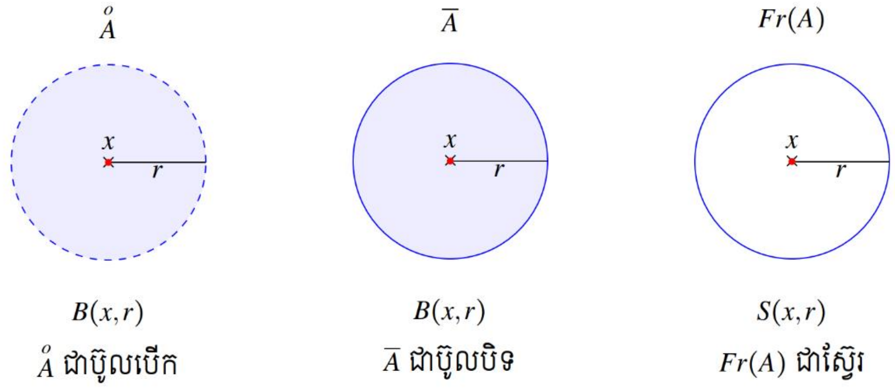
យើងដឹងថា $\mathrm{Fr}(S)=\overline{S}\setminus\overset{o}{S}$

$\mathrm{Fr}(S)=\{-5,5\}$



ដូចនេះ សំណុំព្រំដែននៃ $S=\{x\in\mathbb{R}\mid -5<x<5\}$ គឺ $\mathrm{Fr}(S)=\{-5,5\}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១៩៖ នៅក្នុងលំហវិចទ័រណមេ គេមាន ប៊ូលបើក $B(x,r)$ នោះអាត់ដេរ៉ង់ របស់វាគឺជាប៊ូលបិទ $B_f(x,r)$ ហើយគេបាន សំណុំព្រំដែនរបស់ $B(x,r)$ និង $B_f(x,r)$ គឺជាស្វ៊ែរ $S(x,r)$។



រូបភាពទី២៣

ឧទាហរណ៍១៩៖ គេមាន $(E,\mathcal{T})$ ជាលំហតូប៉ូមួយ។

1. បង្ហាញថាគ្រប់ $A\subset E$ គេបាន $E\setminus\overline{A}=\overset{o}{E\setminus A}$ ។
2. បង្ហាញថាគ្រប់ $A\subset E$ គេបាន $\mathrm{Fr}(A)=\mathrm{Fr}(E\setminus A)$ ។

ដំណោះស្រាយ

1. បង្ហាញថាគ្រប់ $A\subset E$ គេបាន $E\setminus\overline{A}=\overset{o}{E\setminus A}$

ចំពោះគ្រប់ $x\in E, x\in E\setminus\overline{A}\Leftrightarrow x\notin\overline{A}\Leftrightarrow \forall V\in v(x), V\cap A=\varnothing$

$\Leftrightarrow \forall V\in v(x), V\subset E\setminus A$

$\Leftrightarrow (E\setminus A)\in v(x)$

$\Leftrightarrow x\in \overset{o}{E\setminus A}$

គេឃើញថា $x\in E\setminus\overline{A}\Leftrightarrow x\in\overset{o}{E\setminus A}$

ដូចនេះ $\forall A\subset E$ គេបាន $E\setminus\overline{A}=E\setminus\overset{o}{A}$

2. បង្ហាញថាគ្រប់ $A\subset E$ គេបាន $\mathrm{Fr}(A)=\mathrm{Fr}(E\setminus A)$

គេមាន គ្រប់ $A\subset E,\mathrm{Fr}(E\setminus A)=\overline{E\setminus A}=E\setminus\overset{o}{A}$

$$\mathrm{Fr}(E\setminus A)=\left(E\setminus\overset{o}{A}\right)\setminus\left(E\setminus\overline{A}\right)$$

$$\mathrm{Fr}(E\setminus A)=\overline{A}\setminus\overset{o}{A}$$

ដូចនេះ គ្រប់ $A\subset E$ គេបាន $\mathrm{Fr}(A)=\mathrm{Fr}(E\setminus A)$ ។

១.១.៩. អនុគមន៍

ផលគុណដេកាត $X_1\times X_2\times X_3\times\ldots\times X_n$ នៃសំណុំ $X_1,X_2,\ldots,X_n$ គឺជាសំណុំលំដាប់ទាំងអស់មាន n ជាតុ $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ដែល $x_i\in X_i,\ i=1,2,\ldots,n$ កំណត់ដោយ៖

$$f:X\to Y$$

មានន័យថា f ជាអនុគមន៍ (ឬអនុវត្តន៍)ពីសំណុំ X ទៅសំណុំ Y នោះ f កំណត់ទៅ $x\in X$ នីមួយៗជាតុ $f(x)\in Y$ ។ បើ $A\subseteq X$ និង $B\subseteq Y$ ជារូបភាពនៃ A និងជារូបភាពច្រាស់នៃ B រៀងគ្នា។

$$f(A)=\{f(x):x\in A\},$$

$$f^{-1}(B)=\{x:f(x)\in B\}$$

បើ $\{X_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ ជាគ្រួសារនីមួយៗនៃសំណុំរង X នោះ

$$f\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}f(X_\alpha)$$

និង $$f\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in\Lambda}f(X_\alpha)$$

ដូចគ្នាផងដែរបើ $\{Y_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ ជាគ្រួសារនីមួយៗនៃសំណុំរង X នោះ

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}Y_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}f^{-1}(Y_\alpha)$$

និង $$f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}Y_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in\Lambda}f^{-1}(Y_\alpha)$$

បើ Y_1 និង Y_2 ជាសំណុំរងនៃ Y នោះគេបាន៖ $f^{-1}(Y_1\setminus Y_2)=f^{-1}(Y_1)\setminus f^{-1}(Y_2)$

ជាចុងបញ្ចប់ បើ $f:X\to Y$ និង $g:Y\to Z$ បណ្តាក់នៃអនុគមន៍ $g\circ f:X\to Z$ កំណត់ដោយ $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ ។

១.២.លំហមេទ្រិក

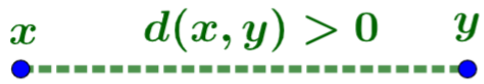
១.២.១.និយមន័យ

គេមានសំណុំ E មិនទទេមួយនិងអនុគមន៍ d ពី $E\times E$ ទៅក្នុង $\mathbb{R}_+$ ដែលកំណត់ដោយ៖

$$d: E\times E \to \mathbb{R}_+$$
$$(x,y)\mapsto d(x,y)$$

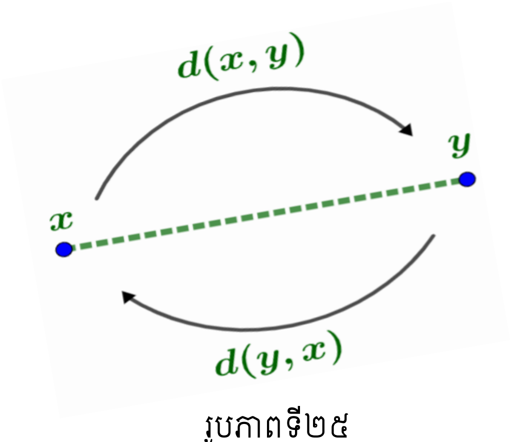
គេថា d ជាអនុគមន៍ចម្ងាយ(Distance)ឬជាអនុគមន៍មេទ្រិច (Metric) កាលណាវាផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ ទាំងបីខាងក្រោម៖

$[M_1]$ $\forall x,y\in E,\ d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$



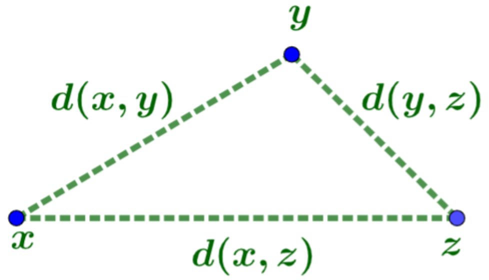
រូបភាពទី២៤

$[M_2]$ $\forall x,y\in E,\ d(x,y)=d(y,x)$ (ស៊ីមេទ្រី)



រូបភាពទី២៥

$[M_3]$ $\forall x,y,z\in E,\ d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$ (វិសមភាពត្រីកោណ)



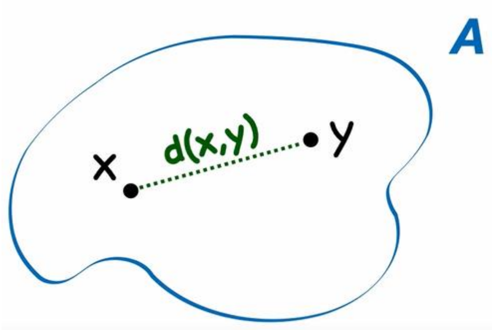
រូបភាពទី២៦

លំដាប់គូ (E,d) ហៅថា **លំហមេទ្រិក**។

ឧទាហរណ៍២០៖ លើ $\mathbb{R}$ អនុគមន៍ធម្មតាកំណត់ដោយ៖ $d(x,y)=|x-y|$ ។ បង្ហាញថាវាជាលំហមេទ្រិកលើ $\mathbb{R}$ ។

ដំណោះស្រាយ

- លើ $\mathbb{R}$



រូបភាពទី២៧

ដោយ $d(x,y)=|x-y|$ គេបាន៖

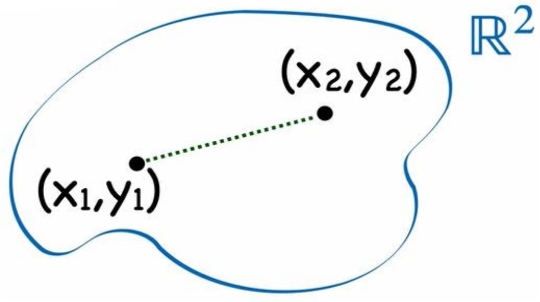
$$[M_1]\quad \forall x,y\in E,\ d(x,y)=0\Leftrightarrow |x-y|=0$$
$$\Leftrightarrow x-y=0$$
$$\Leftrightarrow x=y$$

$$[M_2]\quad \forall x,y\in E,\ d(x,y)=|x-y|=|y-x|=d(y,x)$$

$$[M_3]\quad \forall x,y,z\in E,\ d(x,z)=|x-z|=|x-y+y-z|\le|x-y|+|y-z|$$
$$\Rightarrow d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$$

❖ លើ $\mathbb{R}^2$ អនុគមន៍ចម្ងាយធម្មតាកំណត់ដោយ៖

$\forall x,y\in\mathbb{R}^2,\ d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$ ដែល $x=(x_1,x_2),y=(y_1,y_2)$



រូបភាពទី២៨

❖ លើ $\mathbb{R}^n$ អនុគមន៍ចម្ងាយធម្មតាកំណត់ដោយ៖

$\forall x=(x_1,x_2,...,x_n),y=(y_1,y_2,...,y_n)\in\mathbb{R}^n$ គេបាន៖

$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$ (ចម្ងាយអឺគ្លីត)។

ឧទាហរណ៍២១៖ គេមានសំណុំមិនទទេ X មួយ និងអនុគមន៍ d កំណត់លើ X ដោយ៖

$\forall x,y\in X,d(x,y)=\begin{cases}1 \text{ បើ } x\neq y\\ 0 \text{ បើ } x=y\end{cases}$ ។ បង្ហាញថា d ជាចម្ងាយមួយលើ X ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន៖

$[M_1]$ $\forall x,y \in E, d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

$[M_2]$ $\forall x,y \in E, d(x,y)=d(y,x)=0$ បើ $x=y$

$d(x,y)=d(y,x)=1$ បើ $x \neq y$

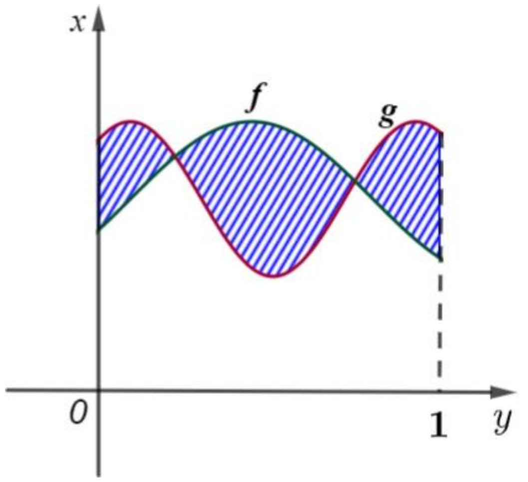
$[M_3]$ $\forall x,y,z \in X$ គេបាន៖

- បើ $x=y=z$ គេបាន $d(x,z) \le d(x,y)+d(y,z)$
- បើ x,y,z មានពីរចំណុចត្រួតគ្នាស៊ីគ្នានោះ
  $d(x,y)+d(y,z) \ge 1 \ge d(x,z)$
- បើ x,y,z មានបីចំណុចផ្សេងគ្នានោះ
  $d(x,y)+d(y,z) \ge 2 \ge 1 = d(x,z)$

ដូចនេះ d ជាចម្ងាយលើ X ដែលហៅថាចម្ងាយងាយ(Trivial distance)។

ឧទាហរណ៍២២៖ លើគ្រួសារអនុគន៍ជាប់ $\mathscr{C}([0,1])$ លើចន្លោះ $[0,1]$ គេកំណត់អនុគមន៍មួយដោយ៖

$\forall f,g \in \mathscr{C}([0,1]), d(f,g)=\int_0^1 |f(x)-g(x)|dx$។ បង្ហាញថា d ជាចម្ងាយលើ $\mathscr{C}([0,1])$។



រូបភាពទី២៩

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\forall f,g,h \in \mathscr{C}([0,1])$ គេបាន៖

$[M_1]$ $d(f,g)=0 \Leftrightarrow \int_0^1 |f(x)-g(x)|dx=0$

$\Leftrightarrow |f(x)-g(x)|=0, \forall x \in [0,1]$

$\Leftrightarrow f(x)-g(x)=0, \ \forall x \in [0,1]$

$\Leftrightarrow f(x)=g(x) \quad , \forall x \in [0,1]$

$\Leftrightarrow f=g$ លើ $[0,1]$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

$[M_2]$ $d(f,g)=\int_0^1 |f(x)-g(x)|dx=\int_0^1 |g(x)-f(x)|dx=d(g,f)$

$[M_3]\ \ d(f,h)=\int_0^1 |f(x)-h(x)|dx$

$$=\int_0^1 |[f(x)-g(x)]+[g(x)-h(x)]|dx \le \int_0^1 [|f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)|]dx$$

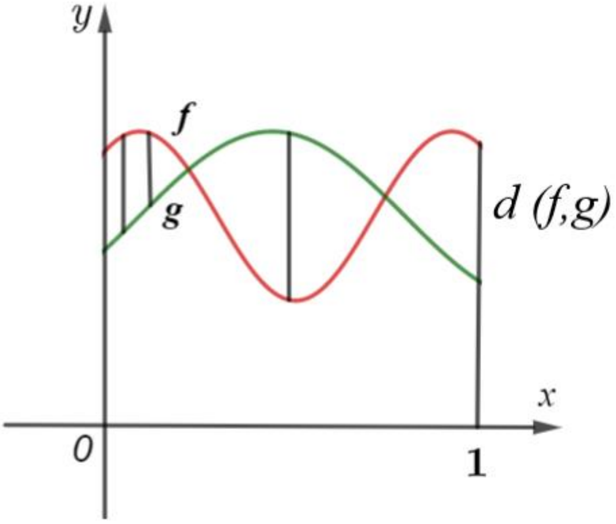
$\Rightarrow d(f,h)\le \int_0^1 |f(x)-g(x)|dx+\int_0^1 |g(x)-h(x)|dx$

$\Leftrightarrow d(f,h)\le d(f,g)+d(g,h)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូច្នេះ d ថាជាចម្ងាយលើ $\mathscr{C}([0,1])$ ។

ឧទាហរណ៍២៣៖ លើ $\mathscr{C}([0,1])$ គេកំណត់អនុគមន៍ d ដោយ $\forall f,g\in\mathscr{C}([0,1])$,

$d(f,g)=\underset{x\in[0,1]}{Sup}|f(x)-g(x)|$ ។ បង្ហាញថា d ថាជាចម្ងាយលើ $\mathscr{C}([0,1])$ ។



រូបភាពទី៣០

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\forall f,g,h\in\mathscr{C}([0,1])$ គេបាន៖

$[M_1]\ \ d(f,g)=0\Leftrightarrow \underset{x\in[0,1]}{Sup}|f(x)-g(x)|=0$

$\Leftrightarrow |f(x)-g(x)|=0$ លើ $[0,1]$

$\Leftrightarrow f(x)-g(x)=0$ លើ $[0,1]$

$\Leftrightarrow f=g$ លើ $[0,1]$

$[M_2]$ បើ $d(f,g)=\underset{x\in[0,1]}{Sup}|f(x)-g(x)|=\underset{x\in[0,1]}{Sup}|g(x)-f(x)|=d(g,f)$

$[M_3]\ \ d(f,g)+d(g,h)=\underset{x\in[0,1]}{Sup}|f(x)-g(x)|+\underset{x\in[0,1]}{Sup}|g(x)-h(x)|$

$\ge |f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)|,\ \forall x\in[0,1]$

$\Rightarrow d(f,g)+d(g,h)\ge |f(x)-h(x)|\ ,\ \forall x\in[0,1]$

$\Rightarrow d(f,g)+d(g,h)\ge \underset{x\in[0,1]}{Sup}|f(x)-h(x)|$ ព្រោះ

$d(f,g)+d(g,h)$ គឺជាគោលលើមួយនៃសំណុំ $\{|f(x)-h(x)|,\forall x\in[0,1]\}$

ហើយ $\underset{x\in[0,1]}{Sup}|f(x)-g(x)|$ គឺជាធាតុតូចបំផុតនៃគោលលើ

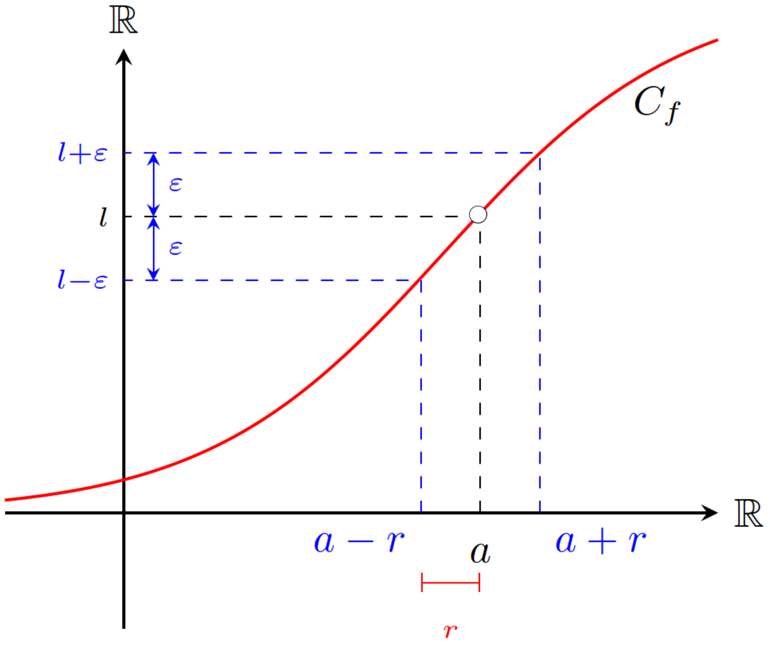
$\Rightarrow d(f,g)+d(g,h)\geq d(f,h)$

ដូច្នេះ d ថាជាចម្ងាយលើ $\mathscr{C}([0,1])$ ។

១.៣.លីមីត និងភាពជាប់

១.៣.១. លីមីតក្នុង $\mathbb{R}$ ត្រង់មួយចំណុច

និយមន័យទី៨៖ អនុគមន៍ f មានលីមីត l ដែល $(l\in\mathbb{R})$ កាលណា x ខិតជិត a លុះត្រាតែ៖ $\forall\varepsilon>0,\exists r>0$ ដែល $x\in]a-r,a+r[$ នោះ $f(x)\in]l-\varepsilon,l+\varepsilon[$ ឬ $\forall\in\varepsilon>0,\exists r>0$ ដែល $x\in B(a,r)$ នោះ $f(x)\in B(l,\varepsilon)$ ។ គេកំណត់សរសេរដោយ $\lim_{x\to a} f(x)=l$ ។



រូបភាពទី៣១

ឧទាហរណ៍ទី២៤ ៖ ដោយប្រើនិយមន័យទី៨ ចូរសម្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim_{x\to 3}(x^2+5)=14$ ។

ដំណោះស្រាយ

សម្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim_{x\to 3}(x^2+5)=14$

គេបាន $a=3,l=14$ និង $f(x)=x^2+5$

លីមីតនេះពិតលុះត្រាតែ $\forall\varepsilon>0,\exists r>0$

គេអាចរកបាន $x\in B(a,r)$ នោះ $f(x)\in B(l,\varepsilon)$

ឬ $x\in B(3,r)$ នោះ $(x^2+5)\in B(14,\varepsilon)$

ឧបមាថា $\lim_{x\to 3}\left(x^2+5\right)=14$ ពិត

គេមាន $\left(x^2+5\right)\in B(14,\varepsilon)$

$\left|\left(x^2+5\right)-14\right|<\varepsilon$

$\left|x^2-9\right|<\varepsilon$

$|x-3|\cdot|x+3|<\varepsilon$

ជ្រើសរើសវ៉ស៊ីណា មួយនៃ $a=3$ គឺ $v(3)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,2<x<4\}$

គេបាន $2<x<4$ ឬ $5<x+3<7$ នាំឱ្យ $|x+3|<7$

នាំឱ្យ $|x-3|\cdot|x+3|<7|x-3|<\varepsilon$

$|x-3|<\frac{\varepsilon}{7}$ យក $r=\frac{\varepsilon}{7}>0$

គេបាន $|x-3|<r$ នាំឱ្យ $x\in B(3,r)$

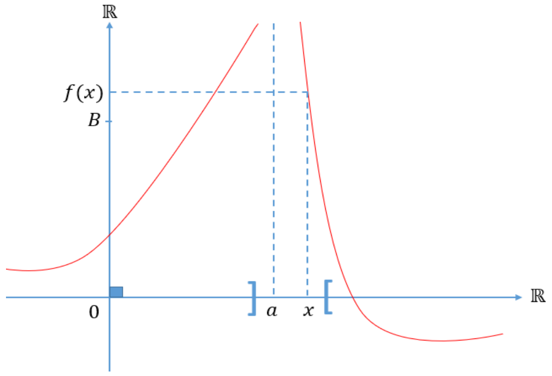
តាមសម្រាយខាងលើឃើញថា $\forall\varepsilon>0,\exists r=\frac{\varepsilon}{7}>0$ ដែល $x\in B(3,r)$ នោះ $\left(x^2-5\right)\in B(14,\varepsilon)$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 3}\left(x^2+5\right)=14$ ត្រូវបានសម្រាយបញ្ជាក់។

និយមន័យទី៩

$\forall B>0$, $\exists r>0$ ដែល $x\in\left]a-r,a+r\right[\setminus\{a\}$ នោះ $f(x)>B$ ។

គេអាចសរសេរ $\lim_{x\to a}f(x)=+\infty$ ។

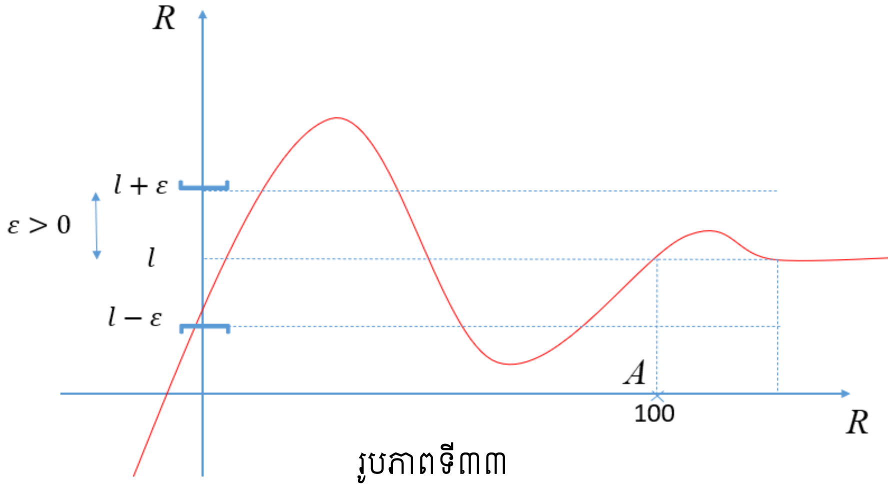


រូបភាពទី៣២

១.៣.២. លីមីតខិតជិតអនន្ត

និយមន័យទី១០

$(A\in\mathbb{R})$, $\forall\varepsilon>0$, $x>A$ នោះ $f(x)\in\left]l+\varepsilon,l-\varepsilon\right[$ ឬ $f(x)\in B(l,\varepsilon)$ ។



រូបភាពទី៣៣

គេអាចសរសេរ $\lim_{x\to\infty}f(x)=l$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២៥៖ បង្ហាញថា $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{x^2+1}=1$ ដោយប្រើនិយមន័យទី២។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{x^2+1}=1$ នោះ $f(x)=\frac{x^2+3}{x^2+1}, l=1$

លីមីតនេះពិតលុះត្រាតែ $\forall\varepsilon>0,\exists A>0, x>A, f(x)\in\left]l-\varepsilon,l+\varepsilon\right[$

ឧបមាថាលីមីតនេះពិត $\frac{x^2+3}{x^2+1}\in\left]1-\varepsilon,1+\varepsilon\right[$

$$1-\varepsilon<\frac{x^2+3}{x^2+1}<1+\varepsilon$$

$$-\varepsilon<\frac{x^2+3}{x^2+1}-1<\varepsilon$$

$$\left|\frac{x^2+3}{x^2+1}-1\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{x^2+3-x^2-1}{x^2+1}\right|<\varepsilon$$

$\left|\frac{2}{x^2+1}\right|<\varepsilon$ តែ $\left|\frac{2}{x^2+1}\right|<\left|\frac{2}{x^2}\right|$

យើងនឹងរកឱ្យបាន $\left|\frac{2}{x^2}\right|<\varepsilon$ ឬ $\frac{2}{x^2}<\varepsilon$ ឬ $x^2>\frac{2}{\varepsilon}$ ឬ $x>\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$

យក $A=\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$ ដោយ ε ជាចំនួនតូចតែធំជាងសូន្យ $A=\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$ ជាចំនួនដែលធំ

មានន័យថា $\forall\varepsilon>0,\exists A>0, x>A, f(x)\in\left]1-\varepsilon,1+\varepsilon\right[$ ដែល $A=\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$

ដូចនេះ $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{x^2+1}=1$ ពិត។

ឧទាហរណ៍ទី២៦៖ បង្ហាញថា $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+5}{x+3}=3$ ដោយប្រើនិយមន័យទី២។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+5}{x+3}=3$ នោះ $f(x)=\frac{3x+5}{x+3}$ និង $l=3$

លីមីតនេះពិតលុះត្រាតែ $\forall\varepsilon>0,\exists A>0, x>A, f(x)\in B(l,\varepsilon)$

ឧបមាថាលីមីតនេះពិត គេបាន $\frac{3x+5}{x+3}\in B(3,\varepsilon)$

$$\left|\frac{3x+5}{x+3}-3\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{-4}{x+3}\right|<\varepsilon$$

$$\frac{|x+3|}{4} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$|x+3| > \frac{4}{\varepsilon}$ ពេល $x \to +\infty$ នោះ $|x+3| = x+3$

គេបាន $x+3 > \frac{4}{\varepsilon}$ ឬ $x > \frac{4}{\varepsilon} - 3$ យក $A = \frac{4}{\varepsilon} - 3$

ដោយ ε ជាចំនួនដែលតូចបំផុត តែធំជាងសូន្យ នោះ $A = \frac{4}{\varepsilon} - 3$ ជាចំនួនធំ

មានន័យថា $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, x > A, f(x) \in B(3,\varepsilon)$ ដែល $A = \frac{4}{\varepsilon} - 3$

ដូចនេះ $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x+5}{x+3} = 3$ ពិត។

១.៤. លីមីតក្នុងលំហាតូប៉ូ

១.៤.១ លីមីតនៃអនុគមន៍មួយត្រង់ចំណុចមួយ

និយមន័យ១១ [លីមីតនៃអនុគមន៍មួយត្រង់ចំណុចមួយ]

គេមាន (E,T) និង (F,T') ជាលំហាតូប៉ូពីរ។

គេមាន $f : E \to F$ ជាអនុគមន៍មួយ និង គេមាន $a \in E$ និង $l \in F$ ។

គេឧបមាថា $f(x)$ ខិតទៅរក l កាលណា x ខិតទៅរក a និង គេកំណត់តាងដោយ

$\lim_{x \to a} f(x) = l$ លុះត្រាតែគ្រប់ $V \in \upsilon(l)$ មាន $\exists u \in \upsilon(a), f(u) \subset V$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២៧ ៖ បង្ហាញថា $\lim_{x \to 2}(2x-1) = 3$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\lim_{x \to 2}(2x-1) = 3$

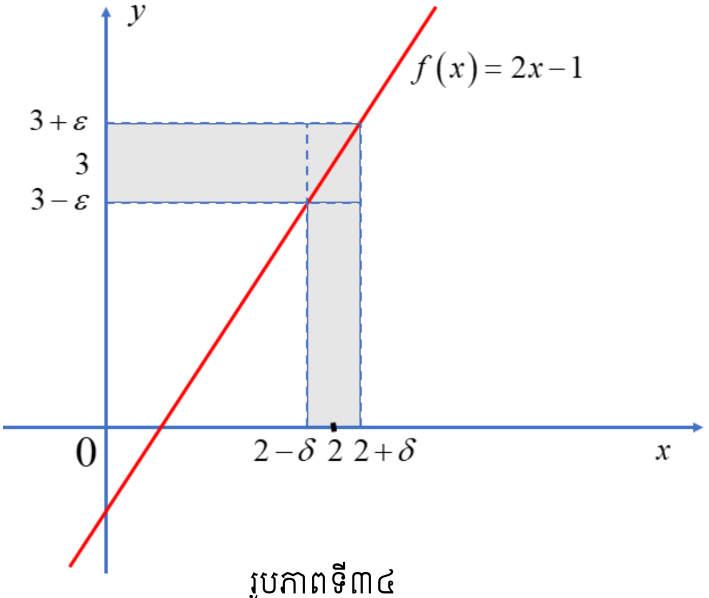
$\forall \varepsilon > 0$ យើងរកចំនួន $\delta > 0$ ដែល $0 < |x-2| < \delta \to |(2x-1)-3| < \varepsilon$ ។

យើងមាន $|(2x-1)-3| = |2x-4| = 2|x-2|$ ។ ដើម្បីឱ្យ $|(2x-1)-3| < \varepsilon$ យើងចាំបាច់ត្រូវឱ្យ

$|x-2| < \frac{\varepsilon}{2}$ នោះបង្ហាញថាយើងអាច

ជ្រើសរើស $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ ។

ដូចនេះ $\lim_{x \to 2}(2x-1) = 3$ ។



រូបភាពទី៣៤

និយមន័យ១២

គេមានលំហតូប៉ូពីរ (E,T) និង (F,T') ។

គេមាន $f:E\to F$ ជាអនុគមន៍មួយ និង គេមាន $a\in E$ និង $l\in F$ ។

គេឧបមាថា f កំណត់លើ $A\subset E$ និង $a\in\overline{A}$ ។

គេថា $f(x)$ ខិតទៅរក l កាលណា x ខិតទៅរក a ដោយស្ថិតនៅក្នុង A និង គេកំណត់តាង

ដោយ $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)=l$ លុះត្រាតែ $\forall V\in\upsilon(l)\,,\exists u\in x(a)\,,\ f(u\cap A)\subset V$ ។

លក្ខណៈ

គេមានលំហតូប៉ូពីរ (E,T) និង (F,T') ។

គេមាន $f:E\to F$ ជាអនុគមន៍មួយ ។

$\forall a\in E\ ,\ \forall l\in F\ \ ,\ \lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ លុះត្រាតែ $\forall V\in\upsilon(l)\,,\ f^{-1}(V)\in\upsilon(a)$ ។

សម្គាល់ ៖ $f^{-1}(V)=\{x\in E, f(x)\subset V\}$ ។(f^{-1} ជាអនុវត្តន៍ច្រាសនៃ f)។

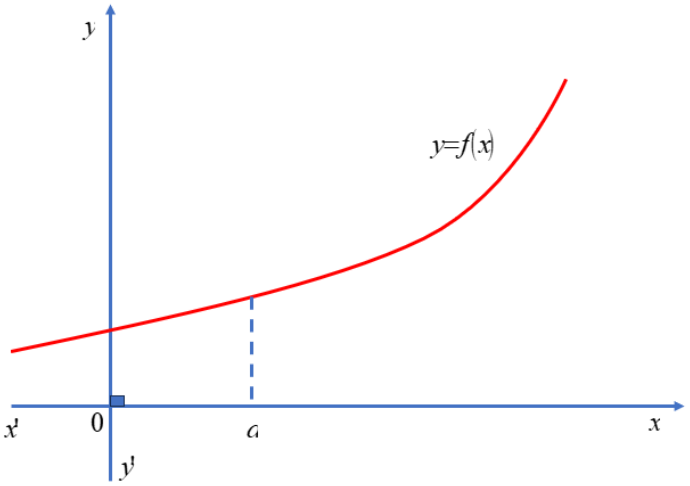
១.៥. ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

និយមន័យ១៣

$f(x)$ ជាអនុគមន៍ត្រង់ $x=a$ កាលណា ៖

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ ឬ

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ ។



រូបភាពទី៣៥

ឧទាហរណ៍ទី២៨ ៖ គេមានអនុគមន៍ f ដែល $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1} & ,\ x\neq 1\\ -2 & ,\ x=1\end{cases}$ ។

បង្ហាញថាអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=1$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=1$ លុះត្រាតែ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$

គេបាន $f(1)=-2$

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-4x+3}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-3)(x-1)}{(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}(x-3)$$
$$=-2$$

គេបាន $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)=-2$

ដូចនេះ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=1$។

ឧទាហរណ៍២៩ ៖ គេអោយអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x+1} & , x<-1\\ x^2-3 & , x\geq -1\end{cases}$ ។

តើអនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=-1$ដែរឬទេ ?

ដំណោះស្រាយ

ដើម្បីអោយអនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=-1$លុះត្រាតែ

$f(-1)=(-1)^2-3=1-3=-2$ កំណត់

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2-1}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1^-}(x-1)=-1-1=-2$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+}(x^2-3)=(-1)^2-3=1-3=-2$$

ដោយ $\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^+} f(x)=-2$

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=-1$

ឧទាហរណ៍៣០៖ គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2024x}{x} & , x\neq 0\\ 2024 & , x=0\end{cases}$ ។

តើអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ដែរឬទេ ?

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃ Aដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=0$

ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$

គេបាន $f(0)=2024$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 2024x}{x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 2024x}{2024x}\times 2024\right)=2024$$

ដោយ $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)=2024$

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=0$

ឧទាហរណ៍៣១៖ គេមាន $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & , x\neq 2\\ 4 & , x=2\end{cases}$ ។ បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=2$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=2$

ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=2$ លុះត្រាតែ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$

គេបាន $f(2)=4$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=2+2=4$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)=4$

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=2$ ត្រូវបានបង្ហាញ

១.៦. ភាពមានដេរីវេត្រង់ចំណុច a មួយ

គេមានអនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$y\mapsto f(x)$

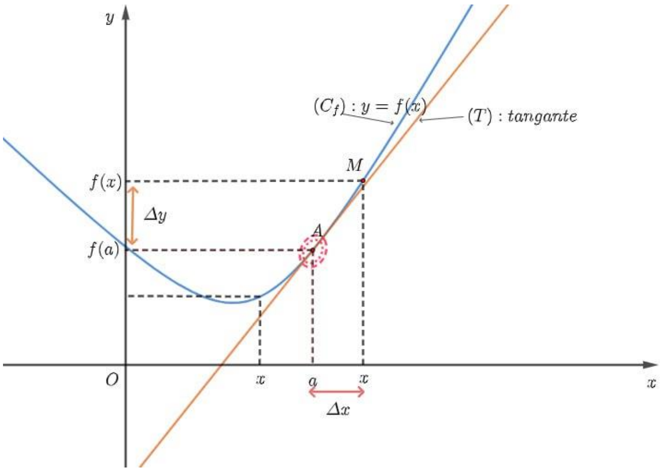
មានក្រាបតំណាងដូចរូបខាងលើ។

- អត្រាបម្រែបម្រួល

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

- មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (AM)

គឺ $\dfrac{y_M-y_A}{x_M-x_A}$



រូបភាពទី៣៦

- បើ $x\to a$ នោះ

$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\to \ell\neq\infty$ កំណត់សរសេរ

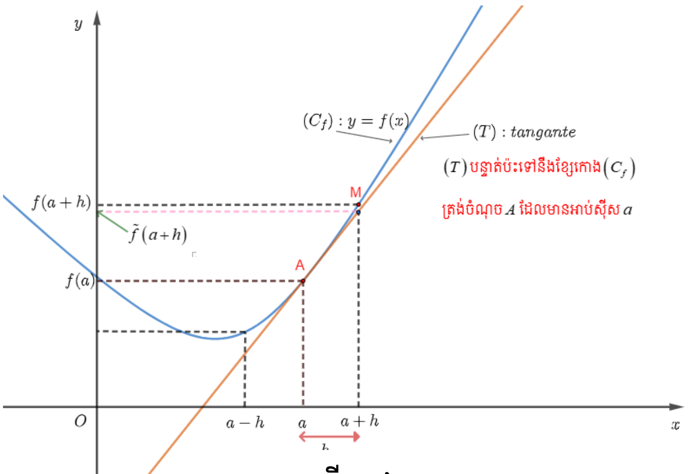
ដោយ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell\ \ (\ell\neq\infty)$

ដែល ℓ ហៅថាចំនួនដេរីវេនៃ f ត្រង់ a ដែលកំណត់តាងដោយ $f'(a)$។

- បើ $\Delta x=h, \Delta y=f(a+h)-f(a)$

គេបាន

$$\lim_{\ell\to 0}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell\ \ (\ell\neq\infty)$$



រូបភាពទី៣៧

គេថា f មានដេរីវេត្រង់ a ដែល ℓ ហៅថាចំនួនដេរីវេនៃ f ត្រង់ a ដែលកំណត់តាងដោយ $f'(a)$

➲សមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹង C_f ត្រង់ចំណុច A ដែលមានអាប់ស៊ីស a

$y=f'(a)(x-a)+f(a)=\tilde{f}(x)$ ដែល $f(x)$ គឺជាតម្លៃប្រហែលរបស់អនុគមន៍ f

ដេរីវេត្រង់ចំណុច a មួយ

➲ ករណី៖ អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$x\mapsto f(x)$$

នោះដេរីវេនៃ f ត្រង់ចំណុច a កំណត់ដោយ $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=l\,(l\neq\infty)$

ដែល l ហៅថាចំនួនដេរីវេនៃ f ត្រង់ a

➲ ករណី : អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$(x,y)\mapsto f(x,y)$$

- ដេរីវេដោយផ្នែកនៃ f ធៀបអថេរ x ត្រង់ (a,b) កំណត់ដោយ

$$\frac{\partial}{\partial x}f(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

- ដេរីវេដោយផ្នែកនៃ f ធៀបអថេរ y ត្រង់ (a,b) កំណត់ដោយ

$$\frac{\partial}{\partial y}f(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

➲ ករណី : អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$

$$(x,y,z)\mapsto f(x,y,z)$$

- ដេរីវេដោយផ្នែកនៃ f ធៀបអថេរ x ត្រង់ (a,b,c)

កំណត់ដោយ $\dfrac{\partial}{\partial x}f(a,b,c)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h,b,c)-f(a,b,c)}{h}$

- ដេរីវេដោយផ្នែកនៃ f ធៀបអថេរ y ត្រង់ (a,b,c)

កំណត់ដោយ $\dfrac{\partial}{\partial y}f(a,b,c)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a,b+h,c)-f(a,b)}{h}$

- ដេរីវេដោយផ្នែកនៃ f ធៀបអថេរ z ត្រង់ (a,b,c)

កំណត់ដោយ $\dfrac{\partial}{\partial z}f(a,b,c)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a,b,c+h)-f(a,b)}{h}$

➲ ករណី៖ អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

$(x_i)\mapsto f(x_i)$ ដែល $x_i=(x_1,x_2,...,x_n)$ និង $f(x_i)=f(x_1,x_2,...,x_n)$

ដេរីវេដោយផ្នែកនៃ f ធៀប x_i កំណត់ដោយ[3]

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,x_2,...,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},...,x_n)+f(x_1,x_2,...,x_{i-1},x_i,x_{i+1},...,x_n)}{h}$$

ឧទាហរណ៍ទី៣២៖ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដែល $f(x)=x^2+3$ ត្រង់ $x=2$ តាម

---

[3] Vector Calculus, 4th edition by Susan Jane Colley

និយមន័យ។

ដំណោះស្រាយ

ដេរីវេនៃ f ត្រង់ចំណុច a កំណត់ដោយ $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

គេបាន $f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[(2+h)^2+3\right]-(2^2+3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-2^2+3-3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h-2)(2+h+2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(4+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(4+h)=4$$

ដូចនេះ ដេរីវេនៃ f ត្រង់ $x=2$ គឺ $f'(2)=4$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៣៣៖ គណនាដេរីវេដោយផ្នែកនៃអនុគមន៍ $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}$ ដែល $f(x,y)=x^2+y^2$ ត្រង់ $(2,5)$ ដោយប្រើនិយមន័យ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}$ ដែល $f(x,y)=x^2+y^2$ និងចំណុច $(2,5)$

តាមនិយមន័យ $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$

គេបាន $\frac{\partial f}{\partial x}(2,5)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h,5)-f(2,5)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[(2+h)^2+5^2\right]-(2^2+5^2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-2^2+5^2-5^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h-2)(2+h+2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(4+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(4+h)=4$$

តាមនិយមន័យ $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}$

គេបាន $\frac{\partial f}{\partial y}(2,5)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2,5+h)-f(2,5)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[2^2+(5+h)^2\right]-(2^2+5^2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2^2-2^2+(5+h)^2-5^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(5+h-5)(5+h+5)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(10+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(10+h)=10$$

ដូចនេះ ដេរីវេដោយផ្នែកនៃ f ត្រង់ $(2,5)$ គឺ $\frac{\partial f}{\partial x}(2,5)=4,\frac{\partial f}{\partial y}(2,5)=10$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៣៤៖ គណនាដេរីវេដោយផ្នែកនៃអនុគមន៍ $f:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}$ ដែល $f(x,y)=2x+3y+z$ ត្រង់ $(0,1,2)$ ដោយប្រើនិយមន័យ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាដេរីវេដោយផ្នែកនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $(0,1,2)$

យើងមាន $f:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}$ ដែល $f(x,y)=2x+3y+z$, ចំណុច $(0,1,2)$

តាមនិយមន័យ $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b,c)-f(a,b,c)}{h}$

គេបាន $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1,2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,1,2)-f(0,1,2)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[2(0+h)+3+2\right]-(0+3+2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h+3+2-3-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h}=\lim_{h\to 0}2=2$$

តាមនិយមន័យ $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+h,c)-f(a,b,c)}{h}$

គេបាន $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1,2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,1+h,2)-f(0,1,2)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[0+3(1+h)+2\right]-(0+3+2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3+3h+2-3-2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3h}{h}=\lim_{h\to 0}3=3$$

តាមនិយមន័យ $\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a,b,c+h)-f(a,b,c)}{h}$

គេបាន $\frac{\partial f}{\partial z}(0,1,2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,1,2+h)-f(0,1,2)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(0+3+2+h)-(0+3+2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3+2+h-3-2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

ដូចនេះ ដេរីវេដោយផ្នែកនៃ f ត្រង់ $(0,1,2)$ គឺ $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1,2)=2,\frac{\partial f}{\partial z}(0,1,2)=3,\frac{\partial f}{\partial z}(0,1,2)=1$។

ឧទាហរណ៍ទី៣៤៖ គណនាដេរីវេដោយផ្នែក $\frac{\partial f}{\partial x}$ និង $\frac{\partial f}{\partial y}$ នៃអនុគមន៍ $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ដែល $f(x,y)=xy^2+x^2y$ ដោយប្រើនិយមន័យ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាដេរីវេដោយផ្នែក $\frac{\partial f}{\partial x}$ និង $\frac{\partial f}{\partial y}$ នៃអនុគមន៍ $f(x,y)=xy^2+x^2y$

តាមនិយមន័យ : $\frac{\partial f}{\partial x_i}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,x_2,....,x_{i-1},x_i+h,x_{i+2},....,x_n)-f(x_1,x_2,....,x_{i-1},x_i,x_{i+2},....,x_n)}{h}$

គេបាន $\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[(x+h)y^2+(x+h)^2y\right]-(xy^2+x^2y)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)y^2-xy^2+(x+h)^2y-x^2y}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{y^2(x+h-x)}{h}+\frac{(x+h-x)(x+h+x)y}{h}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{hy^2}{h}+\frac{h(2x+h)y}{h}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[y^2+(2x+h)y\right]=y^2+2xy$$

និង $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[x(y+h)^2+x^2(y+h)\right]-\left(xy^2+x^2y\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x(y+h)^2-xy^2+x^2(y+h)-x^2y}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{x(y+h-y)(y+h+y)}{h}+\frac{x^2(y+h-y)}{h}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{hx(2y+h)}{h}+\frac{hx^2}{h}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[x(2y+h)+x^2\right]=2xy+x^2$$

ដូចនេះ ដេរីវេដោយផ្នែកនៃ $f(x,y)$ គឺ $\dfrac{\partial f}{\partial x}=y^2+2xy, \dfrac{\partial f}{\partial y}=2xy+x^2$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៣៥៖ គណនាដេរីវេដោយផ្នែក $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ និង $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ នៃអនុគមន៍ $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ ដែល $f(x,y)=x^2y+\cos(x+y)$ ដោយប្រើនិយមន័យ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាដេរីវេដោយផ្នែក $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ និង $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ នៃអនុគមន៍ $f(x,y)=x^2y+\cos(x+y)$

តាមនិយមន័យ : $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x_1,x_2,....,x_{i-1},x_i+h,x_{i+2},....,x_n)-f(x_1,x_2,....,x_{i-1},x_i,x_{i+2},....,x_n)}{h}$

គេបាន $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[(x+h)^2y+\cos(x+h+y)\right]-\left[x^2y+\cos(x+y)\right]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2y-x^2y+\cos(x+h+y)-\cos(x+y)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{y(x+h-x)(x+h+x)-2\sin\left(\frac{2x+2y+h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[(2x+h)y-2\sin\left(x+y+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}\right]$$

$$= 2xy - 2\sin(x+y)\times\frac{1}{2} = 2xy - \sin(x+y)$$

និង $\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[x^2(y+h)+\cos(x+y+h)\right]-\left[x^2y+\cos(x+h)\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^2(y+h)-x^2y+\cos(x+y+h)-\cos(x+y)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{x^2(y+h-y)}{h}+\frac{\cos(x+y+h)-\cos(x+y)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[x^2 - \frac{2\sin\left(\frac{2x+2y+h}{2}\right)\times\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}\right] = \lim_{h\to 0}\left[x^2 - 2\sin\left(x+y+\frac{h}{2}\right)\times\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}\right]$$

$$= x^2 - \sin(x+y)$$

ដូចនេះ ដេរីវេដោយផ្នែកនៃ $f(x,y)$ គឺ $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - \sin(x+y), \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - \sin(x+y)$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៣៦៖ គណនាដេរីវេដោយផ្នែក $\frac{\partial f}{\partial x}$ និង $\frac{\partial f}{\partial y}$ នៃអនុគមន៍ $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ដែល $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ ដោយប្រើនិយមន័យ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាដេរីវេដោយផ្នែក $\frac{\partial f}{\partial x}$ និង $\frac{\partial f}{\partial y}$ នៃអនុគមន៍ $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$

តាមនិយមន័យ : $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,x_2,....,x_{i-1},x_i+h,x_{i+2},....,x_n)-f(x_1,x_2,....,x_{i-1},x_i,x_{i+2},....,x_n)}{h}$

គេបាន $\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^{(x+h)^2+y^2}-e^{x^2+y^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^{x^2+y^2}\left[e^{(x+h)^2+y^2-x^2-y^2}-1\right]}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x^2+y^2}\left[e^{(x+h)^2-x^2}-1\right]}{(x+h)^2-x^2}\times\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^{x^2+y^2}\left[e^{(x+h)^2-x^2}-1\right]}{(x+h)^2-x^2}\times\frac{(x+h-x)(x+h+x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^{x^2+y^2}(2x+h)\left[e^{(x+h)^2-x^2}-1\right]}{(x+h)^2-x^2}$$

$$= 2xe^{x^2+y^2}$$

និង $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x^2+(y+h)^2}-e^{x^2+y^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x^2+y^2}\left[e^{x^2+(y+h)^2-x^2-y^2}-1\right]}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x^2+y^2}\left[e^{(y+h)^2-y^2}-1\right]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x^2+y^2}(y+h-y)(y+h+y)}{h}\times\frac{\left[e^{(y+h)^2-y^2}-1\right]}{(y+h)^2-y^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{e^{x^2+y^2}(2y+h)\times\frac{\left[e^{(y+h)^2-y^2}-1\right]}{(y+h)^2-y^2}\right\}=2ye^{x^2+y^2}$$

ដូចនេះ ដេរីវេដោយផ្នែកនៃ $f(x,y)$ គឺ $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2xe^{x^2+y^2},\dfrac{\partial f}{\partial y}=2ye^{x^2+y^2}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៣៧៖ គេមាន $f(x)=-16x^2+96x$ និងមានចំណុច $P(1,80)$ នៅលើខ្សែកោង

ក.រកមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះក្រាបនៃ f ត្រង់ $P(1,80)$ ។

ខ.រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះក្រាបនៃ f ត្រង់ $P(1,80)$ ។

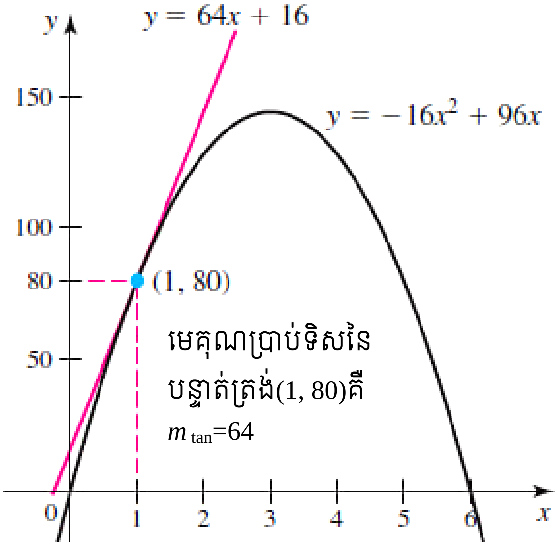
គ.រកដេរីវេទី១នៃអនុគមន៍ f ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះក្រាបនៃ f ត្រង់ $P(1,80)$

រូបមន្ត មេគុណប្រាប់ទិស $m_{\tan}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

គេបាន
$$m_{\tan}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(-16x^2+96x)-80}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{-16(x-5)(x-1)}{x-1}$$
$$=-16\lim_{x\to 1}(x-5)$$
$$=-16\times(1-5)$$
$$m_{\tan}=64$$



រូបភាពទី៣៨

ដូចនេះ មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះក្រាបនៃ f ត្រង់ $P(1,80)$ គឺ $m_{\tan}=64$ ។

ខ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះក្រាបនៃ f ត្រង់ $P(1,80)$

រូបមន្តសមីការបន្ទាត់ប៉ះ៖ $y=m_{\tan}(x-x_0)+y_0$

គេបាន $y=64(x-1)+80\Rightarrow y=64x+16$ ក្រាបតាងបន្ទាត់ប៉ះក្រាបនៃអនុគមន៍ f

គ. រកដេរីវេទី១នៃអនុគមន៍ f

តាម $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

គេបាន $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{-16(x+h)^2+96(x+h)-(-16x^2+96x)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-16(x^2+2xh+h^2)+96x+96h+16x^2-96x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(-32x+96-16h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(-32x+96-16h)$$

$$=-32x+96$$

ដូចនេះ ដេរីវេទី១នៃអនុគមន៍ f គឺ $\boxed{f'(x)=-32x+96}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៣៨៖ គេមាន $f(x)=\sqrt{x}\ ,x\geq 0$ ។

ក.ចូរគណនា $\frac{dy}{dx}$ ខ.រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះក្រាបនៃ f ត្រង់ $(4,2)$ រួចសង់ក្រាបតាងអនុគមន៍។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនា $\frac{dy}{dx}$

យើងមាន $f(x)=\sqrt{x}\ ,x\geq 0$

យើងបាន $\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(h)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$ ។

ខ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះក្រាបនៃ f ត្រង់ $(4,2)$

រូបមន្តសមីការបន្ទាត់ប៉ះ $y=m_{\tan}(x-x_0)+y_0$

- កំណត់រកមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ

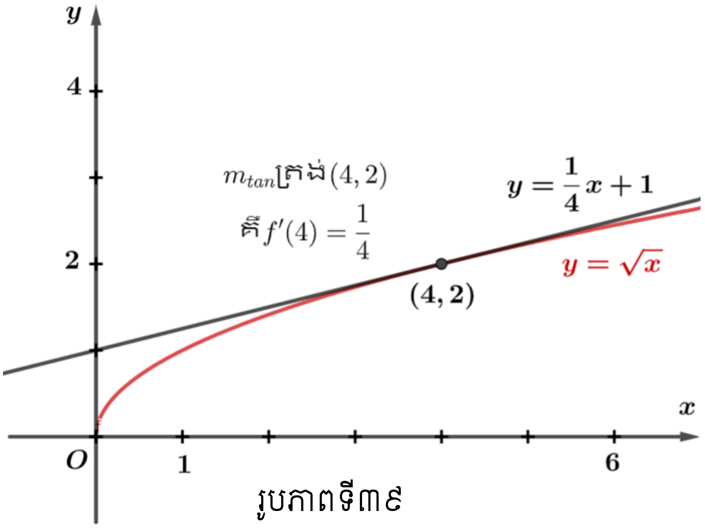
ដោយ $m_{\tan}=f'(x_0)=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$

គេបាន $m_{\tan}=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=4}=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$

គេបាន សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $y=\frac{1}{4}(x-4)+2=\frac{1}{4}x+1$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះក្រាបនៃ f ត្រង់ $(4,2)$ គឺ $\boxed{y=\frac{1}{4}x+1}$ ។

សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍



រូបភាពទី៣៩

ឧទាហរណ៍ទី៣៩៖ គេមាន $g(t) = \frac{1}{t^2}, t \neq 0$។ ចូរគណនា $g'(t)$។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $g(t) = \frac{1}{t^2}, t \neq 0$

គេបាន $g'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h}$

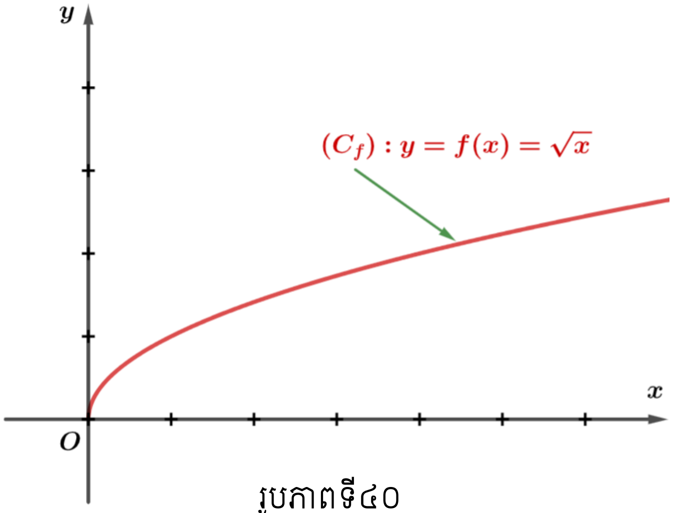
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{(t+h)^2} - \frac{1}{t^2}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{t^2 - (t+h)^2}{t^2(t+h)^2}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{-2ht - h^2}{t^2(t+h)^2}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{-2t - h}{t^2(t+h)^2}\right] = -\frac{2}{t^3}$$

ដូចនេះ $\boxed{g'(t) = -\frac{2}{t^3}}$។

ឧទាហរណ៍ទី៤០៖ គេឱ្យអនុគមន៍ $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$$x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$$



រូបភាពទី៤០

ក. ចូរឱ្យតម្លៃប្រហែលនៃ $\sqrt{4.1}$ ខ. ចូរឱ្យតម្លៃប្រហែល $\sqrt{9.2}$

គ. ចូរឱ្យតម្លៃប្រហែល $\sqrt{25.4}$ ឃ. ចូរឱ្យតម្លៃប្រហែល $\sqrt{36.5}$

ដំណោះស្រាយ

យើងមានអនុគមន៍ $f:\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R}^{+}$

$$x\mapsto f(x)=\sqrt{x} \text{ នាំឱ្យ } f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

តម្លៃប្រហែលកំណត់ដោយ $\tilde{f}(x)=f'(a)(x-a)+f(a)$

ក. ឱ្យតម្លៃប្រហែលនៃ $\sqrt{4.1}$

យក $x=4.1$ និង $a=4$

គេបាន $\tilde{f}(4.1)=f'(4)(4.1-4)+f(4)$

$$\tilde{f}(4.1)=\frac{1}{2\sqrt{4}}(0.1)+\sqrt{4}$$

$$\tilde{f}(4.1)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{10}+2=0.025+2=2.025$$

ដូចនេះ តម្លៃប្រហែលនៃ $\sqrt{4.1}\simeq 2.025$ ។

ខ. ឱ្យតម្លៃប្រហែល $\sqrt{9.2}$

យក $x=9.2$ និង $a=9$

គេបាន $\tilde{f}(9.2)=f'(9)(9.2-9)+f(9)$

$$\tilde{f}(9.2)=\frac{1}{2\sqrt{9}}(0.2)+\sqrt{9}$$

$$\tilde{f}(9.2)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}+3=0.033+3=3.033$$

ដូចនេះ តម្លៃប្រហែលនៃ $\sqrt{9.2}\simeq 3.033$ ។

គ. ចូរឱ្យតម្លៃប្រហែល $\sqrt{25.4}$

យក $x=0.4$ និង $a=25$

គេបាន $\tilde{f}(25.4)=f'(25)(25.4-0.4)+f(25)$

$$\tilde{f}(25.4)=\frac{1}{2\sqrt{25}}(0.4)+\sqrt{25}$$

$$\tilde{f}(25.4)=\frac{1}{2\times 5}(0.4)+5=0.04+5=5.04$$

ដូចនេះ តម្លៃប្រហែលនៃ $\sqrt{25.4}\simeq 5.04$ ។

ឃ. ចូរឱ្យតម្លៃប្រហែល $\sqrt{36.5}$

យក $x=36.5$ និង $a=36$

គេបាន $f(36.5)=f'(36)(36.5-36)+f(36)$

$$f(36.5)=\frac{1}{2\sqrt{36}}(0.5)+\sqrt{36}=0.041+6=6.041$$

ដូចនេះ តម្លៃប្រហែល $\sqrt{36.5}=6.041$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៤១៖ គណនាតម្លៃប្រហែល $\sin 62^o$ និង $\cos 33^o$ ។

ដំណោះស្រាយ

- ចំពោះ $\sin 62^o = \sin\frac{31\pi}{90}$ ដែល រង្វាស់មុំត្រូវគិតជា រ៉ាដ្យង់

  តាង $f(x)=\sin x$ នាំឱ្យ $f'(x)=\cos x$

  តម្លៃប្រហែលកំណត់ដោយ $\tilde{f}(x)=f'(a)(x-a)+f(a)$

  យក $x=\frac{31\pi}{90}$ និង $a=\frac{\pi}{3}$

  គេបាន $\sin\frac{31\pi}{90}\simeq\cos\frac{\pi}{3}\left(\frac{31\pi}{90}-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\frac{\pi}{3}$

  $$\sin\frac{31\pi}{90}\simeq\frac{1}{2}(0.035)+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

  $$\sin\frac{31\pi}{90}\simeq 0.0175+0.866\simeq 0.8835$$

ដូចនេះ $\sin 62^o\simeq 0.8835$ ។

- ចំពោះ $\cos 33^o=\cos\frac{11\pi}{60}$ ដែល រង្វាស់មុំត្រូវគិតជា រ៉ាដ្យង់

  តាង $f(x)=\cos x$ នាំឱ្យ $f'(x)=-\sin x$

  តម្លៃប្រហែលកំណត់ដោយ $\tilde{f}(x)=f'(a)(x-a)+f(a)$

  យក $x=\frac{11\pi}{60}$ និង $a=\frac{\pi}{6}$

  គេបាន $\cos\left(\frac{11\pi}{60}\right)\simeq-\sin\frac{\pi}{6}\left(\frac{11\pi}{60}-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\frac{\pi}{6}$

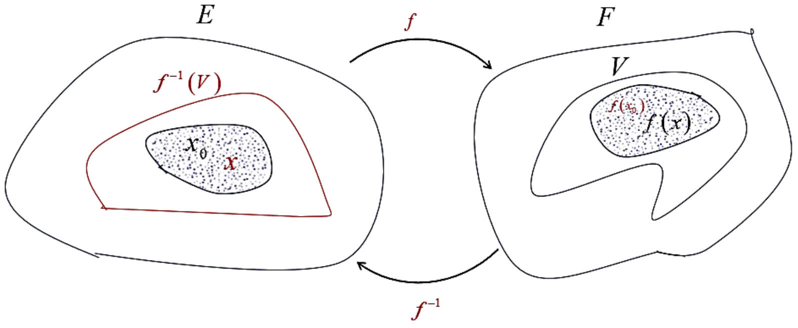
  $$\cos\left(\frac{11\pi}{60}\right)\simeq-0.026+0.866\simeq 0.84$$

ដូចនេះ $\cos 33^o\simeq 0.84$ ។

១.៧. ភាពជាប់ត្រង់ចំណុច a មួយ

គេមាន (E,T) និង (E,T') ជាលំហាតូប៉ូពីរ។

គេមានអនុវត្ត $f:E\to F$ និង $x_0\in E$ ។



រូបភាពទី៤១

គេថា f ជាប់ត្រង់ x_0 លុះត្រាតែ $\forall V\in v(f(x_0)),\ f^{-1}(V)\in v(x_0)$ ។

និយមន័យ១៤៖ [ភាពជាប់]

គេមាន (E,T) និង (E,T') ជាលំហតូប៉ូពីរ។

គេមានអនុវត្ត $f:E\to F$ ។

គេថា f ជាអនុគមន៍ជាប់[លើ E] លុះត្រាតែ $\forall x_0\in E,\forall V\in v(f(x_0)),\ f^{-1}(V)\in v(x_0)$ ។

ទ្រឹស្តីបទ ៖ គេមាន (E,T) និង (E,T') ជាលំហតូប៉ូពីរ។

គេមាន $f:E\to F$ ជាអនុវត្តមួយ។

គេថា f ជាអនុគមន៍ជាប់លុះត្រាតែរូបភាពច្រាសនៃគ្រប់សំណុំបើកគឺជាសំណុំបើក គឺមានន័យថា $\forall V\in T',\ f^{-1}(V)\in T$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៤២៖ អនុគមន៍ $f(x)=2x$ ពីសំណុំ $\mathbb{R}$ ទៅ $\mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍ជាប់ $\mathbb{R}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងបង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ចំណុច x_0 មួយក្នុង $\mathbb{R}$ ។

ចំពោះ $\forall\varepsilon>0$ នាំឱ្យមាន $\eta>0,\forall x,x_0\in\mathbb{R}\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|=2|x-x_0|<\varepsilon$

បើ $|x-x_0|<\dfrac{\varepsilon}{2}=\eta$ ។

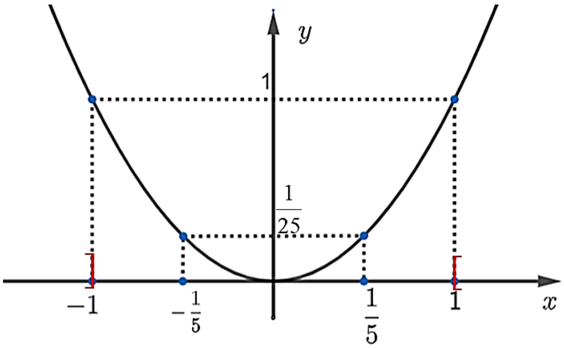
តាមនិយមន័យ យើងបាន f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x_0\in\mathbb{R}$ ។

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៤៣ ៖ គេមាន $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$x\mapsto x^2$$

តើរូបភាពនៃចន្លោះ $f(]-1,1[)=?$



រូបភាពទី៤២

ដំណោះស្រាយ

$f(]-1,1[)=[0,1[$ មិនមែនជាសំណុំបើក។

លំហាត់អនុវត្តន៍

សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍

1. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$

2. $g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 1 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$

3. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^4-y^4}{2x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ -1 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$

4. $g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^4-y^4}{2x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$

5. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^2y^2}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$

6. $g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^2y^2}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 2 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$

7. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2xy^2+y^2}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$

8. $g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2xy^2+y^2}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 1 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$

ដំណោះស្រាយ

1. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$

យើងមាន $f(0,0)=0$

យើងបាន $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2-y^2)=0^2-0^2=0$$

ដោយ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0$

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x,y)$ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់$(0,0)$ ។

2. $g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 1 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$

យើងមាន $g(0,0)=1$

យើងបាន $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2-y^2)$$

$$=0^2-0^2=0$$

ដោយ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) \neq g(0,0)$

ដូចនេះ អនុគមន៍ $g(x,y)$ ជាអនុគមន៍ដាច់ត្រង់ $(0,0)$ ។

3. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^4-y^4}{2x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ -1 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$

យើងមាន $f(0,0)=-1$

យើងបាន $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{4x^4-y^4}{2x^2+y^2}$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(2x^2-y^2)(2x^2+y^2)}{2x^2+y^2}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(2x^2-y^2)$$

$$=2\times0^2-0^2=0$$

ដោយ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\neq f(0,0)$

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x,y)$ ជាអនុគមន៍ដាច់ត្រង់ $(0,0)$ ។

4. $g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^4-y^4}{2x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$

យើងមាន $g(0,0)=0$

យើងបាន $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{4x^4-y^4}{2x^2+y^2}$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(2x^2-y^2)(2x^2+y^2)}{2x^2+y^2}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(2x^2-y^2)$$

$$=2\times0^2-0^2=0$$

ដោយ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=g(0,0)=0$

ដូចនេះ អនុគមន៍ $g(x,y)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $(0,0)$ ។

5. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^2y^2}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$

យើងមាន $f(0,0)=0$

យើងបាន $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{4x^2y^2}{x^2+y^2}$

យក $x=ky$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4k^2x^2x^2}{x^2+k^2x^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4k^2x^2}{1+k^2}=0$$

ដោយ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x,y)$ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់$(0,0)$ ។

$$6.\ g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^2y^2}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 2 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

យើងមាន $g(0,0)=2$

យើងបាន $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{4x^2y^2}{x^2+y^2}$

យក $x=ky$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4k^2x^2x^2}{x^2+k^2x^2}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4k^2x^2}{1+k^2}=0$$

ដោយ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)\neq g(0,0)$

ដូចនេះ អនុគមន៍$g(x,y)$ជាអនុគមន៍ដាច់ត្រង់$(0,0)$ ។

$$7.\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2xy^2+y^2}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

យើងមាន $f(0,0)=0$

យើងបាន $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+2xy^2+y^2}{x^2+y^2}$

យក $x=ky$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+2x\times k^2x^2+k^2x^2}{x^2+k^2x^2}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1+2x+k^2}{1+k^2}=1$$

ដោយ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\neq f(0,0)$

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x,y)$ជាអនុគមន៍ដាច់ត្រង់$(0,0)$ ។

$$8.\ g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2xy^2+y^2}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 1 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

យើងមាន $g(0,0)=1$

យើងបាន $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+2xy^2+y^2}{x^2+y^2}$

យក $x=ky$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+2x\times k^2x^2+k^2x^2}{x^2+k^2x^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1+2x+k^2}{1+k^2}=1$$

ដោយ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=g(0,0)$

ដូចនេះ អនុគមន៍ $g(x,y)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $(0,0)$ ។

១.៨.ស្វ៊ីត និងលីមីតលើ លីមីតក្រោម

១.៨.១. ស្វ៊ីត

ស្វ៊ីតគឺជាអនុគមន៍មួយដែលមានដែនជាសំណុំនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ។ វាត្រូវបានកំណត់ដោយ $a_1,a_2,a_3,\ldots$ ឬ $\langle a_n\rangle$ ។

ស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $\langle a_n\rangle$ ជាស្វ៊ីតរួមទៅរក a ឬមានលីមីត a បើគេឱ្យ $\varepsilon>0$,$\exists n_0>0$ នោះ $|a_n-a|<\varepsilon$ ដែល $n>n_0$ ។ បើមានលីមីតវាជាលីមីតមានតែមួយ និងជាស្វ៊ីតដែលរួមទៅរកលីមីតមួយគេកំណត់សរសេរ ដោយ $\lim_{n\to+\infty} a_n=a$ ឬ $\lim a_n=a$ ។

ទ្រឹស្តីបទ៖

១). បើ $\lim a_n=a,\lim b_n=b$ នោះ $\lim(a_n+b_n)=a+b,\ \lim a_nb_n=ab,\ \lim\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}$ បើ $b\neq 0$

២) បើ $\langle a_n\rangle$ ទាល់(មានន័យថាមានចំនួនថេរ M ដែល $|a_n|\le M$)និងបើ $\langle a_n\rangle$ ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូនកើន ឬម៉ូណូតូនចុះ ($a_{n+1}\ge a_n$ ឬ $a_{n+1}\le a_n$)នោះ $\langle a_n\rangle$ ជាស្វ៊ីតរួម។

៣).ស្វ៊ីតដែលរួមជាស្វ៊ីតទាល់។ បើស្វ៊ីតមិនរួមវាត្រូវបានគេហៅថាស្វ៊ីតរីក។

១.៨.២. លីមីតលើ និងលីមីតក្រោម

គេឱ្យ (x_n) ជាស្វ៊ីតចំនួនពិត គេហៅ៖

- លីមីតលើនៃ (x_n) គឺ $\overline{\lim_{n\to+\infty}} x_n=\inf_{k\ge1}\left(\sup_{n\ge k} x_n\right)=\lim_{k\to+\infty}\sup_{n\ge k} x_n$
- លីមីតគោលក្រោមនៃ (x_n) គឺ $\underline{\lim_{n\to+\infty}}\, x_n=\sup_{k\ge1}\left(\inf_{n\ge k} x_n\right)=\lim_{k\to+\infty}\inf_{n\ge k} x_n$
- តាមលក្ខណ: $\sup(-A)=-\inf A$ ឬ $\inf(-A)=-\sup A$

  គេបាន $\underline{\lim_{n\to+\infty}}\, x_n=-\overline{\lim_{n\to+\infty}}(-x_n)$
- លក្ខណ:

  (i). $a<\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, x_n\Rightarrow x_n>a$ ចំពោះតម្លៃ n ជាអនន្ត

  $\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, x_n<b\Rightarrow \exists k\ge1,\forall n\ge k, x_n<b$

  (ii). $a\in\mathbb{R}, a=\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, x_n\Leftrightarrow\begin{cases}(1)\ \forall\varepsilon>0,\exists k\ge1,\forall n\ge k, x_n<a+\varepsilon\\(2)\ \forall\varepsilon>0,\exists k\ge1,\forall n\ge k, x_n>a-\varepsilon\end{cases}$

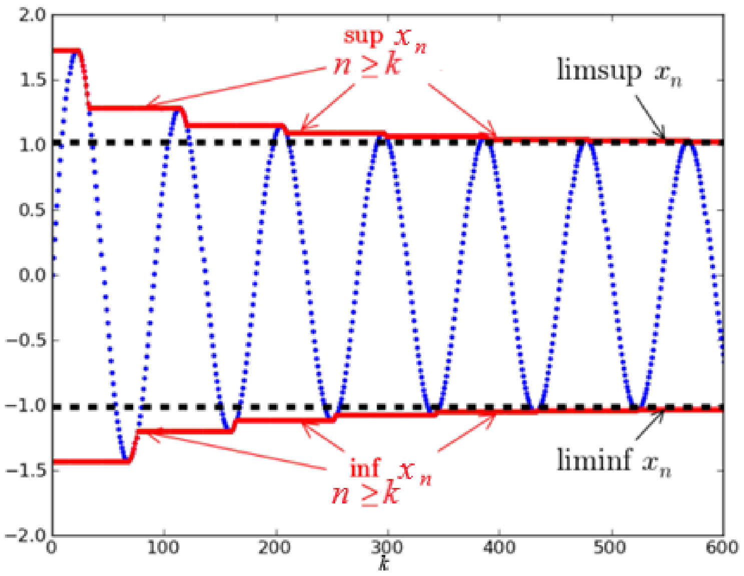
❖ ទ្រឹស្តីបទ៖

(i). $\underline{\lim}_{n\to+\infty} x_n \le \overline{\lim}_{n\to+\infty} x_n$

(ii). $\underline{\lim}_{n\to+\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to+\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = a$

(iii). $\overline{\lim}_{n\to+\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$

$\underline{\lim}_{n\to+\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$



រូបភាពទី៤៣

ឧទាហរណ៍៤៤៖ រកលីមីតលើ និងលីមីតក្រោមនៃស្វ៊ីត (x_n) ដែល $x_n = \frac{n+1}{n}\sin\frac{n\pi}{3}, n\ge 1$ ។

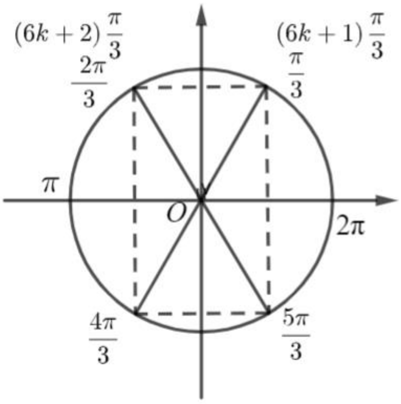
ដំណោះស្រាយ

គេបានសំណុំតួនៃស្វ៊ីតគឺ $2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2},0,-\frac{5}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{6}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2},\dots$

ដោយហេតុថា៖

$u_n = \frac{n+1}{n}$ ជាស្វ៊ីតចុះគេបាន

$$\begin{cases} \sup_{n\ge k} x_n = \left\{\frac{6k+2}{6k+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \\ \inf_{n\ge k} x_n = \left\{-\frac{6k+6}{6k+5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \end{cases}$$



រូបភាពទី៤៤

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{\lim_{n\to+\infty}} x_n = \overline{\lim_{k\to+\infty}} \dfrac{6k+2}{6k+1}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \underline{\lim_{n\to+\infty}} x_n = \underline{\lim_{k\to+\infty}} -\dfrac{6k+6}{6k+5}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

ចំណាំ៖បើ A ជាសំណុំតម្លៃរាប់អស់នៃadherent នៃស្វ៊ីត (x_n) គេបាន៖

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} x_n = \max A$$

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}} x_n = \min A$$

- a ហៅថាតម្លៃadherentនៃស្វ៊ីត (x_n) កាលណា a ជាតម្លៃប្រំដែលនៃ x_n គឺ a ជាលីមីត នៃស្វ៊ីតទាញ

  ចេញពមួយពី (x_n) ដូចក្នុងឧទាហរណ៍៖

  $x_n = \dfrac{n+1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{3}$ គេបាន $A = \left\{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

  ដូចនេះ $\overline{\lim_{n\to+\infty}} x_n = \max A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

  $\underline{\lim_{n\to+\infty}} x_n = \min A = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ។

ឧទាហរណ៍៤៥៖ គណនា $\underline{\lim_{n\to+\infty}} u_n$ និង $\overline{\lim_{n\to+\infty}} u_n$ បើ $u_n = 2(-1)^n, n\in\mathbb{N}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន៖ $u_n = 2(-1)^n, n\in\mathbb{N}$

នោះគេបាន $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,...)$

$= (-2,2,-2,2,-2,...)$

យើងបាន $A = \{-2,2\}$ ហើយ $\underline{\lim_{n\to+\infty}} u_n = \max A = 2$

និង $\overline{\lim_{n\to+\infty}} u_n = \min A = -2$ ។

១.៩. ភាពបំពេញនៃR

ភាពរួមនៅក្នុង R ត្រូវបានកំណត់ដាក់នៅក្នុងនិយមន័យ ប៉ុន្តែចំនួន "សនិទាន" ត្រូវតាងដោយ "ចំនួនពិត"។

ជាដំបូងយើងបង្ហាញថាគ្រប់ស្វ៊ីតកូស៊ីនៃចំនួនសនិទានរួមនៅក្នុង R ឬច្បាស់ជាងនេះទៅទៀត ដែលរូបភាពវាជាអីសូម៉ូភីសនៅក្រោមលំដាប់ $i: Q\to R$ មានលីមីតនៅក្នុង R ។

សំណើ៖ បើ $\{x_n\}$ គឺជាស្វ៊ីតកូស៊ីនៃចំនួនសនិទាន និង $\{x_n\}\in\xi$ នោះ $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ នៅក្នុង R

i.e. $\lim_{n\to\infty} i(x_n) = \xi$ ដែល i ជាអ៊ីសូម៉ក់ភីស។

ចំណាំ៖ i ជាអ៊ីសូម៉ក់ភីសកាលណា $\left(i(x+y)=\{x+y\}=\{x\}\underset{R}{+}\{y\}=i(x)\underset{R}{+}i(y)\right)$ និង $\left(i(x+y)=\{x+y\}=\{x\}\underset{R}{\cdot}\{y\}=i(x)\underset{R}{\cdot}i(y)\right)$ (i ជាអ៊ីសូម៉ក់ភីសមានន័យថា $i(x)=\{x\}$)។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង ε ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ ដោយ ε ផ្ទុកស្វ៊ីតវិជ្ជមាន $\{z_n\}$ នៃចំនួនសនិទាន។ តាមនិយមន័យខាងលើ ε ជាចំនួនថេរវិជ្ជមានហើយស្វ៊ីត $\{z_n\}$ ជាចំនួនសនិទាន។ មានចំនួនសនិទានវិជ្ជមាន 2α និងចំនួនគត់វិជ្ជមាន n_1 ដែល $z_n>2\alpha$ ចំពោះ $n\geq n_1$ ។ ដូចនេះ $z_n-\alpha>\alpha$ ចំពោះ $n\geq n_1$ ហើយគេបាន $\{z_n-\alpha\}$ ជាស្វ៊ីតចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ នោះគេបាន $[z_n]>i(\alpha)$

មានន័យថា $\varepsilon>i(\alpha)$ $\quad (1)$

ដោយ $\{x_n\}$ ជាស្វ៊ីតកូស៊ីមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន n_2 ដែល $|x_n-x_m|<2\alpha$ ចំពោះ $n,m\geq n_2$ ។
គេបាន $\alpha-|x_n-x_m|>\alpha$ ចំពោះ $n,m\geq n_2$ ។ ម្យ៉ាងទៀតចំពោះ $n\geq n_2$ ស្វ៊ីត $\{|x_n-x_m|\}_{m\geq 1}$ មានលក្ខណៈដែល $[|x_n-x_m|]<i(\alpha)$ $\quad (2)$

នោះគេបាន $n\geq n_2$ សមមូល

$$|i(x_n)-\xi|=|i(x_n)-[x_m]|=\left|\left[\{x_n-x_m\}_{m\geq 1}\right]\right|=[|x_n-x_m|]<i(\alpha)<\varepsilon$$

ដោយប្រើសំណើខាងលើ និង $(1),(2)$ តាមលំដាប់ នោះ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$ ។

នៅក្នុងលំដាប់នេះដើម្បីជៀសវាងពីកំណត់សម្គាល់ផ្សេងដែលច្របូកច្របល់យើងនឹងកំណត់ $i(x)$ ដោយ x ។

ដូច្នេះ ចំពោះឧទាហរណ៍បន្ទាប់ $|\xi-x|$ មានន័យថា $|\xi-i(x)|$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍មូលដ្ឋានសំខាន់

១. លើ $\mathbb{R}^n$ គេមានអនុគមន៍ចម្ងាយពីរកំណត់ដោយៈ

$$d(x,y)=\max\left\{|x_i-y_i|:i\in\overline{1,n}\right\}$$

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$$

២.បើ d ជាលំហាមេទ្រិកមួយលើ X ចូរបង្ហាញថាអនុគមន៍ e ដែលកំណត់ដោយ

$e(a,b)=\min(1,d(a,b))$ ជាលំហាមេទ្រិចលើ E ។

៣.បើ d ជាលំហាមេទ្រិកមួយលើ X ចូរបង្ហាញថាអនុគមន៍ e ដែលកំណត់ដោយ

$e(a,b)=\dfrac{d(a,b)}{1+d(a,b)}$ ជាលំហាមេទ្រិចលើ E ។

៤. $\mathrm{B}(X,Y)$ ជាគ្រួសារអនុគមន៍ទាល់ពីលំហ X ទៅលំហាមេទ្រិច (Y,d) ។បង្ហាញថាអនុគមន៍ e ដែល

កំណត់ដោយៈ $\forall f,g\in B(X,Y):e(f,g)=\sup\left\{d\left(f(x),g(x)\right):x\in X\right\}$ ជាចម្ងាយលើ $\mathrm{B}(X,Y)$ ។

៥.បង្ហាញថាអនុវត្តន៍ $\forall x,y\in E, d(x,y)=\sum_{n=0}^{+\infty}2^{-n}\dfrac{|f_n(x)-f_n(y)|}{1+|f_n(x)-f_n(y)|}$ ជាចម្ងាយលើ E ដែលធ្វើឱ្យ f_n ជាប់ $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

មេរៀនទី២៖ ទ្រឹស្តីរង្វាស់

២.១.ប្រវែង ក្រឡាផ្ទៃ មាឌសំណុំរងនៃ $\mathbb{R}^d$

២.១.១. ប្រវែង

ប្រវែងនៃចន្លោះនៅក្នុង $\mathbb{R}$ ៖ បើ I ជាដែនកំណត់នៅចន្លោះចំណុចចុង a,b (ដែល I ជាចន្លោះមួយនៃ $(a,b),[a,b],[a,b),(a,b]$)នោះប្រវែងត្រូវបានកំណត់ដោយ៖

$$l(I)=|b-a|$$

លក្ខណៈសំខាន់នៃប្រវែងគឺជាការបូកបន្ថែម៖ បើចន្លោះ I ជាប្រជុំដាច់គ្នានៃគ្រួសារកំណត់មួយ $\{I_k\}_{k=1}^n$ នៃ ចន្លោះនោះគឺ $I=\bigcup_k I_k$ នោះគេបាន

$$l(I)=\sum_{k=1}^{n} l(I_k)$$

តាង $\{a_i\}_{i=0}^N$ ជាសំណុំផ្សេងៗគ្នានៃចន្លោះ $I,I_1,...I_n$ នៅក្នុងលំដាប់កើន។ នោះ I មានចំណុចខាងចុង a_0,a_N ដែលចន្លោះនីមួយៗត្រូវមានចំណុចខាងចុងគឺ a_i,a_{i+1} ចំពោះ i (បើចំណុចចុងនៃ I_k គឺ a_i និង a_j ដែល $j>i+1$ នោះចំណុច a_{i+1} គឺនៅចំណុចខាងក្នុងនៃ I_k ដែលមានន័យថា I_k ត្រូវតែប្រសព្វជាមួយចន្លោះផ្សេងទៀត I_m)។ ម្យ៉ាងវិញទៀតគូផ្សេងៗ a_i,a_{i+1} នៃចំណុចជាប់ៗគ្នាគឺជាចំណុចចុងនៃចន្លោះ I_k (ចន្លោះ (a_i,a_{i+1}) ត្រូវតែគ្របដោយចន្លោះ I_k មួយចំនួនដោយចំណុចុងនៃ I_k គឺជាចំនួនតគ្នានៅក្នុងស្វ៊ីត $\{a_j\}$ វាបន្តតាម a_i និង a_{i+1})។ នោះគេបាន

$$\ell(I)=a_N-a_0=\sum_{i=o}^{N-1}(a_{i+1}-a_i)=\sum_{k=1}^{n}\ell(I_k)$$

២.១.២. ផ្ទៃក្រឡា

ផ្ទៃក្រឡាដែលមានដែនកំណត់នៅក្នុង $\mathbb{R}^2$ ។ ផ្ទៃក្រឡានឹងត្រូវបង្កើតឡើងនៅក្នុងទ្រឹស្តីរង្វាស់ទូទៅនៅពេលក្រោយនៅក្នុងការសិក្សានេះ។ តាមពិតទៅ ដែនកំណត់នៃផ្ទៃក្រឡាដែលមានរាងជាចតុកោណកែងគឺត្រូវបានកំណត់ដោយយ៉ាងងាយ។ ចតុកោណកែង A មួយនៅក្នុង $\mathbb{R}^2$ គឺត្រូវបានកំណត់ដោយ ផលគុណនៃចន្លោះពីរ I,J នៅក្នុង $\mathbb{R}$ ៖

$$A=I\times J=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in I, y\in J\}$$

នោះសំណុំផ្ទៃក្រឡា$(A)=l(I)l(J)$។

យើងយកផ្ទៃក្រឡាដោយការបូកបន្ថែម។ បើចតុកោណកែង A គឺជាការប្រជុំដាច់គ្នានៃគ្រួសារកំណត់មួយនៃចតុកោណកែង $A_1,...,A_n$ នោះគេបាន $A=\bigcup_k A_k$ នោះគេបាន៖

$$\text{ផ្ទៃក្រឡា}(A)=\sum_{k=1}^{n}\text{ ផ្ទៃក្រឡា}(A_k)$$

ជាធម្មតា យើងត្រូវពិចារណាលើករណី នៅពេលដែលជ្រុងទាំងអស់នៃចតុកោណកែងទាំងអស់គឺជាចន្លោះបើកពាក់កណ្តាលនៃទម្រង់ $[a,b)$។ ដំបូងពិចារណាករណីជាក់លាក់មួយនៅពេលដែលចតុកោណកែង $A_1,...,A_k$ មានទម្រង់ជាក្បឿនិយ័ត(Regular tiling)

នៃ A ដោយតាង $A=I\times J$ ដែល $I=\bigcup_i I_i$ និង $J=\bigcup_j J_j$ ហើយយើងសន្មតថាគ្រប់ចតុកោណកែងទាំងអស់ A_k មានទម្រង់ $I_i\times J_j$ នោះគេបាន៖

$$area\left(A\right)=l\left(I\right)l\left(J\right)=\sum_i l\left(I_i\right)\sum_j l\left(J_j\right)=\sum_{ij} l\left(I_i\right)l\left(J_j\right)=\sum_k area\left(A_k\right)$$

ឥឡូវយើងគិតពីករណីទូទៅនៅពេលដែល A ជាប្រជុំសំណុំដាច់គ្នាដែលរើសតម្លៃណាក៏បាននៃចតុកោណ កែង A_k ។ តាង $\{x_i\}$ ជាសំណុំទាំងអស់ X កូអរដោនេនៃចំណុចចុងចតុកោណកែង A_k ដោយដាក់វានៅក្នុងលំដាប់កើន និង $\{y_i\}$ ជាសំណុំដូចគ្នានៃ Y កូអរដោនេដោយលំដាប់កើនដូចគ្នា។ ចូរពិនិត្យចតុកោណកែង៖

$$B_{ij}=\left[x_i,x_{i+1}\right)\times\left[y_i,y_{i+1}\right)$$

នោះគ្រួសារ $\left\{B_{ij}\right\}_{i,j}$ មានទម្រង់ជាRegular tilingនៃ A ចំពោះករណីទី១

$$\text{area (A)}=\sum_{i,j} area\left(B_{ij}\right)$$

ម្យ៉ាងវិញទៀត A_k នីមួយៗគឺជាប្រជុំដាច់គ្នានៃ B_{ij} មួយចំនួន ហើយលើសពីនេះទៅទៀត B_{ij} ទាំងនោះដែល ជាសំណុំរងនៃ A_k បង្កើតបានជាRegular tiling នៃ A_k ដែលមានន័យថា៖

$$\text{area }\left(A_k\right)=\sum_{B_{ij}\subset A_k} area\left(B_{ij}\right)$$

ការបញ្ចូលគ្នានៃបន្ទាត់ពីរ និងប្រើការពិតដែលថា B_{ij} នីមួយៗគឺជាសំណុំរងនៃសំណុំ A_k នោះគេបាន៖

$$\sum_k area\left(A_k\right)=\sum_k\sum_{B_{ij}\subset A_k} area\left(B_{ij}\right)=\sum_{i,j} area\left(B_{ij}\right)=area\left(A\right)$$

២.១.៣. មាឌ

មាឌនៃដែនកំណត់នៅក្នុង $\mathbb{R}^3$ ។ ការបង្កើតមាឌគឺដូចគ្នាទៅនឹងផ្ទៃក្រឡា។ ចូរពិចារណានៅក្នុងប្រអប់ $\mathbb{R}^3$ គឺដែនកំណត់នៃទម្រង់ $A=I\times J\times K$ ដែល I,J,K ជាចន្លោះនៅក្នុង $\mathbb{R}$ និងសំណុំ

$$vol\left(A\right)=l\left(I\right)l\left(J\right)l\left(K\right)$$

បន្ទាប់មកមាឌក៏ជាអនុគមន៍បន្ថែមផងដែរ ដែលត្រូវបានបង្ហាញតាមរបៀបស្រដៀងគ្នា។ ក្រោយយើងនឹងផ្តល់ភស្តុតាងលម្អិតនៃសម្រាយបញ្ជាក់ស្រដៀងគ្នាមួយនៅក្នុងការកំណត់អរូបី។

២.២.ប្រវែងសំណុំបើក និងបិទ

ប្រវែងនៃសំណុំបើក

ដោយសំណុំបើក O មួយអាចត្រូវបានបង្ហាញជាចំនួនដែលរាប់បាននៃចន្លោះបើកដែលមិនជាប់គ្នាទៅវិញទៅមក $I_1,I_2,\ldots$ ដែលលើកលែងតែក្នុងករណីដែលមានលំដាប់ទាក់ទងតែមួយ។

និយមន័យ២.១៖ ប្រវែងនៃសំណុំបើក $O=\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ ដែល I_k ចន្លោះបើកដែលមិនទាក់ទងគ្នាគឺ

$$L(O)=L(I_1)+L(I_2)+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}L(I_k) \qquad (1)$$

បើ O ត្រូវបានកំណត់នៅក្នុងចន្លោះមួយ $I=[a,b]$ នោះស៊េរីនៅក្នុង (1) រួមទៅជាចំនួនមិនអវិជ្ជមានតូចបំផុត ឬស្មើនឹង $b-a$ គឺ $0\le L(O)\le b-a$ ។

ប្រវែងនៃសំណុំបិទ៖ បើសំណុំបិទ C នៅក្នុង $[a,b]$ បំពេញអោយសំណុំបើក នោះគេបាន៖

និយមន័យ២.២ ប្រវែងនៃសំណុំបិទ $C\subset[a,b]$ គឺ $L(C)=b-a-L(\overline{C}) \qquad (2)$

ឧទាហរណ៍១៖ $l((0,1])=l([0,1])=1,$ និង $l((1,\infty))=\infty$

ឧទាហរណ៍២៖ ចូររកប្រវែងនៃសំណុំ $\bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{x:\frac{1}{k+1}\le x\le\frac{1}{k}\right\}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $I_k=\left\{x:\frac{1}{k+1}\le x\le\frac{1}{k}\right\}$ នោះគេបាន

$$I_1=\left\{x:\frac{1}{2}\le x<1\right\},I_2=\left\{x:\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}\right\},\cdots$$

ដូច្នេះ $L(I_1)=1-\frac{1}{2},L(I_2)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\cdots,L(I_n)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ ។

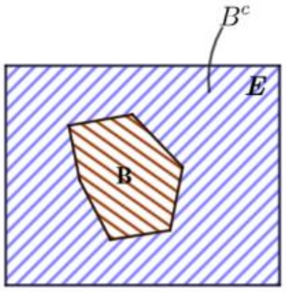
ដោយ I_k ជាប្រជុំដាច់គ្នា

$$L\left[\bigcup_{k=1}^{n}I_k\right]=\sum_{k=1}^{n}L(I_k)=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

ដូចនេះ $L\left[\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k\right]=\lim_{n\to\infty}L\left[\bigcup_{k=1}^{n}I_k\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$ ។

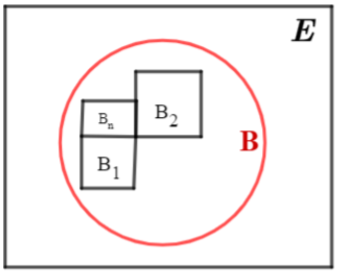
២.៣. σ - ពីជគណិតឬTribu និងសំណុំBorel

២.៣.១. σ -ពីជគណិត



រូបភាពទី២.១

គេឱ្យ E ជាសំណុំមិនទទេមួយ និង $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{P}(E)$ មានន័យថា $\mathscr{B}$ ជាគ្រួសារសំណុំរងទូទៅមួយនៃ E គឺ $B\in\mathscr{B}\Leftrightarrow B\subseteq E$ ។គេថា $\mathscr{B}$ ជា σ ពីជគណិតឬទ្រីប៊ុយមួយលើ E កាលណាវាផ្ទៀងផ្ទាត់នូវលក្ខខណ្ឌបីគឺ៖



រូបភាពទី២.២

១. $\varnothing\in\mathscr{B}$

២. $\forall B\in\mathscr{B}$ នោះគេបាន $B^c=E\setminus B\in\mathscr{B}$

៣. $\forall(B_n),n\in\mathbb{N}$ ជាស្វ៊ីតនៃ $\mathscr{B}$ (មានន័យថា $\forall n\in\mathbb{N},B_n\in\mathscr{B}$)

នោះគេបាន$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathscr{B}$

ឧទាហរណ៍៣៖ បើ $A \subset \mathbb{X}$ ប្រជុំ $\{\varnothing, A, A^c, X\}$ ជា $\sigma-$ពីជគណិត។

លក្ខខណ្ឌកំណត់ $\sigma-$ពីជគណិតអាចប្រើភាពខុសគ្នានៃលក្ខណៈសំណុំ។

ឧទាហរណ៍៤៖ បើ $\mathbb{X}$ មិនអាចរាប់បាន $\mathscr{M} = \{A \subset \mathbb{X} : A$ គឺរាប់អស់ ឬ A^c រាប់អស់$\}$ គឺជា σ ពីជគណិត។

ចំណាំថា៖ $\left(A^c\right)^c = A$ ដូចច្នេះ បើ $A \in \mathscr{M}$ វាគឺអាចរាប់បាន ឬ A^c អាចរាប់បាននោះគេបាន $A^c \in \mathscr{M}$ ។

តាង $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathscr{M}$ បើគ្រប់សំណុំទាំងអស់រាប់បាននោះប្រជុំរាប់បានគឺរាប់បាន និងវានៅក្នុង $\mathscr{M}$ ។ បើមិន គ្រប់សំណុំទាំងអស់រាប់បាន នោះមានសន្ទស្សន៍ $j \in \mathbb{Z}^+$ ដែលថា A_j^c គឺរាប់បាន។

ដូចនេះ $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_j\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c \subset A_j^c$ គឺរាប់បាន។

ឧទាហរណ៍៥៖ តាង $\mathbb{X} = (0,1]$ និង $\mathscr{M} = \{\varnothing$ ជាប្រជុំរាប់អស់នៃចន្លោះដាច់គ្នានោះគឺបើកនៅខាងឆ្វេង និងបិទនៅខាងស្តាំ$\}$ ដែល $A \in \mathscr{M}$ ហើយ $A = \bigcup_{i=1}^{m}(a_i, b_i], a_i > b_{i-1}$ ។ បង្ហាញថា $\mathscr{M}$ មិនមែនជា σ ពីជគណិត។

ដំណោះស្រាយ

យើងពិចារណាសំណុំ៖

$$A_1 = \left(0, \frac{1}{2}\right], A_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} +, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right],$$

$$A_3 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5}\right], \ldots$$

នោះ$\bigcup_{i=1}^{m} A_i$ ជាប្រជុំរាប់អស់នៃចន្លោះដាច់គ្នានោះគឺមិនមានប្រជុំរាប់អស់នៃចន្លោះដាច់គ្នាទេ។

ឧទាហរណ៍៦៖ តាង $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ និង $\mathscr{M} = \{\varnothing$ ជាប្រជុំរាប់អស់នៃចន្លោះដាច់គ្នាដែលមានទម្រង់ $[i, i+1)$ និងពាក់កណ្តាល $(-\infty, i)$ និង $[i, \infty), i \in \mathbb{Z}\}$ ។ បង្ហាញថា $\mathscr{M}$ ជា σ ពីជគណិត។

ដំណោះស្រាយ

$\varnothing$ និង $\mathbb{R}$ នៅក្នុង $\mathscr{M}$

A ជាប្រជុំរាប់អស់នៃការជ្រើសរើសពីប្រជុំរាប់អស់នៃចន្លោះដាច់គ្នា $[i, i+1)$ និងកន្លះបន្ទាត់ $(-\infty, i)$ និង $[i, \infty), i \in \mathbb{Z}\}$ ហើយ θ និង $\mathbb{R}$ នៅក្នុង $\mathscr{M}$ ។ សំណុំប្រជុំអាចរាប់បាននៃការជ្រើសរើសពីប្រជុំរាប់អស់នៃចន្លោះដាច់គ្នា $[i, i+1)$ និងបង្ហាញពីកន្លះបន្ទាត់ជាប្រជុំរាប់អស់នៃកន្លះបន្ទាត់ដែលបានបង្ហាញ។ ដើម្បីឱ្យឃើញថា $\mathscr{M}$ ជាបិទនៅក្រោមសំណុំបំពេញចំពោះឧទាហរណ៍ ចំណាំថា $[i, i+1)^c = (-\infty, i) \cup [i+1, \infty)$ ។ បើ $j < i$ នោះ

$$\left(\left[j,j+1\right)\cup\left[i,i+1\right)\right)=\left(\infty,j\right)\cup\left[j+1,i\right)\cup\left[i+1,\infty\right)$$

ដូចនេះយើងអាចបង្ហាញថាបំពេញនៃប្រជុំរាប់អស់ចំពោះចន្លោះដាច់ និងកន្លះបន្ទាត់ជាប្រសព្វនៃសំណុំបំពេញ ដែលអាចសរសេរជាប្រជុំរាប់អស់នៃចន្លោះដាច់ និងកន្លះបន្ទាត់។

ដូចនេះ $\mathscr{M}$ ជា σ ពីជគណិត។

ចំណាំ៖ បើ $A\in\mathscr{A}$ នោះ $\mathscr{A}$ ហៅថាសំណុំអាចវាស់បាន។

ឧទាហរណ៍៖ ១. $\mathscr{A}=\{\varnothing,X\}$

២. $\mathscr{A}=\mathscr{P}\left(X\right)$

២.៣.២.សំណុំ Borel

និយមន័យ២.៣៖ σ ពីជគណិតនៃសំណុំរង្វាស់ឡឺបេសវាស់បាន $\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $\mathfrak{M}$ ។ σ ពីជគណិតបង្កដោយគ្រប់ចន្លោះបើកហៅថាBorel σ ពីជគណិតហើយកំណត់ដោយ $\mathfrak{B}$។ A ជាសំណុំរបស់ $\mathfrak{B}$ ហៅថាសំណុំBorel។

ដោយគ្រប់ចន្លោះគឺជាសំណុំរង្វាស់ឡឺបេសវាស់បាន វាបង្ហាញថា $\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{M}$ ហើយគេទទួលបាន $\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$។ ដោយសំណុំBorel Bគឺជាសំណុំឡឺបេសវាស់បាន វាមានរង្វាស់ឡឺបេស $m(B)$ ដែលពេលខ្លះសំដៅទៅរង្វាស់Borel។ ម្យ៉ាងវិញទៀតវាមានលក្ខខណ្ឌទៅ $\mathfrak{B}$ នៃរង្វាស់ឡឺបេស m គឺពេលខ្លះគេហៅវាថា″រង្វាស់Borel″។

សំណើ៖ តាង $I\subseteq\mathbb{R}$ ជាចន្លោះបើក នោះ $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:x+y\in I\right\}\in\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}$។

សម្រាយបញ្ជាក់

សម្គាល់សំណុំនៅក្នុងសំណួរដោយ A និងពិនិត្យចំណុចដែលយើងជ្រើសរើស $\langle\xi,\eta\rangle\in A$។

នោះ $\xi+\eta\in I$ ដែលមាន $\delta>0$ ហើយ $\left(\xi+\eta-2\delta,\xi+\eta+2\delta\right)\subseteq I$

វាបានបង្ហាញថា

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle\in(\xi-\delta,\xi+\delta)\times(\eta-\delta,\eta+\delta)&\Rightarrow-\delta<x-\xi<\delta \text{ និង} -\delta<y-\eta<\delta\\&\Rightarrow-2\delta<(x+y)-(\xi+\eta)<2\delta\\&\Rightarrow(\xi+\eta)-2\delta<x+y<(\xi+\eta)+2\delta\\&\Rightarrow x+y\in(\xi+\eta-2\delta,\xi+\eta+2\delta)\\&\Rightarrow x+y\in I\\&\Rightarrow\langle x,y\rangle\in A\end{aligned}$$

ដូច្នេះ $(\xi-\delta,\xi+\delta)\times(\eta-\delta,\eta+\delta)\subseteq A$។ តាង p,q,r,s ជាចំនួនសនិទានដែល $\xi-\delta<p<\xi<q<\xi+\delta$ និង $\eta-\delta<r<<\eta<s<\eta+\delta$។ នោះយើងបាន

$$\langle\xi,\eta\rangle\in(p,q)\times(r,s)\subseteq(\xi-\delta,\xi+\delta)\times(\eta-\delta,\eta+\delta)\subseteq A$$

យើងឃើញថា $\langle\xi,\eta\rangle\in A$ ដែលជាផលគុណដេកាត $(p,q)\times(r,s)\subseteq A$ នៃចន្លោះជាចំណុចចុងសនិទាន p,q,r,s។ ប្រជុំនៃផលគុណដេកាតទាំងអស់ជារបស់ A។ ផលគុណដេកាត $(p,q)\times(r,s)$ ជារបស់ $\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}$ហើយអាចមានតែវាប៉ុណ្ណោះដែលអាចរាប់បានជាដែលជាចំណុចចុង

របស់ p,q,r,s ជាចំនួនសនិទាន។ ដូច្នេះ A ជាប្រជុំរាប់អស់នៃសំណុំរបស់ $\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}$ ហើយវាត្រូវជារបស់ $\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}$ ។

ឧទាហរណ៍៧៖ តាង D ជា σ ពីជគណិតនៃសំណុំរង $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ។ បង្ហាញថាគ្រួសារ ε នៃសំណុំរង E នៃ $\mathbb{R}$ គឺ $\left\{\langle x,y\rangle\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: x+y\in E\right\}\in D$ ជា σ ពីជគណិត។

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះ $E\subseteq\mathbb{R}$ សម្គាល់ឃើញថាសំណុំភ្ជាប់ $\left\{\langle x,y\rangle\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: x+y\in E\right\}$ ដោយ E^* ។ យើងនឹងបង្ហាញថាគ្រួសារ ε នៃសំណុំរង E នៃ $\mathbb{R}$ គឺ $E^*\in D$ គឺជា σ ពីជគណិត។

ដំបូងយើងពិភាក្សាលើ $\varnothing^*=\varnothing$

ពេល $E=\varnothing$ គឺមិនអាចទៅរួចចំពោះ $\langle x,y\rangle\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ហើយ $x+y\in E$ មានន័យថា

$$\varnothing^*=E^*=\left\{\langle x,y\rangle\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: x+y\in E\right\}=\varnothing$$

បន្ទាប់តាង $\{E_k\}_{k\geq1}$ ជាស្វ៊ីតនៃសំណុំរង $\mathbb{R}$ នោះគេបាន

$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)^*=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k^*$$

ពីព្រោះចំពោះ $\langle x,y\rangle\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ យើងមាន

$$\langle x',y'\rangle\in\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)^*\Leftrightarrow x+y\in\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\Leftrightarrow x+y\in E_k,\forall k\in\mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in E_k^*,\forall k\in\mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k^*$$

ដោយវាស្មើគ្នាងាយនឹងឃើញ

$$\left(E^*\right)^c=\left(E^c\right)^*$$

ជាការពិត

$$\langle x,y\rangle\in\left(E^*\right)^c\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\notin E^*\Leftrightarrow x+y\notin E$$

$$\Leftrightarrow x+y\in E^c\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in\left(E^c\right)^*$$

ដូចេះ ε ជា σ ពីជគណិតពីព្រោះ D ជា σ ពីជគណិត។

២.៤. បញ្ញត្តិដោយរង្វាស់

ជាទូទៅបញ្ញត្តិដោយប្រវែងសំណុំណាមួយដោយបន្ទាត់ចំនួនពិតនាំអោយបាននូវបញ្ញត្តិដោយប្រវែងរបស់សំណុំ។ ដោយភាពស្រដៀងគ្នាជាមួយនឹងប្រវែងវាហាក់ដូចជាឱ្យមានរង្វាស់ដោយសំណុំE ដែលតំណាងដោយ $m(E)$ ដែលបំពេញតម្រូវការលក្ខណៈដូចខាងក្រោម៖

A-1 $m(E)$ កំណត់បានសម្រាប់សំណុំនីមួយៗរបស់ E

A-2 $m(E)\geq0$

A-3 (បន្ថែមកំណត់) បើ $E=\bigcup_{k=1}^{n}E_k$ ដែល E_k ជាសំណុំដាច់នោះ $m(E)=\sum_{k=1}^{n}m(E_k)$

A-4 (បន្ថែមដោយរាប់) បើ $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$ ដែល E_k ជាសំណុំដាច់នោះ $m(E)=\sum_{k=1}^{\infty}m(E_k)$

A-5 (ម៉ូណូតូន) បើ $E_1\subset E_2 \Rightarrow m(E_1)\le m(E_2)$

A-6 (បម្លែងមិនប្រែប្រួល) បើ ចំណុចនីមួយៗរបស់សំណុំE គឺបានបំប្លែងចម្ងាយស្មើគ្នាក្នុងទិសដៅដូចគ្នានៅលើបន្ទាត់ពិត នោះរង្វាស់ដោយសំណុំដែលបានបំប្លែងដូចគ្នាទៅនឹង $m(E)$ ។

A-7 បើEជាចន្លោះនោះ $m(E)=L(E)$ ជាប្រវែងដោយចន្លោះ។

កំណត់សម្គាល់ ថាបើលក្ខខណ្ឌតម្រូវឱ្យមានសម្រាប់ A-4 នោះ ក៏ត្រូវការឱ្យមាន A-3 ដែរ។ទួសបីយ៉ាងណាក៏ដោយ ការផ្ទុយគ្នាមិនត្រូវការឱ្យក្លាយជាកាពិតអ្វីឡើយ ។ លក្ខណៈទាំងពីរសម្រាប់ A-3 និង A-4 ជួនកាល ពេលខ្លះត្រូវបានគេហៅថា លក្ខណៈដែលអាចបន្ថែមដោយរាប់បបាន ។ យើងអាចស្រាយលក្ខខណ្ឌ A-5 សូមមើលតាមលក្ខណៈដោយលក្ខខណ្ឌនៅលំហាត់ 2.31 ។

យើងអាចសម្រាយបញ្ជាក់ថាសម្រាប់លក្ខណៈទូទៅដោយសំណុំចំណុចនៅលើលំហដោយសំណុំចំនួនគត់យើងមិនអាចសម្រាយបញ្ជាក់គ្រប់ដោយលក្ខខណ្ឌទាំងអស់នោះបានឡើយ។ដូចនេះប្រសិនយើងចង់រក្សាស្រាយលំហាត់គ្រប់លក្ខណៈនោះគឺចាប់ពីលក្ខណៈA-2ដល់លក្ខណៈA-7យើងត្រូវតែសន្និដ្ឋានថាមិនគ្រប់សំណុំមានរង្វាស់មួយនោះទេ។ស្របគ្នានេះដែរបើយើងត្រូវការចង់ឱ្យគ្រប់សំណុំទាំងអស់មានរង្វាស់មួយនោះនាំឱ្យយើងត្រូវបោះបង់មួយ ឬក៏ច្រើនដោយលក្ខណៈពី A-2 ទៅលក្ខណៈ A-7 ។

២.៥.រង្វាស់ក្នុង និងរង្វាស់ក្រៅ

ប្រវែងខាងក្រៅដោយសំណុំ E គេសរសេរជា$m_e(E)$មានលក្ខណៈដូចខាងក្រោមចាត់ទុកថាជាស្វ័យសត្យ៖

B-1 $m_e(E)$ កំណត់សម្រាប់សំណុំនីមួយៗ E

B-2 $m_e(E)\ge 0$

B-3 $m_e(E_1\cup E_2\cup\ldots)\le m_e(E_1)+m_e(E_2)+\ldots$ គ្រប់សំណុំ $E_1,E_2,\ldots$ ជាសំណុំដាច់ឬមិនមែន។

B-4 រង្វាស់ក្រៅ គឺជាការបំប្លែងមិនផ្លាស់ប្តូរប្រែប្រួល។

សម្គាល់៖ សម្រាប់លក្ខខណ្ឌ A-3 និង A-4 ជាគោលគំនិតរង្វាស់គឺជាការបំពេញបន្ថែមលក្ខខណ្ឌត្រូវបានកំណត់នឹងជំនួសដោយ A-3 ។

២.៦. សំណុំដែលអាចវាស់បាន

ទោះបីសំណុំក្រៅអាចកំណត់បានគ្រប់សំណុំទាំងអស់ក៏ដោយ ប៉ុន្តែជាទូទៅមិនបំពេញបន្ថែមទៅលើ A-3 និង A-4 ដូចបានកំណត់នោះទេ។ យើងដឹងថារាល់សំណុំT អាចសរសេរជាទម្រង់៖

$$T=(T\cap E)\cup(T\cap E) \qquad (4)$$

ដូច្នេះបើមានឱកាសណាមួយក្នុងការបំពេញបន្ថែម យើងគួរតែមាន៖

$$m_e(T)=m_e(T\cap E)+m_e(T\cap \tilde{E}) \qquad (5)$$

សម្រាប់គ្រប់ធាត់ទាំងអស់ដោយសំណុំ T នៅពេលដែល $T\cap E$ និង $T\cap\tilde{E}$ ជាសំណុំដាច់។ ជាលទ្ធផលសមីការ (5) នឹងកើតមានឡើងបើគ្រប់ សមមូលថ្នាក់ដោយសំណុំ E ត្រូវបានបញ្ជាក់បានច្បាស់លាស់។ ករណីនេះនឹងគោរពតាមដូចតទៅនេះ ។

និយមន័យ២.៤៖ សំណុំ E អាចរាប់បាន ឬអាចវាស់បានច្បាស់ជាងនេះទំនាក់ទំនងសម្រាប់រង្វាស់ក្រៅ បើសិនបើគ្រប់ជាតុទាំងអស់ក្នុងសំណុំ T ដែល

$$m_e(T)=m_e(T\cap E)+m_e(T\cap\tilde{E}) \qquad (6)$$

$m_e(E)=g.l.b\,L(O)$ ដូចជាក្នុងករណី $m_e(E)=m(E)$ ត្រូវបានគេហៅថាជាប្រវែងដោយ E។ យើងអាចបង្ហាញថា បើសិនបើយើងដាក់កម្រិតខ្លួនយើងសម្រាប់សំណុំដែលអាចវាស់បាននោះតម្រូវការខាងលើសម្រាប់ការវាស់វែងគឺត្រូវបានបញ្ជាក់។ បើវាពិតថា គ្រប់ជាតុដោយសំណុំ T នោះ $m_e(T)\geq m_e(T\cap E)+m_e(T\cap\tilde{E})$ ។

និយមន័យ ២.៥ អាចត្រូវជំនួសដោយឱ្យសមមូលនឹងមួយ ។

និយមន័យ ២.៦. សំណុំ E មួយ គឺជាសំណុំដែលអាចវាស់បានបើគ្រប់សំណុំ T

$$m_e(T)\geq m_e(T\cap E)+m_e(T\cap\tilde{E}) \qquad (7)$$

ករណីនេះជាញឹកញយជួនកាល ប្រើប្រាស់ក្នុងការអនុវត្ត ដើម្បីបង្ហាញថា សំណុំមួយដែលអាចវាស់វែងវែងបាន ។ សំណុំ T ដោយនិយមន័យខាងលើនេះជួនកាលត្រូវបានគេហៅថា សំណុំតេស្ត ខណៈពេលដែលគេប្រើប្រាស់ដើម្បីធ្វើតេស្តរង្វាស់រង្វាល់ ។

២.៧. ឡឺបេសខាងក្រៅ ឬរង្វាស់ចំណុចខាងក្រៅ

រហូតមកដល់ពេលនេះយើងមិនទាន់បានបង្ហាញពីអត្ថិភាពដោយរង្វាស់ខាងក្រៅឬផ្នែកខាងក្រៅបាននៅឡើយទេ ទោះបីជាការពិតមានមួយចំនួនដែលបំពេញតាមស្វ័យសត្យមួយចំនួន ដែលបានផ្តល់ឱ្យនៅខាងលើក៏ដោយ។ ទ្រឹស្តីបទឡឺបេស ត្រូវបានគេស៊ើបអង្កេតវានៅដើមសតវត្សន៍ទី២០ និងសន្មតថា មានប្រយោជន៍។

និយមន័យ២.៧៖ ឡឺបេសខាងក្រៅមួយ ឬរង្វាស់ក្រៅដោយសំណុំ E មួយគឺ

$$m_e(E)=g.l.b\,L(O)\text{ គ្រប់សំណុំបើក } O\supset E$$

គឺថា ប្រវែងដែលធំជាងគេបំផុតទាល់ក្រោម ដោយសំណុំបើកទាំងអស់ O ដែលមានជាមួយ E ។ យើងអាចបង្ហាញថា ករណីនេះចាំបាច់ត្រូវបានបញ្ជាក់ដោយស្វ័យសត្យ សម្រាប់រង្វាស់ក្រៅ (មើលលំហាត់ទី 2.4)។

យើងអាចបង្ហាញថាបើ E គឺមានចន្លោះ I ផ្សេងទៀត នោះ $m_e(I)=L(I)$។ បើ S ជាសំណុំបើកដែរនោះ $m_e(S)=L(S)$ ។ មើលលំហាត់ទី2.2, 2.26 និង 2.27 ។

២.៨. ទ្រឹស្តីរង្វាស់

ទ្រឹស្តីបទ2.2៖ បើ E អាចវាស់បាននោះ $\tilde{E}$ អាចវាស់បាននិង ផ្ទុយគ្នាទៅវិញ ។

ទ្រឹស្តីបទ2.3៖ បើ E មានរង្វាស់ផ្នែកខាងក្រៅស្មើនឹងសូន្យ នោះ E គឺអាចវាស់បាននិង $m(E)=0$។

ទ្រឹស្តីបទ2.4៖ មានសំណុំដែលអាចរាប់បាន មានប្រវែងស្មើនឹងសូន្យ ។

ទ្រឹស្តីបទ2.5៖ បើ E_1 និង E_2 ជាសំណុំវាស់បាននោះប្រជុំ $E_1 \cup E_2$ គឺវាស់បាន។ លទ្ធផលអាចត្រូវបានបង្ហាញថា មានប្រជុំដោយសំណុំរាប់បាន ។ សូមមើលនៅលំហាត់ 2.10 និង 2.12 ។

ទ្រឹស្តីបទ2.6៖ បើ E_1 និង E_2 ជាសំណុំដាច់អាចវាស់បាននោះ $m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2)$ ។ លទ្ធផលអាចត្រូវបានគណនាមើលលើលំហាត់ 2.12 ។

ទ្រឹស្តីបទប2-7៖ បើ E_1 និង E_2 អាចវាស់បាននោះប្រសព្វរវាងសំណុំទាំងពីរ $E_1 \cap E_2$ ក៏អាចវាស់បានដូចគ្នា ។ លទ្ធផលអាចត្រូវបានពង្រីកទៅចំណុចប្រសព្វដោយសំណុំរាប់អស់ណាមួយ។

ទ្រឹស្តីបទ2-8៖ បើ E_1 និង E_2 អាចវាស់បាននិង $E_1 \subset E_2$ នោះ $m(E_1) \le m(E_2)$

ទ្រឹស្តីបទ2-9៖ បើ E_1 និង E_2 អាចវាស់បាន $E_1 \subset E_2$ និង E_2 មានរង្វាស់រាប់អស់នោះ $E_2 - E_1$ ក៏អាចវាស់បាននិង $m(E_2 - E_1) = m(E_2) - m(E_1)$ ។

ទ្រឹស្តីបទ2-10៖ បើ E_1 និង E_2 គឺជាសំណុំវាស់បាននោះ

$$m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2) - m(E_1 \cap E_2)$$

បង្រួមទៅកាន់ទ្រឹស្តីបទ2-6 បើ E_1 និង E_2 ដាច់ចេញពីគ្នា ។ លទ្ធផលអាចត្រូវបានកំណត់ជាទូទៅ (មើលនៅលំហាត់ទី2.41) ។

ទ្រឹស្តីបទ2-11៖ បើ $E_1, E_2, ...$ អាចវាស់បាននោះ $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ ក៏អាចវាស់បានដែរ។

ទ្រឹស្តីបទ2-12៖ បើ $E_1, E_2, ...$ គឺជាសំណុំវាស់បានដែលមិនជាប់គ្នា

$m(E_1 \cup E_2 \cup .....) = m(E_1) + m(E_2) + ...$

ទ្រឹស្តីបទ2-13៖ បើ $E_1, E_2, E_3, ...$ អាចវាស់បានដែល $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset .....,$ នោះ

$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ ក៏អាចវាស់បានដែរ។

ទ្រឹស្តីបទ2-14៖ បើ $E_1, E_2, E_3, ...$ អាចវាស់បានដែល $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset .....,$ នោះ

$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ ក៏អាចវាស់បានដែរ និ $m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$

ទ្រឹស្តីបទ2-15៖ បើ $E_1, E_2, E_3, ...$ គឺជាសំណុំវាស់បានដែល $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset .....$ និងមាន E_k យ៉ាងតិច មួយដែលមានរង្វាស់រាប់អស់ នោះ $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ ក៏អាចរាប់អស់ និង

$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$

ទ្រឹស្តីបទ2-16៖ បើ I គឺនៅក្នុងចន្លោះណាមួយ $m(I) = L(I)$

ទ្រឹស្តីបទ2-17៖ បើ O គឺនៅក្នុងសំណុំបើកណាមួយ $m(O) = L(O)$

ទ្រឹស្តីបទ2-18៖ បើ C គឺនៅក្នុងសំណុំបើកណាមួយ $m(C) = L(C)$

ទ្រឹស្តីបទគម្របវីតាលី VITALI'S COVERING

តាមទ្រឹស្តីបទដែលបានលើកឡើងដោយសារតែVitaliគឺមានសារៈសំខាន់និងគួរអោយចាប់

អារម្មណ៍មួយដែលរំលឹកពីទ្រឹស្តីបទ Heine-Borel ។

ទ្រឹស្តីបទ2-19 [Vitali]៖ ឧបមាថាចំណុចទាល់នីមួយៗ E ជាសំណុំវាស់បានត្រូវបានគ្រួតដោយថ្នាក់ ϑ ដោយចន្លោះដែលមានប្រវែងតូចណាមួយក៏បាន [ហៅថាគម្របវីតាលី]. នោះវាមានសំណុំរាប់បានដោយចន្លោះដាច់ $I_1, I_2, ...$ ដែល $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ គ្រួតលើ E លើកលែងតែសំណុំវាស់បានសូន្យ។

សំណុំមិនវាស់បាន

យើងមើលហាក់បីដូចជាពីលទ្ធផលខាងលើថាគ្រប់សំណុំនៅក្នុងចំនួនពិតគឺវាស់បាន។ នេះគឺមិនពិតទេ,គឺវាមានសំណុំនៅក្នុងចំនួនពិតដែលមិនអាចវាស់បាន។ ជាឧទាហរណ៍មានសំណុំវាស់បានទទេដូចដែលឃើញនៅលំហាត់2.21.។

២.៩. ដំណោះស្រាយ

ប្រវែងដោយសំណុំ

2.1 រកប្រវែងដោយសំណុំ $\bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{x : \frac{1}{k+1} \le x < \frac{1}{k}\right\}$

តាង $I_k = \left\{x : \frac{1}{k+1} \le x < \frac{1}{k}\right\}$

នោះ $I_1 = \left\{x : \frac{1}{2} \le x < 1\right\}, I_2 = \left\{\frac{1}{3} \le x < \frac{1}{2}\right\}, ...$

ដូច្នេះ $L(I_1) = 1 - \frac{1}{2}, L(I_2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, ...L(I_n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

ដោយ I_k ជាសំណុំដាច់ចេញពីគ្នា

$$L\left[\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right] = \sum_{k=1}^{n} L(I_k) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

គេបាន $L\left[\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right] = \lim_{n\to\infty} L\left[\bigcup_{k=1}^{n} I_k\right] = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$

ផ្នែកខាងក្រៅ ឬខាងក្រៅដោយសំណុំវាស់បាន

2.2. បង្ហាញថាបើ S ជាសំណុំបើកណាមួយ នោះ $m_e(S) = L(S)$

សន្មតថា O គឺជាសំណុំបើកដែលផ្ទុក S គឺ $O \supset S$ ។ នោះចន្លោះដោយសមាសធាតុ S គឺផ្ទុកនូវចន្លោះដោយសមាសធាតុ O ។

គេបាន S ជាសំណុំបើកតូចមួយដែលផ្ទុកខ្លួនឯងគឺ $S \supset S$ ។ នោះនិយមន័យ ដោយសំណុំរាប់បានខាងក្រៅ យើងមាន $m_e(S) = g.l.b.L(O)$ ដែល $O \supset S = L(S)$ ។

2.3. បង្ហាញថា ទ្រឹស្តីបទ2-1៖ បើ E ជាសំណុំណាមួយ ហើយអោយ $\varepsilon > 0$ វាមានផ្ទុកសំណុំបើក $O \supset E$ ។

ដូចជា (a) $m_e(E) < m_e(O) + \varepsilon$ និង (b) $m_e(O) \ge m_e(E)$

(a) ដោយនិយមន័យដោយរង្វាស់ខាងក្រៅឡឺបេស ។

$m_e(E) = g.l.b.L(O)$ ដែលគ្រប់សំណុំបើក $O \supset E$ ។

សម្រាប់គ្រប់សំណុំបើក ដែនកំណត់ទាបបំផុត $m_e(E)$ មាននិងតាមនិយមន័យដោយដែនកំណត់ទាបបំផុត យើងមានគ្រប់ $\varepsilon > 0$, $m_e(E) < L(O) + e$

ដោយ $L(O) = m_e(O)$។ដោយយោងតាមលំហាត់ 2.2 លទ្ធផលដែលត្រូវធ្វើតាម។

(b) បន្តពីលំហាត់2.25។

2.4. បង្ហាញថារង្វាស់ក្រៅឡឺបេស ផ្ទៀងផ្ទាត់ការពិត B-3 សម្រាប់សំណុំរាស់បានផ្នែកខាងក្រៅ។ យើងត្រូវតែបង្ហាញថាសំណុំ $E_1, E_2, ...$

$$m_e\left(\bigcup_k E_k\right) \le \sum_k m_e(E_k)$$

ភាពមិនស្មើគ្នាឱ្យតម្លៃថេរក្នុងករណីមួយដោយសំណុំដែលមានរង្វាស់រាប់មិនអស់ផ្នែកខាងក្រៅដូចនេះយើងអាចដាក់ខណ្ឌដោយខ្លួនឯងទៅករណីដែលគ្រប់សំណុំទាំងអស់មានសំណុំរាស់បានរាប់បានផ្នែកខាងក្រៅ។ក្នុងករណីដែលអោយ $\varepsilon > 0$ វាមានសំណុំបើក $O_k \supset E_k$ ដែល $k = 1, 2, ...$ (ដែលឃើញនៅក្នុងលំហាត់ទី2.3)

$$L(O_k) = m_e(O_k) < m_e(E_k) + \varepsilon / 2^k$$

$$L(O_k) = m_e(O_k) \ge m_e(E_k)$$

នោះ $m_e\left(\bigcup_k E_k\right) \le m_e\left(\bigcup_k O_k\right) = \sum_k m_e(O_k) \le \sum_k m_e(E_k) + \sum_k \varepsilon / 2^k \le \sum_k m_e(E_k) + \varepsilon$

ដោយ ε អាចយកតម្លៃតូចមួយណាក៏បាន $m_e\left(\bigcup_k E_k\right) \le \sum_k m_e(E_k)$

យើងអាចបង្ហាញថាការពិតផ្សេងទៀតត្រូវបានផ្ទៀងផ្ទាត់។

2.5. បង្ហាញថា បើ E ជាសំណុំរាប់បានដោយចំនួនពិត នោះ $m_e(E) = 0$

តាង ចំណុច(ចំនួនពិត)ដោយសំណុំដោយ $a_1, a_2, a_3, ...$ នោះយើងអាចរុំព័ទ្ធ $a_1, a_2, a_3, ...$ នៅក្នុងចន្លោះបើកដោយប្រវែងខ្លីជាង ឬស្មើនឹង $\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2^2}, \frac{\varepsilon}{2^3}, ...$ រៀងៗខ្លួន

ដូច្នេះ $m_e(E) \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \frac{\varepsilon}{2^3} + ... = \varepsilon$

ដោយ ε អាចយកតម្លៃតូចណាមួយក៏បាន វាបង្ហាញថា $m_e(E) = 0$

2.6. បង្ហាញថា សំណុំនីមួយៗ T និងការកំណត់ដោយសំណុំដាច់ពីគ្នា $E_1, ..., E_n$ ដែល

$$m_e\left(T \cap \left\{\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right\}\right) = \sum_{k=1}^{n} m_e(T \cap E_k)$$

យើងប្រើវិធីវិចារណ៍កំណើនគណិតវិទ្យា។សម្រាប់ $n = 1$ លទ្ធផលគឺត្រឹមត្រូវ សន្និដ្ឋានបានថាពិតសម្រាប់ $n - 1$ យើងមាន

$$m_e\left(T \cap \left\{\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k\right\}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} m_e(T \cap E_k) \qquad (1)$$

បន្ថែម $m_e(T \cap E_n)$ ទៅកាន់អង្គទាំងពីរ

$$m_e(T \cap E_n) + m_e\left(T \cap \left\{\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k\right\}\right) = \sum_{k=1}^{n} m_e(T \cap E_k) \qquad (2)$$

យើងអាចសរសេរបាន(មើលនៅក្នុងលំហាត់2.30)

$$m_e\left(T\cap\left\{\bigcup_{k=1}^{n-1}E_k\right\}\cap E_n\right)+m_e\left(T\cap\left\{\bigcup_{k=1}^{n}E_k\right\}\cap\tilde{E}_n\right)=\sum_{k=1}^{n}m_e\left(T\cap E_k\right)\quad(3)$$

ដោយ E_n ជាសំណុំរាប់បាន យើងមានសំណុំនីមួយៗ T

$$m_e\left(T\right)=m_e\left(T\cap E_n\right)+m_e\left(T\cap\tilde{E}_n\right)\qquad(4)$$

យើងអាចសរសេបានថា $T=T\cap\left\{\bigcup_{k=1}^{n}E_k\right\},(S)$ ក្លាយជា(3)

$$m_e\left(T\cap\left\{\bigcup_{k=1}^{n}E_k\right\}\right)=\sum_{k=1}^{n}m_e\left(T\cap E_k\right)\qquad(5)$$

ដូច្នេះលទ្ធផលបង្ហាញថាពិតសម្រាប់ សំណុំ n បើវាពិត សម្រាប់ សំណុំ $n-1$ ។ ប៉ុន្តែបើវាពិតសម្រាប់សំណុំ1 វាបង្ហាញថាវាពិតសម្រាប់សំណុំ2 សំណុំ3 និងបន្ទាប់ទៀត។

សំណុំវាស់បាន E និងទ្រឹស្តីបទដោយសំណុំវាស់បាន

2.7. បង្ហាញថាបើ E ជាសំណុំវាស់បាននោះសំណុំបំពេញ $\tilde{E}$ ក៏ជាសំណុំវាស់បានដែរ។

ដោយ E ជាសំណុំវាស់បានយើងមានសំណុំនីមួយៗ T

$$m_e\left(T\right)=m_e\left(T\cap E\right)+m_e\left(T\cap\tilde{E}\right)\qquad(1)$$

តែ $\tilde{E}$ ជាសំណុំវាស់បានយើងត្រូវតែបង្ហាញថា សំណុំនីមួៗ T

$$m_e\left(T\right)=m_e\left(T\cap\tilde{E}\right)+m_e\left(T\cap\tilde{\tilde{E}}\right)=m_e\left(T\cap\tilde{E}\right)+m_e\left(T\cap E\right)\quad(2)$$

តែ (2) គឺដូចគ្នានឹង (1) ។ ដូចនេះ $\tilde{E}$ គឺជាសំណុំវាស់បាន។

2.8. បង្ហាញថានិយមន័យ 2.5 និង2.6 គឺសមមូលគ្នា។

សម្រាប់សំណុំ T និងសំណុំ E យើងមាន

$$T=\left(T\cap E\right)\cup\left(T\cap\tilde{E}\right)\qquad(1)$$

តាមលំហាត់ទី2.4យើងមាន

$$m_e\left(T\right)\le m_e\left(T\cap E\right)+m_e\left(T\cap\tilde{E}\right)\qquad(2)$$

យោងតាមនិយមន័យ2.5 សំណុំ E មួយជាសំណុំវាស់បានបើ

$$m_e\left(T\right)=m_e\left(T\cap E\right)+m_e\left(T\cap\tilde{E}\right)\qquad(3)$$

ដូចនេះ យើងអាចសន្និដ្ឋានថា សំណុំ E អាចវាស់បានបើសំណុំ T

$$m_e\left(T\right)\ge m_e\left(T\cap E\right)+m_e\left(T\cap\tilde{E}\right)\qquad(4)$$

ប្រាសមកវិញ បើ យើងអនុម័តនិយមន័យ2.6 នោះយើងមើលឃើញថា E អាចវាស់បានបើយោងតាមនិយមន័យ2.5។

2.9. បង្ហាញថា E អាចវាស់បានបើ $m_e\left(E\right)=0$ ។

សម្រាប់សំណុំ T យើងមាន $T\cap E\subset E$ នាំឱ្យដោយ $m_e\left(T\cap E\right)\ge 0$ យើងមាន

$$m_e\left(T\cap E\right)=0\qquad(1)$$

សម្រាប់សំណុំ T យើងមាន $T\supset T\cap\tilde{E}$ យើងអាចប្រើ (1)

$$m_e(T) \geq m_e\left(T \cap \tilde{E}\right) = m_e(T \cap E) + m_e\left(T \cap \tilde{E}\right) \quad (2)$$

ដោយ E អាចវាស់បាននិង $m(E) = m_e(E) = 0$

2.10. បង្ហាញថា បើ E_1 និង E_2 អាចវាស់បាននោះ $E_1 \cup E_2$ ក៏អាចវាស់បាន។ យើងនឹងបង្ហាញថា គ្រប់សំណុំ T

$$m_e(T) \geq m_e\left(T \cap [E_1 \cup E_2]\right) + m_e\left(T \cap [E_1 \cup E_2]\right)$$

ដោយ E_1 និង E_2 ជាសំណុំ យើងមានសំណុំ T

$$\begin{aligned}
m_e(T) &= m_e(T \cap E_1) + m_e\left(T \cap \tilde{E}_1\right) \\
&= m_e(T \cap E_1) + m_e\left(\left(T \cap \tilde{E}_1\right) \cap E_2\right) + m_e\left(\left(T \cap \tilde{E}_1\right) \cap \tilde{E}_2\right) \\
&= m_e(T \cap E_1) + m_e\left(T \cap E_2 \cap \tilde{E}_1\right) + m_e\left(T \cap \tilde{E}_1 \cap \tilde{E}_2\right) \\
&= m_e(T \cap E_1) + m_e\left(T \cap E_2 \cap \tilde{E}_1\right) + m_e\left(T \cap [E_1 \cup E_2]\right) \\
&\geq m_e\left(T \cap [E_1 \cup E_2]\right) + m_e\left(T \cap [E_1 \cup E_2]\right)
\end{aligned}$$

ដូច្នេះ $E_1 \cup E_2$ អាចវាស់បាន។

2.11. បង្ហាញថា បើ E_1 និង E_2 អាចវាស់បាន នោះ $E_1 \cap E_2$ ក៏អាចវាស់បាន។ ដោយទ្រឹស្តីបទ 1-12 យើងមាន $E_1 \cap E_2 = \left(\tilde{E}_1 \cup \tilde{E}_2\right)\sim$ ដោយ E_1 និង E_2 អាចវាស់បាន វាត្រូវបានបង្ហាញនៅលំហាត់2.7និង 2.10បង្ហាញ $E_1 \cap E_2$ អាចវាស់បាន។

2.12. បង្ហាញថាប្រជុំដោយសំណុំវាស់បានរាប់បានគឺជាសំណុំវាស់បានយើងជ្រើសរើសសំណុំនៅក្នុងប្រជុំដោយរាប់បានដោយសំណុំវាស់បានរាប់បានអាចជាសំណុំដាច់ចេញពីគ្នាយើងត្រូវតែបង្ហាញថា បើ $E_1, E_2, ...$ ជាសំណុំវាស់បានដែលដាច់ចេញពីគ្នា នោះ $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ ជាសំណុំវាស់បានដោយប្រជុំដោយរាប់បានដោយសំណុំវាស់បានគឺជាសំណុំវាស់បាន យើងមានសំណុំ T ដែល

$$\begin{aligned}
m_e(T) &= m_e\left(T \cap \left\{\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right\}\right) + m_e\left(T \cap \left\{\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right\}^{\sim}\right) \\
&\geq m_e\left(T \cap \left\{\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right\}\right) + m_e\left(T \cap \left\{\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right\}^{\sim}\right) \\
&\geq \sum_{k=1}^{n} m_e(T \cap E_k) + m_e\left(T \cap \tilde{E}\right)
\end{aligned}$$

ដោយ $m_e(E)$ គឺមិនអាស្រ័យ n យើងមានlimit ដែល $n \to \infty$

$$m_e(T) \geq \sum_{k=1}^{n} m_e(T \cap E_k) + m_e\left(T \cap \tilde{E}\right) \geq m_e(T \cap E) + m_e\left(T \cap \tilde{E}\right)$$

នាំឱ្យ $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ ជាសំណុំវាស់បាន។

2.13. បង្ហាញថា បើ $E_1, E_2, ...$ ជាសំណុំវាស់បានដែលដាច់ចេញពីគ្នា នោះ

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k)$$

តាមលំនាំនេះនៅលំហាត់ទី2.12 បានអោយ $T = R$ ជាសំណុំចំនួនពិត។

2.14. បង្ហាញថារង្វាស់ដោយសំណុំរាប់បាន E គឺជាសូន្យ

ដោយលំហាត់2.5, $m_e(E) = 0$ នាំឱ្យលំហាត់2.9 រង្វាស់ដោយ E ត្រូវបានអោយដោយ

$$m(E) = m_e(E) = 0$$

2.15. បង្ហាញថាប្រជុំរាប់បានដោយសំណុំរាប់បានមានរង្វាស់សូន្យ។

ដោយប្រជុំរាប់បានដោយសំណុំរាប់គឺសំណុំរាប់បាន រង្វាស់ដោយសំណុំនេះគឺសូន្យ ដោយយោងតាមលំហាត់ទី2.14។

2.16. គេមានសំណុំវាស់បាន $E_1 \supset E_2 \supset E_3, \ldots$ ដែល $m(E_1)$ កំណត់។

បង្ហាញថា $m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$

តាង $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ នោះយើងបាន

$$E_1 - E = (E_1 - E_2) \cup (E_2 - E_3) \cup \ldots.. \qquad (1)$$

ដោយ $E_1 - E_2, E_2 - E_3, \ldots..$ ជាសំណុំដាច់ចេញពីគ្នា និងសំណុំទាំងអស់អាចវាស់បានយើងបាន

$$m(E_1 - E) = m(E_1 - E_2) + m(E_2 - E_3) + \ldots. \qquad (2)$$

ដោយ $E_1 \supset E,\ E_1 \supset E_2 \supset E_3, \ldots, (2)$ អាចសរសេរបានថា

$$m(E_1) - m(E) = \lim_{n\to\infty}[m(E_1 - E_2) + m(E_2 - E_3) + \ldots + m(E_{n-1}) - m(E_n)]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[m(E_1) - m(E_2) + m(E_2) - m(E_3) + \ldots + m(E_{n-1}) - m(E_n)]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[m(E_1) - m(E_n)] = m(E_1) - \lim_{n\to\infty} m(E_n)$$

ដូចនេះដោយ $m(E_1)$ គឺកំណត់ $m(E) = m(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$ ។

2.17. បង្ហាញថាសំណុំកង់ទ័រជាសំណុំរាប់បាន និងចូររករង្វាស់របស់វានៅក្នុងសំណុំកង់ទ័រ នៅចន្លោះ $[0,1]$ ត្រូវបានបំបែកជា៣ផ្នែក និងផ្នែកកណ្ដាលគឺត្រូវបានលុបចោល ។ នោះចន្លោះដែលនៅសល់ក៏ត្រូវបានគេចែកជា៣ផ្នែកតទៀតដែរ ហើយពាក់កណ្ដាលផ្នែកទីបីនីមួយៗត្រូវបានលុបចោលដូចគ្នា ។ ដំណើរការនេះត្រូវបានអនុវត្តជាញឹកញាប់ដដែលៗហើយអ្វីដែលនៅសល់នោះគឺសំណុំកង់ទ័រ ។ ដំហានដំបូងចន្លោះដោយប្រវែង $\frac{1}{3}$ ត្រូវបានលុបចោល។នៅជំហានទី២ ចន្លោះដោយប្រវែង $\frac{1}{3^2}$ ត្រូវបានលុបចោលដែរ ។ ជាទូទៅ បន្ទាប់ពីជំហានទី n , 2^{n-1} ចន្លោះដោយប្រវែង $\frac{1}{3^n}$ ត្រូវបានលុបចោលទៀត ។

$$m(K) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1 - \frac{1/3}{1 - 2/3} = 0$$

មួយក្នុងចំណោមលក្ខណៈដោយសំណុំកង់ទ័រគឺថាបើទោះបីជាវាជាសំណុំរាប់មិនបានប៉ុន្តែវាមានរង្វាស់ស្មើសូន្យ ។

2.18. គេឱ្យ I ជាចន្លោះ $[a,b]$ ។ បង្ហាញថាលក្ខខណ្ឌចាំបាច់សម្រាប់ឱ្យសំណុំ E នៅក្នុង I អាចវាស់បានគឺ $m_e(I)=m_e(E)+m_e(\overline{E})$

តាមនិយមន័យសំណុំ E មួយ គឺអាចវាស់បានបើរាល់សំណុំ T

$$m_e(T)=m_e(T\cap E)+m_e(T\cap\tilde{E})$$

នោះបើជាទូទៅ យើងឱ្យ $T=I$ ចម្លើយដែលត្រូវការនៅក្នុងករណីនេះគឺ

$$T\cap E=E \text{ និង } T\cap\tilde{E}=\tilde{E}$$

ឱ្យ T ជាសំណុំហើយសន្មតថា G គឺអាចវាស់បានដែលមាន T ដូច្នេះ $m_e(T)=m(G)$ (មើលដំណោះស្រាយទី2.45)ដោយ G អាចវាស់បានយើងមាន

$$m_e(E)=m_e(E\cap G)+m_e(E\cap\tilde{G})$$

$$m_e(\tilde{E})=m_e(\tilde{E}\cap G)+m_e(\tilde{E}\cap\tilde{G})$$

វាអនុវត្តទៅតាម

$$m(I)=m_e(E)+m_e(\tilde{E})$$

$$=m_e(E\cap G)+m_e(E\cap\tilde{G})+m_e(\tilde{E}\cap G)+m_e(\tilde{E}\cap\tilde{G})$$

$$=[m_e(E\cap G)+m_e(\tilde{E}\cap G)]+[m_e(E\cap\tilde{G})+m_e(\tilde{E}\cap\tilde{G})$$

$$\geq m_e(G)+m_e(\tilde{G}\sim)=m(G)+m(\tilde{G}\sim)=m(I)$$

យើងឃើញថា

$$m_e(E\cap G)+m_e(E\cap\tilde{G})+m_e(\tilde{E}\cap G)+m_e(\tilde{E}\cap\tilde{G}\sim)=m(G)+m(\tilde{G})$$

យើងដឹងថា

$$m_e(E\cap\tilde{G})+m_e(\tilde{E}\cap\tilde{G}\sim)\geq m_e(\tilde{G})=m(G)$$

ការដក(2)ចេញពី(1)៖

$$m_e(E\cap G)+m_e(\tilde{E}\cap\tilde{G})\leq m(G)$$

ដោយ $T\subset G,$ យើងមាន $E\cap T\subset E\cap G$ និង $\tilde{E}\cap T\subset\tilde{E}\cap G,$

ដូច្នេះ $m_e(E\cap T)+m_e(\tilde{E}\cap\tilde{G})\leq m_e(E\cap G)+m_e(\tilde{E}\cap G)\leq m(G)=m_e(T)$

ដោយយោងតាមដំណោះស្រាយ២.៨ វាបង្ហាញឱ្យឃើញថា E គឺអាចវាស់បាន។

វាត្រូវបានកត់សម្គាល់ឱ្យឃើញថាទ្រឹស្តីបទនេះគឺស្រាយនៅក្រោមការសន្មតដែលថាសំណុំ T វាមានសំណុំវាស់បាន G ដូចនេះ $m_e(T)=m(G)$ ។វាគឺត្រឹមត្រូវបើយោងតាមរង្វាស់ខាងក្រៅឡឺបេស ដែលបានបង្ហាញនៅក្នុងនិយមន័យ2.7។ ការវាស់វែងវែងផ្នែកខាងក្រៅ ដែលទូទៅវាត្រឹមត្រូវ គឺជាញឹកញាប់គេហៅថា ការវាស់វែងវែងខាងក្រៅដែលទៀងទាត់។

ទ្រឹស្តីបទVITALI

2.19. ការស្រាយទ្រឹស្តីបទ2-20 [ទ្រឹស្តីបទVITALI]គេឱ្យ O គឺជាសំណុំបើកដោយរង្វាស់កំណត់

បានដែលមានផ្ទុក E ។ដូច្នេះ យើងអាចសន្មតបានថារង្វាស់នីមួយៗដោយ g ជារបស់សំណុំ O ។ សន្មតថា h_1 គឺជាគោលលើតិចជាងគេបំផុតដោយប្រវែងនោះដោយចន្លោះទាំងនេះដោយសំណុំ g ។ យកចន្លោះដែល $I_1 \in g$ ដែលប្រវែងរបស់វាធំជាង $\frac{1}{2}h_1 \Rightarrow L(I_1) > \frac{1}{2}h_2$ បើសិន $m_e(E-I_1)=0$ នោះចម្លើយត្រូវបានដោះស្រាយយ៉ាងងាយ។ បើមិនដូច្នេះទេឱ្យ h_2 ជាគោលលើតិចជាងគេដោយប្រវែងរបស់ចន្លោះដោយសំណុំ g ដែលវាដាច់ពី I_1 និងប្រវែងរបស់វាគឺធំជាង $\frac{1}{2}h_2$, គឺថានាំឱ្យ $L(I_2) > \frac{1}{2}h_2$ បើ $m_e(E-I_1 \cup I_2)=0$ នោះយើងនឹងទទួលបានលទ្ធផលដែលត្រូវការ។បើមិនដូចនេះទេយើងនៅបន្តដំណើរការដោយការស្វែងរកចន្លោះ I_3 តទៅទៀត។នៅពេលករណីលទ្ធផលកើតឡើងដំណើរការទាំងមូលត្រូវបានលុបចោលឬបើមិនដូច្នោះទេដំណើរការនោះមិនត្រូវបានលុបចោលទេ។យើងច្បាស់ណាស់ហើយថានឹងទៅពិនិត្យករណីដែលដំណើរការនេះមិនត្រូវបានលុបចោល។ នៅក្នុងករណីនេះយើងនឹងទទួលបានស៊េរី $I_1, I_2, \ldots,$ ដោយចន្លោះដាច់ដែលមានលក្ខណះ

$$m(I_k) = L(I_k) > \frac{1}{2}h_k,\ \ k = 1,2,\ldots \tag{1}$$

ដោយ $I_k \subset o$ ដូចនេះ $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \subset O$ យើងមានដោយលំហាត់2.13

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} L(I_k) \le m(O) \tag{2}$$

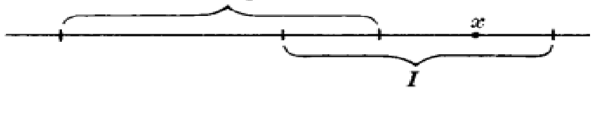
ដូចនេះ ស៊េរីនៅក្នុង(2)រួម និង(1)

$$\lim_{k\to\infty} L(I_k) = 0 \text{ និង } \lim_{k\to\infty}\ h_k = 0$$

សន្មតថាសំណុំ $S = E - \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ ដែលវាមិនមែនជាសំណុំទទេ។បើ $x \in S$ នោះវាជារបស់ E ហើយវាមិនមែនជារបស់ $I_1, I_2, \ldots, I_n$ ទេ។បើយោងតាមនិយមន័យរបស់វីតាឡី គេថាវានឹងមានចន្លោះ $I \in g$ ដែលមានផ្ទុក x ។ហើយសំណុំ I គឺដាច់គ្នាពី $I_1, I_2, \ldots, I_n$ ។

ចន្លោះ I ច្បាស់ជាមានចំណុចយ៉ាងតិចមួយជាមួយនឹងចន្លោះ I_k ដែល $k > n$ ហើយបើ I ដាច់ពី $I_{n+1}, I_{n+2}, \ldots$ ករណី $k = n+1, n+2, \ldots,$ យើងគួរចំណាំផងដែរថា $L(I) \le h_k$ ករណី $k = n+1, n+2, \ldots$ ហើយ $\lim_{k\to\infty} h_k = 0$ ដែលថា $L(I) = 0$ ដូច្នេះចន្លោះ I នឹងមិនមែនជាចន្លោះទៀតទេ។យើងអាចសន្មតបានថាចន្លោះទីមួយនៅក្នុងស៊េរី(I_k) ដែល I មានចំណុចជម្មតានោះគឺ I_{n+1} យើងឃើញថាក្នុងករណីនេះ

$$L(I) \le h_{n+1} < 2L(I_{n+1}) \tag{3}$$



រូបភាព២.១

បើ $x \in I$ យើងមើលតាមរូបភាព២.១ដែលចំងាយចេញពី x ទៅចំណុចកណ្តាលដោយ I_{n+1} I_{n+1}

មិនអាចលើស $L(I)+\frac{1}{2}L(I_{n+1})$ ឬ $\frac{5}{2}L(I_{n+1})$ ដោយប្រើសមីការ (3) ។ ដូចនេះ បើយើងពិនិត្យមើលចន្លោះដោយ J_{n+1} រួមជាមួយនឹងចំណុចកណ្ដាលដូចគ្នាដូចជា I_{n+1} ក៏ប៉ុន្តែ រយៈពេលប្រាំដងវែងជាង ដែលយើងសង្កេតឃើញថា $x\in J_{n+1}$ ។ ពីនេះយើងធ្វើតាមនូវគ្រប់ចំណុច x ជារបស់ $E-\bigcup_{k=1}^{n}I_k$ និងជារបស់ $\bigcup_{k=n+1}^{\infty}J_k$ ផងដែរមានន័យថា

$$E - \bigcup_{k=1}^{n}I_k \subset \bigcup_{k=n+1}^{\infty}J_k \tag{4}$$

នោះ ដោយតាមរយៈលំហាត់ 2.25 នាំឱ្យ

$$m_e\left(E-\bigcup_{k=1}^{n}I_k\right) \le \sum_{k=n+1}^{\infty}L(J_k)= 5 \sum_{k=n+1}^{\infty}L(I_k)$$

ប៉ុន្តែដោយ $\sum_{k=1}^{\infty}L(I_k)$ រួមវាធ្វើតាមដែលថាគេឱ្យ $\varepsilon>0$ វាមានលេខមួយគឺ n_0 ដូច្នេះហើយផលបូកចុងក្រោយគេនោះអាចបង្កើតលេខតិចជាង $e\sqrt{5}$ ករណី $n>n_o$,

$$m_e(E-\bigcup_{k=1}^{n}I_k)<\varepsilon \quad \text{ករណី } n>n_o \tag{5}$$

2.20. បង្ហាញថាសរុបសេចក្ដីដោយលំហាត់ 2.19គឺវាដូចគ្នានឹង $m(E-\bigcup_{k=1}^{n}I_k)=0$ ឬក៏សមមូលនឹងចន្លោះដាច់ $I_1,I_2,\ldots$ គ្របដណ្ដប់នៅលើ E ស្ទើតែគ្រប់កន្លែង។

លទ្ធផល (5) ដោយលំហាត់ 2.19អាចសរសេរជាសមីការបានថា $m_e(E-\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k)=0$

ដូចនេះតាមរយៈលំហាត់2.9 យើងបាន $m(E-\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k)=0$ សំណុំមិនអាចវាស់បាន។

2.21. បង្ហាញលក្ខណៈពេលសំណុំវាស់វែងមិនបាន យើងគួរបង្ហាញថាវាមានសំណុំវាស់វែងមិនបានមួយនៅចន្លោះ $[0,1]$ ។ សម្រាប់ភាពងាយស្រួលក្នុងការទៅដល់សំណុំនេះ យើងគួរតែដាក់ចន្លោះនេះនៅបរិមាត្រ C ដោយរង្វង់មួយ ដូចនេះពីចំណុចនៅក្នុងចន្លោះ $[0,1]$ វានឹងមានតែចំណុចតែមួយគត់ប៉ុណ្ណោះនៅលើ C ហើយរួម ។

ឱ្យ x និង y ក្លាយជាពីរចំណុចនៅលើ C ។យើងចាត់ x និង y ជាពីរចំណុចស្មើគ្នាប្រសិនវាមានការភ្ជាប់គញនាមានប្រវែង ហើយក្នុងករណីនេះយើងសរសេរ $x\sim y$។

យើងសន្មតយកសំណុំរងដោយ C ដែលកំណត់សម្គាល់ដោយ A_α មានលក្ខណៈដែលថាចំណុចពីរគឺ x និង y គឺនៅក្នុង A_α តែមួយបើ $x\sim y$ ។ នៅក្នុងសំណុំ A_α ជាទូទៅត្រូវបានគេហៅថាថ្នាក់សមមូល។ដោយចំនួនរាប់បាចឹងវាច្បាស់ណាស់ថាសំណុំ A_α មានសំណុំចំណុចកំណត់អាចរាប់បានមួយឧទាហរណ៍ថាវាអាចរាប់បាន។

សំណុំ A_α គឺជាទូទៅជាសំណុំដាច់។ បើចំណុចដដែល x ជារបស់សំណុំផ្សេងៗទៀតដោយសំណុំ A_{α_1} និង A_{α_2} នោះរាល់ចំណុចទាំងអស់ដោយសំណុំ A_{α_1} និង A_{α_2} គឺដូចគ្នា ដូចនេះសំណុំ A_{α_1} គឺដូចសំណុំ A_{α_2} ។ ដោយសំណុំ A_α គឺជាសំណុំដាច់វាក៏ត្រូវបានគេទាញបានថាមានវាមានលេខរាប់មិនបាន

ដោយសំណុំនីមួយៗ។ ដើម្បីពិនិត្យលើចំណុចនេះយើងត្រូវសង្កេតសំណុំនីមួយៗត្រូវមានលេខដាច់ៗ និងសង្កេតថាសំណុំដោយលេខគឺវារាប់មិនបានទេ។

យើងអាចបង្កើតសំណុំ S មួយដែលមានចំណុចមួយគឺ x_α ពីសំណុំនីមួយៗដោយ A_α ដូចនេះ ចំណុចដាច់ពីរដោយសំណុំ S គឺមិនស្មើគ្នាទេ ។ ដើម្បីធ្វើបែបនេះយើងចាំបាច់ត្រូវប្រើអ័ក្សដោយជម្រើស។សំណុំ S គឺជាសំណុំវាស់វែងមិនបានដែលត្រូវការ ។

ដើម្បីបង្ហាញថាសំណុំ S មិនអាចវាស់បានយើងត្រូវសន្មតថាសំណុំដោយលេខចន្លោះ0និង1ត្រូវបានកត់សម្គាល់ថា $r_1, r_2, r_3.....$ ។ជាទូទៅ គេឱ្យ $r_1 = 0$ ។ សម្រាប់រាល់ចំនួនគត់វ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន ឱ្យ S_k ជាសំណុំចំណុចដោយ C ដែលយើងទទួលបានដោយការបង្វិលទ្រនិចនាឡិកាដោយសំណុំ S តាមធ្នូដោយប្រវែង r_k ។ វាបង្ហាញឱ្យច្បាស់ថា $S = S_1$ និងរាល់សំណុំ S_K ស្របគ្នា ដូចនេះពួកវាអាចជាសំណុំរាប់បានផងនិងសំណុំវាស់វែងមិនបានផង ។

សំណុំ S_k គឺមិនមានចំណុចណាជាធម្មតាឡើយឧទាហរណ៍សំណុំទាំងនោះគឺជាសំណុំដាច់ ។ ដើម្បីបង្ហាញលក្ខណៈនេះ យើងសន្មតថាមានសំណុំ S_k ពីរ S_4 និង S_7 ។ បើ S_4 និង S_7 មិនដាច់គ្នា នោះវាមានចំណុចមួយជាធម្មតា គឺ p ។ ដោយ $p \in S_7$ នោះវាមាន $z \in S$ z ដែលប្រវែងអ័ក្សពី p ទៅ Z គឺ r_7 ។ ដូចនេះប្រវែងអ័ក្សពី y ទៅ Z គឺជាចំនួនពិតឧទាហរណ៍ $y \sim z$ ។ នេះបង្ហាញឱ្យឃើញថាទោះបីជាផ្ទុយពីការពិតដែលថាគ្មានចំណុចដាច់ពីរដោយsអាចសមមូល ។ ដូចនេះ យើងត្រូវមាន $y = z$ ។ដូចនេះ យើងមាន $r_4 = r_7$ ដែលវាមិនអាចទៅរួច។ ការផ្ទុញនេះ បង្ហាញថាសំណុំ S_k គឺដាច់។

បើយើងយកចំណុចណាមួយ $x \in C$ នោះយើងមាន $x \in A_\alpha$ ។

ដោយ $x \in A_\alpha$ វាយោងតាមប្រវែងអ័ក្សពី x ទៅ x_α ស្មើ r_k ករណីចំនួនគត់វ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន k ។

ដូចនេះ $x \in S_k$

ដូចនេះ គ្រប់ចំណុចនីមួយៗដោយ C គឺជារបស់សំណុំ S_k ។

យើងអាចសរុបបានថា $C = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$ ដែល S_k ជាសំណុំដាច់។នោះបើសំណុំ S_k អាចវាស់បានយើងមាន $m(S) = m(S_1) = m(S_2) = ...$ និង $m(C) = m(S_1) + m(S_2) + ... = m(S) + m(S) + ...$

បើ $m(S) > 0$ យើងមាន $m(C) = \infty$ ហើយបើ $m(S) = 0$ យើងនឹងមាន $m(C) = 0$ ។ដោយ $m(C) = 1$ យើងមិនអាចមាន $m(C) = \infty$ ឬ 0 បានទេ ។ ការផ្ទុយបែបនេះបង្ហាញថាសំណុំ S មិនអាចវាស់បានដូចដែលយើងត្រូវការចាំបាច់ដើម្បីបង្ហាញទេ ។

២.៨. លំហាត់បន្ថែម

ប្រវែងដោយសំណុំ

2.22 រកប្រវែងនៃសំណុំនីមួយៗ

$(a), \{x : -2 < x < 6\}$

$(b), \{x : 3 \le x \le 5\} \cup \{-4 \le x < -2\}$

$(c), \{x : -3 < x < 4\} \cup \{1 \le x \le 6\}$

ចម្លើយ៖ $(a) 8 \quad (b)\ 4 \quad (c)\ 9$

2.23 រកប្រវែងដោយសំណុំ $\bigcup_{k=1}^{\infty} \{x : \frac{1}{2^k} \le x < \frac{1}{2^{k-1}}\}$ ចម្លើយ៖1។

2.24 រកប្រវែងដោយសំណុំ $\bigcup_{k=1}^{\infty} \{x : 0 < x < \frac{1}{3^k}\}$ ចម្លើយ $1/3$ ។

រង្វាស់ខាងក្រៅ

2.25 បើ $E_1 \subset E_2$ បង្ហាញថា $m_e(E_1) \le m_e(E_2)$

2.26 បង្ហាញថាបើសិន I ជាចន្លោះបិទ $[a,b]$ នោះ $m_e(I) = L(I) = b - a$

2.27 ពង្រីកលទ្ធផលដោយលំហាត់២.២៦ទៅគ្រប់គម្លាត

2.28 បង្ហាញថាប្រើបើ C ជាសំណុំបិទ នោះ $m_e(C) = L(C)$

2.29 បើ $m_e(E_1) = 0$ បង្ហាញថា $m_e(E_1 \cup E_2) = m_e(E_2)$ $\quad m_e(E_1 \cup E_2) = m_e(E_2)$

2.30 ស្រាយបញ្ជាក់សមីការ (3) ដោយលំហាត់2.6.

សំណុំដែលអាចវាស់បាននិងទ្រឹស្តីបទដោយការវាស់វែង

2.31 បង្ហាញថាតម្រូវការ $A-5$ សម្រាប់វាស់វែងវែងគឺធ្វើដោយយោងតាមតម្រូវការផ្សេងៗទៀត។

2.32 បង្ហាញថាសំណុំរងដោយចំនួន Q គឺអាចវាស់បាននិងរកប្រវែងរង្វាស់របស់វា។

2.33 បង្ហាញថាសំណុំដោយលេខនៅចន្លោះ $[0,1]$ គឺអាចវាស់បាននិងរកប្រវែងរង្វាស់របស់វា។តើវានៅមានសំណុំរងដោយលេខដទៃទៀតដែលអាចវាស់បានទេ?

សូមបញ្ជាក់អំណះអំណាងរបស់អ្នក។

2.34 បង្ហាញថាគ្រប់រាល់ចន្លោះ I គឺអាចវាស់បាននិងមានរង្វាស់ស្មើនឹងប្រវែងរបស់វា ។

ឧទាហរណ៍ $m(I) = L(I)$

2.35 បង្ហាញថា O គឺជាសំណុំបើកណាមួយនោះ O គឺអាចវាស់បាននិង $m(O) \approx L(O)$

2.36 បង្ហាញថាបើ C គឺជាសំណុំបិទណាមួយនោះ C គឺអាចវាស់បាននិង $m(C) = L(C)$ ។

2.37 បង្ហាញទ្រឹស្តីបទ $2-8$ ។

2.38 បង្ហាញទ្រឹស្តីបទ $2-10$ ។

2.39. ចូររកអំណះអំណាងឬបដិសេធអំណះអំណាង៖ រាល់សំណុំរងដោយសំណុំវាស់បានគឺអាចវាស់បាន។

2.40. ដោយប្រើលំហាត់ 2.5 បង្ហាញថាសំណុំដោយចំណុចនៅលើចន្លោះ $[0,1]$ គឺមិនអាចរាប់បានទេ។

2.41. បើ E_1, E_2, E_3 គឺជាសំណុំវាស់បានរួចបង្ហាញថា

$m(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = m(E_1) + m(E_2) + m(E_3) - m(E_1 \cap E_2) - m(E_1 \cap E_3) - m(E_2 \cap E_3) + m(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$

ដែលវាគឺជាជាទូទៅដោយទ្រឹស្តីបទ2-10។ សូមបង្ហាញជាទូទៅបន្ថែមទៀត ។

2.42. បង្ហាញថាសំណុំ E មួយអាចវាស់បានលុះត្រាតែមាន $\varepsilon > 0$ ដែលមានសំណុំបើក $O \supset E$ ហេតុនេះ $m_e(O - E) < \varepsilon$ ។

2.43. បង្ហាញថាសំណុំ E មួយអាចវាស់បានលុះត្រាតែមាន $\varepsilon > 0$ ដែលមានសំណុំបិទ $C \subset E$ ហេតុនេះ $m_e(E - C) < \varepsilon$ ។

2.44. បង្ហាញថាសំណុំ E មួយគឺអាចវាស់បានលុះត្រាតែមាន $\varepsilon > 0$ ដែលមានសំណុំបើក $O \supset E$ និងសំណុំបិទ $C \subset E$ ហេតុនេះ $m_e(O - C) < \varepsilon$ ។

2.45. បើ A គឺជាសំណុំណាមួយ បង្ហាញថាវាមានសំណុំវាស់បាន $B \supset A$ ហេតុនេះ $m_e(A) = m(B)$ ។ សូមមើលទៅលំហាត់ខាងលើ។

2.46. សន្មតថារាល់លេខចន្លោះ 0 និង 1 គឺការពង្រីកដែលគ្មានទីបញ្ចាប់នៅក្នុងជញ្ជីងដោយ10 ឧទាហរណ៍ ដូចជាទសភាគគត់។បង្ហាញថារង្វាស់ដោយសំណុំដោយលេខទាំងអស់ដែលខ្ទង់ពិសេសគឺលេខ5បានលុបចោលហើយស្មើសូន្យ ។

2.47. បង្ហាញទ្រឹស្តីបទ $2-19$ ។

2.48. ដោយប្រើនិយមន័យឡឺបេស S ដោយសំណុំវាស់បាន។

បង្ហាញ (a) ទ្រឹស្តីបទ2-6 (b)ទ្រឹស្តីបទ2-11។

2.49. បង្ហាញរបៀបក្នុងការស្រាយទ្រឹស្តីបទមួយចំនួន បើយើងចាប់ផ្តើមនិយមន័យដែលថាសំណុំ E អាចវាស់បានបើវាមានសំណុំបើកមួយ $O \supset E$ ហេតុនេះ $m_e(O - E) < \varepsilon$ [បើប្រៀបធៀបនឹងលំហាត់2.42]

2.50. ធ្វើលំហាត់2.49 បើយើងប្រើនិយមន័យដែលថា E គឺអាចវាស់បានបើវាមានសំណុំបើក $O \supset E$ និងសំណុំបិទ $C \subset E$ ហេតុនេះ $m_e(O - C) < \varepsilon$ [បើប្រៀបធៀបនឹងលំហាត់]។

មេរៀនទី៣៖ អនុគមន៍វាស់បាន

៣.១.អនុគមន៍ងាយ និងអនុគមន៍មិនអវិជ្ជមាន

គេឱ្យ E ជាសំណុំដែលអាចវាស់បាន ហើយ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ពិតកំណត់លើ E ។ យើងអាចនិយាយបានថា $f(x)$ គឺជាឡឺបេសដែលអាចវាស់បាន និយាយខ្លីគឺវាស់បានលើ E បើរាល់ចំនួនពិត k ជាសំណុំតម្លៃនៃ $x\in E$ ដែល $f(x)>k$ អាចវាស់បាន។ សំណុំតម្លៃ $x\in E$ ដែល $f(x)>k$ អាចសរសេរបានថា $\{x\in E: f(x)>k\}$ ឬ $\mathrm{E}[f(x)>k]$ បើ $f(x)$ វាស់បាន មានឈ្មោះថា អនុគមន៍វាស់បាន ។

៣.២. ទ្រឹស្តីបទសំខាន់ៗ

ទ្រឹស្តីបទ ៣.១៖ អនុគមន៍ $f(x)$ វាស់បានលើសំណុំ E ប្រសិនបើគ្រប់រាល់ចំនួនពិត K និមួយៗ ស្ថិតនៅក្នុងសំណុំ មួយក្នុងចំណោមសំណុំទាំងបីខាងក្រោមគឺអាចវាស់បាន។

$$(a)\ E\left[f(x)<k\right],\ \ (b)\ E\left[f(x)\le k\right],\ \ (c)\ E\left[f(x)\ge k\right]$$

ហើយប្រសិនបើសំណុំមួយក្នុងចំណោមសំណុំទាំងនេះអាចវាស់បាននោះសំណុំទាំងអស់គឺវាស់បាន ។

ទ្រឹស្តីបទ ៣.២៖ ប្រសិនបើ $f(x)$ ជាអនុគមន៍វាស់បាននៅលើសំណុំ E ហើយ $E\left[f(x)=k\right]$ $E\left[f(x)=k\right]$ អាចវាស់បានរាល់តម្លៃ k ។ ច្រាស់មកវិញអត់ពិត (លំហាត់ទី៣.៦)។

ទ្រឹស្តីបទ ៣.៣៖ អនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍វាស់បានលើសំណុំ E ប្រសិនបើរាល់គូរនិមួយៗនៃចំនួនពិតជាក់លាក់ α និង β នោះគឺ $E[\alpha<f(x)<\beta]$ គឺអាចវាស់បាន។ លទ្ធផលបង្ហាញថាពិត បើសញ្ញាវិសមភាពមួយ ឬទាំងពីរជំនួសដោយសញ្ញាតូចជាងឬស្មើ $\le$។

ទ្រឹស្តីបទ ៣.៤៖ អនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍វាស់បានលើសំណុំ E ប្រសិនបើ $E\left[f(x)>k\right]$ អាចវាស់បានរាល់ចំនួនសនិទាន k ។

ទ្រឹស្តីបទ ៣.៥៖ បើ $f(x)$ ជាអនុគមន៍វាស់បានលើសំណុំ E_1 មួយហើយបើ $E_2\subset E_1$ នោះ $f(x)$ វាស់បានលើសំណុំ E_2។

ទ្រឹស្តីបទ ៣.៦៖ បើ $f(x)$ ជាអនុគមន៍វាស់បានលើថ្នាក់រាប់បានមួយនៃសំណុំដាច់ $E_1,E_2......,$ នោះវាវាស់បាននៅលើលក្ខណៈ $\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$ ។

ទ្រឹស្តីបទ ៣.៧៖ បើ $f_1(x)$ និង $f_2(x)$ ជាអនុគមន៍វាស់បាននៅលើ E នោះ $E[f_1(x)>f_2(x)]$ គឺអាចវាស់បាន។

ទ្រឹស្តីបទ ៣.៨៖ អនុគមន៍ចំនួនថេរ គឺអាចវាស់បាន។

ទ្រឹស្តីបទ ៣.៩៖ បើ $f(x)$ ជាអនុគមន៍វាស់បាននៅលើសំណុំ E នោះចំនួនថេរមួយចំនួនដូចជា $c,\ f(x)+c$ និង $f(x)$ វាស់បាននោះលើសំណុំ E ។

ទ្រឹស្តីបទ ៣.១០៖ បើ $f(x)$ ជាអនុគមន៍វាស់បាននៅលើសំណុំ E នោះ $[f(x)]^2$ អាចវាស់បានលើសំណុំ E។

ទ្រឹស្តីបទ ៣.១១៖ បើ $f_1(x)$ និង $f_2(x)$ ជាអនុគមន៍វាស់បាននៅលើ E នោះ

$f_1(x)+f_2(x),\ \ f_1(x)-f_2(x),\ \ f_1(x)\cdot f_2(x)$ និង $f_1(x)/f_2(x)$ ដែល $f_2(x)\neq 0$ គឺអាចវាស់បាននៅលើសំណុំ E ។

ទ្រឹស្តីបទ ៣.១២៖ បើ $f_1(x)$ និង $f_2(x)$ ជាអនុគមន៍វាស់បាននៅលើសំណុំ E នោះអតិបរមា និងអប្បរមានៃ $f_1(x)$ និង $f_2(x)$ ដូចជា $\max\{f_1(x), f_2(x)\}$ និង $\min\{f_1(x), f_2(x)\}$ គឺអាចវាស់បាន។

ទ្រឹស្តីបទ ៣.១៣៖ បើ $f(x)$ ជាអនុគមន៍វាស់បាននៅលើសំណុំ E នោះ $|f(x)|$ ជាអនុគមន៍វាស់បាននៅលើ E ។

ទ្រឹស្តីបទ ៣.១៤៖ បើ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់បានលើសំណុំ E គឺអាចវាស់បាននៅលើសំណុំ E ។

ទ្រឹស្តីបទ ៣.១៥៖ ប្រសិនបើ $f_1(u)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ និង $u=f_2(x)$ អាចវាស់បាន នោះ $f_1(f_2(x))$ វាស់បាន។ម្យ៉ាងវិញទៀត អនុគមន៍ជាប់មួយនៃអនុគមន៍វាស់បានគឺវាស់បាន។ ទោះបីជាយ៉ាងណាក៏ដោយ អនុគមន៍វាស់បាននៃអនុគមន៍វាស់បានមួយទៀតមិនចាំបាច់វាស់ទេ។

ទ្រឹស្តីបទ ៣.១៦៖ គេឱ្យ $\langle f_n(x)\rangle$ ជាស្វីតនៃអនុគមន៍វាស់បានលើសំណុំ E ។ នោះ $F(x)=l.u.b.\,f_n(x)$ ហៅថាអនុគមន៍គោលលើ និង $G(x)=g.l.b.\,f_n(x)$ ហៅថាអនុគមន៍គោលក្រោម ដែលជាអនុគមន៍វាស់បានលើសំណុំ E ។

ទ្រឹស្តីបទ ៣.១៧៖ គេឱ្យ $\langle f_n(x)\rangle$ ជាស្វីតម៉ូណូតូនមួយនៃអនុគមន៍វាស់បានលើសំណុំ E ដែល $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ នោះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍វាស់បានលើសំណុំ E ។ (ចំណាំ: ស្វីត $\langle f_n(x)\rangle$ ត្រូវបានគេកំណត់ថាវាជាស្វីតម៉ូណូតូនកើន ប្រសិនបើ $f_1(x)\le f_2(x)\le\ldots$ និងជាស្វីតម៉ូណូតូនចុះកាលណា $f_1(x)\ge f_2(x)\ge\ldots$ និងជាស្វីតម៉ូណូតូនកាលណា ស្វីតជាម៉ូណូតូនកើន ឬម៉ូណូតូនចុះ)។

ទ្រឹស្តីបទ ៣.១៨៖ គេឱ្យ $\langle f_n(x)\rangle$ ជាស្វីតនៃអនុគមន៍ដែលអាចវាស់បាននៅលើសំណុំ E ។ នោះ $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n(x)$ និង $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n(x)$ អាចវាស់បានលើសំណុំ E ។

ទ្រឹស្តីបទ ៣.១៩៖ គេឱ្យ $\langle f_n(x)\rangle$ ជាស្វីតនៃអនុគមន៍ដែលអាចវាស់បាននៅលើសំណុំ E នោះ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ ។ ហើយ $f(x)$ ជាអនុគមន៍អាចវាស់បានលើសំណុំ E ។ ជាលទ្ធផលគឺពិតក្នុងករណី $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ គ្រប់ទីតាំង ។

ទ្រឹស្តីបទ ៣.២០៖ បើ $f(x)$ ជាអនុគមន៍វាស់បាននៅលើសំណុំ E ហើយ $f_1(x)=f_2(x)$ ស្ទើរតែគ្រប់ទីតាំងនៅលើសំណុំ E នោះ $f_2(x)$ គឺអាចវាស់បានលើ E ។

៣.៣. ថ្នាក់ Baire និងទ្រឹស្តីបទ Egorov

៣.៣.១. ថ្នាក់ Baire

តាមរយៈទ្រឹស្តីបទខាងលើ យើងសង្កេតឃើញថាគ្រប់អនុគមន៍ជាប់ទាំងអស់អាចវាស់បាន និងគ្រប់លីមីតនៃស្វីតនៃអនុគមន៍វាស់បានគឺវាស់បាន។ យោងទៅតាម លីមីតនៃស្វីតនៃអនុគមន៍ជាប់ដែលប្រហែលជាដាច់គឺវាស់បាន និងលីមីតនៃអនុគមន៍ដាច់ទាំងនេះគឺអាចវាស់បាន។ ដូចច្នេះ យើងទទួលបានលំដាប់នៃអនុគមន៍វាស់បានមួយ។

កណាត់ថ្នាក់បែរគឺជាគ្រួសារនៃអនុគមន៍ពិតនៅលើលំហតូប៉ូឡូជី X រៀងគ្នាដោយលេខលំដាប់ ដែលត្រូវបានគេកំណត់ដោយការធ្វើឡើងម្តងទៀតនៃអនុមានរួម ។ ថ្នាក់បែរមានពីរគឺ៖

- បែរថ្នាក់សូន្យ តាងដោយ H_0
- បែរថ្នាក់ដំបូង តាងដោយ H_1

នោះនាំឱ្យបែរ ផ្តល់ឱ្យចំណែកថ្នាក់នៃអនុគមន៍។ អនុគមន៍មួយត្រូវបានគេនិយាយថានៅក្នុងថ្នាក់បែរនៃថ្នាក់សូន្យ (ឬសង្ខេបខ្លីគឺថា បែរថ្នាក់ 0) ប្រសិនបើវាជាអនុគមន៍ជាប់។
អនុគមន៍មួយដែលវាជាលីមីតនៃស្វីតនៃអនុគមន៍ជាប់ (ដូចជា អនុគមន៍ស្ថិតនៅក្នុងបែរថ្នាក់ 0) ប៉ុន្តែវាខ្លួនឯងមិនមែនជាអនុគមន៍ជាប់ ស្ថិតនៅក្នុង បែរថ្នាក់ទី១ (ឬ សង្ខេបខ្លីគឺថា បែរថ្នាក់ទី១) ។ ឬ បែរថ្នាក់ទី១ ផ្ទុកអនុគមន៍ទាំងនោះ ដែលជាអនុគមន៍ដាច់ប៉ុន្តែជាចំណុច លីមីតនៃស្វីតនៃអនុគមន៍ជាប់ ដូចជាថ្នាក់អប្បបរមានៃអនុគមន៍ផ្ទុកអនុគមន៍ជាប់និងបិទនៅក្រោមប្រតិបត្តិការ នៃការកំណត់ចំណុចនៃលីមីត ។

ជាទូទៅអនុគមន៍មួយត្រូវបានគេនិយាយថា វានៅក្នុងបែរថ្នាក់ p ប្រសិនបើវាជាលីមីតនៃស្វីតនៃអនុគមន៍ បែរថ្នាក់ $p-1$ប៉ុន្តែវាមិនមែនជាខ្លួនឯងដែលនៅក្នុងថ្នាក់ណាមួយនៃបែរថ្នាក់ $0,1,2,\dots,p-1$។ បើ α គឺជាលំដាប់នៃចំនួនដែលអាចរាប់បាន ដែល α ជាថ្នាក់បែរ ដែល H_α ស្ថិតទៅអនុគមន៍ទាំងនោះដែលមិនស្ថិតនៅក្នុងថ្នាក់ H_α ដែល $\beta<\alpha$ ប៉ុន្តែជាចំណុចនៃលីមីតនៃស្វីតនៃអនុគមន៍ (Baire, 1998) ។ គ្រប់អនុគមន៍ដែលស្ថិតនៅក្នុងថ្នាក់បែរមួយចំនួន គឺវាស់បាន ។

៣.៣.២. ទ្រឹស្តីបទ EGOROV'S THEOREM

តាង (Ω, A, μ) ជាលំហវាស់បាន។ តាង $E\in\Omega$ ដែល $E\in A$ និង $\mu(E)<\infty$ និងតាង $\mu(E)<\infty$និងតាង $f_n,\ f:E\to\mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍វាស់បាន នោះ $f_n\to f$នៅលើសំណុំ E តាង $\varepsilon>0$ នោះគេបាន $A\subseteq E$ ដែល $A\in \mathrm{A}$ និង $\mu(A)<\varepsilon$។ ដូចនេះ $f_n\to f$ ដូចគ្នាលើ E/A។

ទ្រឹស្តីបទ ៣.២១៖ គេឱ្យ $\langle f_n(x)\rangle$ ជាស្វីតនៃអនុគមន៍វាស់បានដែលរួមទៅរកលីមីតកំណត់ $f(x)$ ស្ទើតែគ្រប់ទីតាំងនៅលើសំណុំ E នៃរង្វាស់ជាក់លាក់។ តាងលេខមួយចំនួន $\delta>0$ មានសំណុំ F មួយនៃរង្វាស់ដែលធំជាង $m(E)-\delta$ ដែល $f_n(x)$ រួមទៅ $f(x)$ តែមួយ។

៣.៤.ដំណោះស្រាយ

៣.១ បង្ហាញថា $f(x)$ វាស់បាននៅលើសំណុំE ប្រសិនបើរាល់ចំនួនពិត k និមួយៗ ដែលសំណុំ $E[f(x)\le k]$ គឺជាសំណុំដែលអាចវាស់បាន។

ដំណោះស្រាយ

ប្រសិនបើ $f(x)$ វាស់បានលើសំណុំE នោះចំនួនពិត k និមួយៗ ដែល $E[f(x)>k]$ គឺជាសំណុំដែលអាចវាស់បាន ។

តាមទ្រឹស្តីបទ 2.2 (ទំព័រ 32) ប្រសិនបើ E អាចវាស់បាននោះ $\tilde{E}$ អាចវាស់បាន និងច្រាសមកវិញ ។ វាជាសំណុំបំពេញឱ្យសំណុំE ដែលផ្តល់ដោយសំណុំ $E[f(x)\le k]$ គឺជាសំណុំដែលអាចវាស់បាន ។ ផ្ទុយមកវិញ បើ $E[f(x)\le k]$ អាចវាស់បាន។

ដូចនេះ $E[f(x)>k]$ ជាសំណុំដែលអាចវាស់បាន ដែល $f(x)$ ជាសំណុំវាស់បានលើ E ។

៣.២ បង្ហាញថា $f(x)$ វាស់បាននៅលើសំណុំ E ប្រសិនបើចំនួនពិត k និមួយៗ ដែលសំណុំ $E[f(x)\geq k]$ គឺជាសំណុំដែលអាចវាស់បាន ។

ដំណោះស្រាយ

ប្រសិនបើ $f(x)$ វាស់បានលើសំណុំ E ហើយចំនួនពិត k និមួយៗ ដែល $E[f(x)>k]$ គឺជាសំណុំដែលអាចវាស់បាន។ នោះ $E\left[f(x)>k-\frac{1}{n}\right]$ អាចវាស់បាន ដែល $n=1,2,3,...$

ទាញបានថា $\bigcap_{n=1}^{\infty}E\left[f(x)>k-\frac{1}{n}\right]=E[f(x)\geq k]$ អាចវាស់បាន

ផ្ទុយមកវិញ បើ $E[f(x)\geq k]$ អាចវាស់បាន នោះ $E\left[f(x)>k+\frac{1}{n}\right]$ អាចវាស់បាន ដែល

$n=1,2,3,...$

ដូចនេះ $\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left[f(x)\geq k+\frac{1}{n}\right]=E[f(x)>k]$ ជាសំណុំដែលអាចវាស់បាន ដែល $f(x)$ ជាសំណុំវាស់បានលើ E ។

៣.៣ បង្ហាញថា $f(x)$ វាស់បាននៅលើសំណុំ E ប្រសិនបើចំនួនពិត k និមួយៗ ដែលសំណុំ $E[f(x)<k]$ គឺជាសំណុំដែលអាចវាស់បាន។

ដំណោះស្រាយ

ប្រសិនបើ $f(x)$ វាស់បានលើសំណុំ E ហើយ $E[f(x)>k]$ គឺជាសំណុំដែលអាចវាស់បានសម្រាប់សំណុំចំនួនពិត k ។ តាម 3.2 បើ $E[f(x)\geq k]$ អាចវាស់បាន នោះ $E\left[f(x)>k+\frac{1}{n}\right]$ អាចវាស់បាន ដែល $n=1,2,3,...$ ។ $E[f(x)\geq k]$ អាចវាស់បាន និងបំពេញឱ្យ E ដែលផ្តល់ដោយ $E[f(x)\geq k]$ អាចវាស់បាន តាម3.2 នោះ $f(x)$ ជាសំណុំវាស់បានលើ E ។

៣.៤ បង្ហាញថា $f(x)$ វាស់បាននៅលើសំណុំ E នោះ $E[f(x)=k]$ អាចវាស់បានសម្រាប់សំណុំចំនួនពិត k ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $E[f(x)=k]=E[f(x)\geq k]\cap E[f(x)\leq k]$

ដោយហេតុថាសំណុំ E នៅខាងស្តាំវាស់បាន នោះចំណុចប្រសព្វវាក៏អាចវាស់បានដែរ និងលទ្ធផលត្រូវបានបង្ហាញ។

៣.៥ បង្ហាញថា $f(x)$ វាស់បាននៅលើសំណុំ E នោះ (a) $E[f(x)=\infty]$ និង (b) $E[f(x)=-\infty]$ អាចវាស់បាន។

ដំណោះស្រាយ

(a)យើងមាន $E[f(x)=\infty]=\bigcap_{k=1}^{\infty}E[f(x)>k]$ និងដោយចំណុចប្រសព្វជាសំណុំដែលអាចរាប់បាននៃសំណុំដែលអាចវាស់បាន នោះលទ្ធផលត្រូវបានសម្រាយបញ្ជាក់។

(b) យើងមាន $E\left[f(x)=-\infty\right]=\bigcap_{k=1}^{\infty}E\left[f(x)<-k\right]$ លទ្ធផលត្រូវបានសម្រាយបញ្ជាក់តាម (a)។

៣.៦ ឱ្យឧទាហរណ៍មួយដើម្បីបង្ហាញថា $E\left[f(x)=k\right]$ អាចវាស់បានសម្រាប់សំណុំចំនួនពិត k វាប្រហែលជាពិតដែល $f(x)$ មិនអាចវាស់បាននៅលើសំណុំ E ។ ប្រៀបធៀបលំហាត់ 3.4។

ដំណោះស្រាយ

សន្មតថា S គឺជាសំណុំដែលមិនអាចវាស់បាន (លំហាត់២.២១)

តាងសំណុំនេះធ្វើឱ្យស្រដៀងគ្នានៅក្នុងលក្ខណៈ១ទល់១ ជាមួយនឹងសំណុំរងនៃសំណុំចំណុចដែល $x>0$ ។ សន្មតថាសំណុំបំពេញនៃ S ដូចជា S ឆ្លើយតបក្នុងលក្ខណៈ១ទល់១ ជាមួយនឹងសំណុំរងនៃសំណុំចំណុចដែល $x\le 0$ ។

ឥឡូវសន្មតថាអនុគមន៍ $f(x)$ ត្រូវបានកំណត់ដោយឆ្លើយតបលក្ខណៈ១-១។ ប្រសិនបើ k គឺជាចំនួនពិត នោះសំណុំ $E\left[f(x)=k\right]$ ផ្ទុកមិនមែនមួយចំនុចដែលអាចវាស់បាន។

ទោះបីជាយ៉ាងណាក៏ដោយ $E\left[f(x)>0\right]$ ដែលដូចគ្នានឹង S មិនអាចវាស់បាន ដូចជា $f(x)$ មិនអាចវាស់បាន ។

៣.៧ ស្រាយថា៖ អនុគមន៍ $f(x)$ អាចវាស់បាននៅលើសំណុំ E ប្រសិនបើ (a) $E\left[f(x)>k\right]$ អាចវាស់បានដែល k ជាចំនួនសនិទាន ឬ (b) $E\left[f(x)\ge k\right]$ អាចវាស់បានដែល k ជាចំនួនសនិទាន។

ដំណោះស្រាយ

(a) តាង k ជាលីមីតនៃស្វីតនៃចំនួនសនិទាន (k_n) ដែល $k_1>k_2>k_3>\dots$

យើងមាន $E\left[f(x)>k\right]=\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left[f(x)>k_n\right]$ ដោយសារតែសំណុំដែលអាចវាស់បាននៅខាងស្តាំនាំឱ្យ $\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left[f(x)>k_n\right]$ អាចវាស់បាន ដូចនេះ $f(x)$ អាចវាស់បាននៅលើសំណុំ E ។

(b) $E\left[f(x)\ge k\right]$ តាមការសម្រាយបញ្ជាក់ផ្នែក (a) យើងទាញបាន

$$E\left[f(x)\ge k\right]=\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left[f(x)\ge k_n\right]$$

៣.៨ សម្រាយបញ្ជាក់ថា៖ ប្រសិនបើ $f_1(x)$ និង $f_2(x)$ អាចវាស់បាននៅលើសំណុំ E នោះ $E\left[f_1(x)>f_2(x)\right]$ អាចវាស់បាន។

ដំណោះស្រាយ

$\forall x\in E$ យើងឃើញថា ចំនួនសនិទាន r ដែល $f_1(x)>r>f_2(x)$ ។

នោះ $E\left[f_1(x)>r>f_2(x)\right]=E\left[f_1(x)>r\right]\cap E\left[f_2(x)<r\right]$ (1)

វាបង្ហាញថា សំណុំនៅផ្នែកខាងឆ្វេងអាចវាស់បាន ដោយសារតែសំណុំនៅផ្នែកខាងស្តាំអាចវាស់បាន។

យើងមាន $E\left[f_1(x)>f_2(x)\right]=\bigcup_{r}E\left[f(x_1)>r>f_2(x)\right]$ (2)

ដែលលក្ខណៈនៅខាងស្តាំផ្ទុកចំនួនសនិទាន r ទាំងអស់ ដែល $f_1(x)>r>f_2(x)$ ដោយសារតែសំណុំនៃចំនួនសនិទានអាចរាប់បាន នោះផ្នែកខាងស្តាំនៃ $\bigcup_r E\left[f(x_1)>r>f_2(x)\right]$ អាចរាប់បាន នៃសំណុំវាស់បាន ដែលអាចវាស់បាន ។

៣.៩ បង្ហាញថា $f(x)$ អាចវាស់បាននៅលើសំណុំ E នោះចំនួនពិតថេរ c, $f(x)+c$ អាចវាស់បានលើសំណុំ E ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយសារតែ $f(x)$ អាចវាស់បានលើសំណុំ E យើងមាន $E\left[f(x)>k-c\right]$ អាចវាស់បាន។ ដូចនេះ $E\left[f(x)+c>k\right]$ អាចវាស់បាន និង $f(x)+c$ អាចវាស់បានលើសំណុំ E ។

៣.១០ បង្ហាញថា $f(x)$ អាចវាស់បានលើសំណុំ E នោះសម្រាប់ចំនួនពិតថេរ c , $c\,f(x)$ អាចវាស់បានលើសំណុំ E ។

ដំណោះស្រាយ

បើ $c>0,\ E\left[c\,f(x)>k\right]=E\left[f(x)>k/c\right]$ ដែលអាចវាស់បាន

បើ $c<0,\ E\left[c\,f(x)>k\right]=E\left[f(x)<k/c\right]$ ដែលអាចវាស់បាន

បើ $c=0,\ c\,f(x)=0$ ដែលអាចវាស់បាន

ដូចនេះ $c\,f(x)$ អាចវាស់បានលើសំណុំលើសំណុំ E សម្រាប់ចំនួនពិតថេរ c ។

៣.១១ បង្ហាញថា $f_1(x)$ និង $f_2(x)$ អាចវាស់បានលើសំណុំ E នោះ $f_1(x)+f_2(x)$ អាចវាស់បានលើសំណុំ E ។

ដំណោះស្រាយ

របៀបទី១

យើងមាន ចំនួនពិត k ដែល $E\left[f_1(x)+f_2(x)>k\right]=E\left[f_1(x)>k-f_2(x)\right]$ (1)

តាម ៣.៩ និង ៣.១០៖ $k-f_2(x)$ អាចវាស់បាន។ ដូចនេះ តាម ៣.៨ $E\left[f_1(x)>k-f_2(x)\right]$ អាចវាស់បាន។

ដូចនេះ $f_1(x)+f_2(x)$ អាចវាស់បានលើសំណុំ E ។

ដំណោះស្រាយ

របៀបទី២

យើងមាន ចំនួនពិត k ដែល

$$E\left[f_1(x)+f_2(x)>k\right]=\bigcup_r E\left[f_1(x)>r\right]\cap E\left[f_2(x)>k-r\right] \qquad (2)$$

ដែលលក្ខណៈផ្នែកខាងស្តាំផ្ទុកដោយចំនួនសនិទាន (r) ហើយវាជាលក្ខណៈរាប់បាន។ ដោយសារតែ $f_1(x)$ និង $f_2(x)$ វាស់បានលើសំណុំ E នោះ $\bigcup_r E\left[f_1(x)>r\right]\cap E\left[f_2(x)>k-r\right]$ រាប់បានក្នុងសំណុំទាំងនេះ។

ដូចនេះ $E\left[f_1(x)+f_2(x)>k\right]$ អាចវាស់បាន និង $f_1(x)+f_2(x)$ អាចវាស់បានលើសំណុំ E ។

៣.១២ បង្ហាញថា៖ ប្រសិនបើ $f(x)$ អាចវាស់បានលើសំណុំ E នោះ $\{f(x)\}^2$ អាចវាស់បានលើសំណុំ E ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $E\left[\{f(x)\}^2>k\right]=E\left[f(x)>\sqrt{k}\right]\cup E\left[f(x)<-\sqrt{k}\right]$

លទ្ធផលត្រូវបានបង្ហាញក្នុងលក្ខណៈនៃសំណុំវាស់បានគឺវាស់បាន។

៣.១៣ បង្ហាញថា $f_1(x)$ និង $f_2(x)$ វាស់បានលើសំណុំ E នោះ $f_1(x)f_2(x)$ វាស់បានលើសំណុំ E ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $f_1(x)f_2(x)=\frac{1}{4}\left[\{f_1(x)+f_2(x)\}^2-\{f_1(x)-f_2(x)\}^2\right]$

ដូចនេះ តាមរយៈ ៣.១០ និង៣.១១ គេបាន $f_1(x)f_2(x)$ អាចវាស់បានលើសំណុំ E ។

៣.១៤ បង្ហាញថា៖ ប្រសិនបើ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើសំណុំ E វាអាចវាស់បានលើសំណុំ E ។

ដំណោះស្រាយ

ពិចារណាទៅលើសំណុំ $E\left[f(x)\le k\right]$ ។ ប្រសិនបើ x_0 គឺជាចំណុចកំណត់មួយចំនួននៃសំណុំនេះ នោះរាល់គ្រប់វ៉ស៊ីណានៃ x_0 ផ្ទុកចំណុចជាច្រើនដែល $f(x)\le k$ ។ តាមរយៈភាពជាប់នៃ $f(x)$ នៃ x_0 វាបង្ហាញតាម $f(x_0)\le k$ ។ យើងដឹងថាលីមីតកំណត់ x_0 ស្ថិតនៅក្នុងសំណុំ $E\left[f(x)\le k\right]$ ។ នោះសំណុំនេះជាសំណុំបិទដែលវាផ្ទុកលីមីតកំណត់ទាំងអស់។ វាបង្ហាញថា $E\left[f(x)\le k\right]$ ជាសំណុំវាស់បាន ដែលជាសំណុំបិទគឺវាស់បាន។

ដូចនេះ សំណុំបំពេញ $E\left[f(x)>k\right]$ វាស់បាន និង $f(x)$ វាស់បានលើសំណុំ E ។

៣.១៥ តាង $f(x)$ ជាអនុគមន៍វាស់បានលើសំណុំ E ហើយតាង O ជាសំណុំបើក។ បង្ហាញថា $E\left[f(x)\in 0\right]$ អាចវាស់បាន។

ដំណោះស្រាយ

តាង $O=\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k$ ដែល $I_k=(a_k,b_k)$ ជាចន្លោះដាច់ក្នុងសមាសភាគបើក។ (ទ្រឹស្តី១.១៩, ៧)

វាបង្ហាញថា $E\left[f(x)\in 0\right]=\bigcup_{k=1}^{\infty}E\left[f(x)\in I_k\right]=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(E\left[f(x)>a_k\right]\cap E\left[f(x)<b_k\right]\right)$

ដោយសារតែសំណុំ $E\left[f(x)>a_k\right]$ និង $E\left[f(x)<b_k\right]$ អាចវាស់បាន វាបង្ហាញតាម $E\left[f(x)\in 0\right]$ អាចវាស់បាន។

៣.១៦ ប្រសិនបើ $f_1(u)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ និង $u=f_2(x)$ អាចវាស់បានលើ E ។ បង្ហាញថា $f_1(f_2(x))$ វាស់បានលើ E ។

ដំណោះស្រាយ

យើងត្រូវបង្ហាញថា $E\left[f_1(f_2(x))>k\right]$ អាចវាស់បាន។

$E\left[f_1\left(f_2(x)\right)>k\right]=E\left[f_2(x)\in 0\right]$ (1) ដែល $0=\{u: f_1(u)>k\}$ ជាសំណុំបើកដោយសារតែ f_1 គឺជាអនុគមន៍ជាប់។ដូចនេះ $E\left[f_2(x)\in 0\right]$ វាស់បាន នោះលទ្ធផលត្រូវបានបង្ហាញ។

៣.១៧ តាង $\langle f_n(x)\rangle$ ជាស្វីតនៃអនុគមន៍ដែលអាចវាស់បានលើសំណុំ E ។ បង្ហាញថា $F(x)=l.u.b.\{f_n(x)\}=l.u.b.\{f_1(x), f_2(x),...\}$ ជាគោលលើតូចបំផុតនិង $G(x)=g.l.b.\{f_n(x)\}=g.l.b.\{f_1(x), f_2(x),...\}$ ជាគោលលើធំបំផុត ជាប់លើសំណុំ E

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $E\left[F(x)\geq k\right]=\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left[f_n(x)\geq k\right]$

ដោយសារតែ លក្ខណៈរាប់បាននៃសំណុំវាស់បាន លទ្ធផលត្រូវបានបង្ហាញ ។

ស្រដៀងគ្នាដែរ $G(x)=g.l.b.\, f_n(x)$ វាស់បានលើសំណុំ E ។

៣.១៨ បើ $f_1(x)$ និង $f_2(x)$ វាស់បានលើសំណុំ E បង្ហាញថា (a) $\max\{f_1(x), f_2(x)\}$ និង (b) $\min\{f_1(x), f_2(x)\}$ ដែល បង្ហាញពីអតិបរមា និងអប្បបរមា វាស់បានលើសំណុំ E ។

ដំណោះស្រាយ

(a) យើងមាន $\max\{f_1(x), f_2(x)\}=l.u.b.\{f_1(x), f_2(x)\}$

ដូចនេះ លទ្ធផលត្រូវបានបង្ហាញពីលំហាត់ 3.17

(b) យើងមាន $\min\{f_1(x), f_2(x)\}=g.l.b.\{f_1(x), f_2(x)\}$

ដូចនេះ លទ្ធផលត្រូវបានបង្ហាញពីលំហាត់ 3.17

៣.១៩ បង្ហាញថាបើ $\langle f_n(x)\rangle$ ជាស្វីតម៉ូណូតូន នៃអនុគមន៍អាចវាស់បានលើសំណុំ E ដែល $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ នោះ $f(x)$ ជាអនុគមណ៍វាស់បានលើសំណុំ E ។

ដំណោះស្រាយ

ពិចារណាទៅលើ $\forall x\in E$ នោះ $f_1(x)\geq f_2(x)\geq f_3(x)\geq ...$

យើងមានចំនួនពិត k ដែល $E\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\geq k\right]=\bigcup_{k=1}^{\infty}E\left[f_k(x)>k\right]$

ហើយលទ្ធផលត្រូវបានបង្ហាញដោយសារតែលក្ខណៈសំណុំរាប់បានគឺអាចវាស់បាន។ ដំណោះស្រាយស្រដៀងគ្នា ឱ្យ $f_1(x)\leq f_2(x)\leq f_3(x)\leq ...$ ឬករណីសមភាពត្រូវបានបំបាត់ចោល។

៣.២០ បង្ហាញថា៖ តាង $\langle f_n(x)\rangle$ ជាស្វីតនៃអនុគមន៍ដែលអាចវាស់បាននៅលើសំណុំ E ។ នោះ $\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)$ និង $\underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)$ អាចវាស់បានលើសំណុំ E ។

ដំណោះស្រាយ

រំឭកឡើងវិញ

$$F_1(x)=l.u.b.\{f_1(x), f_2(x),...\}$$
$$F_2(x)=l.u.b.\{f_2(x), f_3(x),...\}$$
$$F_3(x)=l.u.b.\{f_3(x), f_4(x),...\}$$

វាអនុវត្តតាម $f_1(x)\geq f_2(x)\geq f_3(x)\geq ...$ និង $\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} F_n(x)$

តាមរយៈលំហាត់ 3.19 $\lim_{n\to\infty} F_n(x)$ អាចវាស់បាន និងលទ្ធផលត្រូវបានបង្ហាញ។

លំហាត់ស្រដៀងគ្នា បង្ហាញថា $\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)$ អាចវាស់បាន (លំហាត់៣.៤៦)

៣.២១ តាង $\langle f_n(x)\rangle$ ជាស្វ៊ីតនៃអនុគមន៍អាចវាស់បានលើសំណុំ E ដែល $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ។ បង្ហាញថា $f(x)$ អាចវាស់បានលើសំណុំ E ។

ដំណោះស្រាយ

លំហាត់ 3.20 $\overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)$ និង $\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)$ វាស់បានលើសំណុំ E ។

បើ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ នោះ $f(x) = \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x) = \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)$ អាចវាស់បានលើសំណុំ E ។

៣.២២ បង្ហាញថា មានអនុគមន៍ដែលមិនអាចវាស់បាន។

ដំណោះស្រាយ

តាង S ជាសំណុំមិនអាចវាស់បាន (លំហាត់ 2.21) និងពិចារណាទៅលើអនុគមន៍សម្គាល់

$X(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in s \\ 0 & ; x \notin s \end{cases}$ ដែល $X(x)$ មិនអាចវាស់បាន ។

ថ្នាក់បែរ

៣.២៣ តាង $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^{2n}}$ សម្រាប់ចំនួនពិត x ។

(a) តើ $f_n(n)$ ស្ថិតនៅក្នុងថ្នាក់បែរ មួយណា?

(b) តើ $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ស្ថិតនៅក្នុងថ្នាក់បែរ មួយណា?

ដំណោះស្រាយ

(a) ដោយសារតែ $f_n(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ វាស្ថិតនៅក្នុងថ្នាក់បែរ លំដាប់បែរថ្នាក់សូន្យ។

(b) ដោយ $|x|<1$ នោះ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ ។ ដោយ $|x|>1$ នោះ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ ។ សម្រាប់ $|x|=1$ ដូចជា $x^{2n}=1$ នោះ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \dfrac{1}{2}$ ។ ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = F(x)$ គេបាន $F(x) = \begin{cases} 1 & |x|<1 \\ \dfrac{1}{2} & |x|=1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$

ដោយសារតែ $F(x)$ គឺជាស្វ៊ីតនៃអនុគមន៍កំណត់នៅក្នុងថ្នាក់បែរ លំដាប់សូន្យ ប៉ុន្តែវាមិននៅក្នុងថ្នាក់បែរ លំដាប់សូន្យ តែវានៅក្នុងថ្នាក់បែរ លំដាប់មួយ។

៣.២៤ បង្ហាញថាផលបូកនៃអនុគមន៍ពីរនៃថ្នាក់បែរ លំដាប់ p គឺជាថ្នាក់បែរ លំដាប់ p ។

ដំណោះស្រាយ

លទ្ធផលបង្ហាញថា ប្រសិនបើ $p=0$ ពិត តាមរយៈផលបូកនៃអនុគមន៍ជាប់ចំនួនពីរគឺជាអនុគមន៍ជាប់។ ដើម្បីបង្ហាញថាលទ្ធផលពិតពេល $p=1$ យើងសង្កេតឃើញថា តាមរយៈនិយមន័យ ប្រសិនបើ $f(x)$ និង $g(x)$ ស្ថិតនៅក្នុងថ្នាក់បែរ លំដាប់មួយ ដែលមានស្វ៊ីតនៃអនុគមន៍ $\langle f_n(x)\rangle$ និង $\langle g_n(x)\rangle$ នោះ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ និង $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$ ដែល $f_n(x)$ និង $g_n(x)$ ស្ថិតនៅក្នុងថ្នាក់បែរ លំដាប់សូន្យ។ ដោយសារតែ $f_n(x)+g_n(x)$ ស្ថិតនៅក្នុងថ្នាក់បែរ លំដាប់សូន្យ វាបង្ហាញថា

$f(x)+g(x)=\lim_{n\to\infty}\left[f_n(x)+g_n(x)\right]$ ស្ថិតនៅក្នុងថ្នាក់បែរ លំដាប់មួយ។

លំហាត់ដូចគ្នានេះដែរ អាចប្រើដើម្បីដោះស្រាយលទ្ធផលទាញរកតម្លៃ p ។

ទ្រឹស្តីអេហ្គូរEGOROV′ S THEOREM

៣.២៥ តាង $\langle f_n(x)\rangle$ ជាស្វីតនៃអនុគមន៍ដែលអាចវាស់បាន ដែលរួមទៅរកលីមីតកំណត់នៃ $f(x)$ ដែលស្ទើតែគ្រប់ទីតាំងនៅលើសំណុំ E នៃរង្វាស់ជាក់លាក់។ បង្ហាញថាបើលេខមួយចំនួន $\delta>0$ មានសំណុំ F មួយនៃរង្វាស់ដែលធំជាង $m(E)-\delta$ ដែល $f_n(x)$ រួមទៅ $f(x)$ ដូចគ្នា។

ដំណោះស្រាយ

សន្មត់ថា សំណុំនៃ $\forall x\in E$ ដែល $f_n(x)$ រួមទៅរក $f(x)$ ត្រូវបានកំណត់ដោយ H ។

យើងមាន $m(H)=m(E)$ ឬ $m(E-H)=0$ (1)

តាង $H_{p.j}=\{x:\ x\in H, |f_n-f|<\frac{1}{p}\ , n\geq j\}$

បើយើងភ្ជាប់ p វាបង្ហាញថា $H_{p.1}\subset H_{p.2}\subset H_{p.3}\subset\ldots$ និង $H=\bigcup_{j=1}^{\infty}H_{p.1}$

តាមរយៈទ្រឹស្តី 2.14, 33 គេបាន $\lim_{j\to\infty}m\left(H_{p.j}\right)=m(H)$

ដូចនេះមានចំនួនពិតធម្មជាតិមួយ $j(p)$ ដែល $m\left(H-H_{p.j(p)}\right)<\frac{\delta}{2^p}$ (2)

កំណត់បាន $F=\bigcap_{p=1}^{\infty}H_{p.j(p)}$ យើងឃើញថានៅលើ F មាន $|f_n-f|<\frac{1}{p}$ ដែល $\forall n\geq j(p)$

ដូចជា $f_n(x)$ រួមទៅរក $f(x)$ ដូចគ្នានឹង F ។

យើងគ្រាន់តែត្រូវបង្ហាញថា $m(F)>m(E)-\delta$ ឬ ដូចគ្នានេះដែរ $m(E-F)<\delta$ ។

ដើម្បីដោះស្រាយ កំណត់ថា $H-F\subset\bigcup_{p=1}^{\infty}\left(H-H_{p,j(p)}\right)$

តាម (1) និង (2)និងទ្រឹស្តី ២.៨ យើងបាន

$$m(E-F)=m(H-F)\leq\sum_{p=1}^{\infty}m\left(H-H_{p,j(p)}\right)<\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\delta}{2^p}=\delta$$

ដូចជា $m(E-F)<\delta$ បានតម្រូវ។

៣.៥. លំហាត់អនុវត្តន៍

៣.២៦.បង្ហាញទ្រឹស្តីបទ ៣-៣។ អនុគមន៍ $f(x)$ វាស់បានលើសំណុំ E បើគូនិមួយៗជាចំនួនពិត α និង β ដែល$E[\alpha < f(x) < \beta]$វាស់បាន។ លទ្ធផលគឺពិតជាក់ស្តែងមួយក្នុងនិមិត្តសញ្ញាមួយ ឬទាំងពីរត្រូវបានជំនួសដោយសញ្ញា $\leq$ ។

៣.២៧. បង្ហាញទ្រឹស្តីបទស្រដៀងគ្នាទៅនឹងទ្រឹស្តីបទ៣-៣ ។ អនុគមន៍ $f(x)$ វាស់បានលើសំណុំ E បើគូនីមួយៗជាចំនួនពិត α និង β ដែល $E[\alpha < f(x) < \beta]$វាស់បានដែលនិមិត្តសញ្ញាមួយ ឬទាំងពីរត្រូវបានជំនួសដោយសញ្ញា $\leq$ ។

៣.២៨. បង្ហាញថា អនុគមន៍ថេរគឺអាចវាស់បាន។

៣.២៩. អង្កេតថា អនុគមន៍ជាអនុគមន៍វាស់បាន

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{បើ } x \text{ ជាចំនួនសនិទានក្នុងចន្លោះ } (0,1)\\ 0 & \text{បើ } x \text{ ជាចំនួនអសនិទានក្នុងចន្លោះ } (0,1)\end{cases}$$

៣.៣០.បង្ហាញថាប្រសិនបើ $f_1(x)$ និង $f_2(x)$ អាចវាស់បាន នោះ $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)$ ដែល c_1 និង c_2 ជាចំនួនណាមួយថេរណាមួយ ហើយអាចវាស់បាន។

៣.៣១. បង្ហាញថា $f(x)$ ជាអនុគមន៍អាចវាស់បាននៅលើសំណុំ E ប្រសិនបើ $E[f(x) < k]$អាចវាស់បាន ដែល K ជាចំនួនសនិទាន។

៣.៣២.បង្ហាញថាអនុគមន៍មួយកំណត់ដោយសំណុំនៃសំណុំវាស់បានលំដាប់សូន្យគឺវាស់បាន។

៣.៣៣.បង្ហាញថាផលបូកនិងផលនៃចំនួនជាក់លាក់នៃអនុគមន៍ដែលអាចវាស់បានគឺវាស់បាន។

៣.៣៤.តើលទ្ធផលនៃបញ្ហា ៣.៣៣ ពិតសម្រាប់ចំនួនមិនកំណត់នៃអនុគមន៍វាស់បានឬទេ? ចូរពន្យល់

៣.៣៥. បង្ហាញទ្រឹស្តីបទ ៣-៥។ បើ $f(x)$ ជាអនុគមន៍វាស់បានលើសំណុំ E_1 និង $E_2 \subset E_1$ នោះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍វាស់បានលើសំណុំ E_2 ។

៣.៣៦. បង្ហាញទ្រឹស្តីបទ ៣-៦ ។ បើ $f(x)$ ជាអនុគមន៍វាស់បាននៅក្នុងថ្នាក់ដែលអាចរាប់បាននៃសំណុំដាច់គ្នា $E_1, E_2, \ldots,$ នោះវាអាចវាស់បាននៅលើលក្ខណៈ $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ ។

៣.៣៧. បង្ហាញថា បើ $f_1(x)$ និង $f_2(x)$ អាចវាស់បាននៅលើ E នោះ $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ អាចវាស់បាននៅលើ E បើ $f_2(x) \neq 0$។ (ណែនាំនៃលំនាំដំណោះស្រាយដំបូងដោះស្រាយរក $\frac{1}{f_2(x)}$ អាចវាស់បាន) ។

៣.៣៨. បើ $f(x)$ អាចវាស់បាន បង្ហាញថាអាំងតេក្រាលរីម៉្ឋមានណាមួយនៃ $f(x)$ ក៏អាចវាស់បានដែរ។

៣.៣៩. បង្ហាញទ្រឹស្តីបទ ៣-១២។ បើ $f_1(x)$ និង $f_2(x)$ អាចវាស់បានលើសំណុំ E នោះ

$f_1(x)$ និង $f_2(x)$ មានអតិបរមា និងអប្បបរមា ដូចជា $\max\{f_1(x), f_2(x)\}$ និង $\min\{f_1(x), f_2(x)\}$ អាចវាស់បាន។

៣.៤០. បង្ហាញទ្រឹស្តីបទ ៣-១៣ ។ បើ $f(x)$ អាចវាស់បានលើសំណុំ E នោះ $|f(x)|$ អាចវាស់បានលើសំណុំ E ។

៣.៤១. បង្ហាញទ្រឹស្តីបទ៣.១៩សម្រាប់ករណីដែល $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ស្ទើតែគ្រប់ទីកន្លែងនៅលើសំណុំ E ។ (៣-១៩)៖ គេមាន $\langle f_n(x)\rangle$ ជាស៊្វីតនៃអនុគមន៍វាស់បានលើសំណុំ E ដែល $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ។ នោះ $f(x)$ វាស់បានលើសំណុំ E ។ ជាលទ្ធផលក្នុងករណី $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ពិតស្ទើគ្រប់ទីតាំង។

៣.៤២. បង្ហាញទ្រឹស្តីបទ ៣-២០។ បើ $f_1(x)$ ជាសំណុំវាស់បានលើសំណុំ E និង $f_1(x) = f_2(x)$ ដែលស្ទើតែទីតាំងនៅលើសំណុំE នោះ $f_2(x)$ អាចវាស់បានលើសំណុំ E ។

៣.៤៣. បង្ហាញថាអនុគមន៍ $f(x)$ ដែលបានកំណត់ក្នុងចន្លោះ $[a, b]$ ដោយ

$$f(x) = \begin{cases} c_1 \text{ បើ } a \le x \le q \\ c_2 \text{ បើ } q \le x \le b \end{cases}$$

ដែល c_1 និង c_2 ជាចំនួនថេរ ហើយអាចវាស់បានក្នុងចន្លោះ $[a, b]$ ។

៣.៤៤. ឧបមាថា $[a, b]$ ជាលក្ខណៈនៃចំនួនដែលអាចរាប់បាននៃសំណុំជាច់គ្នា $E_1, E_2, \ldots$ ដែល $f(x) = c_k$ នៅលើ E_k ដែល c_k ជាចំនួនថេរ ។ បង្ហាញថា $f(x)$ អាចវាស់បានក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ ។ កំណត់ចំណាំ បើ$E_1, E_2, \ldots$គឺជាសំណុំចន្លោះ ហើយ $f(x)$ ជាជំហាននៃអនុគមន៍។

៣.៤៥. (លំហាត់ ៣.១៧) តាង $\langle f_n(x)\rangle$ ជាស៊្វីតនៃអនុគមន៍ដែលអាចវាស់បានលើសំណុំE ។ បង្ហាញថា $F(x) = l.u.b.\{f_n(x)\} = l.u.b.\{f_1(x), f_2(x), \ldots\}$ និង $G(x) = g.l.b.\{f_n(x)\} = g.l.b.\{f_1(x), f_2(x), \ldots\}$ ជាប់លើសំណុំ E ។

៣.៤៦. លំហាត់ ៣.២០ បង្ហាញថា៖ តាង $\langle f_n(x)\rangle$ ជាស៊្វីតនៃអនុគមន៍ដែលអាចវាស់បាននៅលើសំណុំ E ។ នោះ $\overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)$ និង $\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)$ អាចវាស់បានលើសំណុំ E ។

៣.៤៧. គេឱ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍អាចវាស់បាន ហើយ $g(x)$ ជា ម៉ូណូតូនកើនឡើង (ដូចជា $g(x)$ នោះ$g(x_2) \ge g(x_1)$ សម្រាប់ $x_2 > x_1$ បង្ហាញថា $g(f(x))$អាចវាស់បាន។

៣.៤៨. បង្ហាញថាលទ្ធផលនៃ 3.47 បើ $g(x)$ ជាម៉ូណូតូនចុះ (ដូចជា $g(x_2) \le g(x_1)$ ដែល $x_2 < x_1$)សម្រាយបញ្ជាក់លទ្ធផលបើ $g(x)$ គឺជាម៉ូណូតូនពោលគឺជាម៉ូណូតូនកើន ឬម៉ូណូតូនចុះ ។

៣.៤៩. បង្ហាញថា $\lim_{p\to\infty}\lim_{q\to\infty}(\cos p!\pi x)^{2q}$ គឺអាចវាស់បាន។

៣.៥០. តើអនុគមន៍ ៣.៩ ស្ថិតនៅក្នុងថ្នាក់បែរ មួយណា?

៣.៥១. គេឱ្យ $f_n(x) = e^{-nx^2}$ សម្រាប់ $0 \le x \le 1$ និង $F(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ។ តើ (a) $f_n(x)$

និង (b) $F(x)$ ស្ថិតនៅក្នុងថ្នាក់អ្វី?

៣.៥២. គេឱ្យ S ជាសំណុំដែលមិនអាចវាស់បាន។ ឧបមាថា $p\in S$ នីមួយៗ កំណត់

$$f_p(x)=\begin{cases}1 \text{ បើ } x=p\\ 0 \text{ បើ } x\neq p\end{cases}$$

(a) បង្ហាញថា $F(x)=l.u.b.\left[f_p(x)\ \right]$ ដែល $[p\in s]=\begin{cases}1 \text{ បើ } x\in s\\ 0 \text{ បើ } x\notin s\end{cases}$ ។

(b) $F(x)$ ជាអនុគនម៍មិនអាចវាស់បាន។

៣.៥៣. តើលទ្ធផលនៃលំហាត់ ៣.៥២ ផ្ទុយនឹងទ្រឹស្តី ៣.១៦, ៤៤ ដែរឬទេ?

៣.៥៤ បង្ហាញថាលទ្ធផលនៃ ៣.២៤ សម្រាប់ករណី $p=2$ ។

៣.៥៥ បង្ហាញថា $f(x)$ ជាផ្នែកមួយនៃថ្នាក់ប៊ែរ p ហើយគណនា

(a) $|f(x)|$, (b) $|f(x)|^2$

៣.៥៦. បង្ហាញថាលទ្ធផលនៃអនុគមន៍ពីរនៃថ្នាក់ប៊ែរ p គឺជាថ្នាក់ប៊ែរ p ។

៣.៥៧. បង្ហាញថាប្រសិនបើ $f_1(x)$ និង $f_2(x)$ គឺជាថ្នាក់ប៊ែរ p ។ គណនា

(a) $\max\{f_1(x),\ f_2(x)\}$, (b) $\min\{f_1(x),\ f_2(x)\}$

ការណែនាំ $\max\{f_1(x),\ f_2(x)\}=\frac{1}{2}\left[f_1(x)+f_2(x)\right]+\frac{1}{2}\left|f_1(x)-f_2(x)\right|$,

$$\min\{f_1(x),\ f_2(x)\}=\frac{1}{2}\left[f_1(x)+f_2(x)\right]-\frac{1}{2}\left|f_1(x)-f_2(x)\right|$$

៣.៥៨. ប្រើលំហាត់ ៣.៥៧ ដោះស្រាយ លំហាត់៣.១៨ ។

៣.១៨ បើ $f_1(x)$ និង $f_2(x)$ វាស់បានលើសំណុំ E បង្ហាញថា (a) $\max\{f_1(x), f_2(x)\}$ និង (b) $\min\{f_1(x), f_2(x)\}$ ដែលបង្ហាញពីអតិបរមា និងអប្បបរមា វាស់បានលើសំណុំ E ។

($F(x)=l.u.b.\, f_n(x)$ មានឈ្មោះថាអនុគមន៍មានដែនកំណត់ខាងលើ និង $G(x)=g.l.b\, f_n(x)$ មានឈ្មោះថា អនុគមន៍មានដែនកំណត់ខាងក្រោមដែលអាចវាស់បានលើសំណុំ E) ។

៣.៥៩. គេឱ្យ $\langle f_n(x)\rangle$ ជាស្វីតនៃអនុគមន៍ថ្នាក់ប៊ែរ p ដែលរួមទៅរកអនុគមន៍ $f(x)$ តែមួយ។ បង្ហាញថា $f(x)$ ជាថ្នាក់ប៊ែរ p ។

៣.៦០. តើលទ្ធផលនៃលំហាត់ 3.59 ពិតទេក្នុងករណីមិនរួមតែមួយដែលឬទេ? ចូរពន្យល់។

មេរៀនទី៤៖ អាំងតេក្រាលLebasqueលើសំណុំទាល់

៤.១.អាំងតេក្រាលលើអនុគមន៍ងាយ និងអនុគមន៍មិនអវិជ្ជមាន

៤.១.១ អនុគមន៍អេតាហ្សេនិងអាំងតេក្រាលរបស់វា

និយមន័យ៤.១

គេមានលំហអាចវាស់បាន (X,T) ។

គេថាអនុវត្តន៍វាស់បាន $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ជា**អនុគមន៍អេតាហ្សេ** លើ X បើ φ យកនូវតែចំនួនកំណត់មួយនៃតម្លៃចំនួនពិត (មិនអនន្ត)។

តាង $a_1, \dots, a_n$ តម្លៃចំនួនពិតនៃ φ និង $A_i = \varphi^{-1}(a_i)$ ចំពោះគ្រប់ $i \in \{1, \dots, n\}$ នោះគេបាន

$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$ ។ (មើលរូបភាព១)

គេថា φ ជា**អនុគមន៍អេតាហ្សេវិជ្ជមាន**បើ φ ជាអនុគមន៍អេតាហ្សេនិងយកតម្លៃចំនួនពិតវិជ្ជមាន (មិនអនន្ត)។

គេតាង $\varepsilon(X)$ សំណុំនៃគ្រប់អនុគមន៍អេតាហ្សេលើ X និង $\varepsilon_+(X)$ សំណុំនៃគ្រប់អនុគមន៍វិជ្ជមានលើ X ។

$\varphi \in \varepsilon(X)$

$a_1, \dots, a_n$ ជាតម្លៃនៃ φ

$A_i = \varphi^{-1}(a_i)$

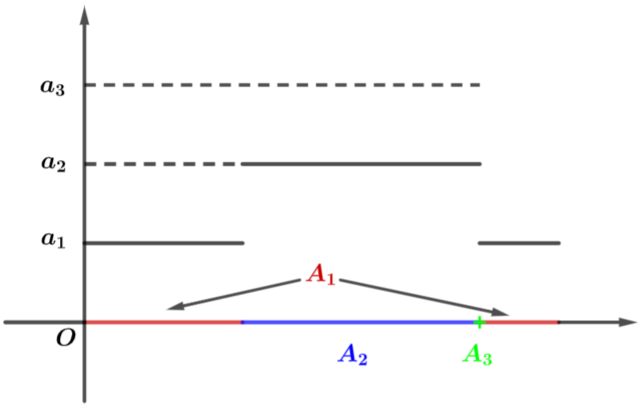
គ្រប់ $i \in \{1, \dots, n\}$

$A_i = \varphi^{-1}(a_i)$

$= \{\in X \mid \varphi(x) = a_i\}$

$\{A_1, \dots, A_n\}$ ជាបំណែកនៃ X

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$$



រូបភាព១

ឧទាហរណ៍៤.១៖ អនុគមន៍អាំងឌីកាទ្រីសនៃសំណុំចំនួនសនិទាន $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ ជាអនុគមន៍អេតាហ្សេ។

លក្ខណៈ៤.២

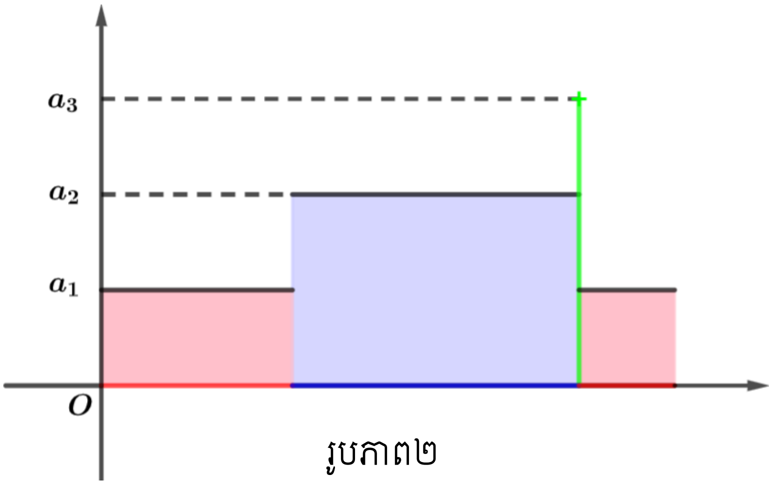
គេមានលំហអាចវាស់បាន (X,T) ។

ចំពោះគ្រប់អនុគមន៍វាស់បាន $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ គេអាចរកបានស្វីតកើនមួយនៃអនុគមន៍អេតាហ្សេវិជ្ជមាន φ_n ដែលរួមងាយទៅរក f (គឺមានន័យថា $\varphi_n(x) \longrightarrow f(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x \in X$)។ ស្វីតនេះហៅថាស្វីតអាប់ប្រូស៊ីម៉ង់នៃ f ។

និយមន័យ៤.២

គេមានលំហវាស់បាន (X,T,μ) និង $\{A_1, \dots, A_n\}$ ជាបំណែកនៃ X ដែល $A_i \in T$ និងគេមាន $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$ ជាអនុគមន៍អេតាហ្សេវិជ្ជមាន។

អាំងតេក្រាលនៃ φ លើ X ដែលតាងដោយ $\int_X \varphi d\mu$ គឺ $\sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)$ ។ (មើលរូបភាព២)



រូបភាព២

លក្ខណៈ៤.៣

គេមានលំហវាស់បាន (X,T,μ) ។ គ្រប់ $\varphi,\psi \in \varepsilon_+(X)$ និងគ្រប់ $a \in \mathbb{R}_+$ គេបាន៖

1) $\int_X a\varphi d\mu = a\int_X \varphi d\mu$

2) $\int_X (\varphi + \psi) d\mu = \int_X \varphi d\mu + \int_X \psi d\mu$

លក្ខណៈ៤.៤

គេមានលំហវាស់បាន (X,T,μ) និង $\varphi,\psi \in \varepsilon(X)$ ។បើ $\varphi \le \psi$ នោះ $\int_X \varphi d\mu \le \int_X \psi d\mu$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

គេមាន $\psi = \varphi + (\psi - \varphi)$ គេបាន $\int_X \psi d\mu = \int_X \varphi d\mu + \int_X (\psi - \varphi) d\mu$

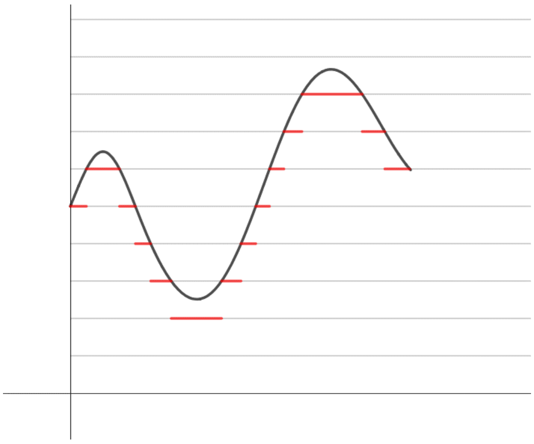
ដោយ $\psi - \varphi$ ជាអនុគមន៍អេតាហ្សេវិជ្ជមាន គេបាន $\int_X (\psi - \varphi) d\mu$ វិជ្ជមាន ឬ $+\infty$ ពីព្រោះជារង្វាស់មួយដែលមានតម្លៃក្នុង $[0,+\infty]$ ។ ដូច្នេះ $\int_X \varphi d\mu \le \int_X \psi d\mu$ ។

៤.១.២ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍វិជ្ជមាន

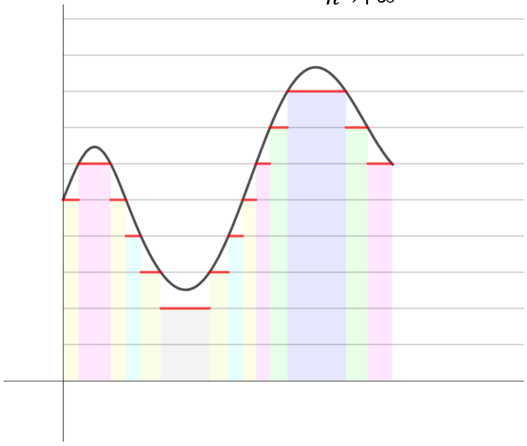
និយមន័យ៤.៣ ៖ គេមានលំហវាស់បាន (X,T,μ) និងអនុគមន៍វាស់បានវិជ្ជមាន $f : X \longrightarrow [0,+\infty]$ ។ គេកំណត់អាំងតេក្រាលនៃ f លើ X ដោយ៖

$\int_X f d\mu = \sup\left\{\int_X \varphi d\mu \mid \varphi \in \varepsilon_+(X) \text{ និង } 0 \le \varphi \le f\right\}$ ។

កំណត់សម្គាល់៖ បើ φ_n ជាស្វ៊ីតអាប់ប្រូស៊ីម៉ង់មួយនៃ f នោះ $\int_X f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X \varphi_n d\mu$ ។



រូបភាព៣



រូបភាព៤

ឧទាហរណ៍៤.២៖ ករណី $X = \mathbb{N}$ ៖

គេមានស៊ីត $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ មួយដែលតួនីមួយៗនៃស៊ីតនេះជាចំនួនវិជ្ជមាន

អនុវត្តន៍ $u :\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$n \longmapsto u_n$ វាស់បានពីព្រោះថា Tribu លើ $\mathbb{N}$ គឺ $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

តាង μ_C រង្វាស់នៃរាប់លើ $\mathbb{N}$

យក $\varphi_n :\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ កំណត់ដោយគ្រប់ $k \le n, \varphi_n(k) = u_k$ និងគ្រប់ $k > n, \varphi_n(k) = 0$

គ្រប់ n, φ_n ជាអនុគមន៍អេតាហ្សេនិងស៊ីត $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស៊ីតកើនដែលរួមទៅរក u

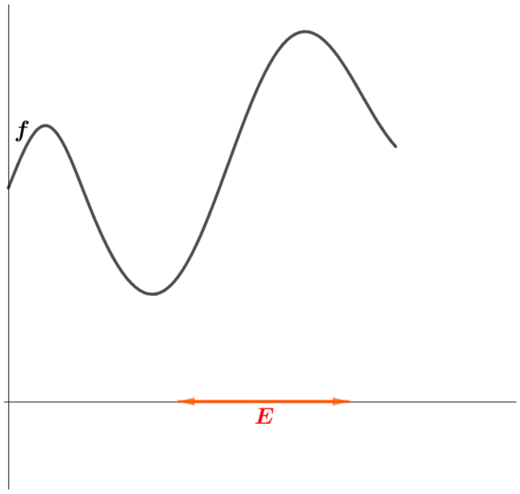
ដូច្នេះ $\int_{\mathbb{N}} u d\mu_C = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{N}} \varphi_n d\mu_C = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ ។

និយមន័យ៤.៤

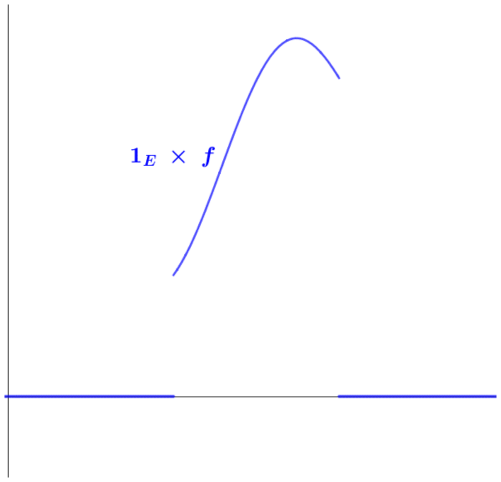
គេមានលំហវាស់បាន (X, T, μ) និងអនុគមន៍វាស់បានវិជ្ជមាន $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ ។

បើ $E \subset X$ ជាផ្នែកវាស់បានមួយនោះអាំងតេក្រាលនៃ f លើ E កំណត់ដោយ៖

$\int_E f d\mu = \int_X \mathbb{1}_E \times f d\mu$ ។



រូបភាព៥



រូបភាព៦

និយមន័យ៤.៥៖ [អនុគមន៍វិជ្ជមានមានអាំងតេក្រាល]

គេមានលំហវាស់បាន (X, T, μ) ។ គេថាអនុគមន៍វាស់បានវិជ្ជមាន $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ មានអាំងតេក្រាលលើ X ធៀបនឹងរង្វាស់ μ បើ $\int_X f d\mu < +\infty$ ។

លក្ខណៈ៤.៥

គេមានលំហវាស់បាន (X, T, μ) ។

បើ f និង g ជាអនុគមន៍វាស់បានវិជ្ជមានលើ X នោះគេបាន៖

1) គ្រប់ $a \in \mathbb{R}_+, \int_X af d\mu = a\int_X f d\mu$

2) $\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$

លក្ខណៈ៤.៦

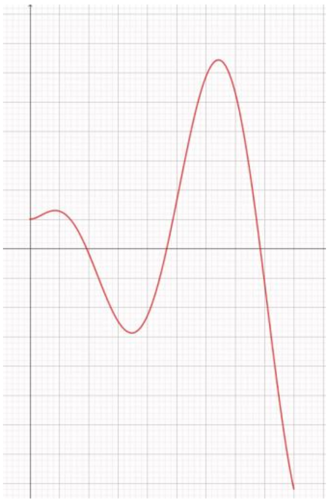
គេមានលំហវាស់បាន (X, T, μ) ។

បើ f និង g ជាអនុគមន៍វាស់បានវិជ្ជមានលើ X និងបើ $f \leq g$ នោះ $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$ ។

៤.២.អាំងតេក្រាលអនុគមន៍ ទូទៅ

គេមាន $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ អនុគមន៍វាស់បានទូទៅមួយ។ ជាបឋមគេកំណត់អនុគមន៍វាស់បានវិជ្ជមាន f^+ និង f^- ដោយៈ

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{បើ } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{បើ } f(x) < 0 \end{cases} \quad ; \quad f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{បើ } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{បើ } f(x) > 0 \end{cases}$$



រូបភាព៧

រូបភាព៨

រូបភាព៩

គេបាន $f = f^+ - f^-$ និង $|f| = f^+ + f^-$ ។

និយមន័យ៤.៦ [អនុគមន៍មានអាំងតេក្រាល]

គេមានលំហវាស់បាន (X, T, μ) និងអនុគមន៍វាស់បាន $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ។ គេថា f មានអាំងតេក្រាលលើ X ធៀបនឹងរង្វាស់ μ កាលណាអនុគមន៍វាស់បានវិជ្ជមាន f^+ និង f^- មានអាំងតេក្រាលលើ X ធៀបនឹងរង្វាស់ μ ($\int_X f^+ d\mu < +\infty$ និង $\int_X f^- d\mu < +\infty$)។

លក្ខណៈ៤.៧

គេមានលំហវាស់បាន (X, T, μ) និងអនុគមន៍វាស់បាន $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ។

f មានអាំងតេក្រាលលើ X ធៀបនឹងរង្វាស់ μ លុះត្រាតែ $|f|$ មានអាំងតេក្រាលលើ X ធៀបនឹងរង្វាស់ μ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

បើ f មានអាំងតេក្រាលលើ X ធៀបនឹងរង្វាស់ μ នោះអនុគមន៍វាស់បានវិជ្ជមាន f^+ និង f^- មានអាំងតេក្រាលលើ X ធៀបនឹងរង្វាស់ μ ។ ដោយ $|f| = f^+ + f^-$ នោះ $|f|$ មានអាំងតេក្រាលលើ X ធៀបនឹងរង្វាស់ μ ។

ច្រាសមកវិញ បើ $|f|$ មានអាំងតេក្រាលលើ X ធៀបនឹងរង្វាស់ μ

ដោយដឹងថា $0 \leq f^+ \leq |f|$ និង $0 \leq f^- \leq |f|$

នាំអោយ f^+ និង f^- មានអាំងតេក្រាលលើ X ធៀបនឹងរង្វាស់ μ

ដូច្នេះ f មានអាំងតេក្រាលលើ X ធៀបនឹងរង្វាស់ μ ។

និយមន័យ៤.៧៖ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍ទូទៅ

គេមានលំហវាស់បាន (X, T, μ) និងអនុគមន៍វាស់បាន $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ។

អាំងតេក្រាលនៃ f លើ X ធៀបនឹងរង្វាស់ μ គឺ $\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$ ។

លក្ខណៈ៤.៨៖ វិសមភាពត្រីកោណ

គេមានលំហវាស់បាន (X, T, μ) និងអនុគមន៍វាស់បាន $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ មានអាំងតេក្រាលលើ X ធៀបនឹងរង្វាស់ μ ។

គេបាន $\left|\int_X f d\mu\right| \leq \int_X |f| d\mu$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

គេមាន $\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$

ដោយ $-\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \leq \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \leq \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu$

$-\int_X |f| d\mu \leq \int_X f d\mu \leq \int_X |f| d\mu$

ដូច្នេះ $\left|\int_X f d\mu\right| \leq \int_X |f| d\mu$។

លក្ខណៈ៤.៩៖ [ប្រៀបធៀបពីរអនុគមន៍មានអាំងតេក្រាល]

គេមានលំហវាស់បាន (X, T, μ) និង $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ពីរអនុគមន៍មានអាំងតេក្រាលលើ X ធៀបនឹងរង្វាស់ μ ។

បើ $f \leq g$ នោះ $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

គេមាន $\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$ និង $\int_X g d\mu = \int_X g^+ d\mu - \int_X g^- d\mu$

បើ $f \leq g$ នោះ $0 \leq f^+ \leq g^+$ និង $f^- \geq g^- \geq 0$

គេបាន $\int_X f^+ d\mu \leq \int_X g^+ d\mu$ និង $\int_X f^- d\mu \geq \int_X g^- d\mu$

$\int_X f^+ d\mu \leq \int_X g^+ d\mu$ និង $-\int_X f^- d\mu \leq -\int_X g^- d\mu$

នាំអោយ $\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \leq -\int_X g^- d\mu + \int_X g^+ d\mu$ គឺបញ្ជាក់ថា $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$

ដូច្នេះ បើ $f \leq g$ នោះ $\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$ ។

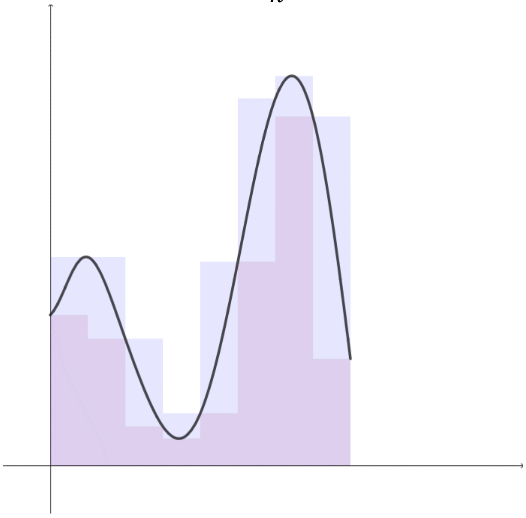
៤.៣.អាំងតេក្រាលរីម៉ាន់ (Riemann integral)

អាំងតេក្រាលគឺត្រូវបានគេលើកយកមកសិក្សានៅក្នុងការគណនាគេហៅថាអាំងតេក្រាលរីម៉ាន់ ហើយអាំងតេក្រាលរីម៉ាន់ ក៏មានគុណវិបត្តិមួយចំនួនផងដែរដែលអាចប្រើជំនួសមកវិញដោយអាំងតេក្រាលឡឺបេស ជាច្រើនវិធីដោយយើងគ្រាន់តែធ្វើវិធីស្រដៀងគ្នាទៅនិងឧបសម្ព័ន្ធ A ដោយអាំងតេក្រាលរីម៉ាន់ ។ ភាពខុសគ្នាដោយអាំងតេក្រាលរីម៉ាន់ និងអាំងតេក្រាលឡឺបេស គឺថារូបមន្តដែលប្រើប្រាស់នៅចន្លោះប្រវែងទាំងពីរ ដែលប្រើប្រាស់ចំណុចទូទៅនិងការវាស់វែងច្រើន។ ដូចនេះវាមិនមែនជារឿងចម្លែកទេដែលអាំងតេក្រាលឡឺបេស គឺមានភាពទូទៅច្រើនជាងអាំងតេក្រាលរីម៉ាន់ ។

គេមាន $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ អនុគមន៍មានអាំងតេក្រាលតាមន័យរបស់រីម៉ាន់។

គេតាងអាំងតេក្រាលតាមន័យរបស់Riemann នៃ f ដោយ $I_R(f) = \int_a^b f(x) dx$ ។

គឺមានន័យថា ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ មានពីរអនុគមន៍កាំជណ្ដើរ g_n និង h_n ដែល $g_n \le f \le h_n$ និង ដែល $I_R(f) - \frac{1}{n} \le I_R(g_n) \le I_R(h_n) \le I_R(f) + \frac{1}{n}$ ។



រូបភាព១០

៤.៤.អាំងតេក្រាលឡឺបេសលើអនុគមន៍វាស់បានទាល់

យើងឱ្យ $f(x)$ ទាល់និងអាចវាស់បាននៅលើចន្លោះ $[a,b]$ ។ ឧបមាថា α,β គឺជាចំនួនពិតទាំងពីរដែល $\alpha < f(x) < \beta$ ។ បែងចែកជួរ α ទៅជា β នៅចន្លោះរងដែលជ្រើសរើសតម្លៃ $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ ដែល $\alpha = y_o < y_1 < y_2 < \dots < y_{n-1} < y_n = \beta$ (1)

ចំណាំថាតម្លៃទាំងនេះគឺតំណាងឱ្យធរណីមាត្រដោយចំណុចនៅលើអ័ក្សអរដោនេ y ដូចដែលបង្ហាញក្នុងរូបភាព១១។ សំណុំដាក់លាក់ដោយចំណុចគឺភាគច្រើនសំដៅលើភាគថាស ឬការបែងចែកដោយសំណុំរង។

ឱ្យ $E_k, k = 1,2,3,\dots,n$ ជាសំណុំដោយគ្រប់ x នៅក្នុង $[a,b]$ ដែល $y_{k-1} \le f(x) \le y_k$ មានន័យថា $E_k = \{x : y_{k-1} \le f(x) < y_k\}, k = 1,2,..,n$ ។

ដោយសារតែ $f(x)$ គឺអាចវាស់បាននោះសំណុំទាំងនេះក៏អាចវាស់បានដូចគ្នា ហើយអាចផ្ទៀងផ្ទាត់ថាមិនជាប់គ្នាទេ។ ផលបូកគោលលើ និងគោលក្រោម S និង s ដែលកំណត់ដោយ

$$S = \sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k) \quad (2)$$

$$s = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} m(E_K) \quad (3)$$

តាមរយៈការផ្លាស់ប្តូរភាគថាស មានន័យថាការជ្រើសរើសចំណុចផ្សេងគ្នាដោយផ្នែករងគឺដូចគ្នានិងចំនួនចំណុចដែលយើងទទួលបានសំណុំតម្លៃដោយ S និង s ។

ឱ្យ $I = g.l.b$ ដោយតម្លៃ S ទាំងអស់សម្រាប់ភាគថាសដែលអាចចែកបាន

$J = l.u.b$ ដោយតម្លៃ s ទាំងអស់សម្រាប់ភាគថាសដែលអាចចែកបាន

តម្លៃដែលយើងមានទាំងនេះត្រូវបានហៅថាជាអាំងតេក្រាលឡឺបេស *គោលលើ* និង *គោលក្រោម* ដោយអនុគមន៍ $f(x)$ នៅលើ $[a,b]$ រៀងគ្នាហើយត្រូវបានកំណត់ដោយ

$$I = \overline{\int_a^b f(x)dx} \quad , J = \underline{\int_a^b f(x)dx} \qquad (4)$$

បើ $I = J$ យើងថា $f(x)$ គឺជាអាំងតេក្រាលឡឺបេស នៅលើចន្លោះ $[a,b]$ ហើយកំណត់តម្លៃទូទៅដោយ

$$\int_a^b f(x)dx \qquad (5)$$

ដែលហៅថាអាំងតេក្រាលឡឺបេសដោយ $f(x)$ នៅលើចន្លោះ $[a,b]$

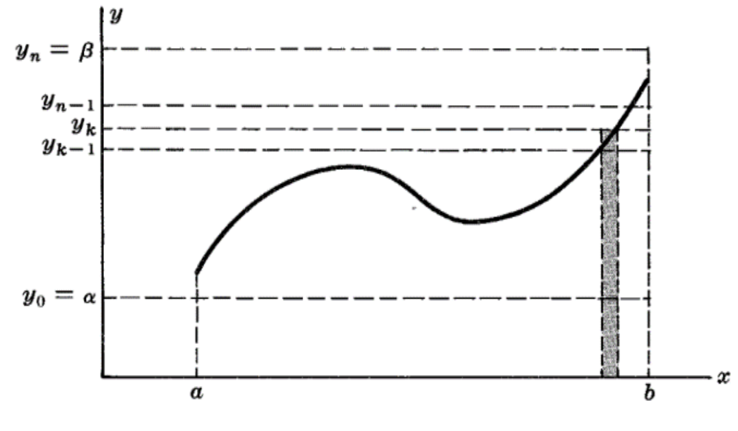
យើងមានចំណុចសំខាន់ៗដូចខាងក្រោម៖

ទ្រឹស្តីបទ ៤.១៖ បើ $f(x)$ គឺទាល់និងអាចវាស់បាននៅលើចន្លោះ $[a,b]$ នោះនឹងមានអាំងតេក្រាលឡឺបេស (5) ហើយយើងអាចនិយាយថា $f(x)$ គឺជាអាំងតេក្រាលឡឺបេស ឬ អាំងតេក្រាលធម្មតានៅលើចន្លោះ $[a,b]$ បើ (5) កំណត់បាន នោះយើងអាចសរសេរដោយ

$$\int_a^b f(x)dx < \infty \qquad (6)$$

ការបកស្រាយធរណីមាត្រដោយអាំងតេក្រាលឡឺបេស

ដូចដែលយើងបានឃើញក្នុងរូបភាព១១ខាងក្រោមនេះ $y_k m(E_k)$ និង $m(E_k)$ អាចបកស្រាយតាមធរណីមាត្រថាជាតំបន់ចតុកោណកែង នៅពេលដែល E_k គឺជាចន្លោះនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស x ហើយតាង $x = a$ និង $x = b$។ សម្រាប់សំណុំទូទៅអាំងតេក្រាលឡឺបេស គឺអាចកំណត់បានប៉ុន្តែការបកស្រាយតាមធរណីមាត្រប្រហែលជាមិនអាចទៅរួចនោះទេ។



រូបភាព១១

៤.៥. ការចំណាំសម្រាប់អាំងតេក្រាលរីម៉ាន់ និងអាំងតេក្រាលឡឺបេស

យើងសង្កេតឃើញថា (5) គឺមានរាងដូចគ្នាទៅនិងអាំងតេក្រាលរីម៉ាន់ ដោយការគណនាដំបូង។ ដោយសារគោលបំណងសំខាន់ដោយសៀវភៅនេះគឺផ្តោតលើអាំងតេក្រាលឡឺបេស យើងអាចប្រើប្រាស់ការកំណត់ចំណាំ (5) សម្រាប់អាំងតេក្រាលនេះ។ នៅពេលដែលវាចាំបាច់ក្នុងការបែងចែករវាងអាំងតេក្រាលរីម៉ាន់ និងអាងតេក្រាលឡឺបេស ដោយយើងប្រើប្រាស់ការចំណាំដូចជា

$$(\Re)\int_a^b f(x)dx \qquad (7)$$

សម្រាប់អាំងតេក្រាលរីម៉ាន់ (ករណីលើកលែងសម្រាប់រូបក្នុងឧបសម្ព័ន្ធ A)

៤.៦.ទ្រឹស្តីបទអាំងតេក្រាល Lebasque

យើងសន្មតថាលើកលែងតែមានការបញ្ជាក់ថា $f\left(x\right)$គឺទាល់និងអាចវាស់បានដូចនេះអាំងតេក្រាលឡឺបេស និងសំណុំដែលបានបង្ហាញទាំងអស់គឺអាចវាស់បានដូចគ្នា ។

ទ្រឹស្តីបទ 4-2 $\int_E cf\left(x\right)dx = c\int_E f\left(xx\right)dx$ ដែល c ជាចំនួនថេរ

ទ្រឹស្តីបទ 4-3 $\int_E cdx = cm(E)$ ដែល c ជាចំនួនថេរ

ទ្រឹស្តីបទ 4-4 បើ E មានរង្វាស់ស្មើសូន្យ នោះគេបាន $\int_E f\left(x\right)dx = 0$

ទ្រឹស្តីបទ 4-5 បើ $A \le f\left(x\right) \le B$ នោះ

$$Am\left(E\right) \le \int_E f\left(x\right)dx \le Bm\left(E\right) \qquad (11)$$

នេះជួនកាលគេហៅទ្រឹស្តីបទនេះថាទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យមដោយអាំងតេក្រាលឡឺបេស

ទ្រឹស្តីបទ 4-6 បើ $E = E_1 \cup E_2$ ដែល E_2 ជាច់គ្នា នោះ

$$\int_E f(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx$$

ទ្រឹស្តីបទ 4-7 បើ $E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots$ ដែល $E_1, E_2, \ldots$ មិនជាប់គ្នា នោះគេបាន

$$\int_E f(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx + \ldots$$

ទ្រឹស្តីបទ 4.8 $\int_E \left[f(x) + g(x)\right]dx = \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx$

លទ្ធផលងាយស្រួលក្នុងការដោះស្រាយកអនុគមន៍អាំងតេក្រាលកំណត់

ទ្រឹស្តីបទ 4.9 បើ $f(x)$ និង $g(x)$ គឺទាល់និងអាចវាស់បាននៅលើ E នោះ $f\left(x\right)g\left(x\right)$ គឺជាអាំងតេក្រាលឡឺបេសនៅលើ E មានន័យថា

$$\int_E f(x)g(x)dx \le \infty$$

ទ្រឹស្តីបទ 4.10 បើ $f\left(x\right) \le g\left(x\right)$ នៅលើសំណុំ E នោះ

$$\int_E f(x)dx \le \int_E g(x)dx$$

លទ្ធផលគឺពិតបើ $f\left(x\right) \le g\left(x\right)$ ស្ទើតែគ្រប់កន្លែងនៅលើ E

ទ្រឹស្តីបទ 4.11 បើ $f(x)$ ទាល់និងអាចវាស់បាននៅលើ E នោះ $|\,f(x)\,|$ គឺជាអាំងតេក្រាលឡឺបេសនៅលើ E ។ ផ្ទុយមកវិញបើ $|\,f(x)\,|$ គឺទាល់ និងអាចវាស់បាននៅលើ E នោះ $f\left(x\right)$ គឺជាអាំងតេក្រាលឡឺបេសនៅលើ E ។

ទ្រឹស្តីបទ 4.12 $\left|\int_E f\left(x\right)dx\right| = \int_E |\,f(x)\,|\,dx$ នៅលក្ខខណ្ឌ 4-11 ខាងលើ។

ទ្រឹស្តីបទ 4.13 បើ $f(x) = g(x)$ នៅគ្រប់កន្លែងទាំងអស់នៅលើ E នោះ

$$\int_E f\left(x\right)dx = \int_E g\left(x\right)dx \text{ ។}$$

ទ្រឹស្តីបទ 4-14 បើ $f\left(x\right)\geq 0$ និង $\int_E f\left(x\right)dx = 0$ នោះ $f\left(x\right) = 0$ នៅគ្រប់កន្លែងទាំងអស់នៅលើ E ។

៤.៧.ទ្រឹស្តីបទអាំងតេក្រាល Lebasque លើភាពរួមទាល់

ទ្រឹស្តីបទ 4-15 (រួមទាល់) តាង $\langle f_n(x)\rangle$ គឺជាលំដាប់ដោយអនុគមន៍ដែលអាចវាស់បាននៅលើ E ដែល $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ នោះបើលំដាប់គឺទាល់ស្មើគ្នាមានន័យថា បើ M ជាចំនួនថេរនោះ $|f_n(x)|\leq M$ គ្រប់ n យើងមាន

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx = \int_E \lim_{n\to\infty} f(x)dx = \int_E f(x)dx$$

ពីព្រោះសំណុំសូន្យអាច លុបអាំងតេក្រាលចោលបាន ហើយលក្ខខណ្ឌអាចយកចេញ ដូចនេះគេអាចរកបានគ្រប់ទាំងអស់ទ្រឹស្តីបទនេះគឺមានសារៈសំខាន់ណាស់ ដែលមិនពិតចំពោះអាំងតេក្រាលរីម៉ាន់ទេ (មើលក្នុងលំហាត់ 4.24) បង្ហាញពីការប្រើប្រាស់អាំងតេក្រាលឡឺបេស។

ទ្រឹស្តីបទរួមទាល់សម្រាប់ស៊េរីមិនកំណត់

ទ្រឹស្តីបទឡឺបេសនៅលើផ្នែករួមទាល់ខាងលើនេះអាចបង្កើតនូវចំណុចស៊េរីឡើងវិញជាជាងលំដាប់ខាងក្រោមនេះ៖

ទ្រឹស្តីបទ 4-16 បើ $u_k(x), k = 1,2,\ldots$ គឺអាចវាស់បាននៅលើ E និងផលបូក $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ គឺផ្នែកទាល់ស្មើគ្នានៅលើ E (មានន័យថា $\left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right|\leq M$ ចំពោះគ្រប់ $x\in E$) និង $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$, នោះ

$$\int_E \left\{\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right\}dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_E u_k(x)dx$$

៤.៨.ទំនាក់ទំនងអាំងតេក្រាល Lebasque និងអាំងតេក្រាល Riemann

ទ្រឹស្តីបទ 4-17 បើ $f\left(x\right)$ គឺជាអាំងតេក្រាលរីម៉ាន់នៅចន្លោះ $\left[a,b\right]$ នោះវាគឺជាអាំងតេក្រាលឡឺបេសនៅចន្លោះ $\left[a,b\right]$ និងអាំងតេក្រាលទាំងពីរស្មើគ្នាមានន័យថា

$$\int_a^b f\left(x\right)dx = (\Re)\int_a^b f\left(x\right)dx$$

ចំណាំ ទោះបីជាយ៉ាងណាក៏ដោយការនិយាយខាងលើគឺមិនពិតទាំងអស់នោះទេ មានន័យថា បើ $f\left(x\right)$ គឺជាអាំងតេក្រាលឡឺបេសនៅចន្លោះ $\left[a,b\right]$ នោះមិនមែនជាអាំងតេក្រាលរីម៉ាន់នៅចន្លោះ $\left[a,b\right]$ នោះទេ។ មើលក្នុងលំហាត់ 4.9 និងលំហាត់ A2 ។

ទ្រឹស្តីបទ 4-18 អនុគមន៍ $f\left(x\right)$ គឺជាអាំងតេក្រាលរីម៉ាន់នៅចន្លោះ $\left[a,b\right]$ បើសំណុំដោយភាពមិនដំណើរការដោយ $f\left(x\right)$ នៅក្នុង $\left[a,b\right]$ មានរង្វាស់ស្មើសូន្យ មានន័យថា $f\left(x\right)$ គឺជាប់ស្ទើតែគ្រប់កន្លែង ។

ទ្រឹស្តីបទ 4-19 បើ $f\left(x\right)$ គឺជាប់ស្ទើតែគ្រប់ផ្នែកនៅក្នុង $\left[a,b\right]$ នោះវាជាអាំងតេក្រាលឡឺបេសនៅក្នុង $\left[a,b\right]$ ។

៤.៩. ពង្រីកការសិក្សានៅក្នុងសំណុំកុំផ្លិច

និយមន័យ៤.១៦

គេមានលំហវាស់បាន (X,T,μ) និងអនុគមន៍ $f: X \longrightarrow \mathbb{C}$ ។

គេអាចសរសេរៈ $f = f_1 + if_2$ ដែល $f_1, f_2 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ។

សំណុំបើកនៃ $\mathbb{C}$ គឺជាសំណុំបើកនៃ $\mathbb{R}$ ដូច្នេះ Tribu នៃBorelនៃ $\mathbb{C}$គឺជា TribuនៃBorel នៃ$\mathbb{R}$ ។

អនុគមន៍ f វាស់បានលុះត្រាតែ f_1 និង f_2 វាស់បាន។

គេថា អនុគមន៍ f មានអាំងតេក្រាលលុះត្រាតែ f_1 និង f_2 មានអាំងតេក្រាល និងគេកំណត់ៈ $\int_X f d\mu = \int_X f_1 d\mu + i\int_X f_2 d\mu$ ។

លក្ខណៈ៤.១០

គេមានលំហវាស់បាន (X,T,μ) និងអនុគមន៍វាស់បាន $f: X \longrightarrow \mathbb{C}$ ។

អនុគមន៍ f មានអាំងតេក្រាល លុះត្រាតែ $|f|$ មានអាំងតេក្រាល។

លក្ខណៈ៤.១១

គេមានលំហវាស់បាន (X,T,μ) ។

គេមាន $f, g: X \longrightarrow \mathbb{C}$ ពីរអនុគមន៍វាស់បាន គេបានៈ

(1) គ្រប់ $a \in \mathbb{C}, af$ មានអាំងតេក្រាល និង $\int_X af d\mu = a\int_X f d\mu$;

(2) $f + g$ មានអាំងតេក្រាល និង $\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$ ។

លក្ខណៈ៤.១២ [ទំនាក់ទំនង Chasles]

គេមានលំហវាស់បាន (X,T,μ) ។

គេមាន $A, B \in T$ និង $f: A \cup B \longrightarrow \mathbb{C}$ ។

បើ f មានអាំងតេក្រាល នោះ $f_{|A}$ និង $f_{|B}$ មានអាំងតេក្រាល។

លើសពីនេះ បើ $\mu(A \cap B) = 0$ គេបាន $\int_{A\cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$ ។

ករណីពិសេសៈ បើ $f: X \longrightarrow \mathbb{C}$ មានអាំងតេក្រាលនោះគ្រប់ $A \in T, f_{|A}$ មានអាំងតេក្រាល និង $\int_A |f| d\mu \le \int_X |f| d\mu$ ។

លក្ខណៈ៤.១៣ [វិសមភាពត្រីកោណកុំផ្លិច]

គេមានលំហវាស់បាន (X,T,μ) និងអនុគមន៍វាស់បាន $f: X \longrightarrow \mathbb{C}$ មានអាំងតេក្រាលលើ X ធៀបនឹងរង្វាស់ μ ។

គេបាន $\left|\int_X f d\mu\right| \le \int_X |f| d\mu$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

បើ $I = \int_X f d\mu = 0$ គឺពិតជាក់ស្តែង

បើមិនអញ្ចឹងទេ គេយក $a = \frac{|I|}{I}$ និងគេបាន $\left|\int_X f d\mu\right| = a\int_X f d\mu$

គេមាន $\left|\int_X f d\mu\right| = \mathrm{Re}\left(a\int_X f d\mu\right) = \mathrm{Re}\left(\int_X af d\mu\right) = \int_X \mathrm{Re}(af) d\mu$

ដោយដឹងថា $\mathrm{Re}(af) \le |af| = |f|$ (ពីព្រោះថា $|a| = 1$)

នាំឱ្យ $\int_X \mathrm{Re}(af) d\mu \le \int_X |f| d\mu$

ដូច្នេះ គេទាញបានថា $\left|\int_X f d\mu\right| \le \int_X |f| d\mu$។

៤.១០. លំហាត់ និងដំណោះស្រាយ

និយមន័យដោយអាំងតេក្រាលឡឺបេសសម្រាប់អនុគមន៍ទាល់ដែលអាចវាស់បាន។

4.1 ស្រាយបញ្ជាក់ថា សម្រាប់ផលបូកឬផលធៀបថាសរបស់វាស្មើគ្នា ដែលផលបូកគោលក្រោមគឺមិនធំជាងផលបូកគោលក្រោម S មានន័យថា $y_{k-1} < y_k$

នោះ $m\left(E_k\right) \ge 0, \quad y_{k-1}m\left(E_k\right) \le y_k m\left(E_k\right)$

បូកពី $k=1$ ដល់ n យើងមាន

$$s = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} m\left(E_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k) = S$$

4.2 ស្រាយថាសម្រាប់ផ្នែកថាសដែលស្មើគ្នាដោយ a គឺជាផលបូកគោលលើ និង b ជាផលបូកគោលក្រោម ហើយផលបូកគោលក្រោមគឺមានផ្នែកទាល់ដោយគាល់លើ

(a). សម្រាប់ $k=1,\ldots,n$ យើងមាន $y_k \ge \alpha$ នោះ

$$y_k m(E_k) \ge a m(E_k)$$

បូកពី $k=1$ ដល់ n

$$S = \sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k) \ge a m(E_k) = \alpha m(E)$$

ដែល $E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k = \left\{x : \alpha < f\left(x\right) < \beta\right\}$

នោះគោលក្រោមដោយ S គឺជា $\alpha m\left(E\right)$

(b). សម្រាប់ $k=1,\ldots,n$ ដែល $y_{k-1} \le \beta$ នោះ

ផលបូកពី $k=1$ ដល់ n នោះលទ្ធផល

$$s = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} m\left(E_k\right) \le \beta \sum_{k=1}^{n} m(E_k) = \beta m\left(E\right)$$

នោះគោលក្រោមដោយ s គឺ $\beta m(E)$ ។

4.3 ដោះស្រាយសម្រាប់វិធីដែលអាចធ្វើបានទាំងអស់ដោយផ្នែករងភាគថាស (a) ផលបូកគោលលើគឺមានផ្នែកទាល់ធំបំផុត I និង (b) ហើយផលបូកគោលក្រោមមានផ្នែកទាល់ J ទាបបំផុត។

(a). តាមដំណោះស្រាយ 4.2(a) ផលបូកគោលលើដែលអាចធ្វើបានដោយផ្នែកទាល់ក្រោម $\alpha m(E)$ និងមានផ្នែកទាល់ក្រោមធំបំផុតដែលអាចតាងដោយ I ។

(b). តាមដំណោះស្រាយ $2(b)$ ផលបូកគោលក្រោមដែលអាចធ្វើទៅបានដោយផ្នែកទាល់ខាងក្រោម $\beta m\left(E\right)$ និងដូចនេះវាត្រូវតែមានគោលលើតូចបំផុតដែលកំណត់តាងដោយ J ។

4.4 ការយកផ្នែកថាសដែលគេបានឱ្យនិងផ្នែករងគឺទទួលបានដោយប្រើប្រាស់ចំណុចបន្ថែមដោយផ្នែករង។ បើ S គឺជាផលបូកគោលលើដែលត្រូវគ្នានិងផ្នែកថាសដែលបានយក ដែល S_1 គឺជា

ផលបូកគោលលើដោយការយកភាគថាសនេះ បង្ហាញថា $S_1 \le S$ ដូចនេះដោះស្រាយដោះថាផលបូកដោយការយកផ្នែកថាសនេះគឺមិនអាចកើនឡើងបានទេ។ ដូចគ្នាដែរយើងអាចបង្ហាញថា $s_1 \ge s_2$ មានន័យថាផលបូកគោលក្រោមមិនអាចថយចុះបានទេ (មើលក្នុង 4.32)

លទ្ធផលនេះអាចឱ្យយើងបញ្ជាក់ថាវាមានផ្នែករងដែលបន្ថែមនៅក្នុងផ្នែកថាស។ ដើម្បីធ្វើយើងអាចឱ្យផ្នែករងដោយចំណុចគឺ

$$\alpha = y_o < y_1 < \ldots < y_n = \beta$$

ដោះស្រាយថាការបន្ថែមចំណុចដោយផ្នែករងគឺស្ថិតនៅចន្លោះ $\left(y_{p-1}, y_p\right)$ និងតាងដោយ u នោះ $y_{p-1} < u < y_p$

ធ្វើការដោះស្រាយផលបូកគោលក្នុងចំណុចរងដោយចន្លោះ $\left(y_{p-1}, y_p\right)$ គឺ

$$y_p m\left(E_p\right) \qquad (1)$$

ធ្វើការដោះស្រាយផលបូកគោលលើនៅពេលដែលការបន្ថែមផ្នែករង u ដោយជំនួសវាបាន

$$um(E_p^1) + y_p m(E_p^{(2)}) \qquad (2)$$

ដែល $$E_p^{(1)} = \left\{x : y_{p-1} \le f(x) < u\right\},\ E_p^{(2)} = \left\{x : u \le f(x) < y_p\right\} \qquad (3)$$

ហើយ $$E_p = E_p^{(1)} \cup E_p^{(2)} \quad ,\ m(E_p) = m(E_p^{(1)}) + m(E_p^{(2)}) \qquad (4)$$

តាម (4) យើងអាចសរសេរ (1) ដូចខាងក្រោម

$$y_p m\left(E_p^{(1)}\right) + y_p m\left(E_p^{(2)}\right) \qquad (5)$$

ការផ្លាស់ប្តូរដោយផលបូកគោលលើពិតប្រាកដគឺចេញពីការបន្ថែមចំណុចរងគឺឱ្យនៅចន្លោះ (2) និង (5) ដែលមានន័យថា

$$\left(u - y_p\right) m\left(E_p^{(1)}\right) \qquad (6)$$

ដោយសារវាអវិជ្ជមាន ឬស្មើសូន្យ (ព្រោះ $y_p > u$ និង $m\left(E_p^{(1)}\right) \ge 0$) វាមានន័យថាផលបូកគោលលើគឺមិនអាចកើនឡើងដោយការបន្ថែមចំណុចរងនិងបង្ហាញលទ្ធផលដូចដែលបានស្រាយខាងលើលំហាត់59-64។

4.5 បង្ហាញថាផលបូកគោលលើសម្រាប់បំណែកខ្លះគឺតិចជាផលបូកគោលក្រោមធៀបនឹងបំណែកចែកផ្សេងទៀត។

សម្រាយបញ្ជាក់

ដើម្បីបង្ហាញលទ្ធផលសម្រាប់បំណែកខុសគ្នា សន្មតផលបូកគោលលើនិងគោលក្រោមធៀបនឹងបំណែកមួយត្រូវបានឱ្យដោយ S_2, S_2 ខណៈដែលផលបូកគោលលនិងគោលក្រោមធៀបនឹងបំណែកផ្សេងទៀតដោយ S_3, S_3។

ពិចារណាបំណែកដែលត្រូវបានផ្ទុកដោយបំណែកដាក់ពីលើចំនួនពីរហើយបង្ហាញផលបូកគោលលើនិងគោលក្រោមធៀបដោយ S_4, S_4។

ដោយបំណែកថ្មីនេះជាការបន្សុទ្ធដោយបំណែកនីមួយៗ នោះតាមលំហាត់4.4

$S_2 \geq S_4$; $S_4 \geq S_3$ (1) តាម4.4 $S_4 \geq S_4$ (2) តាម(1)និង(2)នោះ $S_2 \geq S_3$

4.6 ការប្រើប្រាស់លក្ខណៈដោយលំហាត់ 4.3បង្ហាញថា $I \geq J$

ឱ្យលក្ខខណ្ឌផ្ទុយ $I \geq J$ គឺ $I < J$, I គឺជាតម្លៃគោលក្រោមបំផុតដោយផលបូកគោលលើនោះមានបំណែកមួយចំនួនឬបំណែករងដែលធ្វើឱ្យផលបូក S ស្ថិតនៅខាងឆ្វេងដោយចំណុចកណ្តាលដោយចន្លោះ IJ ។

J គឺជាតម្លៃគោលលើបំផុតដោយផលបូកគោលក្រោមនោះមានបំណែកមួយចំនួនឬបំណែករងដែលធ្វើឱ្យផលបូក s ស្ថិតនៅខាងស្តាំដោយចំណុចកណ្តាលដោយចន្លោះ IJ ។ផ្ទុយទៅវិញ S គឺធំជាង s នោះយើងអាចទាញយកបានថាលក្ខណៈផ្ទុយ $I < J$ មិនពិត នោះ $I \geq J$ ពិត។

ចំណាំ៖ កាលណាយើងមានអំណះអំណាងក្នុងធរណីមាត្រសម្រាប់សម្រាយបញ្ជាក់ក៏ដោយ តែយើងអាចប្រើការវិភាគដើម្បីកំណត់បាននូវទ្រឹស្តីបទទាំងនោះ ។

4.7 បើ S គឺជាផលបូកគោលលើដែលត្រូវគ្នានឹងផ្នែកថាសណាមួយហើយ s គឺផលបូកគោលក្រោមដែលត្រូវគ្នានឹងភាគថាសដូចគ្នា ឬខុសគ្នានោះបញ្ជាក់បាន $S \geq I \geq J \geq s$ ដោយ I គឺជាដែនកំណត់គោលក្រោមដោយផលបូកគោលលើទាំងអស់ នោះគេបាន $S \geq I$ ចាប់ពី J ជាដែនកំណត់គោលលើដោយផលបូកគោលក្រោមទាំងអស់គេមាន $J \geq s$ ដូចលំហាត់ 4.6យើងមាន $I \geq J$ ដូចនេះ $S \geq I \geq J \geq s$ ។

4.8 បង្ហាញថា $f(x)$ ជាអាំងតេក្រាលឡឺបេសលុះត្រាតែគ្រប់ $\varepsilon > 0$ មានបំណែកជាមួយផលបូក S ខាងលើនិង s ខាងក្រោមដែល $S - s < \varepsilon$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

បើសម្រាប់គ្រប់ $\varepsilon > 0$ វាមានបំណែកដែល $S - s < \varepsilon$

តាមលំហាត់ 4.7ចំពោះ $0 \leq I - J \leq S - s < \varepsilon$

នោះ $I = J$ (ε ជាចំនួនថេរតូច)

$f(x)$ ជាអាំងតេក្រាលឡឺបេស

ច្រាសមកវិញ ឧបមាថា $I = J$, $\varepsilon > 0$

មានបំណែកដែល $S < I + \frac{\varepsilon}{2}$ (I ជាគោលក្រោមធំបំផុតដោយផលបូកលើទាំងអស់)

4.9 បង្ហាញថា $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ បើ } x \in Q \subset [0,1] \\ 0 \text{ បើ } x \in \overline{Q} \subset [0,1] \end{cases}$

(a) អាចធ្វើអាំងតេក្រាលឡឺបេសបានលើ $[0,1]$

(b) រកតម្លៃអាំងតេក្រាលឡឺបេសលើ $[0,1]$

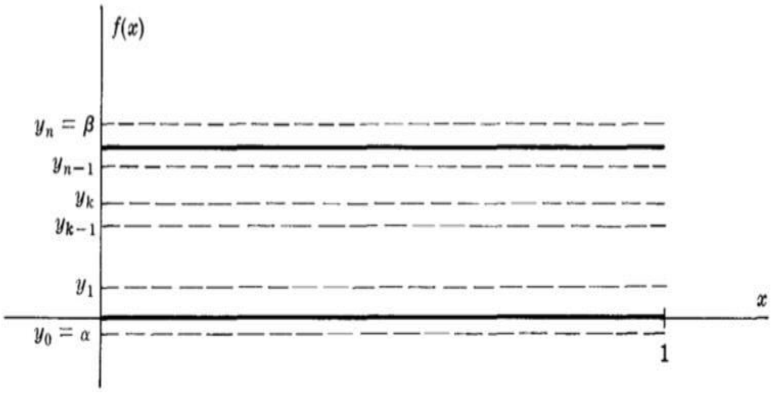
សម្រាយបញ្ជាក់

(a) បង្ហាញថា $f(x)$ ជាអាំងតេក្រាលឡឺបេសតាមនិយមន័យអាំងតេក្រាលឡឺបេស

$$a = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{n-1} < y_n$$

តាង $E_k, k=1,2,3,\ldots,n$ ជាសំណុំដោយគ្រប់ x ក្នុង $[a,b]$ ដែល $y_{k-1} \le f(x) < y_k$ ដែល $E_k = \{x : y_{k-1} \le f(x) \le y_k\}$

យើងបានសំណុំមិនទទេ $\{a \le 0,\ \beta > 1,\ y_1 > 0,\ y_{n-1} < 1\}$



រូបភាព១២

តាម $E_k = \{x : y_{k-1} \le f(x) \le y_k\}$ $k=1,2,3,\ldots,n$ យើងបាន

$$E_1 = \{x : y_0 \le f(x) \le y_1\} \ ; \ E_n = \{x : y_{n-1} \le f(x) \le y_n\}$$

E_1 ជាសំណុំដោយចំនួនអសនិទានលើ $[0,1]$ និង E_n ជាសំណុំសនិទានលើ $[0,1]$

យើងបាន $m(E_1)=1,\ m(E_n)=0$ នោះ $m(E_k)=0\ , k=1,2,\ldots,n-1$

ផលបូកគោលក្រោមនិងគោលលើ

$$s = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} m(E_k) = y_0 \, ; \, S = \sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k) = y_1$$

តាង I ជាដែនកំណត់គោលក្រោម និង J ជាដែនកំណត់គោលលើ។

យើងមាន $y_0 = a \le 0$; y_1 ជាចំនួនណាមួយ >0

$$I = l.u.b.S = l.u.b.y_1 = 0\ , J = g.l.b.s = g.l.n\, y_0 = 0$$

ដោយ $I = J = 0$ នោះតាមនិយមន័យឡឺបេសអនុគមន៍ $f(x)$ អាចធ្វើអាំងតេក្រាលឡឺបេសបាន។

(b) រកតម្លៃអាំងតេក្រាលឡឺបេសលើ $[0,1]$ ដោ $I=0\ , J=0 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = 0$

4.10 បង្ហាថា $f(x)$ បើត្រូវបានកំណត់និងអាចវាស់វែងវែងបាននៅចន្លោះ $[a,b]$ នោះវាជាការគណនាអាំងតេក្រាលឡឺបេសនៅលើ $[a,b]$។

យើងមាន $S - s = \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1})\, m(E_k)$

យើងអាចរៀបឱ្យមានការបែងចែកឬរបៀបដោយផ្នែករង $y_k - y_{k-1} < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$

ដូចនេះយើងបាន $S - s = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\varepsilon}{b-a} m(E_k) = \dfrac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} m(E_k) = \varepsilon$

4.11 បង្ហាញថានិយមន័យដោយអាំងតេក្រាលឡឺបេសជាដែនកំណត់ដោយផលបូកសម្រាប់ករណីដែលចំនួនដោយចំណុចរងគឺ n, S_n និង s_n ជាចំណុចដែលត្រូវគ្នាដោយផលបូកខាងលើនិងខាង

ក្រោមបើ I ជា ដោយផលបូកខាងលើទាំងអស់ហើយ J ជាដោយគ្រប់ផលបូកខាងក្រោមទាំងអស់ យើងបាន

$$s_n \le J \le I \le S_n$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k),\ s_n = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} m(E_k)$$

$$0 \le S_n - s_n = \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1}) m(E_k)$$

នោះគ្រប់ $\varepsilon > 0$ យើងអាចធ្វើ $n > n_0$ ដោយ $y_k - y_{k-1} < \varepsilon/(b-a)$,$k = 1,2,...,n$ ដូច្នេះដែល $n > n_0$

$$S_n - s_n \le \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} m(E_k) \le \varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty}(S_n - s_n) = 0$$

ដូច្នេះ យើងបាន $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n = I = J = \int_a^b f(x)dx$ ។

4.12 បង្ហាញទ្រឹស្តីបទ4-5 បើ $A \le f(x) \le B$ នោះនាំឱ្យ $Am(E) \le \int_E f(x)dx \le Bm(E)$

ពីលំហាត់ 4.2 និង 4.7 $Am(E) \le s \le I \le J \le S \le Bm(E)$

ដោយយើងសន្មតថា $f(x)$ គឺជាអាំងតេក្រាលឡឺបេសដូចនេះ $I = J$ ធ្វើតាម

$$Am(E) \le \int_E f(x)dx \le Bm(E)$$

4.13 បង្ហាញទ្រឹស្តីបទ 4-6 ទំព័រ86 បើ $E = E_1 \cup E_2$ ដែល E_1 និង E_2 មិនជាប់គ្នា នោះ $\int_E f(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx$

ដោយប្រើអាំងតេក្រាលឡឺបេសជាដែនកំណត់ដោយផលបូកការជ្រើសរើសចំណុចរកបានដោយ y_k នោះ $\alpha = y_0 < y_1 < ... < y_n = \beta$ សំណុំ E ត្រូវបានបែកចែកជាសំណុំ E_k សំណុំរង E_1 និង E_2 ត្រូវបានបែងចែកជាក្រុមដែលមិនជាប់គ្នា $E_k^{(1)}, E_k^{(2)}$ ដូចនេះ $E_k = E_k^{(1)} \cup E_k^{(2)}$ និង $m(E_k) = m(E_k^{(1)}) + m(E_k^{(2)})$ នោះនាំឱ្យ

$$\int_E f(x)dx = \lim \sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k) = \lim \sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k^{(1)}) + \lim \sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k^{(2)})$$

$$= \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx$$

4.14 បង្ហាញទ្រឹស្តីបទ 4-6 ជាមួយការប្រើប្រាស់អាំងតេក្រាលឡឺបេសដោយដែនកំណត់ផលបូក។ឧបមាថា $x \in E$, $\alpha < f(x) < \beta$ សម្រាប់ E_1 និង E_2 ដែល $\alpha_1 < f(x) < \beta_1$ ហើយ $\alpha_2 < f(x) < \beta_2$ រៀងៗខ្លួន។យើងអាចយក α តូចដោយ α_1, α_2 និង β ដូចជាធំជាង β_1, β_2 គេ

ជ្រើសយកផ្នែករងដោយ (α,β) ចំណុច $\alpha = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = \beta$ ពីរករណីដែលអាចកើតឡើង (1) ទាំងនេះខ្លះជាផ្នែករងសម្រាប់ (α_1,β_1) ហើយចំណុចដែលនៅសល់ជាផ្នែករងសម្រាប់ (α_2,β_2) (2) ចំណុចចែករងពីរមិនដូចគ្នាទៅនឹងចំណុចធំដោយ α_1,α_2 តូចជាងដោយ β_1,β_2 បើករណីទី២ កើតឡើង យើងមើលឡើងវិញនូវចំណុចដោយផ្នែករង ដើម្បីបញ្ចូលចំណុចបន្ថែមពីរដោយផ្នែករង។ ចម្រាស់មកវិញគេបានផលបូកគោលលើឬគោលក្រោមលំហាត់4.4នោះបើយើងបង្ហាញពីផលបូកខាងលើដែលត្រូវគ្នា E,E_1,E_2 តាម S,S_1,S_2 រៀងគ្នា ។

យើងមាន $S \ge S_1 + S_2$ ឬប្រើការពិតដែល $f(x)$ រួមបញ្ចូលនៅលើ E,E_1 និង E_2 $\int_E f(x)dx \ge \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx$ ដូចគ្នាដែរ បើយើងបង្ហាញផលបូកខាងក្រោមដែលត្រូវគ្នា និង E,E_1,E_2 តាម S,S_1,S_2 យើងឃើញ $S \ge S_1 + S_2$

$$\int_E f(x)dx \ge \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx$$

តាម(1)និង(2)គេបាន $\int_E f(x)dx \ge \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx$

4.15 បង្ហាញទ្រឹស្តីបទ 4-7 បើ $f(x)$ ត្រូវបានកំណត់និងអាចវាស់បាន $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ ដែលសំណុំ E_k គឺអាចវាស់បាននឹងមិនជាប់គ្នា នោះ $\int_E f(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx + \ldots$

នោះ $E = S_n \cup R_n$ ដែល $S_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$, $R_n = \bigcup_{k=n+1}^{n} E_{k*}$ ត្រូវបានដាក់បញ្ចូល $f(x)$ លើ S_n និង R_n យើងបាន

$$\int_E f(x)dx = \int_{S_n} f(x)dx + \int_{R_n} f(x)dx$$

$$= \int_{E_1} f(x)dx + \ldots + \int_{E_n} f(x)dx + \int_{R_n} f(x)dx$$

តាមទ្រឹស្តីបទ4-5គឺ $|f(x)| \le M$

$$\left| \int_{R_n} f(x)dx \right| \le Mm(R_n)$$

តែ $m(E) = m(S_n) + m(R_n) = m(E_1) + \ldots + m(E_n) + m(R_n)$ និង $m(E) = m(E_1) + m(E_2) + \ldots$ កំណត់ ស៊េរីមិនកំណត់ ដែលរួមគ្នាដោយ $\lim_{n\to\infty} m(R_n) = 0$ ដូចនេះ $n \to \infty$ នៅក្នុង(1)យើងឃើញថា $\lim_{n\to\infty} \int_{R_n} f(x)dx = 0$

ដូចនេះ $\int_E f(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx + \ldots$ ។

4.16 បង្ហាញថាបើ $f(x)$ ត្រូវបានកំណត់នឹងអាចវាស់បាននៅលើ E ហើយ c គឺជាអថេរណាមួយនោះ $\int_E [f(x)+c]dx = \int_E f(x)dx + cm(E)$

ឧបមាថា ផ្នែករងដោយ $\alpha < f(x) < \beta$ គឺកើតឡើងដោយចំណុច $\alpha = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = \beta$ ហើយផលបូកខាងលើដែលត្រូវគ្នានឹង $f(x)$ គឺ $S = \sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k)$ ដែល

$$E_k = \{x : x \in E, y_{k-1} \le f(x) < y_k\}$$

ដូចគ្នាដែរផលបូកខាងលើដែលត្រូវគ្នានឹង $f(x)+c$ គឺ

$$S = \sum_{k=1}^{n}(y_k + c)m(E_k) = \sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k) + c\sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k),\ S_1 = S + cm(E)$$

យកដែនកំណត់ $n \to \infty$ យើងបាន $\int_E [f(x)+c]dx = \int_E f(x)dx + cm(E)$

4.17 បង្ហាញទ្រឹស្តីបទ 4-8 បើ $f(x)$ និង $g(x)$ ត្រូវបានកំណត់និងអាចវាស់បានលើ E នោះ $\int_E [f(x)+g(x)]dx = \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx$ គេឱ្យ $E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ ដែល E_k ត្រូវបានផ្តល់ឱ្យលំហាត់4.16 នោះ

$$\int_E [f(x)+g(x)]dx = \sum_{k=1}^{n}\int_{E_k}[f(x)+g(x)]dx$$

$$\ge \sum_{k=1}^{n}\int_{E_k}[y_{k-1}+g(x)]dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}m(E_k) + \sum_{k=1}^{n}\int_{E_k} g(x)dx$$

$$= s + \int_E g(x)dx$$

ដូចនេះយើងបាន $\int_E [f(x)+g(x)]dx = \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx$

$$\int_E [f(x)+g(x)]dx = \sum_{k=1}^{n}\int_{E_k}[f(x)+g(x)]dx$$

$$\ge \sum_{k=1}^{n}\int_{E_k}[y_k + g(x)]dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k) + \sum_{k=1}^{n}\int_{E_k} g(x)dx$$

$$= s + \int_E g(x)dx$$

$$\int_E [f(x)+g(x)]dx \le \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx$$

តាម(1)និង(2)យើងបាន $\int_E [f(x)+g(x)]dx = \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx$

4.18 បង្ហាញទ្រឹស្តីបទ 4-10 ,ទំព័រ86 បើ $f(x) \le g(x)$ លើ E នោះ

$$\int_E f(x)dx \le \int_E g(x)dx$$

ដោយ $g(x)-f(x)$ មិនអវិជ្ជមានលើ E នោះយើងបាន $g(x)-f(x) \ge 0$

$$\int_E [g(x)-f(x)]dx \ge 0$$

$$\int_E f(x)dx \le \int_E g(x)dx$$

4.19 បង្ហាញទ្រឹស្តីបទ 4-11 , ទំព័រ86 បើ $f(x)$ ត្រូវបានកំណត់និងអាចវាស់បានលើ E នោះ $|f(x)|$ គឺគណនាអាំងតេក្រាលឡឺបេសលើ E រួមបើ $|f(x)|$ គឺត្រូវបានកំណត់និងអាចវាស់បានលើ E នោះ $f(x)$ គឺគណនាអាំងតេក្រាលឡឺបេសលើ E

បើ $f(x)$ គឺត្រូវបានកំណត់និងអាចវាស់បានលើ E នោះដូចគ្នានិង $f(x)$ ដូចនេះ $f(x)$ គឺគណនាអាំងតេក្រាលឡឺបេសលើ E ដូចគ្នាដែរបើ $|f(x)|$ គឺត្រូវបានកំណត់និងអាចវាស់បានលើ E នោះដូចគ្នានិង $f(x)$ ដូចនេះ $f(x)$ គឺអាំងតេក្រាលឡឺបេសនៅលើ E

4.20 បង្ហាញទ្រឹស្តីបទ 4-12 ,ទំព័រ86 $\left|\int_E f(x)dx\right| \le \int_E |f(x)|dx$ នៅក្រោមលក្ខខណ្ឌដោយទ្រឹស្តីបទ4-11។

វិធីសាស្ត្រទី១

យើងមាន $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$

តាមយើងបាននៅលើការរួមបញ្ចូលដោយសុំណុំE

$$-\int_E |f(x)|dx \le \int_E f(x)dx \le \int_E |f(x)|dx$$

$$\left|\int_E f(x)dx\right| \le \int_E |f(x)|dx$$

របៀបទី២

ប្រសិន $E^+ = E[f(x) \ge 0]$ និង $E^- = E[f(x) < 0]$ ហើយ

$$\int_E f(x)dx = \int_{E^+} f(x)dx + \int_{E^-} f(x)dx = \int_{E^+} |f(x)|dx - \int_{E^-} |f(x)|dx = \int_{E^+} |f(x)|dx + \int_{E^-} |f(x)|dx$$

ហើយ $\left|\int_E f(x)dx\right| = \int_{E^+}|f(x)|dx - \int_{E^-}|f(x)|dx \le \int_{E^+}|f(x)|dx + \int_{E^-}|f(x)|dx = \int_E |f(x)|dx$

4.21. បង្ហាញថាទ្រឹស្តីបទ 4-14។ បើ $f(x)\ge 0$ ទាល់ និងដែលអាចវាស់បានលើ E ហើយ $\int_E f(x)dx = 0$ ហើយ $f(x)=0$ គ្រប់ចំណុចលើ E ។

របៀបទី១

ដោយ $f(x)$ វាជាអនុគមន៍ទាល់ ហើយមានចំនួនថេរ M ដែល $0\le f(x)\le M$

នោះសំណុំ $E_1=\{x: f(x)=0\}, E_2=\{x:\frac{M}{2}<f(x)\le M\}, E_3=\{x:\frac{M}{3}<f(x)<\frac{M}{2}\}$

ហើយជាទូទៅ $E_k=\{x:\frac{M}{k}<f(x)<\frac{M}{k-1}\}, k=2,3,4,.....$

ដោយសំណុំទាំងនោះវាជាអនុគមន៍ទាល់ និង មិនជាប់

នោះ $m(E)=m(E_1)+m(E_2)+....$

ដែល $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$ ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម

$$\frac{M}{k}m(E_k)\le\int_{E_k}f(x)dx\le\frac{M}{k-1}m(E_k), k=2,3,...$$

ដោយវិសមីការនៅខាងឆ្វេងនិងការពិតដែលថាអាំងតេក្រាលខាងលើ E មិនអាចលើសពីអាំងតេក្រាលលើ E បានទេ។

យើងមាន $m(E_k)\le\frac{k}{M}\int_{E_k}f(x)dx\le\frac{k}{M}\int_E f(x)dx=0$

ដោយ $m(E_k)=0$ ពេល $k=2,3,....$ នោះ $m(E_2\cup E_3\cup....)=m(E_2)+m(E_3)+....=0$

ពោលគឺរង្វាស់ដោយសំណុំដែល $f(x)\ge 0$ គឺស្មើ 0 នោះ $f(x)=0$ គ្រប់ពេលទាំងអស់។

របៀបទី២

ឧបមាថាដែលមាននៅក្នុង E មានសំណុំ A ដោយរង្វាស់វិជ្ជមានដែល $f(x)>0$ ដែលយើងអាចបង្ហាញបានថា ជាសំណុំប្រសព្វដែលអាចវាស់បានមិនជាប់។

$$A_1=\{x: f(x)>1\}, A_2=\{x: f(x)>\frac{1}{2}\}, A_3=\{x: f(x)>\frac{1}{3}\}...$$

ដោយ $m(A)=m(A_1)+m(A_2)+m(A_3)+...$ ហើយ $m(A)>0$ វាបង្ហាញថាសំណុំ A_k មាន $m(A_k)$ ជាចំនួនវិជ្ជមាន p ។

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម និងការពិតដែលថាអាំងតេក្រាលខាងលើ E មិនអាចលើសពីអាំងតេក្រាលលើ E បានទេ

$$\int_E f(x)dx\ge\int_{A_k}f(x)dx\ge\frac{m(A_k)}{k}=\frac{p}{k}>0$$

ដែលផ្ទុយនឹងសម្មតិកម្មដែលថាអាំងតេក្រាលលើ E គឺសូន្យ។ ដូចនេះសំណុំ A មិនអាចជា រង្វាស់វិជ្ជមាន ហើយ $f(x)=0$ គ្រប់កន្លែងទាំងអស់។

4.22. បង្ហាញថាទ្រឹស្តីបទរបស់ឡឺបេសទាល់រួមគ្នាជាមួយ ទ្រឹស្តីបទ 4-15 ទំព័រ87។ តាង $\langle f_n(x)\rangle$ ជាលំដាប់ដោយមុខងារដែលអាចវាស់បានលើ E ដូចជា $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ ។ បើ $|f_n(x)|\le M$ $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_E f_n(x)dx=\int\limits_E f_n(x)dx$

តាម $|f_n(x)|\le M$ និង $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ វាបង្ហាញបានថា $|f(x)|\le M$ ហើយ $f(x)$ ទាល់ និងវាស់បាន។ លទ្ធផលត្រូវបានបង្ហាញ។

$$\lim_{n\to\infty}\int_E[f(x)-f_n(x)dx=0 \text{ ឬ } \int_E[f(x)-f_n(x)dx\le\int_E[f(x)-f_n(x)]dx$$

យើងនឹងបង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_E[f(x)-f_n(x)dx=0$

តាង E ជាសំណុំដែលវាស់បាន

$$E_1=\{x:|f-f_1|<e,|f-f_2|<e,...\}$$
$$E_2=\{x:|f-f_1|<e,|f-f_2|<e,...\}$$
$$E_1=\{x:|f-f_2|<e,|f-f_3|<e,...\}$$
$$..$$
$$E_n=\{x:|f-f_{n-1}|<e,|f-f_n|<e,...\}$$

នោះ $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$

ហើយបើ $S_n=\bigcup\limits_{k=1}^{n}E_k$ ហើយ $R_n=\bigcup\limits_{k=n+1}^{\infty}E_k$ យើងមាន

$$\int_E|f(x)-f_n(x)|dx=\int_{S_n}|f(x)-f_n(x)|dx+\int_{R_n}|f(x)-f_n(x)|dx \quad (3)$$

S_n មាន $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ ដែល $|f_n(x)|\le M$ ហើយ $|f(x)|\le M$ ហើយនៅលើ R_n មាន $|f(x)-f_n(x)|\le|f(x)|+|f_n(x)|\le 2M$ នោះ (S) ប្រើប្រាស់ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម

$$\int_E|f(x)-f_n(x)|dx\le em(S_n)+2Mm(R_n)$$

ដោយ $\lim\limits_{n\to\infty}m(S_n)=m(E)$ និង $\lim\limits_{n\to\infty}m(R_n)=0$ តាម (4)

គេបាន $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\int\limits_E|f(x)-f_n(x)|dx\le em(E)$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_E|f(x)-f_n(x)|dx=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_E|f(x)-f_n(x)|dx=0$$

លទ្ធផលត្រូវបានបង្ហាញ។

4.23. បង្ហាញថាលក្ខខណ្ឌនៅ 4.22 អាចមានទំនាក់ទំនងគ្នា នោះវាពិតគ្រប់ករណីទាំងអស់។

ដំណោះស្រាយដូចការដោះស្រាយសំណុំវាស់បានស្មើសូន្យមិនមានផលប៉ះពាល់លើតម្លៃដោយអាំងតេក្រាលរបស់ $f(x)$ និង $f_n(x)$ លើ E។

4.24. ចូរឱ្យឧទាហរណ៍ទម្រង់ដោយ $\langle f_n(x)\rangle$ ដែល $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ និង លក្ខណៈ

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

$$\lim_{n\to\infty}(\Re)\int_a^b f_n(x)dx \neq (\Re)\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

តាង (R_k) តំណាងឱ្យចំនួនសនិទានទាំងអស់នៅចន្លោះ[0,1]។ កំណត់លំដាប់ដោយ $\langle f_n(x)\rangle$ នៅចន្លោះ[0,1]ដែល $f_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ បើ } x = r_1, r_2, \dots, r_n \\ 0 \text{ បើ } x \neq r_1, r_2, \dots, r_n \end{cases}$

ហើយ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1 \text{ បើ } x \in \mathbb{Q} \subset [0,1] \\ 0 \text{ បើ } x \in \mathbb{Q} \subset [0,1] \end{cases}$

តាមរយៈនិយមន័យរបស់ $f_n(x)$ យើងបាន

$$\int_0^1 f_n(x) = 0 \text{ និង } \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x) = 0$$

ប្រើនៅក្នុងលំហាត់ 4.9

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \int_0^1 f_n(x) = 0$$

នោះ $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

យើងរំពឹងថាវាមានលក្ខណៈដូច 4.22 ទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ បើយើងប្រើអាំងតេក្រាលរីម៉ាន់

យើងបាន $(\Re)\int_0^1 f_n(x)dx = 0$ នោះ $\lim_{n\to\infty}(\Re)\int_0^1 f_n(x)dx = 0$

ប៉ុន្តែ $(\Re)\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = (\Re)\int_0^1 f(x)dx$ មិនមាន

នោះ $\lim_{n\to\infty}(\Re)\int_0^1 f_n(x)dx \neq (\Re)\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$ ទំនាក់ទំនងដោយអាំងតេក្រាល រីម៉ាន់ និងឡឺបេស ។

4.25. បង្ហាញថា បើ $f(x)$ គឺជាអាំងតេក្រាលរីម៉ាន់ នៅចន្លោះ $[a,b]$ នោះ $f(x)$ ត្រូវតែវាស់បាន។ ឧបមាថាអាំងតេក្រាលនៅចន្លោះ $[a,b]$ ត្រូវបែងចែកទៅក្នុងផ្នែកដោយ n ដែល

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b \qquad (1)$$

នោះ $$\psi_n(x) = m_k^n, \quad \psi_n(x) = M_k^n, \quad x_k < x \le x_{k+1} \qquad (2)$$

ពេលដែល $m_k^{(n)}$ និង $M_k^{(n)}$ ជាគោលទាល់លើ g.l.b និងគោលទាល់ក្រោម l.u.b ដោយ $f(x)$ នៅក្នុងអាំងតេក្រាល $x_k < x \le x_{k+1}$។ យើងធ្លាប់ប្រើអក្សរធំ n សម្រាប់សម្គាល់ពី ការបែងចែករបស់ n។ ទម្រង់អាំងតេក្រាលកំណត់ពី a ទៅ b គេបាន

$$\int_a^b \psi_n(x)dx = \sum_{k=1}^{n} m_k^{(n)}(x_k - x_{k-1}) \qquad (3)$$

$$\int_a^b \Psi_n(x)dx = \sum_{k=1}^{n} M_k^{(n)}(x_k - x_{k-1}) \qquad (4)$$

អាំងតេក្រាលទាំងនេះគឺមានទម្រង់ទាប និងខ្ពស់រៀងៗខ្លួន ដោយផលបូកអាំងតេក្រាលរីម៉ាន់ដោយ $f(x)$។ វាត្រឹមត្រូវកាលណាវាជាអាំងតេក្រាលរីម៉ាន់នោះ

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \psi_n dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \Psi_n dx = (\Re)\int_a^b \psi_n dx \qquad (5)$$

ដោយ $n \to \infty$ ទម្រង់ $\Psi_n(x)$ និង $\psi_n(x)$ រួមជាមួយ $\psi_n(x)$ និង $\Psi_n(x)$ តំណាងឱ្យ ទាល់ក្រោមដោយ $f(x)$ នៅក្នុង δ ជាវ៉ស៊ីណាល់ដោយ x ដែល $\delta \to \infty$ ខណៈពេលដែល $\psi_n(x)$ តំណាងអោយទាល់លើដោយ $f(x)$ ក្នុង δ ជាវ៉ស៊ីណាល់ដោយ x ដែល $\delta \to \infty$ ។

តាង $\psi_n(x)$ ជាទម្រង់វាស់បានដែល លីមីតដោយទម្រង់វាស់បានទាំងនេះ (ទ្រឹស្តីបទ 3-19) បង្ហាញថា $\psi_n(x)$ អាចវាស់បាន។ ដោយបញ្ចូល ទ្រឹស្តីបទឡឺបេសនិង (5) ចូលគ្នាគេបាន

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \psi_n(x)dx = \int_a^b \psi(x)dx = (\Re)\int_a^b f(x)dx \qquad (6)$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \Psi_n(x)dx = \int_a^b \Psi(x)dx = (\Re)\int_a^b f(x)dx \qquad (7)$$

នោះ

$$\int_a^b [\Psi(x) - \psi(x)]dx = 0 \qquad (8)$$

ប៉ុន្តែ $\Psi(x) \ge \psi(x)$ វាដូចនឹងលំហាត់ 4.21 ដែលថា $\Psi(x) = \psi(x)$ ពិតគ្រប់នៅចន្លោះ $[a,b]$។ ឥឡូវបញ្ជាក់ថា $\psi(x) \le f(x) \le \Psi(x)$ នោះយើងឃើញថា $f(x) = \psi(x)$ ស្មើគ្រប់កន្លែងដែល $f(x)$ វាស់វែង $\psi(x)$ បាន។

4.26. បង្ហាញទ្រឹស្តីបទ4-17 បើ $f(x)$ ជាអាំងតេក្រាលរីម៉ាន់នៅចន្លោះ $[a,b]$ នោះ (a) វាគឺជាអាំងតេក្រាលឡឺបេសនៅក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ ហើយ (b) អាំងតេក្រាលរីម៉ាន់និងឡឺបេសដោយ $f(x)$ នៅចន្លោះ $[a,b]$ ស្មើគ្នា។

ប្រើប្រាស់តាមលំហាត់ 4.25 យើងបាន $\psi(x) \le f(x) \le \Psi(x)$

នោះតាម (6) និង (7) គេបាន

$$(\Re)\int_a^b f(x)dx=\int_a^b \psi(x)dx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b \Psi(x)dx=(\Re)\int_a^b f(x)dx$$

នោះ $\int_a^b f(x)dx=(\Re)\int_a^b f(x)dx$ លទ្ធផលត្រូវបានបង្ហាញ។

4.27. បង្ហាញទ្រឹស្តីបទ 4-18 អនុគមន៍ $f(x)$ ជាអាំងតេក្រាលរីម៉ាន់នៅចន្លោះ $[a,b]$ បើ មានភាពមិនជំណើរការកើតឡើងនោះ $f(x)$ វាស់បានសូន្យ។តែ $f(x)$ នៅតែដំណើរការធម្មតា។

បើ $f(x)$ មានទំនាក់ទំនងនឹង x នោះប្រើប្រាស់តាមចំណុច 4.25 យើងត្រូវបាន $\Psi(x)=\psi(x)$ ។ផ្ទុយទៅវិញ បើ $\Psi(x)=\psi(x)$ សម្រាប់ x នោះ $f(x)$ មានទំនាក់ទំនងនឹង x ។ មួយវិញទៀត $f(x)$ មានទំនាក់ទំនងនឹង x កាលណា $\Psi(x)=\psi(x)$ ។
ឥឡូវសង្កេតមើលចំណុច 4.26 យើងឃើញថា $f(x)$ ជាអាំងតេក្រាលរីម៉ាន់នៅចន្លោះ $[a,b]$ ។

នោះ $\int_a^b \psi(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b \psi_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b \Psi_n(x)dx=\int_a^b \Psi(x)dx$

ឬ $\Psi(x)=\psi(x)$ ពិតស្មើគ្រប់កន្លែងទាំងអស់។ ឧទាហរណ៍ $f(x)$ មានទំនាក់ទំនងស្មើគ្រប់កន្លែងទាំងអស់។

4.28. បង្ហាញថាទ្រឹស្តីបទ 4-19 បើ $f(x)$ មានទំនាក់ទំនងស្មើគ្រប់កន្លែងទាំងអស់នៅចន្លោះ $[a,b]$ នោះអាំងតេក្រាលឡឺបេសក៏ស្ថិតនៅចន្លោះ $[a,b]$ ដែរ។ដោះស្រាយដូចចំណុច 4.26 និង4.2។

៤.១១. លំហាត់អនុវត្តន៍

4.29. ប្រើប្រាស់និយមន័យអាំងតេក្រាលឡឺបេសបង្ហាញថា បើ e ជាចំនួនថេរនោះ

$$\int_a^b e\,dx = e(b-a)$$

4.30. គណនា $\int_0^5 f(x)dx$ បើ $f(x)=\begin{cases}-1 & 0<x<3\\ 4 & 3<x<5\end{cases}$ ដោយប្រើប្រាស់និយមន័យ។

4.31.គណនាចំណុច 4.30 បើ $f(x)=\begin{cases}2 & 0\le x<1\\ 3 & 2<x\le 4\\ -1 & 4<x\le 5\end{cases}$

4.32. បង្ហាញថាការចម្រាញ់ភាគថាសនីមួយៗ ឬ ផ្នែកដោយផលបូកដែលទាបបំផុតមិនអាចថយចុះទេ។(មើលចំណុច 4.4)

4.33. ចូរបង្ហាញទ្រឹស្តីបទនៅចំណុច 4.6 ដោយមិនយោងតាមដ្យាក្រាម។

4.34. ចូរបង្ហាញពីរបៀបដោះស្រាយចំណុច 4.9 ដោយមិនយោងតាមដ្យាក្រាម។

4.35. តាង $f(x)=\begin{cases}1 \ , \ x\notin\mathbb{Q}\subset (\text{-4,4})\\ -2 \ , x\in\mathbb{Q}\subset (\text{-4,4})\end{cases}$ គណនា $\int_{-4}^4 f(x)dx$ ។

4.36. បើ Q គឺជាសំណុំដោយចំនួនសនិទាន ហើយ $f(x)=3$ ។ រក $\int_Q f(x)dx$

4.37. បើ K គឺជាសំណុំកង់ទ័រ(Cantor set) ហើយ $f(x)=2$ នៅលើសំណុំនេះ ។ គណនា $\int_K f(x)dx$ ។

4.38. បង្ហាញថានិយមន័យដោយអាំងតេក្រាលឡឺបេសជាជម្រើសឯករាជ្យដោយ α និង β ដូចជា $\alpha > f(x) < \beta$ ។

4.39. បង្ហាញពីទំនាក់ទំនងលទ្ធផលនៅចំណុច 4.11។

4.40. បង្ហាញទ្រឹស្តីបទ 4-2 ។

4.41. បង្ហាញទ្រឹស្តីបទ 4-3 ។

4.42. បង្ហាញថាបើ E_1 និង E_2 ជាសំណុំមិនជាប់វាស់បាននិង $E=E_1\cup E_2$ នោះបើ $f(x)=\begin{cases}c_1, & x\in E_1\\ c_2, & x\in E_2\end{cases}$ ដែល c_1 និង c_2 មានទម្រង់ដូចដែលឱ្យ

$$\int_E f(x)dx = c_1m(E_1)+c_2m(E_2)$$

4.43. ចូរបង្ហាញជាទូទៅដោយលទ្ធផលដោយចំណុច 4.42។

4.44. ប្រើចំណុច 4.42 ឬ 4.43 ទៅគណនា ចំណុច 4.9, 4.30, 4.31, 4.35។

4.45. បង្ហាញទ្រឹស្តីបទ 4-4។

4.46. បង្ហាញថា ឬមិនបង្ហាញថា បើ $f(x)$ ជាសំណុំវាស់បានលើ E នោះ

វាមានតម្លៃ $\int_E f(x)dx = f(\varepsilon)m(E)$

4.47. ពង្រីកទ្រឹស្តីបទ 4-6 ដើម្បីកំណត់ប្រសព្វដោយសំណុំ $E_1, E_2, ..., E_n$ ។

4.48. ពង្រីកពង្រឹងទ្រឹស្តីបទ 4-8 ដើម្បីកំណត់អនុគមន៍ចំនួន។

4.49. បង្ហាញថាអនុគមន៍ $(a)\ x, (b)\ x^2, (c)\ 3x^2 + 4x - 2$ ជាអាំងតេក្រាលឡឺបេសនៅចន្លោះ [0,1] ។

4.50. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាសំណុំ E_k ដោយចំណុច 4.16 ជាសំណុំដាច់ហើយវាស់បានបើ $E = \cup E_k$ នោះ $m(E) = \sum m(E_k)$ ។

4.51.ចូរលទ្ធផលដោយចំណុច 4.16 ដោយមិនប្រើប្រាស់លីមីតផលបូកដោយអាំងតេក្រាលឡឺបេស។

4.52. បើ $f(x) \geq 0$ ទាល់និងវាស់បានលើ E បង្ហាញថា $\int_E f(x)dx \geq 0$ ។តើយើងអាចលុបសញ្ញាស្មើបានទេ $f(x) > 0$?

4.53. បង្ហាញថាបើ $f(x)$ និង $g(x)$ ទល់លើនិងវាស់បានលើ E នោះ

$$\int_E [f(x) - g(x)]dx = \int_E f(x)dx - \int_E g(x)dx$$

4.54. បង្ហាញថា $\int_{E_1 \cup E_2} f(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx - \int_{E_1 \cap E_2} f(x)dx$ ។

4.55. ចូរបង្ហាញលទ្ធផលជាទូទៅដោយចំណុច 4.54 ទៅបី ឬច្រើនសំណុំទៀត $E_1, E_2, ...$

4.56. បើ $\langle f_k(x) \rangle, k = 1, 2, ...n$ ជាអនុគមន៍ទាល់ និងវាស់បានលើ E ហើយ $c_k, k = 1, 2, 3......, n$ ។

បង្ហាញថា $\int_k [\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(x)]dx = \sum_{k=1}^{n} c_k \int_E f_k(x)dx$ ។

4.57. បង្ហាញទ្រឹស្តីបទ 4-9។

4.58. បង្ហាញថា $\left| \int_E f(x)g(x)dx \right| \leq \frac{1}{2}\left[\int_E |f(x)|^2 dx + \int_E |g(x)|^2 dx \right]$ បើ $f(x)$ និង $g(x)$ ជាអនុគមន៍ទាល់និងវាស់បានលើ E ។

4.59. បង្ហាញទ្រឹស្តីបទ 4-13 ។

4.60. បើ $f_1(x)$ និង $f_2(x)$ ជាអនុគមន៍ទាល់ និងវាស់បាននៅចន្លោះ (a,b) ហើយ $\int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx = 0$ បង្ហាញថា $f_1(x) = f_2(x)$ ពិតលើចន្លោះ (a,b) ។

4.61. បង្ហាញថាទ្រឹស្តីបទ 4.28 ស្រដៀងគ្នាបើ អាំងតេក្រាលនៅចន្លោះ $[a,b]$ ត្រូវបានជំនួសដោយ a លើ E ។

4.62. គណនា $\int_{0}^{\pi} \sin x dx$

4.63. គណនា $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+1}$

4.64. តាង $f(x)$ជាអនុគមន៍ទាល់ និងមានអាំងតេក្រាលលើ E។ បង្ហាញថា $\varepsilon > 0$មាន $\delta > 0$ បើ A ជាសំណុំវាស់បានលើE នោះ$\int_A |f(x)| dx < \varepsilon$, $m(A) < \delta$។

4.65. គណនា $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 e^{-\pi x^2} dx$

4.66. គណនា$(a)\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ $(b)\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{dx}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$

4.67. បង្ហាញថាទ្រឹស្តីបទ 4-16 ដោយប្រើឧទាហរណ៍។

4.68. បង្ហាញថាបើ $f_k(x) \geq 0$ហើយ $\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx$ រួម នោះ $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$រួមគ្រប់ករណីទាំងអស់។

4.69. ចូរបង្ហាញទ្រឹស្តីបទឡឺបេសរួមទាល់ដោយប្រើប្រាស់ ទ្រឹស្តីបទ Egorov។

មេរៀនទី៥៖ អាំងតេក្រាលឡឺបេសលើសំណុំមិនទាល់

៥.១.អាំងតេក្រាលឡឺបេសអនុគមន៍មិនអវិជ្ជមាន មិនទាល់

ពិចារណាលើករណីទី១ ដែល $f(x) \geq 0$ គឺមិនទាល់ និងអាចវាស់បាន។ បើ p គឺជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ គេបាន

$$\left[f(x)\right]_p = \begin{cases} f(x), \forall x \in E \Rightarrow f(x) \leq p \\ p, \forall x \in E \Rightarrow f(x) > p \end{cases} \quad (1)$$

សម្រាប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ p នីមួយៗ បើ $\left[f(x)\right]_p$ ទាល់ និងអាចវាស់បានដូចនេះវាជាអាំងតេក្រាលឡឺបេស ។ យើងកំណត់ អាំងតេក្រាលឡឺបេសដោយ $f(x)$ លើដែន E គឺ

$$\int_E f(x)\,dx = \lim_{p\to\infty} \int_E \left[f(x)\right]_p dx \qquad (2)$$

បើលីមីតដោយចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន ហើយអាំងតេក្រាលឡឺបេសដោយ $f(x)$ កំណត់ នោះគេថា $f(x)$ គឺជាអនុគមន៍ដែលមានអាំងតេក្រាលឡឺបេសតែបើលីមីតនោះមិនកំណត់ នោះគេថា $f(x)$ គឺជាអនុគមន៍ដែលមិនមានអាំងតេក្រាលឡឺបេស ។

៥.២.អាំងតេក្រាល Lebasque អនុគមន៍មិនទាល់

បើ $f(x) \leq 0$ យើងអាចកំណត់អាំងតេក្រាលឡឺបេសដោយ $f(x)$ គឺ

$$\int_E f(x)\,dx = -\int_E \left|f(x)\right| dx \qquad (3)$$

សម្រាប់ចំណុចដែលមានអាំងតេក្រាលខាងស្តាំគឺ ទទួលបានលទ្ធផលដូច (3) សម្រាប់ $\left|f(x)\right| \geq 0$។

នៅក្នុងករណីទូទៅ ដែល $f(x)$ មានសញ្ញាណាមួយគេបាន

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), \forall x \in E \Rightarrow f(x) \geq 0 \\ 0, \forall x \in E \Rightarrow f(x) < 0 \end{cases} \qquad (4)$$

$$f^-(x) = \begin{cases} 0, \forall x \in E \Rightarrow f(x) \geq 0 \\ -f(x), \forall x \in E \Rightarrow f(x) < 0 \end{cases} \qquad (5)$$

ចំណុចដែលគួរកត់សម្គាល់នោះគឺ $f^+(x)$ និង $f^-(x)$ មិនអវិជ្ជមានទាំងពីរ នាំឱ្យ

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) \qquad (6)$$

$$\int_E f(x)\,dx = \int_E f^+(x)\,dx - \int_E f^-(x)\,dx \qquad (7)$$

៥.៣.ទ្រឹស្តីបទ

ទ្រឹស្តីបទ 5-1 ៖ បើ $f(x) \geq 0$ នោះ $\int_E f(x)\,dx$ មាន លុះត្រាតែ $\int_E \left[f(x)\right]_p$ គឺមានភាពទាល់។

ទ្រឹស្តីបទ 5-2 ៖ បើ $\left|f(x)\right| \leq g(x)$ ដែល $g(x)$ មានអាំងតេក្រាលលើ E នោះ $f(x)$ ក៏មានអាំងតេក្រាលលើ E និង $\int_E \left|f(x)\right| dx \leq \int_E g(x)\,dx$ ហើយលទ្ធផលនេះពិតស្មើតែគ្រប់កន្លែងលើ

E បើ $\left|f\left(x\right)\right| \le g\left(x\right)$ ។

ទ្រឹស្តីបទ 5-3 ៖ អនុគមន៍ $f\left(x\right)$មានអាំងតេក្រាលលើ E លុះត្រាតែ $\left|f\left(x\right)\right|$មានអាំងតេក្រាលលើ$E$ ដូចនេះ $\left|\int_E f\left(x\right)dx\right| \le \int_E \left|f\left(x\right)\right|dx$ ព្រោះ $f\left(x\right)$មានអាំងតេក្រាលលើE លុះត្រាតែវាមានអាំងតេក្រាលដោយតម្លៃដាច់ខាតលើE ។

ទ្រឹស្តីបទ 5-4 ៖ បើ $\int_E f\left(x\right)dx$ មាន នោះ $f\left(x\right)$គឺកំណត់គ្រប់កន្លែងលើE ។

ទ្រឹស្តីបទ 5-5 ៖ បើ E មានរង្វាស់សូន្យ នោះ $\int_E f\left(x\right)dx = 0$ ។

ទ្រឹស្តីបទ 5-6 ៖ បើ $\int_E f\left(x\right)dx$ មាន និងបើ A គឺជាសំណុំរងដែលអាចវាស់បានដោយE នោះ $\int_A f\left(x\right)dx$ មាន។ ដូចនេះ $\int_A \left|f\left(x\right)\right|dx \le \int_E \left|f\left(x\right)\right|dx$ ។

ទ្រឹស្តីបទ 5-7 ៖ បើ $E = E_1 \cup E_2$ ដែល E_1 និង E_2 ដាច់ នោះ

$$\int_E f\left(x\right)dx = \int_{E_1} f\left(x\right)dx + \int_{E_2} f\left(x\right)dx$$

ទ្រឹស្តីបទ 5-8 ៖ បើ $E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots$ ដែល $E_1, E_2, \ldots$ ដាច់ នោះ $\int_E f\left(x\right)dx$ មាន គេបាន

$$\int_E f\left(x\right)dx = \int_{E_1} f\left(x\right)dx + \int_{E_2} f\left(x\right)dx + \ldots$$ ។

ទ្រឹស្តីបទ 5-9 ៖ $\int_E \left|f\left(x\right) + g\left(x\right)\right|dx = \int_E f\left(x\right)dx + \int_E g\left(x\right)dx$ ។

ទ្រឹស្តីបទ 5-10 ៖ $\int_E cf\left(x\right)dx = c\int_E f\left(x\right)dx$ សម្រាប់ចំនួនថេរ c ។

ទ្រឹស្តីបទ 5-11 ៖ បើ $f\left(x\right)$មានអាំងតេក្រាលលើE និង $g\left(x\right)$ ទាល់ នោះ $f\left(x\right)g\left(x\right)$ មានអាំងតេក្រាលើE ។

ទ្រឹស្តីបទ 5-12 ៖ បើ $f\left(x\right) = g\left(x\right)$ គ្រប់ចំណុចលើE នោះ $\int_E f\left(x\right)dx = \int_E g\left(x\right)dx$ ។

ទ្រឹស្តីបទ 5-13 ៖ បើ $f\left(x\right) \ge 0$ និង $\int_E f\left(x\right)dx = 0$ នោះ $f\left(x\right) = 0$ គ្រប់ចំណុចលើ E ។

ទ្រឹស្តីបទ 5-14 ៖ បើ $f\left(x\right)$មានអាំងតេក្រាលលើ E នោះ $\varepsilon > 0$ មាន $\delta > 0$ ហើយ សំណុំ $A \subset E$ ដូចនេះ បើ $m\left(A\right) < \delta$ នោះ $\left|\int_A f\left(x\right)dx\right| < \delta$ ។

ទ្រឹស្តីបទ 5-15 ៖ តាង $f\left(x\right)$មានអាំងតេក្រាលក្នុងE ។ បើ $\left(E_k\right)$ គឺជាស៊ីតដោយសំណុំដែលមានក្នុងE ដូចនេះ $\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f\left(x\right)dx = 0$ ។

៥.៤. ទ្រឹស្តីបទផ្ទៀងផ្ទាត់រួមឡឺបេស

ទ្រឹស្តីបទ 5-16 (ផ្ទៀងផ្ទាត់រួម)៖ តាង $\left\langle f_n\left(x\right)\right\rangle$ ជាស៊ីតដោយអនុគមន៍ដែលអាចវាស់បាន

លើ E ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$។ បើមានអនុគមន៍ $M(x)$ ដែលមានអាំងតេក្រាលលើ E ដូចនេះ $|f_n(x)| \le M(x)$ សម្រាប់គ្រប់ n

គេបាន $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_E f(x)dx$ (8)

៥.៥.ផ្ទៀងផ្ទាត់ទ្រឹស្តីបទសម្រាប់ស៊េរីរួមមិនកំណត់

ទ្រឹស្តីបទ 5-17 ៖ បើ $u_k(x), k = 1,2,3,....$ អាចវាស់បានលើ E និងមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $M(x)$ លើ E នាំឱ្យ $|s_n(x)| \le M(x)$ ដែល $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ និង $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$ នោះ

$$\int_E \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right\} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E u_k(x)dx \qquad (9)$$

ទ្រឹស្តីបទ 5-18 ៖ បើ $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ នោះ $|s_n(x)| = \left| \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \right| \le M$ សម្រាប់ចំនួនថេរ M មួយចំនួន។ បើ $v(x)$ គឺទាល់ និងអាចវាស់បានលើ E នោះ

$$\int_E \left\{ v(x) \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right\} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E v(x) u_k(x)dx \qquad (10)$$

៥.៦.ទ្រឹស្តីបទ Fatou

ទ្រឹស្តីបទ 5-19 [Fatou]៖ តាង $\langle f_n(x) \rangle$ គឺជាស្វ៊ីតដោយអនុគមន៍មិនអវិជ្ជមានដែលអាចវាស់បានលើ E និងឧបមាថា $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ នោះ

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx \ge \int_E f(x)dx \qquad (11)$$

សម្គាល់ទ្រឹស្តីបទនេះពិត បើ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ និង បើ $f(x)$ មិនមានអាំងតេក្រាល នោះអាំងតេក្រាលខាងឆ្វេងដោយ (11) គឺមិនកំណត់។

សម្រាយបញ្ជាក់

5.23. ទ្រឹស្តីបទ 5-19 ៖ តាង $\langle f(x) \rangle$ ជាអនុគមន៍វាស់បានមិនអវិជ្ជាដោយស្វ៊ីតកំណត់លើ E ហើយសន្មតថា $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ។ នោះ

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx \ge \int_E f(x)dx$$

កំណត់ $[f(x)]_p = \begin{cases} f(x) \text{បើ } f(x) \le p \\ p \quad \text{បើ } f(x) < p \end{cases}, \forall x \in E$

$$[f_n(x)]_p = \begin{cases} f_n(x) \text{បើ } f(x) \le p \\ p \quad \text{បើ } f(x) > p \end{cases}, \forall x \in E$$

ដោយ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ យើងមាន $\lim_{n\to\infty} [f_n(x)]_p = [f(x)]_p$

តាមទ្រឹស្តីបទដោយភាពរួមទាល់របស់ឡឺបេស

$$\lim_{n\to\infty}\int_E\left[f_n(x)\right]_p dx=\int_E\left[f(x)\right]_p dx \quad (1)$$

ដោយ $\left[f_n(x)\right]_p \le f_n(x)$ យើងបាន

$$\int_E f_n(x)dx \ge \int_E\left[f_n(x)\right]_p dx \quad (2)$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx \ge \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E\left[f_n(x)\right]_p dx \quad (3)$$

ដោយ $n\to\infty$ ផ្នែកខាងស្តាំដោយ(3) មានក្នុង(1) យើងបាន

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx \ge \int_E\left[f(x)\right]_p dx \quad (4)$$

យក $p\to\infty$ ក្នុង (4) យើងបាន $\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx \ge \int_E f(x)dx$

៥.៧.ទ្រឹស្តីបទម៉ូណូតូនរួម

ទ្រឹស្តីបទ 5-20 ៖ តាង $\langle f_n(x)\rangle$ ជាស៊ីតដោយអនុគមន៍ម៉ូណូតូនកើនមិនអវិជ្ជមានលើសំណុំ E មួយ និងឧបមាថាស៊ីតរួមទៅរក $f(x)$ ដូចនេះ

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx=\int_E f(x)dx \quad (12)$$

ទ្រឹស្តីបទ 5-21 ៖ តាង $u_k(x)\ge 0$ នោះ

$$\int_E\left\{\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\right\}dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E u_k(x)dx \quad (13)$$

៥.៨.ការប៉ាន់ស្មានអាំងតេក្រាលដោយអនុគមន៍ជាប់

ទ្រឹស្តីបទ 5-22 .តាង $f(x)$ មានអាំងតេក្រាលក្នុងចន្លោះបិទ $[a,b]$ ។ សម្រាប់ $\varepsilon>0$ មានអនុគមន៍ជាប់ $g(x)$ ក្នុងចន្លោះបិទ $[a,b]$ ដូចនេះ

$$\int_a^b\left|f(x)-f(x)\right|dx<\varepsilon \quad (14)$$

ទ្រឹស្តីបទ 5-23 ៖ តាង $f(x)$ មានអាំងតេក្រាលក្នុងចន្លោះបិទ $[a,b]$ នោះ

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b\left|f(x+h)-f(x)\right|dx=0 \quad (15)$$

៥.៩.អាំងតេក្រាលលើសំណុំមិនទាល់

ដើម្បីបង្ហាញនិយមន័យដោយអាំងតេក្រាលឡឺបេសលើសំណុំមិនទាល់ (a,∞) ។ ដំបូងយើងឧបមាថា $f(x)$ មិនអវិជ្ជមាន។ ឧទាហរណ៍ $f(x)\ge 0$ និង $f(x)$ គឺ មានអាំងតេក្រាលឡឺបេសក្នុងចន្លោះបើក (a,b) សម្រាប់តម្លៃកំណត់ដោយ b នោះ

$$\int_a^{\infty}f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx \quad (16)$$

បើ $f(x)$ មានសញ្ញាណាមួយនោះយើងកំណត់

$$\int_a^{\infty}f(x)dx=\int_a^{\infty}f^+(x)dx-\int_a^b f^-(x)dx \quad (17)$$

ដែល $f^+(x),f^-(x)$ គឺមិនអវិជ្ជមាន និង $f(x)$ មានអាំងតេក្រាលលើចន្លោះបើក (a,∞) បើរាល់អាំងតេ

ក្រាលផ្នែកខាងស្តាំដោយ(17) កំណត់តាមអនុលោមដោយនិយមន័យ។

ផ្នែកបន្ថែមអាចបង្កើតនៅចន្លោះ $(-\infty,b)$ និង $(-\infty,\infty)$ ។ យើងពិចារណាលើចន្លោះបើក (a,b) និង $a\to-\infty, b\to\infty$ ។ បើសំណុំ E គឺមិនមែនជាចន្លោះមិនកំណត់ និងមិនទាល់ យើងកំណត់ថា

$$\int_E f(x)\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_{E\cap(a,b)} f(x)\,dx \qquad (18)$$

ទ្រឹស្តីបទ 5-24 ៖ អនុគមន៍ $f(x)$ គឺមានអាំងតេក្រាលលើ E លុះត្រាតែ $|f(x)|$ មានអាំងតេក្រាលលើ E ហើយ E គឺទាល់ ឬ មិនទាល់ គេបាន

$$\left|\int_E f(x)\,dx\right| \le \int_E |f(x)|\,dx$$

៥.១០. ការប្រៀបធៀបជាមួយអាំងតេក្រាលរីម៉ាន់សម្រាប់សំណុំមិនទាល់

អាំងតេក្រាលរីម៉ាន់ មិនដូចអាំងតេក្រាលឡឺបេសនោះទេ។ អាំងតេក្រាលរីម៉ាន់ដោយ $f(x)$ លើសំណុំមិនទាល់ E អាចមានទោះបីជាអាំងតេក្រាលដោយ $|f(x)|$ មិនមានលើ E ។

ទ្រឹស្តីបទ 5-25 ៖ បើ $|f(x)|$ អាចវាស់បាននិង $|f(x)|$ គឺ មានអាំងតេក្រាលរីម៉ាន់ លើ E នោះ $f(x)$ គឺមានអាំងតេក្រាលរីម៉ាន់ និង អាំងតេក្រាលឡឺបេស លើ E ហើយអាំងតេក្រាលទាំងពីរគឺស្មើគ្នា។

៥.១១. ការដោះស្រាយលំហាត់

5.1. បង្ហាញថាអនុគមន៍ $[f(x)]_p$ អាចសរសេរ $\min\{f(x),p\}$ ។

យើងមាន $[f(x)]_p = \begin{cases} f(x), \forall x\in E \Rightarrow f(x)\le p \\ p, \forall x\in E \Rightarrow f(x)>p \end{cases}$ នោះបើ $f(x)$ តូចជាង ឬ ស្មើ p គេបាន $[f(x)]_p = f(x) = \min\{f(x),p\}$ ដែល $f(x)$ គឺធំជាង p ហើយ $[f(x)]_p = p = \min\{f(x),p\}$ ដូចនេះ $[f(x)]_p = \min\{f(x),p\}$ ។

5.2. បង្ហាញថា $\lim_{p\to\infty}[f(x)]_p = f(x)$ ។ ដោះស្រាយតាមគំរូ 5.1 ព្រោះ $\min\{f(x),\infty\} = f(x)$ ។

5.3. បង្ហាញថា $[f(x)]_p$ គឺទាល់ និងអាចវាស់បាននិងមានអាំងតេក្រាលសម្រាប់ p បើ $f(x)$ គឺអាចវាស់បាន។ តាមលំហាត់ 5.1 យើងឃើញថា $[f(x)]_p < p$ និង ទាល់សម្រាប់ p ។ បើ $[f(x)]_p = \min\{f(x),p\}$ ដែល $f(x)$ និង p អាចវាស់បានដូចនេះ $[f(x)]_p$ អាចវាស់បាន។

5.4. ស្រាយថា $\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[8]{x}}$ កំណត់ និងរកតម្លៃដោយអាំងតេក្រាល។

យើងមាន $[f(x)]_p = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \text{ ចំពោះ } \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \le p \text{ ឬ } x \ge \frac{1}{p^s} \\ p \quad \text{ ចំពោះ } \frac{1}{\sqrt[3]{x}} < p \text{ ឬ } x < \frac{1}{p^s} \end{cases}$

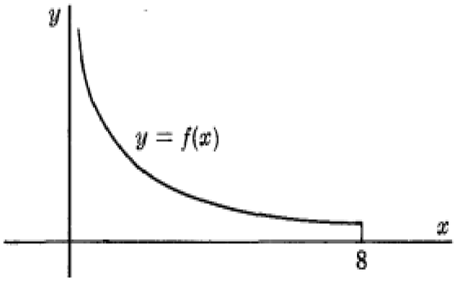
នោះ $\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{p\to\infty}\int_0^8 \left[f\left(x\right)\right]_p dx = \lim_{p\to\infty}\left[\int_0^{1/p^3} p dx + \int_{1/p^3}^8 \frac{dx}{\sqrt[8]{x}}\right] = \lim_{p\to\infty}\left[px\,|_0^{1/p^3} + \frac{3}{2}x^{2/8}\,|_{1/p^3}^8\right]$

$= \lim_{p\to\infty}\left[\frac{1}{p^2} + 6 - \frac{3}{2p^2}\right] = 6$

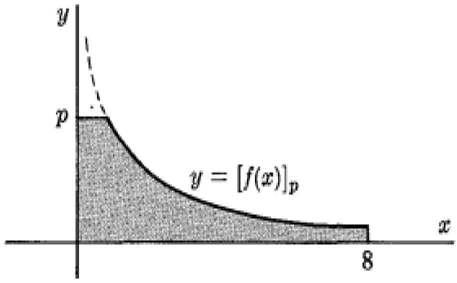
ដូចនេះ មានអាំងតេក្រាលដែលមានតម្លៃ 6។

5.5. ក្រាបដោយអនុគមន៍ $f\left(x\right) = 1/\sqrt[8]{x}$ និង $\left[f\left(x\right)\right]_p, 0 < x \le 8$ ដោយលំហាត់5.4 និងបង្ហាញលទ្ធផលតាមបែបធរណីមាត្រ។

ក្រាបដោយ $f\left(x\right)$និង$\left[f\left(x\right)\right]_p$ គឺ ចង្អុលបង្ហាញនៅក្នុងរូបខាងក្រោម។ អនុគមន៍ $\left[f\left(x\right)\right]_p$ គឺហៅថាអនុគមន៍កាត់ ដែល $\left[f\left(x\right)\right]_p = p$ បើ $f\left(x\right) > p$ ។



រូបភាព១២



រូបភាព១៣

ដូចនេះតម្លៃ $\lim_{p\to\infty}\int_0^8 \left[f\left(x\right)\right]_p dx = 6$ ។

និយមន័យដោយអាំងតេក្រាលឡឺបេសសម្រាប់គ្រប់អនុគមន៍

5.6. បង្ហាញថាអនុគមន៍ $f^+(x)$ និង $f^-(x)$ អាចរកបានដោយ $f^+(x) = f^-(x) = \max\{0, f(x)\}$

យើងមាន $f^+\left(x\right) = \begin{cases} f\left(x\right) \text{ បើ } x \in E, f\left(x\right) \ge 0 \\ 0 \text{ បើ } x \in E, f\left(x\right) < 0 \end{cases}$

នោះបើ $f(x) \ge 0$ យើងមាន $f^+(x) = f(x) = \max\{f(x), 0\}$ ពេល $f(x) < 0, f^+(x) = 0 = \max\{f(x), 0\}$ម៉្យាងទៀត $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$

ដោយហេតុផលដូចគ្នានេះ យើងបង្ហាញថា $f^-(x) = \max\{0, -f(x)\}$

5.7. បង្ហាញថា $(a) f(x) = f^+(x) - f^-(x),\ \ (b) \left|f(x)\right| = f^+(x) + f^-(x)$

(a) យើងមាន $f^+(x) = f(x)$ បើ $f(x) \ge 0$និង $f^-(x) = 0$ បើ $f(x) \ge 0$នោះ

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) \text{ បើ } f(x) \ge 0$$

ដូចគ្នាដែរយើងមាន $f^+(x) = 0$ បើ $f(x) < 0$ និង $f^-(x) = -f(x)$ បើ $f(x) < 0$ នោះ

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) \text{ បើ } f(x) < 0$$

ដូចនេះគ្រប់ករណីទាំងអស់ $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$

(b)បើ $f(x) \ge 0$ នោះ $\left|f(x)\right| = f(x) = f^+(x) + f^-(x)$ បើ $f(x) < 0$ នោះ

$$\left|f(x)\right| = -f(x) = f^+(x) + f^-(x)$$

ដូចនេះគ្រប់ករណីទាំងអស់គេបាន $|f(x)| = f^{+}(x) + f^{-}(x)$
ទ្រឹស្តីបទសម្រាប់អាំងតេក្រាលឡឺបេស សម្រាប់អនុគមន៍ទាល់ស្មើ
5.8. បង្ហាញថាទ្រឹស្តីបទ5-1 បើ $f(x) \geq 0$ នោះ $\int_E f(x)dx$ មានបើសិន $\int_E [f(x)]_p dx$ ជាមានដែនកំណត់ស្មើគ្នា។ ដោយនិយមន័យដោយ $[f(x)]_p$ វាបង្ហាញឱ្យឃើញថា $[f(x)]_1 \leq [f(x)]_2 \leq \ldots$
នោះ $\int_E [f(x)]_1 dx \leq \int_E [f(x)]_2 dx \leq \ldots$
ដូចនេះលំដាប់ទី p ខាងលើនេះគឺ $\int_E [f(x)]_p dx$ គឺមានការកើនឡើងដោយលំដាប់ម៉ូណូតូន។ វាបង្ហាញថាបើលំដាប់នេះគឺជាអនុគមន៍ទាល់ស្មើ។
ឧទាហរណ៍៖ បើមានចំនួនថេរMគ្រប់តម្លៃP $\int_E [f(x)]_p dx < M$
នោះ $\lim_{p\to\infty} \int_E [f(x)]_p dx = \int_E f(x)dx$ អាចមាន
ប្រាសមកវិញបើ $\int_E f(x)dx$ មាននោះដោយ $[f(x)]_p \leq f(x)$ យើងមាន

$$\lim_{p\to\infty} \int_E [f(x)]_p dx \leq \int_E f(x)dx < M$$

ដូចនេះ $\int_E [f(x)]_p dx$ គឺជាអនុគមន៍ទាល់ស្មើ(5.41)
5.9. បង្ហាញថាទ្រឹស្តីបទ 5-2 សម្រាប់ករណីនេះដែល $(a).f(x) \geq 0, (b).f(x)$ មានសញ្ញាដោយលេខ
(a)-បើ $0 \leq f(x) \leq g(x)$ នោះ $[f(x)]_p \leq [g(x)]_p$
ដូចនេះ

$$\int_E [f(x)]_p dx \leq \int_E [g(x)]_p dx \tag{1}$$

ដោយកំណត់យកលីមីត $p \to \infty$ យើងបាន

$$\int_E f(x) \leq \int_E g(x)dx \tag{2}$$

ដែលតាម $\int_E g(x)dx$ មាន និងអាំងតេក្រាលនៅខាងឆ្វេងដោយ (2) មានលទ្ធផលនៅ5.8
(b) នេះតាមរយៈ (a) ជំនួស $f(x)$ ដោយ $|f(x)|$ ដែលមិនអវិជ្ជមាន
5.10. បង្ហាញទ្រឹស្តីបទ 5-4 សម្រាប់ករណីដែល $f(x) \geq 0$
តាង $S = E[f(x) = \infty]$ ឧទាហរណ៍សំណុំទាំងអស់ដោយxដែល $[f(x)]_p$ យើងមាន

$$\int_E [f(x)]_p dx \geq \int_S [f(x)]_p dx = \int_S p dx = pm(S) \tag{1}$$

ដែលយកលីមីតខិតជិត $p \to \infty$ យើងមាន

$$\int_E f(x)dx \geq \lim_{p\to\infty} pm(S) \tag{2}$$

ឥឡូវនេះបើសិន $m(S) > 0$ តាម (2) ផ្តល់ភាពផ្ទុយគ្នាចាប់តាំងពីសម្មតិកម្ម $\int_E f(x)dx$ គឺកំណត់បាន
ដូចនេះយើងត្រូវតែមាន $m(S) = 0$ ឧទាហរណ៍ $f(x)$ គឺកំណត់ស្មើតែគ្រប់កន្លែង។ សម្រាប់ការស្រាយ

បញ្ជាក់ដោយទ្រឹស្តីបទដែល $f(x)$ មាន សញ្ញាដោយលេខដូចបង្ហាញនៅទ្រឹស្តីបទ5.47។

5.11. បង្ហាញថាទ្រឹស្តីបទ 5-6 សម្រាប់ករណីដែល $f(x)\geq 0$ យើងមាន

$$\int_A \left[f(x)\right]_p dx \leq \int_E \left[f(x)\right]_p dx \qquad (1)$$

នោះកំណត់យកលីមីត $p\to\infty$ វាបង្ហាញថា

$$\int_A f(x)dx \leq \int_E f(x)dx \qquad (2)$$

ឧទាហរណ៍ អាំងតេក្រាលខាងឆ្វេងដោយ (2) មានពេលដែលអាំងតេក្រាលនៅខាងស្តាំដោយ (2) មាន។

5.12. បង្ហាញទ្រឹស្តីបទ 5-7 បើ $f(x)\geq 0$

យើងអាចបង្ហាញថាទ្រឹស្តីបទសម្រាប់ធាតុដែលកំណត់បានដោយសំណុំដាច់ ឧទាហរណ៍ $E=E_1\cup E_2\cup E_3\cup\ldots\cup E_n$ និង $E_1,E_2,E_3,\ldots,E_n$ ជាសំណុំដាច់។ នៅពេលដែល ទ្រឹស្តីបទនេះពិតសម្រាប់តែអនុគមន៍ទាល់យើងមាន

$$\int_E \left[f(x)\right]_p dx = \int_{E_1} \left[f(x)\right]_p dx + \ldots + \int_{E_n} \left[f(x)\right]_p dx$$

ដែលឧបមាថា $f(x)$ គឺជាអាំងតេក្រាលឡឺបេស នៅលើE និងនៅលើរង្វាស់សំណុំរង $E_1,E_2,E_3,\ldots,E_n$

5.13. បង្ហាញថាទ្រឹស្តីបទ 5-7 បើ $f(x)$ មានសញ្ញាណាមួយ។

លទ្ធផលដោយ 5.12 គឺពិតសម្រាប់ $f^+(x)$ និង $f^-(x)$ ដូចនេះយើងមាន

$$\int_E f^+(x)dx = \int_{E_1} f^+(x)dx + \ldots + \int_{E_n} f^+(x)dx$$

$$\int_E f^-(x)dx = \int_{E_1} f^-(x)dx + \ldots + \int_{E_n} f^-(x)dx$$

នោះធ្វើផលដកគេបាន $\int_{E_k} f(x)dx = \int_{E_k} f^+(x)dx - \int_{E_k} f^-(x)dx$ ដែលត្រូវការ

$$\int_E f(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx + \ldots + \int_{E_n} f(x)dx$$

5.14. បង្ហាញថាទ្រឹស្តីបទ 5-8 សម្រាប់ករណីដែល $f(x)\geq 0$

យើងមានតាមរយៈ 4.15

$$\int_E \left[f(x)\right]_p dx = \int_{E_1} \left[f(x)\right]_p dx + \int_{E_2} \left[f(x)\right]_p dx + \ldots$$

$$\geq \int_{E_1} \left[f(x)\right]_p dx + \ldots + \int_{E_n} \left[f(x)\right]_p dx$$

នោះដោយតាង $p\to\infty$ យើងមាន

$$\int_E f(x)dx \geq \int_{E_1} f(x)dx + \ldots + \int_{E_n} f(x)dx \qquad (1)$$

តាង $n\to\infty$ នៅក្នុង (1) យើងរក

$$\int_E f(x)dx \geq \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx + \ldots \qquad (2)$$

សម្រាប់ $k=1,2,\ldots$ យើងនៅតែមាន $\int_{E_k}\left[f(x)\right]_p dx \geq \int_{E_k} f(x)dx$

ដូចនេះគេបានផលបូក k

$$\int_{E_1}\left[f(x)\right]_p dx+\int_{E_2}\left[f(x)\right]_p dx+\ldots \leq \int_{E_1} f(x)dx+\int_{E_2} f(x)dx+\ldots$$

$$\int_{E}\left[f(x)\right]_p dx \leq \int_{E_1} f(x)dx+\int_{E_2} f(x)dx+\ldots$$

តាង $p\to\infty$ យើងបាន

$$\int_{E} f(x)dx \leq \int_{E_1} f(x)dx+\int_{E_2} f(x)dx+\ldots \qquad (3)$$

តាម (2) និង (3) វាបង្ហាញថា $\int_{E} f(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx+\int_{E_2} f(x)dx+\ldots$

5.15. បង្ហាញថាទ្រឹស្តីបទ 5-8 សម្រាប់ករណីដែល $f(x)$ មានសញ្ញាចំនួនណាមួយតាម 5.14 យើងមាន

$$\int_{E} f^{+}(x)dx = \int_{E_1} f^{+}(x)dx+\int_{E_2} f^{+}(x)dx+\ldots$$

$$\int_{E} f^{-}(x)dx = \int_{E_1} f^{-}(x)dx+\int_{E_2} f^{-}(x)dx+\ldots$$

ដោយធ្វើផកដកគេបាន $\int_{E_k} f(x)dx = \int_{E_k} f^{+}(x)dx - \int_{E_k} f^{-}(x)\,dx$ ដែល

$$\int_{E} f(x)dx = \int_{E_k} f(x)dx+\int_{E} f(x)dx+\ldots$$

5.16. ឱ្យឧទាហរណ៍ដើម្បីបង្ហាញថាទ្រឹស្តីបទ 5-8 មិនចាំបាច់ស្រាយថាពិតទេ បើសិនជាគ្មានការលើកឡើងពីភាពមានអាំងតេក្រាលដោយ $f(x)$ លើ E

$$\text{តាង}\quad f\left(x\right)=\begin{cases} n,\ \text{បើ}\dfrac{2n}{4n^2-1}<x\leq\dfrac{1}{2n-1} \\ -n,\text{បើ}\dfrac{1}{2n+1}<x\leq\dfrac{2n}{4n^2-1}\end{cases},n=1,2,\ldots$$

នោះ n នីមួយៗមាន

$$\int_{\frac{1}{2n+1}}^{\frac{1}{2n-1}} f(x)\,dx = \int_{\frac{2n}{4n^2-1}}^{\frac{1}{2n-1}} n\,dx + \int_{\frac{1}{2n+1}}^{\frac{2n}{4n^2-1}} -n\,dx$$

$$= n\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{2n}{4n^2-1}\right)-n\left(\frac{2n}{4n^2-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= 0$$

ឥឡូវនេះ $\int_0^1\left|f(x)\right|dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{1/(2n+1)}^{1/(2n-1)}\left|f(x)\right|dx$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{1/(2n+1)}^{1/(2n-1)} ndx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}$$
$$\geq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

ប៉ុន្តែស៊េរីចុងក្រោយជាស៊េរីរួមវាបង្ហាញថា $\int_0^1|f(x)|dx$ គឺមិនកំណត់និង $\int_0^1 f(x)dx$ មិនមានចម្លើយ។

5.17. បង្ហាញទ្រឹស្តីបទ 5-9 សម្រាប់ករណីដែល $f(x)\geq 0$ និង $g(x)\geq 0$

តាង $h(x)=f(x)+g(x)$ នោះបើសិនតាង

$$\left[f(x)\right]_p=\begin{cases} f(x) \text{ បើ } f(x)\leq p \\ p \quad \text{ បើ } f(x)>p \end{cases}, x\in E$$

ជាមួយនឹងនិយមន័យដូចគ្នាសម្រាប់ $\left[g(x)\right]_p$ និង $\left[h(x)\right]_p$ យើងមាន

$$\left[h(x)\right]_p\leq\left[f(x)\right]_p+\left[g(x)\right]_p\leq\left[h(x)\right]_{2p}$$

ដូចនេះយើងមាន $\int_E\left[h(x)\right]_p dx\leq\int_E\left[f(x)\right]_p dx+\int_E\left[g(x)\right]_p dx\leq\int_E\left[h(x)\right]_{2p}dx$

ដោយតាង $p\to\infty$ យើងរកបាន

$$\int_h h(x)dx\leq\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx\leq\int_E h(x)dx$$

ដែលបង្ហាញថា $\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx=\int_E h(x)dx$

ឧទាហរណ៍៖ $\int_E\left[f(x)+g(x)\right]dx=\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx$

លទ្ធផលគឺងាយនឹងបន្ថែមទៅលើការកំណត់ចំនួនដោយអនុគមន៍

5.18. បង្ហាញថាទ្រឹស្តីបទ 5-9 សម្រាប់ករណីដែល $f(x)$ និង $g(x)$ មានសញ្ញាណាមួយក្នុងករណីដែល $f(x)$ និង $g(x)$ មានសញ្ញាណាមួយ និង $h(x)=f(x)+g(x)$ មានករណីដែលបានលើកឡើងដូចជា

1. $f(x)\geq 0, g(x)\geq 0, h(x)\geq 0$
2. $f(x)<0, g(x)<0, h(x)<0$
3. $f(x)\geq 0, g(x)<0, h(x)\geq 0$
4. $f(x)\geq 0, g(x)<0, h(x)<0$
5. $f(x)\geq 0, g(x)\geq 0, h(x)\geq 0$
6. $f(x)<0, g(x)\geq 0, h(x)<0$

តាង $E_1,E_2,...,E_6$ សម្គាល់សំណុំរៀងៗខ្លួនសម្រាប់ករណីខាងលើ។ វានឹងកាន់តែបង្ហាញថា $E=\bigcup_{k=1}^{6}E_k$

ឥឡូវនេះបើអាចបង្ហាញថា៖

$$\int_{E_k}\left[f(x)+g(x)\right]dx=\int_{E_k}\left[f(x)\right]dx+\int_{E_k}\left[g(x)\right]dx \qquad (1)$$

សម្រាប់ $k=1,2,...,6$ ដែលទាមទារឱ្យលទ្ធផលតាមរយៈផលបូក និងប្រើទ្រឹស្តីបទ5.15

យើងបានដាក់ចេញ(1) សម្រាប់ករណី $k=1$ ឧទាហរណ៍ សំណុំ E_1 ក្នុងទ្រឹស្តីបទ5.17 ។

លទ្ធផលអាចបង្ហាញនៅក្នុងលក្ខណៈស្រដៀងគ្នាសម្រាប់តម្លៃkផ្សេងទៀត។
ជាឧទាហរណ៍បើ $k=4$ ក្នុងករណីនេះយើងអាចសរសេរថា $h(x)=f(x)+g(x)$
ដូច $\left[-g(x)\right]=\left[f(x)\right]+\left[-h(x)\right]$

$f(x)\geq 0,-g(x)\geq 0,-h(x)\geq 0$ ទៅលើសំណុំ E_4 យើងបានស៊េរី5.17

$$\int_{E_4}-g(x)dx=\int_{E_4}f(x)dx+\int_{E_4}-h(x)dx$$

ប្រើទ្រឹស្តីបទ5-10 នេះក្លាយជា

$$-\int_{E_4}g(x)dx=\int_{E_4}f(x)dx-\int_{E_4}h(x)dx$$

$$\int_{E_4}h(x)dx=\int_{E_4}f(x)dx+\int_{E_4}g(x)dx$$

$$\int_{E_4}\left[f(x)+g(x)\right]dx=\int_{E_4}f(x)dx+\int_{E_4}g(x)dx$$

5.19. បង្ហាញទ្រឹស្តីបទ5-3៖

(a)- $f(x)$ គឺអាំងតេក្រាលឡឺបេសលើ E បើសិន $|f(x)|$ គឺជាអាំងតេក្រាលឡឺបេសលើ E និង

(b)- $\left|\int_E f(x)dx\right|\leq\int_E|f(x)|dx$

(a) តាមទ្រឹស្តីបទ5.18 យើងមាន

$$\int_E f(x)dx=\int_E f^+(x)dx-\int_E f^-(x)dx$$

$$\int_E|f(x)|dx=\int_E f^+(x)dx-\int_E f^-(x)dx$$

នោះបើ $f(x)$ គឺអាំងតេក្រាលឡឺបេសលើ E និង $|f(x)|$ ហើយច្រាសមកវិញបើ $|f(x)|$ គឺជាអាំងតេក្រាលលើ E គឺ $f(x)$

(b) តាម (a) យើងមាន

$$\begin{aligned}\left|\int_E f(x)dx\right|&=\left|\int_E f^+(x)dx-\int_E f^-(x)dx\right|\\&=\left|\int_E f^+(x)dx\right|+\left|\int_E f^-(x)dx\right|\\&=\int_E f^+(x)dx+\int_E f^-(x)dx\\&=\int_E f(x)dx\end{aligned}$$

5.20. បង្ហាញទ្រឹស្តីបទ 5-11

ដែល $g(x)$ ជាអនុគមន៍ទាល់ យើងមាន $|g(x)|\leq M\Rightarrow|f(x)g(x)|\leq M|f(x)|$

នោះយើងបាន $\int_E |f(x)g(x)|dx \le M\int_E |f(x)|dx$ និងទាមទារឱ្យលទ្ធផលតាម $f(x)$ និង $|f(x)|$ ជាអាំងតេក្រាលនៅលើ E ។

5.21. បង្ហាញទ្រឹស្តីបទ5-14៖ បើ $f(x)$ គឺអាំងតេក្រាលនៅលើ E ដោយឱ្យ $\varepsilon > 0$ មាន $\delta > 0$ និងសំណុំ $A \subset E$ ដែល $\left|\int_A f(x)dx\right| < \delta$

បើ $m(A) < \delta$ តាមទ្រឹស្តីបទ5.19 វាបង្ហាញថា $|f(x)|$ គឺមានអាំងតេក្រាលលើ E ដែលឱ្យ $\varepsilon_1 > 0$ វានឹងបង្ហាញចំនួនគត់ធម្មជាតិ p_0 ដូចដែល

$$\int_E (|f(x)| - [|f(x)|]_{p_0} dx < \varepsilon_1 \tag{1}$$

ដែលអាំងតេក្រាលនៅក្នុង(1)គឺមិនអវិជ្ជមាន

ឥឡូវបើ A គឺជារង្វាស់សំណុំរងដោយ E យើងមានតាមទ្រឹស្តីបទ5-6

$$\int_E \left(|f(x)| - [|f(x)|]_{p_0} \right) dx \le \int_E \left(|f(x)| - [|f(x)|]_{p_0} \right) dx \tag{2}$$

តាម(1) និង(2) យើងបាន

$$\int_A |f(x)|dx < \varepsilon_1 + \int_A [|f(x)|]_{p_0} dx \tag{3}$$

ប៉ុន្តែដោយ $[|f(x)|]_{p_0} \le p_0$ យើងមាន $\int_A [|f(x)|]_{p_0} dx \le p_0 m(A)$

តាម(3) អាចសរសេរបានថា

$$\int_A |f(x)|dx < \varepsilon_1 + p_0 m(A) \tag{4}$$

តាង $\varepsilon_1 = \varepsilon / 2$ ហើយយក $m(A) < \delta = \varepsilon / 2p_0$ នោះយើងតាម(4)

$$\left|\int_A f(x)dx\right| \le \int_A |f(x)|dx < \varepsilon$$

បើ $m(A) < \delta$ ដូចអ្វីដែលបានទាមទារ។

ទ្រឹស្តីបទដែនកំណត់រួមរបស់ឡឺបេស

5.22. បង្ហាញទ្រឹស្តីបទដែនកំណត់រួមរបស់ឡឺបេស (ទ្រឹស្តីបទ 5-16) ៖ តាង $\langle f(x) \rangle$ ជាអនុគមន៍វាស់បានដោយស្ទីតលើ E នោះ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ។ បើមានអនុគមន៍ $M(x)$ មានអាំងតេក្រាលលើ E នោះ $|f_n(x)| \le M(x)$ យើងមាន $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាម $|f_n(x)| \le M(x)$ យើងមាន $|f(x)| \le M(x)$ នោះ $f(x)$ មានអាំងតេក្រាលដោយ $\left|\int_E [f(x) - f_n(x)]dx\right| \le \int_E |f(x) - f_n(x)|dx$ វានឹងពិតបើយើងស្រាយថា

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f(x) - f_n(x)|dx = 0 \tag{1}$$

ដើម្បីបង្ហាញយើងនឹងប្រើលំហាត់ 4.22. នោះ

$$\int_E |f(x)-f_n(x)|dx = \int_{S_n} |f(x)-f_n(x)|dx + \int_{R_n} |f(x)-f_n(x)|dx \qquad (2)$$

លើ S_n យើងមាន $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ ដោយ $|f_n(x)|\le M(x)$ និង $|f(x)|\le M(x)$

យើងមាន $|f(x)-f_n(x)|\le |f(x)|+|f_n(x)|\le 2M(x)$

ក្នុងការប្រើប្រាស់ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម (2) ក្លាយជា

$$\int_E |f(x)-f_n(x)|dx \le \varepsilon m(S_n) + 2\int_{R_n} M(x)dx \qquad (3)$$

ដោយ $n\to\infty$ អាំងតេក្រាលចុងក្រោយខិតជិតសូន្យ ដោយស៊េរីមិនកំណត់កំណត់ដោយ

$$\int_E M(x)dx = \int_{E_1} M(x)dx + \int_{E_2} M(x)dx + ...$$

$$= \int_{E_1} M(x)dx + ...+ \int_{E_n} M(x)dx + \int_{R_n} M(x)dx$$ រួម

ដោយ $\lim_{n\to\infty} m(S_n) = m(E)$ តាម (3) យើងបាន $\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_E |f(x)-f_n(x)|dx \le \varepsilon m(E)$

យក $\varepsilon\to\infty$ នោះ (1) ពិត ។

ទ្រឹស្តីបទ Fatou

5.23. ទ្រឹស្តីបទ 5-19 ៖ តាង $\langle f(x)\rangle$ ជាអនុគមន៍វាស់បានមិនអវិជ្ជមានដោយស្ទើតកំណត់លើ E ហើយសន្មតថា $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ។ នោះ

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\int_E f_n(x)dx \ge \int_E f(x)dx$$

កំណត់ $$[f(x)]_p = \begin{cases} f(x) \text{ បើ } f(x)\le p \\ p \quad \text{ បើ } f(x) < p \end{cases}, \forall x\in E$$

$$[f_n(x)]_p = \begin{cases} f_n(x) \text{ បើ } f(x)\le p \\ p \quad \text{ បើ } f(x) > p \end{cases}, \forall x\in E$$

ដោយ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ យើងមាន $\lim_{n\to\infty}[f_n(x)]_p = [f(x)]_p$

តាមទ្រឹស្តីបទដោយភាពរួមទាល់របស់ឡឺបេស

$$\lim_{n\to\infty}\int_E [f_n(x)]_p\, dx = \int_E [f(x)]_p\, dx \qquad (1)$$

ដោយ $[f_n(x)]_p \le f_n(x)$ យើងបាន

$$\int_E f_n(x)dx \ge \int_E [f_n(x)]_p\, dx \qquad (2)$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\int_E f_n(x)dx \ge \underline{\lim_{n\to\infty}}\int_E [f_n(x)]_p\, dx \qquad (3)$$

ដោយ $n\to\infty$ ផ្នែកខាងស្តាំដោយ (3) មានក្នុង (1) យើងបាន

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\int_E f_n(x)dx \ge \int_E [f(x)]_p\, dx \qquad (4)$$

យក $p\to\infty$ ក្នុង (4) យើងបាន $\underline{\lim_{n\to\infty}}\int_E f_n(x)dx \ge \int_E f(x)dx$

5.24. បង្ហាញទ្រឹស្តីបទ 5-20 ។

ដំណោះស្រាយ

សន្មតថា $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx$ កំណត់ ។ តាមទ្រឹស្តីបទ Fatou យើងបាន

$$\int_E f(x)dx \le \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx \quad (1)$$

ដោយ $f_n(x)\le f(x)$ យើងបាន

$$\int_E f_n(x)dx \le \int_E f(x)dx \quad (2)$$

យក $n\to\infty$ យើងបាន

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx \le \int_E f(x)dx \quad (3)$$

តាម (1) និង (3) យើងបាន $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx$

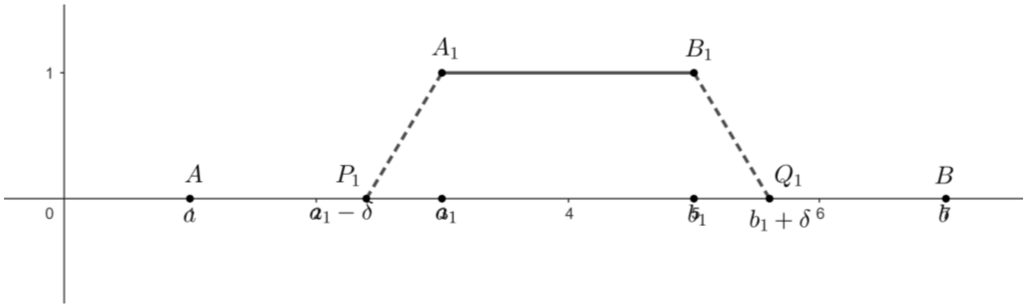
ស្រដៀងគ្នាដែរបើ $\int_E f(x)dx$ កំណត់ដោយ $f_n(x)\le f(x)$ តាមទ្រឹស្តីបទដែនកំណត់រួមរបស់ឡឺបេសយើងបាន $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_E f(x)dx$ ពិត ។

ការប៉ាន់ស្មានអនុគមន៍អាំងតេក្រាលដោយអនុគមន៍ជាប់

5.25. គេឱ្យ $I=[a_1,b_1]$ ជាចន្លោះដែលផ្ទុក $I=[a,b]$ ។ កំណត់ $f(x)=\begin{cases}1 \text{ បើ } x\in I_1\\ 0 \text{ បើ } x\notin I_1\end{cases}$ ។ បង្ហាញថាបើ $\varepsilon>0$ នោះមានអនុគមន៍ជាប់ $g(x)$ កំណត់លើ I ដែល $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx<\varepsilon$

ដំណោះស្រាយ

យកចំណុច $P_1: a_1-\delta$ និង $Q_1: b+\delta$ នៅក្នុងចន្លោះ (a,a_1) និង (b_1,b) រៀងគ្នា ដែល $0<\delta<\frac{\varepsilon}{2}$ ដូចបង្ហាញក្នុងរូប ។ តាង A_1 និង B_1 តំណាងអោយចំណុច $x=a_1$, $f(x)=1$ និង $x=b_1$, $f(x)=1$ រៀងគ្នា ។ សង់បន្ទាត់ P_1A_1 និង B_1Q_1 ។



រូបភាព១៤

តាង $g(x)$ ជាអនុគមន៍ដែលក្រាបត្រូវបានបកស្រាយដោយ $AP_1A_1B_1Q_1B$ នោះ

$$g(x)=\begin{cases}0 & \text{បើ } a\le x\le a_1-\delta\\ 1+\dfrac{x-a_1}{\delta} & \text{បើ } a_1-\delta\le x\le a_1\\ 1-\dfrac{x-a_1}{\delta} & \text{បើ } b_1\le x\le b_1+\delta\\ 0 & \text{បើ } b_1+\delta\le x\le b\end{cases}$$

វាបង្ហាញថា $g(x)$ ជាប់ក្នុង $[a,b]$ ។ នោះយើងបាន

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|dx=\int_{a_1-\delta}^{a_1}\left(1-\frac{x-a_1}{\delta}\right)dx+\int_{b_1}^{b_1+\delta}\left(1-\frac{x-b_1}{\delta}\right)dx=2\delta<\varepsilon \text{ (ពិត)}$$

5.26. តាង $I_k=[a_k,b_k],\ k=1,2,.....,n$ ដែល n ជាចន្លោះជាប់ផ្ទុកក្នុង $I=[a,b]$ ។

តាង $f(x)=\begin{cases}1 \text{ បើ } x\in\cup I_k\\ 0 \text{ បើ } x\notin\cup I_k\end{cases}$ ។ បង្ហាញថាបើ $\varepsilon>0$ នោះមានអនុគមន៍ជាប់ $g(x)$ កំណត់លើ I ដែល $\int_a^b|f(x)-g(x)|dx<\varepsilon$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $f_k(x)=\begin{cases}1 \text{ បើ } x\in I_k\\ 0 \text{ បើ } x\notin I_k\end{cases}$ តាមលំហាត់ 5.25. មានអនុគមន៍ជាប់ $g_k(x)$ ដែល $\varepsilon>0$

$$\int_a^b|f_k(x)-g_k(x)|dx<\frac{\varepsilon}{n},\ k=1,2,......,n$$

តាង $g(x)=\sum_{k=1}^{n}g_k(x)$ យើងបាន

$$\int_a^b|f(x)-g(x)|dx=\int_a^b\left|f(x)-\sum_{k=1}^{n}g_k(x)\right|dx\le\sum_{k=1}^{n}\int_a^b|f_k(x)-g_k(x)|dx<\varepsilon \text{ (ពិត)}$$

5.27. តាង E ជាសំណុំវាស់បានដែលផ្ទុកក្នុង $I=[a,b]$ ហើយសន្មតថា

$f(x)=\begin{cases}1 \text{ បើ } x\in E\\ 0 \text{ បើ } x\notin E\end{cases}$ ។ បង្ហាញថា បើ $\varepsilon>0$ នោះមានអនុគមន៍ជាប់ $g(x)$ កំណត់លើ I ដែល $\int_a^b|f(x)-g(x)|dx<\varepsilon$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយ E វាស់បាននោះមានសំណុំបើក $O\supset E$ ដែលបើ

$$\varepsilon_1>0,\ m(E)\le m(O)<m(E)+\varepsilon_1 \quad (1)$$

តាមទ្រឹស្តីបទ 1-19 ទំព័រទីពសំណុំ O អាចត្រូវបានបញ្ជាក់ជាប្រជុំរាប់បានដោយចន្លោះជាច់ I_k នោះ

$$m(O)=\sum_{k=1}^{\infty}m(I_k) \quad (2)$$

តាម (1) និង (2) យើងបាន $m(E)\le\sum_{k=1}^{n_0}m(I_k)+\sum_{k=n_0+1}^{\infty}m(I_k)<m(E)+\varepsilon_1$

ដោយស៊េរីរួមដែលយើងជ្រើស n_0 ធំយើងបាន

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty}m(I_k)<\varepsilon_1 \quad (3)$$

ហើយ

$$m(E)\le\sum_{k=1}^{n_0}m(I_k)<m(E)+\varepsilon_1 \quad (4)$$

ពិចារណាលើចន្លោះ $I_1, I_2, ..., I_{n_0}$ ហើយតាង $f_{n_0}(x) = \begin{cases} 1 \text{ បើ } x \in \bigcup_{k=1}^{n_0} I_k \\ 0 \text{ បើ } x \notin \bigcup_{k=1}^{n_0} I_k \end{cases}$

តាមលំហាត់ 5.26. មានអនុគមន៍ជាប់ $g(x)$ នោះ

$$\int_a^b \left| f_{n_0}(x) - g(x) \right| dx < \varepsilon_1 \qquad (5)$$

តាង $E_k = E \cap I_k,\ k = 1,2,....,$ នោះ $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ ។

បើ $k = 1,2,....,n_0$ ដោយ $I_k = (I_k - E_k) \cap E_k$,

$$\begin{aligned} \int_{I_k} \left| f(x) - f_{n_0}(x) \right| dx &= \int_{I_k - E_k} \left| f(x) - f_{n_0}(x) \right| dx + \int_{E_k} \left| f(x) - f_{n_0}(x) \right| dx \\ &= \int_{I_k - E_k} |0 - 1| dx + \int_{E_k} |1 - 1| dx \\ &= \int_{I_k - E_k} dx = m(I_k - E_k) = m(I_k) - m(E_k) \end{aligned}$$

បើ $k = n_0 + 1,\ n_0 + 2, ...,$ នោះ $f_{n_0}(x) = 0$

សម្រាប់ $x \in \bigcup_{k=n_0+1}^{\infty} I_k,\ \int_{I_k} \left| f(x) - f_{n_0}(x) \right| dx = \int_{I_k} \left| f(x) \right| dx \le \int_{I_k} dx = m(I_k)$

តាម (3) និង (4) យើងបាន

$$\begin{aligned} \int_a^b \left| f(x) - f_{n_0}(x) \right| dx &= \sum_{k=1}^{n_0} \int_{I_k} \left| f(x) - f_{n_0}(x) \right| dx + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \int_{I_k} \left| f(x) - f_{n_0}(x) \right| dx \\ &\le \sum_{k=1}^{n_0} \left[m(I_k) - m(E_k) \right] + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} m(I_k) \\ &= \left[\sum_{k=1}^{n_0} m(I_k) - m(E) \right] + \left[m(E) - \sum_{k=1}^{n_0} m(E_k) \right] + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} m(I_k) \\ &= \left[\sum_{k=1}^{n_0} m(I_k) - m(E) \right] + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} m(E_k) + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} m(I_k) \\ &\le \sum_{k=1}^{n_0} m(I_k) - m(E) + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} m(I_k) + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} m(I_k) \\ &\le \varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = 3\varepsilon_1 \end{aligned}$$

តាម (5) យើងបាន

$$\begin{aligned} \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx &\le \int_a^b \left| f(x) - f_{n_0}(x) \right| dx + \int_a^b \left| f_{n_0}(x) - g(x) \right| dx \\ &< 3\varepsilon_1 + \varepsilon_1 = 4\varepsilon_1,\ \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{4} \text{ (ពិត)} \end{aligned}$$

5.28. តាង $E_k,\ k = 1,2,....,n,$ ដែល n ជាសំណុំដាច់វាស់បានផ្ទុកក្នុង $I = [a,b]$ ។

កំណត់ $f_k(x) = \begin{cases} 1 \text{ បើ } x \in E_k \\ 0 \text{ បើ } x \notin E_k \end{cases}$ ហើយ $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(x)$ ដែល α_k ថេរ ។ បង្ហាញថា បើ

$\varepsilon > 0$ នោះមានអនុគមន៍ជាប់ $g(x)$ កំណត់លើ I ដែល $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx < \varepsilon$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមលំហាត់ 5.27. បើ $\varepsilon_1 > 0$ យើងអាចរកអនុគមន៍ជាប់ $g_k(x)$ នោះ

$$\int_a^b |f_k(x)-g_k(x)|dx < \varepsilon_1,\ k=1,2,....,n$$

កំណត់ $g(x)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k g_k(x)$ នោះ

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|dx = \int_a^b \left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\left[f_k(x)-g_k(x)\right]\right|dx$$

$$\le \sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|\int_a^b |f_k(x)-g_k(x)|dx < \varepsilon_1\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|$$

យក $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|}$ យើងបាន $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx < \varepsilon$ ។

5.29. តាង $f(x)$ ទាល់និងវាស់បានហើយមានអាំងតេក្រាលក្នុង $I=[a,b]$ បង្ហាញថាបើ $\varepsilon > 0$ នោះមានអនុគមន៍ជាប់ $g(x)$ កំណត់លើ I ដែល $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx < \varepsilon$ ។

ដំណោះស្រាយ

ជ្រើសចំណុចចំណែកតូចៗ

$$\alpha = y_0 < y_1 < ... < y_{n-1} < y_n = \beta$$

សន្មតថាតម្លៃធំបំផុតដោយ $y_k - y_{k-1}$ ត្រូវបានកំណត់ δ យក

$$E_k = \{x : y_{k-1} \le f(x) < y_k\},\ k=1,2,....,n$$

សំណុំទាំងនេះវាស់បានដោយ $f(x)$ វាស់បាន

យក $h_k(x) = \begin{cases} 1 \text{ បើ } x \in E_k \\ 0 \text{ បើ } x \notin E_k \end{cases}$ ហើយកំណត់ $h(x)=\sum_{k=1}^{n} y_{k-1}h_k(x)$ នោះ $h(x)=y_{k-1}$ សម្រាប់ $x\in E_k$

តាមលំហាត់ 5.28. បើ $\varepsilon_1 > 0$ មានអនុគមន៍ជាប់ $g(x)$ លើ I ដែល

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|dx < \varepsilon_1$$

យក δ ជាបរិមាណធំបំផុតដោយ $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$ យើងបាន

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|dx \le \int_a^b |f(x)-h(x)|dx + \int_a^b |h(x)-g(x)|dx$$

$$< \sum_{k=1}^{n}\int_{E_k}|f(x)-h(x)|dx + \varepsilon_1 \le \sum_{k=1}^{n}\int_{E_k}\delta dx + \varepsilon_1$$

$\le \delta(b-a)+\varepsilon_1 < \varepsilon$ បើយើងជ្រើស $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2}$ ហើយ $\delta < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ (ពិត)

5.30. តាង $f(x)$ មិនទាល់ហើយមានអាំងតេក្រាលក្នុង $I=[a,b]$ ។ បង្ហាញថា បើ $\varepsilon > 0$ នោះមានអនុគមន៍ជាប់ $g(x)$ កំណត់លើ I ដែល $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx < \varepsilon$

ដំណោះស្រាយ

តាង $f_1(x)=\begin{cases} f(x) & \text{បើ } f(x)\ge 0\\ 0 & \text{បើ } f(x)\le 0\end{cases}$, $f_2(x)=\begin{cases} 0 & \text{បើ } f(x)\ge 0\\ -f(x) & \text{បើ } f(x)\le 0\end{cases}$

យើងបាន $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$ ហើយ $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f_1(x)dx-\int_a^b f_2(x)dx$

កំណត់ $F_1(x)=\begin{cases} f_1(x) & \text{បើ } f_1(x)\le n\\ n & \text{បើ } f_1(x)>n\end{cases}$, $F_2(x)=\begin{cases} f_2(x) & \text{បើ } f_2(x)\le n\\ n & \text{បើ } f_2(x)>n\end{cases}$

ហើយ $F_1(x)$ និង $F_2(x)$ ជាប់និងវាស់បានក្នុង $[a,b]$ ។ តាមលំហាត់ 5.29. ថា បើ $\varepsilon_1>0$ នោះមានអនុគមន៍ជាប់ $g_1(x)$ និង $g_2(x)$ នោះ

$$\int_a^b\left|F_1(x)-g_1(x)\right|dx<\varepsilon_1\ ,\ \int_a^b\left|F_2(x)-g_2(x)\right|dx<\varepsilon_1$$

យើងអាចជ្រើសយក n ជាចំនួនធំនោះ

$$\int_a^b\left|f_1(x)-F_1(x)\right|dx<\varepsilon_1\ ,\ \int_a^b\left|f_2(x)-F_2(x)\right|dx<\varepsilon_1$$

បើយើងបង្ហាញ $g(x)=g_1(x)-g_2(x)$ នោះ

$$\begin{aligned}\left|f(x)-g(x)\right|&=\left|f_1(x)-f_2(x)-g_1(x)+g_2(x)\right|\\ &\le\left|f_1(x)-F_1(x)+F_1(x)-g_1(x)\right|+\left|f_2(x)-F_2(x)+F_2(x)-g_2(x)\right|\\ &\le\left|f_1(x)-F_1(x)\right|+\left|F_1(x)-g_1(x)\right|+\left|f_2(x)-F_2(x)\right|+\left|F_2(x)-g_2(x)\right|\end{aligned}$$

យើងបាន $\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|dx\le\int_a^b\left|f_1(x)-F_1(x)\right|dx+\int_a^b\left|F_1(x)-g_1(x)\right|dx$

$$+\int_a^b\left|f_2(x)-F_2(x)\right|dx+\int_a^b\left|F_2(x)-g_2(x)\right|dx$$

$$<\varepsilon_1+\varepsilon_1+\varepsilon_1+\varepsilon_1=4\varepsilon_1,\ \varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{4}\ (\text{ពិត})$$

5.31. បង្ហាញទ្រឹស្តីបទ 5-23 ៖ បើ $f(x)$ មានអាំងតេក្រាលក្នុង $[a,b]$ នោះ $\lim\limits_{h\to 0}\int_a^b\left|f(x+h)-f(x)\right|dx=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាងចន្លោះ $[a,b]$ បិតជិតក្នុងចន្លោះ $[c,d]$ ដូចក្នុងរូប ហើយសន្មតថា $f(x)$ ត្រូវបានពង្រីក ដើម្បីឱ្យមានអាំងតេក្រាលក្នុង $[c,a]$ និង $[b,d]$ ។

តាមលំហាត់ 5.30. មានអនុគមន៍ជាប់ $g(x)$ លើ$[c,d]$ នោះបើ

$$\varepsilon_1>0,\ \int_c^d\left|f(x)-g(x)\right|dx<\varepsilon_1$$

ដោយ $g(x)$ ជាប់លើ $[c,d]$ គ្រប់ $\varepsilon_1>0$ មាន $\delta>0$ មួយ

នោះគ្រប់ $x\in[a,b],\ \left|g(x+h)-g(x)\right|<\dfrac{\varepsilon_1}{b-a}$ លុះត្រា $|h|<\delta$

ដែលយើងអាចសន្មតថា $|h|$ តូចជាងអប្បបរមាដោយ $a-c$ និង $d-b$ យើងបាន

$$\int_a^b\left|g(x+h)-g(x)\right|dx\le\int_a^b\frac{\varepsilon_1}{b-a}dx=\varepsilon_1$$

$$f(x+h)-f(x)=[f(x+h)-g(x+h)]+[g(x+h)-g(x)]+[g(x)-f(x)]$$

$$|f(x+h)-f(x)|\le|f(x+h)-g(x+h)|+|g(x+h)-g(x)|+|f(x)-g(x)|$$

សម្រាប់ $|h|<\delta$ យើងបាន

$$\int_a^b|f(x+h)-f(x)|dx\le\int_a^b|f(x+h)-g(x+h)|dx+\int_a^b|g(x+h)-g(x)|dx$$

$$+\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$$

$$=\int_{a+h}^{b+h}|f(x)-g(x)|dx+\int_a^b|g(x+h)-g(x)|dx+\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$$

$$\le\int_c^d|f(x)-g(x)|dx+\int_a^b|g(x+h)-g(x)|dx+\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$$

$$<\varepsilon_1+\varepsilon_1+\varepsilon_1=3\varepsilon_1$$

យក $\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{3}$ សម្រាប់ $|h|<\delta$ យើងបាន $\int_a^b|f(x+h)-f(x)|dx<\varepsilon$

ដូចនេះ $\lim\limits_{h\to0}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|dx=0$ ។

អាំងតេក្រាលឡឺបេសលើសំណុំមិនទាល់

5.32. បង្ហាញថាបើ $f(x)$ វាស់បានលើសំណុំមិនទាល់ E នោះ

$$\left|\int_E f(x)dx\right|\le\int_E|f(x)|dx$$

ដំណោះស្រាយ

តាមលំហាត់5.19.យើងបាន

$\left|\int_{E\cap[a,b]}f(x)dx\right|\le\int_{E\cap[a,b]}|f(x)|dx$ ដែល $a\to-\infty$ ហើយ $b\to\infty$ ។

មេរៀនទី៦៖ អាំងតេក្រាល និងឌីផេរ៉ង់ស្យែល

៦.១. អាំងតេក្រាលមិនកំណត់

៦.១.១. និយមន័យ

បើ $f(x)$ គឺជាអាំងតេក្រាល នោះ

$$F(x)=\int_a^x f(u)du \qquad (1)$$

អាំងតេក្រាលមិនកំណត់មួយ ឬសង្ខេបដោយអាំងតេក្រាលដោយ $f(x)$។ កំណត់ចំណាំថា និម្មិតសញ្ញា u គឺត្រូវបានប្រើប្រាស់ដើម្បីជៀសវាងការភ័ន្តច្រឡំជាមួយអញ្ញាត x ក្នុងលីមីតគោលលើដោយអាំងតេក្រាល។ បើចំនួនថេរត្រូវបានបន្ថែមទៅអង្គខាងស្តាំ (1) លទ្ធផលគឺត្រូវបានហៅថាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់។

៦.១.២. ទ្រឹស្តីបទមួយចំនួនទាក់ទងនឹងអាំងតេក្រាលរីម៉ាន់មិនកំណត់

ប្រសិន (1) គឺជា អាំងតេក្រាលរីម៉ាន់ នោះយើងមានទ្រឹស្តីបទខាងក្រោមមួយចំនួនដូចជា

ទ្រឹស្តីបទ 6-1៖ បើ $f(x)$ កំណត់ និងជាអាំងតេក្រាលរីម៉ាន់ លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះ

$F(x)=\int_a^x f(u)du$ គឺជាប់ក្នុងចន្លោះ $[a,b]$។

ទ្រឹស្តីបទ 6-2៖ បើ $f(x)$ កំណត់ និងជាអាំងតេក្រាលរីម៉ាន់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះ

$F'(x)=\frac{d}{dx}F(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(u)du=f(x) \quad (2)$ គ្រប់ចំនុចដោយអនុគមន៍ជាប់ $f(x)$

ទ្រឹស្តីបទ 6-3៖ តាង $f(x)$ គឺជាអាំងតេក្រាលរីម៉ាន់លើ $[a,b]$ ហើយឧបមាថាមានអនុគមន៍ $F(x)$ មួយជាប់លើ $[a,b]$ ដែល $f(x)=F'(x)$។ ហើយ

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a) \qquad (3)$$

ឬ $$\int_a^x f(u)du=F(x)-F(a) \qquad (4)$$

វាគឺជាវត្ថុបំណងដោយមេរៀននេះដើម្បីរកពីទំនាក់ទំនងដោយភាពខុសគ្នា និងការឆ្លើយតបអាំងតេក្រាលទៅទ្រឹស្តីបទខាងលើក្នុងករណីអាំងតេក្រាលឡឺបេសមិនកំណត់ ។

៦.២. អនុគមន៍ម៉ូណូតូន

៦.២.១. និយមន័យ

អនុគមន៍ $f(x)$ ក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ គឺជាអនុគមន៍ម៉ូណូតូនកើនបើ $f(x_2)\ge f(x_1)$, $x_2>x_1$ និងជាអនុគមន៍ម៉ូណូតូនចុះបើ $f(x_2)\le f(x_1)$, $x_2>x_1$។ បើ $f(x)$ គឺជាអនុគមន៍ម៉ូណូតូនកើន ឬអនុគមន៍ម៉ូណូតូនចុះ វាត្រូវបានគេហៅថាអនុគមន៍ម៉ូណូតូន។

អនុគមន៍ $f(x)$ ត្រង់ x_0 គឺកំណត់ដោយ $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ ដែល

$f(x_0+0)=\lim_{h\to 0^+} f(x_0+h)$, $f(x_0-0)=\lim_{h\to 0^-} f(x_0+h)$។ បើ $f(x)$ គឺជាអនុគមន៍ម៉ូណូតូនកើន នោះគ្រប់ចំណុចគឺមិនអវិជ្ជមាន។ បើ $f(x)$ គឺជាអនុគមន៍ម៉ូតូនចុះនោះចំណុចគឺមិនវិជ្ជមាន។ បើ $f(x)$ គឺជាប់ត្រង់ x_0 នោះត្រង់ចំណុចត្រង់ x_0 គឺជាស្មើសូន្យ។ បើ $f(x)$ គឺជាអនុគមន៍ម៉ូណូតូនកើន នោះ $-f(x)$ គឺជាអនុគមន៍ចុះ និងជាអនុគមន៍ច្រាស។ ដោយសារតែលទ្ធផលមានលក្ខណៈសម្រាយបញ្ជាក់សម្រាប់អនុគមន៍ម៉ូណូតូនកើន នោះវាក៏ពិតសម្រាប់អនុគមន៍ម៉ូណូតូន។

៦.២.២. ទ្រឹស្តីបទមួយចំនួនលើអនុគមន៍ម៉ូណូតូន

ទ្រឹស្តីបទ6-4៖ បើ $f(x)$ គឺជាអនុគមន៍ម៉ូណូតូនកើនលើចន្លោះ $[a,b]$ នោះអាចមានចំនួនកំណត់មួយដោយភាពដាច់ដែលធំជាង $\varepsilon>0$។ លទ្ធផលស្រដៀងគ្នាគឺពិតសម្រាប់អនុគមន៍ចុះ។

ទ្រឹស្តីបទ6-5៖ បើ $f(x)$ គឺជាអនុគមន៍ម៉ូណូតូនកើន ឬម៉ូណូតូនចុះលើចន្លោះ $[a,b]$ នោះសំណុំដោយភាពដាច់ដោយ $f(x)$ អាចរាប់បាន។

៦.៣. អនុគមន៍ដោយបម្រែបម្រួលកំណត់

៦.៣.១. និយមន័យ

ឧបមាថា ចន្លោះ $[a,b]$ គឺត្រូវបានបែងចែកទៅជា n ចំណែកដោយប្រើប្រាស់ចំណុចដោយផលចែករង $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ ។ នោះគេអាចកំណត់ $f(x)$ គឺជាបម្រែបម្រួលកំណត់ក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ បើ

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_k-1)\right| \qquad (5)$$

គឺទាល់គ្រប់ចំណែកដែលអាចមាន ឬ ផលចែករង។ ផលបូក (5) ដោយគោលលើតូចបំផុតគ្រប់ផលចែករងដែលអាចមានហៅថា បម្រែបម្រួលសរុបដោយ $f(x)$ ក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ ហើយនឹងត្រូវបានកំណត់ដោយ $\upsilon_a^b(f)$ ឬ υ_a^b ។

៦.៣.២. ទ្រឹស្តីបទមួយចំនួនដោយបម្រែបម្រួលអនុគមន៍ទាល់

ទ្រឹស្តីបទ 6-6៖ អនុគមន៍ម៉ូណូតូនកើនមួយ ឬអនុគមន៍ម៉ូណូតូនចុះមួយលើចន្លោះ $[a,b]$ គឺជាបម្រែបម្រួលអនុគមន៍ទាល់លើចន្លោះ $[a,b]$។

ទ្រឹស្តីបទ 6-7៖ បើ $f(x)$ គឺប្រែប្រួលលើចន្លោះ $[a,b]$ នោះវាទាល់លើ $[a,b]$។

ទ្រឹស្តីបទ 6-8៖ បើ $f(x)$ និង $g(x)$ គឺជាបម្រែបម្រួលកំណត់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះ

$f(x)+g(x), f(x)-g(x), f(x)\cdot g(x)$ និង $f(x)/g(x)$ ដែល $g(x)\neq 0$ ។

ទ្រឹស្តីបទ 6-9៖ អនុគមន៍ $f(x)$ គឺមានបម្រែបម្រួលកំណត់ទាល់តែអាចបង្ហាញពីភាពខុសគ្នា $G(x)-H(x)$ ដោយអនុគមន៍ម៉ូណូតូកើនកំណត់ដោយ $H(x)$ និង $g(x)$។

ទ្រឹស្តីបទ 6-10៖ បើ $f(x)$ គឺប្រែប្រួលលើចន្លោះ $[a,b]$ នោះវាអាចមានសំណុំរាប់បានដោយអនុគមន៍លើចន្លោះ $[a,b]$ ហើយគ្រប់ចំណុច c ក្នុង (a,b) មាននៅលីមីតខាងស្តាំ និងខាងឆ្វេង

ដែល $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = f(c+0)$ និង $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = f(c-0)$។

ទ្រឹស្តីបទ 6-11៖ បើ $f(x)$ មានដេរីវេកំណត់ក្នុង $[a,b]$ នោះ $f(x)$ គឺជាបម្រែបម្រួលក្នុង $[a,b]$ ម្យ៉ាងវិញទៀត បើ $f(x)$ គឺជាអនុគមន៍ជាប់ក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ វាមិនមានបម្រែបម្រួលនោះទេ។

៦.៤. ដេរីវេដោយអនុគមន៍

៦.៤.១. និយមន័យ

ដេរីវេដោយអនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់ដោយ

$$Df(x) = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad (6)$$

ហើយវាអាចមានឬមិនមាន។ យើងធ្វើការកំណត់បរិមាណបួនគឺ

$$D^+ f(x) = \overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad (7)$$

$$D^- f(x) = \overline{\lim_{h\to 0^-}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad (8)$$

$$D_+ f(x) = \underline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad (9)$$

$$D_- f(x) = \underline{\lim_{h\to 0^-}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad (10)$$

ហៅថាដេរីវេដោយ $f(x)$ ដែលអាចកំណត់បានកំណត់វិជ្ជមាន ឬកំណត់អវិជ្ជមាន។

ករណី $D^+ f(x) = D_+ f(x)$ នោះ $f(x)$ មានដេរីវេនៅខាងស្តាំកំណត់ដោយ $f_+'(x)$។

ក្នុងករណី $D^- f(x) = D_- f(x)$ នោះ $f(x)$ មានដេរីវេនៅខាងឆ្វេងកំណត់ដោយ $f_-'(x)$។

ក្នុងករណី $D^+ f(x) = D_+ f(x) = D^- f(x) = D_- f(x)$។

នោះ $f(x)$ មានដេរីវេ $f'(x)$។ ច្រាសមកវិញបើ $f(x)$ មានដេរីវេ នោះគ្រប់លក្ខណៈដោយដេរីវេទាំងបួនស្មើគ្នា។

៦.៤.២. ដេរីវេដោយអនុគមន៍ដែលមានបម្រែបម្រួលកំណត់

ទ្រឹស្តីបទខាងក្រោមគឺមានសារៈសំខាន់

ទ្រឹស្តីបទ 6-12៖ បើអនុគមន៍មួយម៉ូណូតូន នោះវាមានដេរីវេគ្រប់ចំណុច។

ទ្រឹស្តីបទ 6-13៖ បើអនុគមន៍មួយមិនមានបម្រែបម្រួលកំណត់ នោះវាភាគច្រើនមានដេរីវេគ្រប់ទីកន្លែង។

ទ្រឹស្តីបទ 6-14៖ បើ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ គឺជាសេរីដោយអនុគមន៍ដោយបម្រែបម្រួលកំណត់ដែលរួមទៅ $s(x)$ ក្នុង $[a,b]$ នោះភាគច្រើនគ្រប់ផ្នែកនៅក្នុង $[a,b]$ ដែល $s'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$។

៦.៥. ភាពជាប់ដាច់ខាត

៦.៥.១. និយមន័យ

អនុគមន៍ $f(x)$ គឺត្រូវបានហៅថាអនុគមន៍ជាប់ដាច់ខាតក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ ប្រើ $\varepsilon > 0$ មាន $\delta > 0$ ដែល

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f\left(x_k + h_k\right) - f\left(x_k\right)\right| < \varepsilon \qquad (11)$$

គ្រប់សំណាត់កំណាត់នីមួយៗលលើចន្លោះ $\left(x_k, x_k + h_k\right)$ ដែល $\sum_{k=1}^{n}\left|h_k\right| < \delta$ ។

និយមន័យ គឺជួនកាលប្រើជាមួយ $x_k + h_k = x_{k+1}$ ដូចនេះ $h_k = x_{k+1} - x_k$ ។

៦.៥.២. ទ្រឹស្តីបទមួយចំនួននៅលើអនុគមន៍ជាប់

ទ្រឹស្តីបទ 6-15៖ អនុគមន៍ជាប់ទាំងស្រុងគឺជាអនុគមន៍ដែលជាប់ប៉ុន្តែរួម មិនកំណត់ថាពិត ។

ទ្រឹស្តីបទ 6-16៖ បើ $f(x)$ និង $g(x)$ គឺជាអនុគមន៍ជាប់នៅក្នុង $[a,b]$ នោះ $f(x)+g(x), f(x)-g(x), f(x)g(x)$ និង $f(x)/g(x)$ ក្នុងករណី $g(x)\neq 0$ ។

ទ្រឹស្តីបទ 6-17៖អនុគមន៍ជាប់ គឺមានបម្រែបម្រួលអថេរទាល់ប៉ុន្តែរួម មិនកំណត់ថាពិត ។

ទ្រឹស្តីបទ 6-18៖ អនុគមន៍ជាប់មានដេរីវេគ្រប់ចំណុចទាំងអស់ ។

ទ្រឹស្តីបទ 6-19៖ បើ $g(x)\neq 0$ ជាប់នៅក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ និង $f'(x)=0$ គ្រប់ចំណុចនៅក្នុង $[a,b]$ នោះ $f(x)$ ដាច់នៅក្នុង $[a,b]$ ។

ទ្រឹស្តីបទ 6-20៖ ដោយ $f(x)$ អនុគមន៍ជាប់និងកើនជានិច្ចនៅក្នុងចចន្លោះ $[a,b]$ (នោះ $f(x_k) > f(x_{k+1})$ សម្រាប់ $x_k > x_{k+1}$) នោះប្រសិន $g(u)$ គឺជាអនុគមន៍ជាប់នៅក្នុង $\left[f(a), f(b)\right]$, $g\left(f(x)\right)$ គឺជាបើជាប់ជានិច្ចនៅក្នុង $[a,b]$ ។

ដោយមានទំនាក់ទំនងជាមួយទ្រឹស្តីបទ 6-15 និង 6-17 ត្រូវចាំថាបើវាជាប់ហើយមានបម្រែបម្រួលទាល់ នោះវាមិនប្រាកដថាជាប់នោះទេ ។

៦.៦. ទ្រឹស្តីបទមួយចំនួននៅលើអាំងតេក្រាលឡឺបេសមិនកំណត់

ទ្រឹស្តីបទ 6-21៖ បើ $f(x)$ គឺជាអាំងតេក្រាលឡឺបេសនៅលើចន្លោះ $[a,b]$ នោះ $F(x)=\int_a^x f(u)du$ ជាជាប់និងមានបម្រែបម្រួលទាល់នៅក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ ។

ទ្រឹស្តីបទ 6-22៖ បើ $g(x)$ ជាអាំងតេក្រាលនៅលើ $[a,b]$ និង $\int_a^x g(u)du=0$ សម្រាប់ x នៅក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ នោះមាន $g(x)=0$ នៅគ្រប់ចំណុចទាំងអស់នៅក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ ។

ទ្រឹស្តីបទ 6-23៖ បើ $g(x)$ ជាប់និងជាអនុគមន៍ម៉ូណូតូនកើននៅក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ នោះ $g'(x)$ មានអាំងតេក្រាលនៅលើ $[a,b]$ និង $\int_a^b g'(x)dx \le g(b)-g(a)$ ឬជំនួស b ដោយ x ។

យើងបាន $\int_a^x g'(u)du \le g(x)-g(a)$ ។

ទ្រឹស្តីបទ 6-24៖ អនុគមន៍ $F(x)$ មួយគឺជាអនុគមន៍ដែលមានអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ កាលណាវាជាអនុគមន៍ជាប់ ។

ទ្រឹស្តីបទ 6-25៖ បើ $F(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ នោះ $F'(x)dx = F(b) - F(a)$

ឬជំនួស b ដោយ x យើងបាន $\int_a^b F'(u)du = F(x) - F(a)$

ទ្រឹស្តីបទ 6-26៖ បើ $F'(x)$ មាននៅក្នុងគ្រប់ចំណុចនៅក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ និងទាល់នោះ

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a) \text{ ឬ } \int_a^b F'(u)du = F(x) - F(a)$$

៦.៧. អាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

ទ្រឹស្តីបទ 6-27:៖ ដោយ $F(x)$ និង $G(x)$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដោយអាំងតេក្រាលដោយអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$ រៀងគ្នា។

នោះ $\int_a^b F(x)g(x)dx = F(x)G(x)|_a^b - \int_a^b f(x)G(x)dx$

$$= F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)dx$$

ទ្រឹស្តីបទ 6-28៖ ប្រសិនបើ $F(x)$ និង $G(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់នោះ

$$\int_a^b F(x)G'(x)dx = F(x)G(x)|_a^b - \int_a^b F'(x)G(x)dx$$

៦.៨. ការប្តូរអថេរ

ទ្រឹស្តីបទ 6-29៖ បើ $f(x)$ មានអាំងតេក្រាលនៅក្នុង $[a,b]$ និង $x = \Phi(u)$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដោយអនុ.មិនអវិជ្ជមាន $\Phi(u)$ នោះ

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\Phi(u))\Phi'(u)du = \int_\alpha^\beta f(\Phi(u))\Phi(u)du$$

ដែល α និង β គឺ $\Phi(\alpha) = a,\ \Phi(\beta) = b$ ។

៦.៩.ដោះស្រាយលំហាត់

អនុគមន៍ម៉ូណូតូន

6.1. ដោយ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ម៉ូណូតូនកើននៅក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ និង សន្មតថា ចំណុចដែលចែកដាច់គឺត្រូវបានរើសដោយ $a < x_1 < ... < x_{n-1} < b$។

សម្រាយបញ្ជាក់

$$f(a+0) - f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \left[f(x_k+0) - f(x_k-0) \right] + f(b) - f(b-0) \le f(b) - f(a)$$

6.2. សម្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ 6-4 ទំព័រ125 បើ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ម៉ូណូតូនកើននៅក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ នោះនឹងមានយ៉ាងច្រើនចំនួនដែលកំណត់ដោយការមិនបន្តជាមួយនឹងការហក់ដ៏ខ្ពស់មួយដែលតម្រូវឱ្យ ។

6.3. សម្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ6-5 ទំព័រ125 ប្រិនបើ ជាអនុគមន៍ម៉ូណូតូនកើន(ឬអនុគមន៍ម៉ូណូតូនចុះ) នៅក្នុងចន្លោះ នោះសំណុំដោយអនុគមន៍ $f(x)$ ដែលដាច់អាចជាការរាប់បញ្ចូល។

អនុគមន៍ដោយបម្រែបម្រួលអថេរ

6.4. សម្រាយបញ្ជាក់ថា (a) អនុគមន៍ម៉ូណូតូនកើន និង (b) អនុគមន៍ម៉ូណូតូនចុះនៅក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ មានបម្រែបម្រួលអថេរទាល់ ។

នោះយើងបានផលបូក

$$\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

គឺទាល់គ្រប់បំណែកដែលអាចទៅរួចដោយ $[a,b]$ នោះ $f(x)$ ជាអថេរទាល់ក្នុង $[a,b]$

(b) ក្នុងករណីនេះយើងមាន $f(x_k)\le f(x_{k-1})$ នោះ

$$\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|=\sum_{k=1}^{n}|f(x_{k-1})-f(x_k)|=f(a)-f(b)$$

ដូចនេះចម្លើយត្រូវការនឹងត្រូវបកស្រាយតាមផ្នែក(a) ។

6.5. ឧទាហរណ៍ដើម្បីបង្ហាញថាអនុគមន៍ជាប់ គឺមិនចាំបាច់ដោយអថេរទាល់។

ពិចារណា $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{បើ } 0<x\le\frac{2}{\pi} \\ 0 & \text{បើ } x=0\end{cases}$ និងអាចជ្រើសរើសបំណែកដោយចន្លោះ$[0,2/\pi]$

$$0,\frac{2}{(2n+1)\pi},\frac{2}{(2n)\pi},\frac{2}{(2n-1)\pi},\dots,\frac{2}{2\pi},\frac{2}{\pi}$$

ដែលយើងអាចសម្គាល់បានដោយ $x_0,x_1,\dots,x_{2n+1}$ នោះ

$$\sum_{k=1}^{2n}|f(x)-f(x_{k-1})|=\frac{2}{\pi}+\frac{2}{2\pi}+\frac{2}{3\pi}+\dots+\frac{2}{(2n+1)\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[1+\frac{2}{2}+\frac{2}{3}+\dots+\frac{2}{(2n+1)}\right]$$

ហើយផលបូកនេះក្លាយជាមិនកំណត់ដូច $n\to\infty$ នោះ $f(x)$ មិនអាចជាអថេរទាល់ក្នុងចន្លោះ $[0,2/\pi]$ ទោះបីយ៉ាងណាក៏ដោយ $f(x)$ គឺជាប់។

6.6. សម្រាយបញ្ជាក់ ទ្រឹស្តីបទ6-7,ទំព័រ125៖ បើ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ដោយអថេរទាល់ក្នុងចន្លោះ $[a,b]$,នោះវាទាល់ក្នុងចន្លោះ$[a,b]$ ។

ជ្រើសចំណុចរងដោយចន្លោះ$[a,b]$ ចំណុច a,x,b ដែល $a\le x\le b$ ។ដោយ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ដោយអថេរទាល់នោះមាន M ថេរដែល

$$|f(x)-f(a)|+|f(b)-f(x)|\le M$$

$$|f(x)-f(a)|\le M$$

នោះ $|f(x)|=|f(x)-f(a)+f(a)|\le|f(x)-f(a)+|f(a)|\le M+|f(a)|$

ឧទាហរណ៍ ៖ $f(x)$ ទាល់។

6.7. សម្រាយបញ្ជាក់ថាផលបូកដោយអនុគមន៍អថេរទាល់ពីរក៏ជាអថេរទាល់ $f(x)$ និង $g(x)$ ជាអនុគមន៍ហើយ $h(x)=f(x)+g(x)$ ។ ដោយ $f(x)$ និង $g(x)$ គឺជាអថេរទាល់មាន M_1,M_2 ថេរជាគ្រប់បំណែកដែលអាចទៅរួច

$$\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|\le M_1, \sum_{k=1}^{n}|g(x_k)-g(x_{k-1})|\le M_2$$

ដោយ $|h(x_k)-h(x_{k-1})|\le|f(x_k)-f(x_{k-1})|+|g(x_k)-g(x_{k-1})|$

យើងបាន

$$\sum_{k=1}^{n}|h(x_k)-h(x_{k-1})|\le\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})+\sum_{k=1}^{n}|g(x_k)-g(x_{k-1})|\le M_1+M_2$$

ដូចនេះ $h(x)=f(x)+g(x)$ ជាអនុគមន៍អថេរជាប់ ។

6.8. សម្រាយបញ្ជាក់ថាផលគុណដោយអនុគមន៍អថេរទាល់ពីរជាអថេរទាល់

យើងមាន

$$\begin{aligned}|f(x_k)g(x_k)-f(x_{k-1})g(x_{k-1})|&=|f(x_k)g(x_k)-f(x_{k-1})g(x_k)+f(x_{k-1})g(x_k)-f(x_{k-1})g(x_{k-1})\\&\le|g(x_k)||f(x_k)-f(x_{k-1})|+|f(x_{k-1})||g(x_k)-g(x_{k-1})\\&\le P|f(x_k)-f(x_{k-1})|+Q|g(x_k)-g(x_{k-1})\end{aligned}$$

ដែល P និង Q ទាល់លើដោយ $g(x)$ និង $f(x)$ ដែលមានក្នុងលំហាត់ 6.6។

នោះផលបូកពី $k=1$ ដល់ n យើងមាន

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)g(x_k)-f(x_{k-1})g(x_{k-1})|&\le P\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|+Q\sum_{k=1}^{n}|g(x_k)-g(x_{k-1})|\\&\le PM_1+QM_2\end{aligned}$$

ដែល $f(x)$ និង $g(x)$ គឺជាអថេរទាល់។ដូចនេះ $f(x)g(x)$ ក៏ជាអថេរទាល់។

6.9. $f(x)=G(x)-H(x)$ ដែល $G(x)$ និង $H(x)$ គឺទាល់ណិងម៉ូណូតូនកើនលើ $[a,b]$ សម្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x)$ ជាអថេរទាល់លើ $[a,b]$ ។

យើងមាន

$$\begin{aligned}|f(x_k)-f(x_{k-1})&=|[G(x_k)-H(x_k)]-[G(x_{k-1})-H(x_{k-1})]|\\&=|[G(x_k)-G(x_{k-1})]-[H(x_k)-H(x_{k-1})]|\\&\le|[G(x_k)-G(x_{k-1})]+[H(x_k)-H(x_{k-1})]|\\&=G(x_k)-G(x_{k-1})+H(x_k)-H(x_{k-1})\end{aligned}$$

ដែល $G(x_k)\ge G(x_{k-1}), H(x_k)\ge H(x_{k-1})$ នោះ

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|&\le\sum_{k=1}^{n}|G(x_k)-G(x_{k-1})|+\sum_{k=1}^{n}|H(x_k)-H(x_{k-1})|\\&=G(b)-G(a)+H(b)-H(a)\end{aligned}$$

ដូចនេះ ចម្លើយដែលត្រូវការនឹងត្រូវបកស្រាយតាមបែបនេះ។

យើងក៏អាចបកស្រាយលទ្ធផលបើ $G(x)$ និង $H(x)$ គឺទាល់និងម៉ូណូតូនកើន។

6.10. សម្រាយបញ្ជាក់ថាបើ $f(x)$ ជាអថេរទាល់លើ $[a,b]$ នោះ $f(x)$ អាចសរសេរជាឌីផេរ៉ង់ស្យែលដោយអនុគមន៍ម៉ូណូតូនកើនពីរ $G(x)$ និង $H(x)$ ។

ឧទាហរណ៍ $f(x)=G(x)-H(x)$

គេឱ្យ

$$V=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})| \tag{1}$$

ហើយ $f(x_k)-f(x_{k-1})$ ដោយ Δf យើងធ្វើផលបូក (1) ជាក្រុមដែល $\Delta f>0$ និង $\Delta f<0$ ។យើងអាចសរសេរ (1) ដូចជា

$$\begin{aligned}V&=\sum_{\Delta f>0}|\Delta f|+\sum_{\Delta f<0}|\Delta f|\\&=\sum_{\Delta f>0}\Delta f-\sum_{\Delta f<0}\Delta f\end{aligned}$$

នោះយើងមាន

$$V=P+N \tag{2}$$

ដែល

$$P=\sum_{\Delta f>0}\Delta f,\quad N=-\sum_{\Delta f<0}\Delta f \tag{3}$$

នោះ

$$P-N=\sum_{\Delta f>0}\Delta f+\sum_{\Delta f<0}\Delta f=\sum_{k=1}^{n}\left[f(x_k)-f(x_{k-1})\right]=f(b)-f(a) \tag{4}$$

តាម (2) និង (4) យើងរក

$$V=2P+f(a)+f(b),\ V=2N+f(b)-f(a) \tag{5}$$

v_a^b,p_a^b,n_a^b សម្គាល់ថា V,P,N ទាល់លើតូចបំផុតលើ $[a,b]$ ។ ហើយតាម (5)
យើងមាន

$$v_a^b=2p_a^b+f(a)-f(b),\qquad v_a^b=2n_a^b+f(b)-f(a) \tag{6}$$

លទ្ធផលនេះក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ ។ ឥលូវយើងពិចារណាលើចន្លោះ $[a,x]$ យើងមាន

$$v_a^b=2p_a^b+f(a)-f(x),\qquad v_a^b=2n_a^b+f(x)-f(a) \tag{7}$$

នោះដោះស្រាយ $f(x)$ ក្នុង (7) យើងរក

$$f(x)=f(a)+p_a^b-n_a^b$$

ដែល p_a^x និង n_a^b ជាអនុគមន៍ម៉ូណូតូនកើនដោយ x យើងអាចសរសេរ

$$G(x)=f(a)+p_a^b\ ,\quad H(x)=n_a^b$$

ដូចនេះ $\quad f(x)=G(x)-H(x)$

ដែល $G(x)$ និង $H(x)$ ជាម៉ូណូតូនកើន

v_a^b ជាអថេរសរុបដោយ $f(x)$ ក្នុង $[a,x]$, p_a^x អថេរវិជ្ជមានដោយ $f(x)$ ក្នុង $[a,x]$ និង n_a^b ជាអថេរអវិជ្ជមានដោយ $f(x)$ ក្នុង $[a,x]$ ។

ដេរីវេដោយអនុគមន៍ម៉ូណូតូន

6.11. $f(x)$ ជាអនុគមន៍ម៉ូណូតូនកើនលើ $[a,b]$, សម្រាយថា

$E=\{x:D^{+}f(x)>D_{+}f(x)\}$ មានរង្វាស់សូន្យ ។

ពិចារណាលើសំណុំ $E_{rs}=\{x:D_{+}f(x)<r<s<D^{+}f(x)\}$

ដែល s និង r ជាចំនួនសនិទាន ។ $E=\cup E_{rs}$ ដែលប្រជុំមានគ្រប់គូដោយចំនួនសនិទាន r,s ដែលចំនួនសនិទានអាចរាប់បាន ។ យើងមានលំហាត់ 2.4

$$m_e(E)\le\sum m_e(E_{rs})$$

ដែលផលបូកគ្រប់គូដោយចំនួនសនិទាន r,s ។

លទ្ធផលដែលត្រូវការគឺត្រូវបានសម្រាយបញ្ជាក់បើយើងអាចបង្ហាញថាគ្រប់គូដោយចំនួនសនិទានដែលស្រាយបានស្រាយ r,s យើងមាន $m_e(E_{rs})=0$ ។

ឱ្យ $m_e(E_{rs})=k$ ។ $\varepsilon>0$ មានសំណុំបើក $o\supset E$ នោះ $m_e(E_{rs})>m(O)-\varepsilon$,ឧបមាថា $m(O)<k+\varepsilon$ ។

ដោយ $D_{+}f(x)<r$ វាឆ្លើយតបរាល់ចំណុចដោយ E_{rs} មានចន្លោះ $[x,x+h]$ នៅក្នុង O ដែលប្រវែងតូចតាមអំពើចិត្តនោះ

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}<r \text{ ឬ } f(x+h)-f(x)<rh$$

តាមទ្រឹស្តីបទគម្របវិតាលី Vitali យើងអាចជ្រើសសំណុំមួយដោយ n ចន្លោះបិទ $I_k[x_k,x_k+h_k]$, $k=1,....,n$ ដែល $A=\bigcup_{k=1}^{n}I_k$,

$$m_e(E_{rs}-A)<e \qquad (1)$$

ធ្វើផលបូកលើចន្លោះនេះ យើងរក

$$\sum_{k=1}^{n}\left[f(x_k+h_k)-f(x_k)\right]<r\sum_{k=1}^{n}h_k\le rm(O)\le r(k+\varepsilon) \qquad (2)$$

ពិចារណាលើសំណុំ B រាល់ចំណុចដោយ $A=\bigcup_{k=1}^{n}I_k$ លើលែងចំណុចចុងបញ្ចប់ ។

ដែល $m_e(E_{rs}-B)=m_e(E_{es}-A)$ ធ្វើតាម(1)នោះ

$$m_e(E_{rs}-B)<\varepsilon \qquad (3)$$

សម្គាល់ C សំណុំរាល់ចំណុចដោយ E_{rs} និង B ឧបមាថា $C=E_{rs}\cap B$ ។ មានសំណុំមួយដោយចន្លោះ $[y,y+l]$ មានក្នុង B ដែលប្រវែងតូចតាមអំពើចិត្ត ។ យើងអាចមើលឃើញការពិតដែល $D^{+}f(x)>s$ យើងមានសំណុំទាំងអស់ដោយចន្លោះ

$$\frac{f(y+l)-f(y)}{l}>s \quad \text{ឬ} \quad f(f+l)-f(y)>sl \qquad (4)$$

ដោយសំណុំដោយចន្លោះក្នុង គម្របVitali ដោយC យើងអាចជ្រើសសំណុំដោយចន្លោះបិទ

$J_p = \left[y_p, y_p + l_p\right],\ p = 1,....,q$ ដែល(4) មាន

ឧបមាថា

$$f\left(y_p + l_p\right) - f\left(y_p\right) > sl_p,\ p = 1,....,q \qquad (5)$$

បើ $G = \bigcup_{p=1}^{q} J_p$,

$$m_e\left(C - G\right) < \varepsilon \qquad (6)$$

ធ្វើផលបូលអង្គទាំងពីរដោយ(5) ចាប់ពី $p = 1$ ដល់ q យើងបាន

$$\sum_{p=1}^{q}\left[f\left(y_p + l_p\right) - f\left(y_p\right)\right] > s\sum_{p=1}^{q} l_p \qquad (7)$$

ដោយ $f(x)$ ជាម៉ូណូតូនកើនហើយគ្រប់ចន្លោះ j_p មានចន្លោះចន្លុះមួយចំនួន I_k

យើងបាន

$$\sum_{p=1}^{q}\left[f\left(y_p + l_p\right) - f\left(y_p\right)\right] \le \sum_{k=1}^{n}\left[f\left(x_k + h_k\right) - f\left(x_k\right)\right] \qquad (8)$$

នោះតាម (2) និង (8)

$$s\sum_{p=1}^{q} l_p < \sum_{p=1}^{q} l\left[f\left(y_p + l_p\right) - f\left(y_p\right)\right] \le s\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(x_k + h_k\right) - f\left(x_k\right)\right] \le r\left(k + \varepsilon\right) \qquad (9)$$

ដោយ $\sum_{p=1}^{q} l_p = m\left(G\right)$ យើងអាចមើលឃើញពី (9) នោះ

$$m\left(G\right) \le \frac{r\left(k + e\right)}{s}$$

នោះ

$$\begin{aligned} k = m_e\left(E_{rs}\right) &\le m_e\left(E_{rs} \cap B\right) + m_e\left(E_{rs} \cap B\right) \\ &= m_e\left(C\right) + m_e\left(E_{rs} - B\right) \\ &= m_e\left(C\right) + e \\ &= m_e\left(C \cap G\right) + m_e\left(C - G\right) + e \\ &= m_e\left(G\right) + m_e\left(C - G\right) + e \\ &\le \frac{r\left(k + e\right)}{s} + 2e \end{aligned}$$

យើងបាន

$$0 \le k < \frac{\left(r + 2s\right)e}{s - r}$$

ដោយ ε អាចជាលេខតូចតាមអំពើចិត្ត , តាម $k = m_e\left(E_{rs}\right) = 0$ តាមការត្រូវការ ។

6.12. $f\left(x\right)$ ជា អនុគមន៍ម៉ូណូតូនកើនក្នុង $\left[a,b\right]$ សម្រាយបញ្ជាក់ថា

$S = \left\{x : D^{+} f\left(x\right) = \infty\right\}$ មានរង្វាស់សូន្យ ។

ឧបមាថាផ្ទុយ $m_e(S)=\lambda>0$ ។បើ k ជាចំនួនវិជ្ជមាន ,យើងអាចរកគ្រប់ $x\in S$ ជាសំណុំមួយដោយចន្លោះ $[x,x+h]$ ដូច

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}>K$$

តាម ទ្រឹស្តីបទគម្របVital's មានសំណុំបិទដោយចន្លោះ $I_k=[x_k,x_k+h_k], k=1,......,n$ នោះ

បើ $A=\bigcup_{k=1}^{n} I_k$,

$$m_e(S-A)<\varepsilon$$

សម្រាប់ចន្លោះដោយសំណុំនេះយើងមាន

$$\frac{f(x_k+h_k)-f(x_k)}{h_k}>k \text{ ឬ } h_k<\frac{f(x_k+h_k)-f(x_k)}{K}$$

ផលបូកពី $k=1$ដល់n យើងបាន

$$m_e(A)=\sum_{k=1}^{n}h_k<\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{n}\left[f(x_k+h_k)-f(x_k)\right]\le\frac{f(b)-f(a)}{K}$$

ដែលយើងធ្លាប់ប្រើថាការពិតដោយ $f(x)$ គឺជាម៉ូណូតូនកើននៅក្នុង $[a,b]$

ដូច្នេះ យើងអាចជ្រើសK ជាចំនួនធំ ដែល

$$m_e(A)<\varepsilon \qquad (2)$$

ហើយតាម (1)និង (2) យើងមាន

$$m_e(S)\le m_e(S-A)+m_e(A)<2\varepsilon$$

ដែល ε អាចជាចំនួនតូចតាមអំពើចិត្ត យើងបាន $m_e(S)=0$ ឬ$m(S)=0$ ។

6.13. សម្រាយបញ្ជាក់ថា អនុគមន៍ម៉ូណូតូនកើនមួយមានដេរីវេស្មើគ្រប់កន្លែង ។

ក្នុងលំហាត់ 6.11បានបង្ហាញថារង្វាស់ដោយសំណុំ$\{x:D_+f(x)<D^+f(x)\}$ គឺសូន្យ ។ ក្នុងលក្ខណៈដូចគ្នានេះយើងអាចបង្ហាញ[មើលលំហាត់6.55, 6.56, 6.57]ដែលគ្រប់រង្វាស់ដោយសំណុំផ្សេងទៀតដូចជា ៖

$$\{x:D_+f(x)=D^+f(x)\},\{x:D_f(x)<D^-f(x)\},\{x:D_f(x)<D^+f(x)\},\{x:D_+f(x)<D^-f(x)\}$$

ហើយបន្តវន្ទាត់ទៀតគឺស្មើសូន្យ ។

តាមលទ្ធផលនេះ យើងបាន

$$D_+f=D_f=D^+f=D^-f$$

ស្មើគ្រប់កន្លែង, ដូចនេះដេរីវេមានស្មើគ្រប់កន្លែង [ឧទាហរណ៍.កំណត់] ។

6.14. បង្ហាញថាអនុគមន៍ម៉ូណូតូនកើនមានដេរីវេគ្រប់ទីកន្លែង ។

បើ $f(x)$ ជាម៉ូណូតូនកើន,នោះ $-f(x)$ ជាម៉ូណូតូនកើន ។ ដោយ $Df(x)$ មានគ្រប់ស្មើទីកន្លែង ដូចនេះ $D[-f(x)]=-Df(x)$ ក៏មានស្មើគ្រប់ទីកន្លែង ។

6.15. បង្ហាញថាអនុគមន៍ដោយអថេរទាល់មានដេរីវេស្ទើគ្រប់ទីកន្លែង ។
តាមអនុគមន៍ដោយអថេរទាន់អាចសរសេរជាឌីផេរ៉ង់ស្យែលដោយអនុគមន៍ម៉ូណូតូនកើនពីរ ដោយលំហាត់ 6.13មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលស្ទើគ្រប់ទីកន្លែង ។

ជាប់ដាច់ខាត

6.16. បង្ហាញទ្រឹស្តីបទ6-15៖ អនុគមន៍ជាប់ដាច់ខាតជាអនុគមន៍ជាប់
បើ $f\left(x\right)$ ជាអនុមន៍ជាប់ដាច់ខាត, នោះឱ្យ $\varepsilon > 0$ យើងអាចរក $\delta > 0$ នោះ

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f\left(x_k + h_k\right) - f\left(x_k\right)\right| < \varepsilon \text{ ពេល } \sum_{k=1}^{n}\left|h_k\right| < \delta$$

យក $n = 1$ ជាករណីពិសេសយើងបាន

$$\left|f\left(x + h\right) - f\left(x\right)\right| < \varepsilon \text{ ពេល } \left|h\right| < \delta$$

ដូចនេះ $f\left(x\right)$ ជាប់ ។

6.17. បើ $f\left(x\right)$ និង $g\left(x\right)$ ជាប់ដាច់ខាត, បង្ហាញថា $f\left(x\right) + g\left(x\right)$ ជាប់ដាច់ខាត ។
ដោយ $f\left(x\right)$ និង $g\left(x\right)$ ជាប់ដាច់ខាត ,ឱ្យ $\varepsilon > 0$ មាន $\delta > 0$ នោះ

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f\left(x_k + h_k\right) - f\left(x_k\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ ពេល } \sum_{k=1}^{n}\left|h_k\right| < \delta$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left|g\left(x_k + h_k\right) - g\left(x_k\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ ពេល } \sum_{k=1}^{n}\left|h_k\right| < \delta$$

ដោយ

$$\begin{aligned}&\left|\left[f\left(x_k + h_k\right) + g\left(x_k + h_k\right)\right] - \left[f\left(x_k\right)g\left(x_k\right)\right]\right| \\ &\quad \le \left|f\left(x_k + h_k\right) - f\left(x_k\right)\right| + \left|g\left(x_k + h_k\right) - g\left(x_k\right)\right|\end{aligned}$$

យើងមាន $\sum\left|h_k\right| < \delta,$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\left|\left[f\left(x_k + h_k\right) + g\left(x_k + h_k\right)\right] - \left[f\left(x_k\right) + g\left(x_k\right)\right]\right| \\ &\le \sum_{k=1}^{n}\left|\left[f\left(x_k + h_k\right) - f\left(x_k\right)\right]\right| + \sum_{k=1}^{n}\left|\left[g\left(x_k + h_k\right) - g\left(x_k\right)\right]\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

ដែលសម្រាយបញ្ជាក់ចម្លើយដែលត្រូវការ ។

6.18. សម្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ6-17 ទំព័រ127៖ អនុគមន៍ជាប់ដាច់ខាតជាអថេរទាល់ ។
បើ $f\left(x\right)$ ជាប់ដាច់ខាត ,ឱ្យ $\varepsilon > 0$ មាន $\delta > 0$ នោះ

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f\left(x_k + h_k\right) - f\left(x_k\right)\right| < \varepsilon \text{ ពេល } \sum\left|h_k\right| < \delta$$

ប៉ុន្តែបញ្ជាក់ថា អថេរទាំងមូល នៅចន្លោះដោយរង្វាស់ δ មិនមាន ε លើស។ដូចនេះ បម្រែបម្រួលដោយអថេរទាំងមូលលើចន្លោះ $\left[a,b\right]$ ដែលជារង្វាស់ដោយ $b-a$ មិនមាន $\left(b-a\right)\varepsilon / \delta$ លើស។វាតាមអថេរទាំងមូលដោយ $f\left(x\right)$ ក្នុង $\left[a,b\right]$ គឺទាល់។ឧ. $f\left(x\right)$ ជាអថេរទាល់ ។

6.19. សម្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ6-18៖ អនុគមន៍ជាប់ដាច់ខាតមានដេរីវេស្ទើគ្រប់កន្លែង ។ ធ្វើតាមទ្រឹស្តីបទ6-17និងទ្រឹស្តីបទ6-13។

6.20. សម្រាយបញ្ជាក់ថាមានអនុគមន៍ជាប់ដែលមិនមែនជាអនុគមន៍ជាប់ដាច់ខាត។

បើអនុគមន៍ជាប់មួយជាអនុគមន៍ជាប់ដាច់ខាត, នោះដោយទ្រឹស្តីបទ6-18 វាមានដេរីវេស្ទើគ្រប់ទីកន្លែង។ ទោះបីជាយ៉ាងណាក៏ដោយ មានអនុគមន៍ជាប់ដែលគ្មានទីតាំងដេរីវេ។មើលឧទាហរណ៍ 6.66 ។ វាពិតទោះអនុគមន៍ជាប់ដែលជាអថេរទាល់ដែលមិនមែនជាអនុគមន៍ជាប់ដាច់ខាត ។

6.21. សម្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ 6-19៖ បើ $f(x)$ ជាប់ដាច់ខាតលើ $[a,b]$ និង $f'(x)=0$ ស្ទើគ្រប់ x លើ $[a,b]$ នោះ $f(x)$ ថេរលើ $[a,b]$ ។

សម្គាល់ E ជាសំណុំដែល $f'(x)=0$ ។ គ្រប់ $x\in E$ មានចន្លោះតូចមួយលើ $[x,x+h]$ ដែល $\left|\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|<\varepsilon$, ឧទាហរណ៍ $|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon h$ (1)

តាមទ្រឹស្តីបទVitali′sមានសំណុំកំណត់ដោយចន្លោះបិទ $I_k=[x_k,x_k+h_k],k=1,\dots\dots,n$ ដែលគ្រប E ហើយដូចនេះ $[a,b]$ លើកលែងសំណុំដោយរង្វាស់តិចជាង δ ។ យើងមាន

$$x_0=a\le x_1<x_1+h_1\le x_2<x_2+h_2\le\dots\dots\le x_n+h_n\le x_{n+1}=b$$

នោះ $f(b)-(a)=f(n+1)-f(x_n+h_n)+f(x_n+h_n)-f(x_n)+\dots+f(x_1+h_1)-f(x_1)+f(x_1)-f(x_0)$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left[f(x_{k+1})-f(x_k+h_k)\right]+\sum_{k=1}^{n}\left[f(x_k+h_k)-f(x_k)\right]$$

នោះ $|f(b)-f(a)|\le\sum_{k=0}^{n}\left|f(x_{k+1})-f(x_k+h_k)\right|+\sum_{k=1}^{n}\left|f(x_k+h_k)-f(x_k)\right|$ (2)

ដោយអនុគមន៍ជាប់ដាច់ខាតដោយ $f(x)$ យើងមាន

$\sum_{k=0}^{n}\left|f(x_{k+1})-f(x_k+h_k)\right|<\varepsilon_1$ សម្រាប់ $\left|x_{k+1}-(x_k+h_k)\right|<\delta$

តាម (1) យើងមាន

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f(x_k+h_k)-f(x_k)\right|\le\varepsilon\sum_{k=1}^{n}h_k\le\varepsilon(b-a)$$

នោះ (2) ប្រែជា $|f(b)-f(a)|\le\varepsilon(b-1)+\varepsilon_1$ ហើយដោយ ε និង ε_1 អាចធ្វើឱ្យតូចតាមអំពើរចិត្ត យើងមាន $f(b)=f(a)$ ។ស្រដៀងគ្នានេះ យើងអាចបង្ហាញថាមាន x ខ្លះនាំឱ្យ, $f(x)=f(a)$, ឧទាហរណ៍ $f(x)$ មានក្នុង $[a,b]$ ។

ទ្រឹស្តីបទអាំងតេក្រាលឡឺបេសមិនកំណត់

6.22. $f(x)$ ជាអាំងតេក្រាលឡឺបេសនៅលើ $[a,b]$ ។បើ $F(x)=\int_a^x f(u)\,du$ សម្រាយបញ្ជាក់ថា $F(x)$ ជាប់លើ $[a,b]$។

យើងមាន

$$F(x+h)-F(x)=\int_a^{x+h} f(u)du-\int_a^x f(u)du$$

$$\text{ឬ } (x+h)-F(x)=\int_a^{x+h} f(u)du$$

យើងប្រើប្រាស់ទ្រឹស្តីបទ5-15

$$\lim_{h\to 0}\left[F(x+h)-F(x)\right]=\lim_{h\to 0}\int_x^{x+h} f(u)du=0$$

នោះនាំឱ្យ $\lim_{h\to 0} F(x+h)=F(x)$ និង $F(x)$ ជាប់ ។

6.23. បើ $f(x)$ ជា អាំងតេក្រាលឡឺបេសនៅលើ $[a,b]$។សម្រាយបញ្ជាក់ថា៖

$$F(x)=\int_a^x f(u)du$$

ជាអថេរទាល់លើ$[a,b]$ ។

ការចែករង $[a,b]$ ប្រើចំណុចដោយផ្នែករង $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ នោះនាំឱ្យ

$$|F(x_k)-F(x_{k-1})|=|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(u)du|\leq \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(u)du$$

នោះផលបូកពី $k=1$ដល់ n យើងបាន

$$\sum_{k=1}^{n}\left|F(x_k)-F(x_{k-1})\right|\leq\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left|f(u)\right|du=\int_a^b\left|f(u)\right|du$$

ប៉ុន្តែដោយ $f(x)$អាចអាំងតេក្រាលបាន នោះកន្សោមទាំងមូលអាចគណនាអាំងតេក្រាលបាន ឧទាហរណ៍អាំងតេក្រាលចុងក្រោយគឺជាអាំងតេក្រាលកំណត់ហើយ $F(x)$ គឺអថេរទាល់ ។

សម្រាប់សម្រាយបញ្ជាក់ផ្សេងទៀតនៅក្នុងលំហាត់ 6.7 សម្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ 6-22 បើ $g(x)$ មាន អាំងតេក្រាលនៅលើចន្លោះ $[a,b]$ និង $\int_a^x g(u)du=0$ ចំពោះគ្រប់ x នៅក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ នោះ $g(x)=0$ សម្រាប់គ្រប់ទីតាំងនៅក្នុង $[a,b]$ ។

សន្មតថា $g(x)\neq 0$ នៅស្ទើតែគ្រប់ទីតាំងនៅក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ ។ នោះយើងមាន $g(x)>0$ ឬ $g(x)<0$ នៅលើសំណុំមួយចំនួននៅរង្វាស់ដែលធំជាងសូន្យ ។

ពិចារណាថា ក្នុងករណី $g(x)>0$ ដែលនៅលើសំណុំមួយចំនួនដោយរង្វាស់ដែលធំជាងសូន្យ ។ ជាក់ស្តែង $\int_a^x g(u)du=0$ ។

យើងឃើញថា អាំងតេក្រាលដោយ $g(x)$ នៅលើចន្លោះបើកមួយចំនួនគឺស្មើសូន្យ ។ បែបនេះ សំណុំបើក E អាចនិយាយបានថាបណ្តុំដោយចន្លោះបើកដែលរាប់បាន $E_1,E_2,\ldots$ ដែល $\int_{E_k} g(x)dx=0$ ។

យើងមាន $$\int_E g(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} g(x)dx=0$$

ដូចនេះ បើយើងសន្មតថា $g(x)>0$ នៅលើ E យើងនឹងបានទស្សនៈផ្ទុយដោយទ្រឹស្តីបទ 5.13 ដូចគ្នានេះដែរ បើ $g(x)<0$ យើងទាញបានភាពផ្ទុយ នោះ $g(x)=0$ ស្ទើតែគ្រប់ទីតាំង ។

6.25. សម្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ 6-23៖ បើ $g(x)$ ជាប់និងម៉ូណូតូនកើន នៅក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ នោះ $g'(x)$ មានអាំងតេក្រាលនិង

$$\int_a^b g'(x) \le g(b)-g(a)$$

ដែល $g(x)$ គឺជាស្វីតម៉ូណូតូនកើន យើងបានលំហាត់ 6.13

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x) \text{ កើតមាននៅស្ទើរគ្រប់ទីតាំង ។}$$

នោះ តាមទ្រឹស្តីបទFatou′s បង្កើតបាន

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{g(x+h)-g(x)}{h}dx \ge \int_a^b g'(x)dx$$

ប៉ុន្តែ នៅផ្នែកខាងឆ្វេងស្មើនឹង

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{h}\int_a^b g(x+h)dx-\frac{1}{h}\int_a^b g(x)dx\right\} &= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{h}\int_{a+h}^{b+h} g(x)dx-\frac{1}{h}\int_a^b g(x)dx\right\}\\ &= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{h}\int_{a+h}^{a} g(x)dx+\frac{1}{h}\int_b^{b+h} g(x)dx\right\}\\ &= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{h}\int_b^{b+h} g(x)dx-\frac{1}{h}\int_a^{a+h} g(x)dx\right\}\\ &= g(b)-g(a)\end{aligned}$$

ដូចនេះ ចម្លើយដែលត្រូវការនឹងត្រូវបកស្រាយតាមបែបនេះ ។

6.26. សម្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ 6-24៖ សម្រាប់ករណីដែល $f(x)$ ទាល់
បើ $f(x)$ ទាល់ ឧទាហរណ៍ $|f(x)|\le M$ នោះ

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\right|=\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(u)du\right|\le M$$

ឱ្យ $h\to 0$ យើងឃើញថាផ្នែកខាងឆ្វេងខិតទៅរក $F'(x)$ ស្ទើតែគ្រប់ទីតាំងដែល

$$|F'(x)|\le M$$

នោះ តាមរយៈទ្រឹស្តីបទដោយស៊េរីម៉ូកើន យើងបាន

$$\lim_{h\to 0}\int_a^x \frac{F(u+h)-F(u)}{h}du=\int_a^x F'(u)du \qquad (1)$$

នោះ

$$\begin{aligned}\int_a^x \frac{F(u+h)-F(u)}{h}du &= \frac{1}{h}\int_a^x F(u+h)du-\frac{1}{h}\int_a^x F(u)du\\ &= \frac{1}{h}\int_{a+h}^{x+h} F(u)du-\frac{1}{h}\int_a^x F(u)du\\ &= \frac{1}{h}\int_{a+h}^{a} F(u)du+\frac{1}{h}\int_a^x F(u)du+\frac{1}{h}\int_x^{x+h} F(u)du-\frac{1}{h}\int_a^x F(u)du\\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} F(u)du-\frac{1}{h}\int_a^{a+h} F(u)du\end{aligned}$$

ដូចនេះ $$\lim_{h\to 0}\int_a^x \frac{F(u+h)-F(u)}{h}du = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} F(u)du - \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^{a+h} F(u)du$$
$$= F(x) - F(a)$$

តាមដំណោះខាងលើនេះ យើងបាន

$$\int_a^x F'(u)du = F(x) - F(a) = \int_a^x f(u)du$$

នោះនាំឱ្យគ្រប់ x, $\Rightarrow \int_a^x [F'(u) - f(u)]du = 0$

នោះ តាមរយៈទ្រឹស្តីបទ 5-13 យើងបាន $F'(x) = f(x)$ ។

6.27. សម្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ 6-24 ទំព័រ127៖ សម្រាប់ករណីដែល $f(x)$ មានអាំងតេក្រាល ប៉ុន្តែមិនទាល់។ វាសំខាន់ណាស់ដែលត្រូវស្រាយថា $f(x) \geq 0$ ដែលវានឹងពិតទៅលើ $f^+(x)$ និង $f^-(x)$ និងអាចឈានទៅដល់ករណីដែល $f(x)$ មានសញ្ញាដោយចំនួនណាមួយដោយប្រើប្រាស់ ការពិតដែល $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$

យើងមាន $\left[f(x)\right]_p = \begin{cases} f(x) \text{ បើ } f(x) \leq p \\ p \text{ បើ } f(x) > p \end{cases}$

ដោយ $\left[f(x)\right]_p \leq f(x)$ នោះ $f(x) - \left[f(x)\right]_p \geq 0$,

យើងបាន $\int_a^x \left\{f(u) - \left[f(u)\right]_p\right\}du \geq 0$

នាំឱ្យ $\dfrac{d}{dx}\int_a^x \left\{f(u) - \left[f(u)\right]_p\right\} \geq 0$

ឬ $\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(u)du \geq \dfrac{d}{dx}\int_a^x \left[f(u)\right]_p du$

(ដោយ $\dfrac{d}{dx}F(x) = F'(x) \geq \left[f(x)\right]_p$)

យក $p \to \infty$ យើងបាន $F'(x) \geq f(x)$ នោះ អាំងតេក្រាលយើងមាន

$$\int_a^b F'(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (1)$$

ប៉ុន្តែតាមទ្រឹស្តីបទ ដែលជាលំហាត់ 6.25,

$$\int_a^b F'(x)dx \geq F(b) - F(a) \qquad (2)$$

តាម (1) និង (2) នោះ $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$

ដោយ $\int_a^b [F'(x) - f(x)]dx = 0$ ឬ ជំនួស b ដោយ x នោះ $\int_a^x [F'(u) - f(u)]dx = 0$

ដោយ គ្រប់ x នៅក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ ។ ដោយអាំងតេក្រាលមិនអវិជ្ជមាននោះវាគោរពតាមទ្រឹស្តីបទ 5-13 ដែល $F'(x) = f(x)$ ។

6.28. សម្រាយបញ្ជាក់ថា $F(x)$ មានអាំងតេក្រាលនោះវាជាប់

យើងមាន $F(x) = \int_a^x f(u)du$

នោះ $$F(x_k + h_k) - F(x_k) = \int_a^{x_k+h_k} f(u)du - \int_a^{x_k} f(u)du = \int_{x_k}^{x_k+h_k} f(u)du$$

ដូចនេះ $$\left|F(x_k + h_k) - F(x_k)\right| \leq \int_{x_k}^{x_k+h_k} \left|f(u)\right|du$$

បូកបន្តបន្ទាប់ចាប់ពី $k=1$ ដល់ n

$$\sum_{k=1}^{n}\left|F\left(x_k+h_k\right)-F\left(x_k\right)\right|\le\sum_{k=1}^{n}\int_{x_k}^{x_k+h_k}\left|f\left(u\right)\right|du=\int_E\left|f\left(u\right)\right|du$$

ដែល E គឺជាបណ្តុំដោយចន្លោះ $E_k=[x_k,x_k+h_k],\ k=1,2,...,n$ យើងអាចប្រើប្រាស់ ទ្រឹស្តីបទ 5-15 ដោយឱ្យ $\varepsilon>0$ ចំពោះ $\sum_{k=1}^{n}\left|F\left(x_k+h_k\right)-F\left(x_k\right)\right|<\varepsilon$ នៅពេលដែល $m(E)=\sum_{k=1}^{n}|h_k|<\varepsilon$

នោះ $F(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ ។

6.29. សម្រាយបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ $F(x)$ មានអាំងតេក្រាលបើវាជាប់ដោយ $F(x)$ ជាប់ នោះវាជាប់ដល់អថេរទាល់ដូចដែលលំហាត់ 6.16 – 6.18 នោះវាអនុគមន៍ជាប់ម៉ូណូតូនកើន $G(x)$ និង $H(x)$ គេសរសេរបាន $F(x)=G(x)-H(x)$

យើងមាន $F'(x)=G'(x)-H'(x)$

$G'(x)$ និង $H'(x)$ មានអាំងតេក្រាលនោះ $F'(x)$ ក៏មានអាំងតេក្រាលដែរ

នោះនាំឱ្យ $\int_a^x F'(u)du$ កើតឡើងពិតប្រាកដមែន ។ ប៉ុន្តែអាំងតេក្រាល (1) ជាប់ (លំហាត់ 6.28) នាំឱ្យ $g(x)=\int_a^x F'(u)du-F(x)$ ក៏ជាប់ដែរយើងទាញបាន

$$g'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x F'(u)du-F(x)=F'(x)-F'(x)=0$$

នោះ តាមគំរូ 6.21 ផ្ទុយ $g(x)=c$ និងតាម (2) វាក៏មានចម្លើយដូចគ្នាដែរ ដែល $c=-F(a)$ នោះ (2) អាចសរសេរបានថា $F(x)=\int_a^x F'(u)du+F(a)$

ដូចនេះ $F(x)$ មានអាំងតេក្រាល ។

6.30. សម្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ 6-25 ៖ បើ $F(x)$ ជាប់ នោះ

$$\int_a^b F'(x)dx=F(b)-F(a)$$

ដូចគ្នានឹងសមីការ (2) ដោយលំហាត់ 6.29 ដែរ នាំឱ្យ $\int_a^x F'(u)du=F(x)-F(a)$

នោះ បើ $x=b,\quad \int_a^b F'(u)du=\int_a^b F'(u)du=F(b)-F(a)$ ។

អាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

6.31. សម្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ 6-27៖ ឱ្យ $F(x)$ និង $G(x)$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដោយ អនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$ រៀងគ្នា ។

គេបាន $\int_a^b F(x)g(x)dx=F(x)G(x)|_a^b-\int_a^b f(x)G(x)dx$

ដោយ អនុគមន៍មួយមានអាំងតេក្រាល វាជាប់ (លំហាត់ 6.28) ដូចគ្នាដែរនឹង $F(x)G(x)$ ជាប់ (លំហាត់ 6.61) នោះ តាម លំហាត់ 6.29

$$\frac{d}{dx}\left[F(x)G(x)\right]=F'(x)G(x)+G'(x)F(x)=f(x)G(x)+F(x)g(x)\quad \text{ពិត}$$

តាមលំហាត់ 6.30៖ $\int_a^b\frac{d}{dx}\left[F(x)G(x)\right]dx=F(x)G(x)|_a^b$

នោះ $\int_a^b\left[f(x)G(x)+F(x)g(x)\right]dx=F(x)G(x)|_a^b$

ដូចនេះ $\int_a^b F(x)g(x)dx=F(x)G(x)|_a^b-\int_a^b f(x)G(x)dx$ ។

៦.១០.លំហាត់បន្ថែម

អនុគមន៍ម៉ូណូតូន និង អនុគមន៍ទាល់

6.32. សម្រាយបញ្ជាក់អំពីលទ្ធផលដែលបានបរិយាយនៅក្នុងលំហាត់ 6.1 បើ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ម៉ូណូតូនចុះក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ ។

6.33. សម្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ 6.4សម្រាប់ករណីដែល $f(x)$ ជាអនុគមន៍ម៉ូណូតូនចុះក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ ។

6.34. សម្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ 6-5 សម្រាប់ករណីដែល $f(x)$ ជាអនុគមន៍ម៉ូណូតូនចុះ

6.35. បើ $f(x)$ និង $g(x)$ ជាអនុគមន៍ម៉ូណូតូនកើន ក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ កំណត់អនុគមន៍ទាំងឡាយណាដែលជាអនុគមន៍ម៉ូណូតូនកើនដែរនៅក្នុងចន្លោះ $[a,b]$

$(a)\ f(x)+g(x)$

$(b)\ f(x)-g(x)$

$(c)\ f(x)g(x)$

$(d)\ f(x)/g(x),\ g(x)\neq 0$

6.36. ធ្វើការលើលំហាត់ 6.35 បើ

(a) $f(x)$ និង $g(x)$ ជាអនុគមន៍ម៉ូណូតូនចុះ

(b) $f(x)$ ជាអនុគមន៍ម៉ូណូតូនកើន ប៉ុន្តែ $g(x)$ ជាអនុគមន៍ម៉ូណូតូនចុះ ។

6.37. សម្រាយបញ្ជាក់អំពីភាពខុសគ្នារវាងអនុគមន៍ទាល់ទាំងពីរ ។

6.39. ពិភាក្សាលើលំហាត់ 6.9បើ $G(x)$ និង $H(x)$ ជាអនុ.ទាល់ និង ម៉ូណូតូនចុះក្នុងចន្លោះ $[a,b]$

6.40. តើលទ្ធផលរបស់លំហាត់ 6.9 និង 6.39 មានសុពលភាពឬទេបើពាក្យ ទាល់ ត្រូវបានកាត់ចេញ ។ ចូរពន្យល់ ។

6.41. តើការបរិយាយដោយទ្រឹស្តីបទ 6.7 ពិតឬទេ? ចូរពន្យល់ ។

6.42. បើ $f(x)$ និង $g(x)$ ជាអថេរទាល់។ សម្រាយបញ្ជាក់ថា (a) $f(x)-g(x)$ និង (b) $f(x)/g(x),\ g(x)\neq 0$ ក៏ជាអថេរទាល់ដែរ ។ (អាចចាប់ផ្តើមដោះស្រាយពី៖ សម្រាប់ (b) ដំបូងបង្ហាញថា $1/g(x),\ g(x)\neq 0$ គឺជាអថេរទាល់)

6.43. បង្ហាញថា $f(x)=x^4-3x^3+2x^2-5x-6$ គឺជាអនុគមន៍ទាល់នៅក្នុង

ក. នៅក្នុងចន្លោះ $[1,2]$

ខ. នៅក្នុងចន្លោះ $[-3,3]$

គ. ចន្លោះដែលអាចរាប់បាន ។

6.44. បង្ហាញថាអនុគមន៍ពហុធាគឺជាអនុ. ទាល់នៅគ្រប់ចន្លោះទាំងអស់ ។

6.45. បង្ហាញថា $f(x)=\begin{cases}\cos x & \text{បើ}\ 0\le x\le\pi\\ \sin x & \text{បើ}\ \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$ ជាអនុគមន៍ទាល់ក្នុងចន្លោះ $[0,2\pi]$ ។

6.46. បង្ហាញថា $f\left(x\right)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \text{បើ } x\neq 0 \\ 0 & \text{បើ } x=0 \end{cases}$ ជាអនុគមន៍ទាល់ក្នុងចន្លោះ $\left[0,\frac{2}{\pi}\right]$ ។

6.47. សម្រាយបញ្ជាក់ ទ្រឹស្តីបទ 6-10 ។

6.48. បើ $f(x)$ កំណត់ក្នុង $[a.b]$ តាមលក្ខខណ្ឌ $\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|\leq K\left|x_1-x_2\right|$ ដែល K ជាប់ ។ បង្ហាញថា $f(x)$ គឺជាអនុ.ទាល់ក្នុងចន្លោះ$[a.b]$ ។

6.49. សម្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ 6-11 (ប្រើច្បាប់ដោយមធ្យម) ។

6.50. បើ $f(x)$ ជាអនុ.ទាល់និងជាប់ ត្រង់ $x=x_0$ ។ បង្ហាញថា υ_a^x ផលបូកដោយអថេរ ក៏ជាប់ត្រង់ x_0 ដែរ ។

6.51. សម្រាយបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ជាប់មួយហើយមានបម្រែបម្រួលទាល់បើវាអាចញែកបានថាជាពីរអនុគមន៍ជាប់ម៉ូណូតូនកើន (ឬអនុគមន៍ជាប់ម៉ូណូតូនចុះ) ។

6.52. សម្រាយបញ្ជាក់ថា $\upsilon_a^b=\upsilon_a^c+\upsilon_c^b$ ដែល c គឺជាចំណុចមួយនៅក្នុង $[a,b]$ ។ ដេរីវេ និងអនុគមន៍ដែលមានដេរីវេ

6.53. គេមាន $f\left(x\right)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{បើ } x\neq 0 \\ 0 & \text{បើ } x=0 \end{cases}$ ។ សម្រាយបញ្ជាក់ថាត្រង់ $x=0$ ៖

ក. $D^+f\left(x\right)=1$

ខ. $D^-f\left(x\right)=1$

គ. $D_+f\left(x\right)=1$

ឃ. $D_-f\left(x\right)=1$

6.54. បង្ហាញថាបើ $D^+f(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=a$ នោះអនុគមន៍ $f(x)$មានដេរីវេត្រង់ $x=a$ ។ តើលទ្ធផលដែលទទួលបាននេះពិតដែរឬទេបើមួយនៅក្នុងចំណោមដេរីវេទាំងអស់ត្រូវបានប្រើ ។ ចូរបកស្រាយ ។

6.55. គេមាន $f(x)$ ជាអនុគមន៍ម៉ូណូតូនកើននៅក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ ។ សម្រាយបញ្ជាក់ថានៅក្នុងសំណើ

ក. $\left\{x:D_+f\left(x\right)<D^-f\left(x\right)\right\}$

ខ. $\left\{x:D_-f\left(x\right)<D^-f\left(x\right)\right\}$

គ. $\left\{x:D_-f\left(x\right)<D^+f\left(x\right)\right\}$ មានរង្វាស់សូន្យ ។

6.56. គេមាន $f(x)$ ជាអនុគមន៍ម៉ូណូតូនកើននៅក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ ។ សម្រាយបញ្ជាក់ថានៅក្នុងសំណើ

ក. $\left\{x:D_+f\left(x\right)<D^+f\left(x\right)\right\}$

ខ. $\left\{x:D_-f\left(x\right)<D^-f\left(x\right)\right\}$

គ. $\{x: D_{+}f(x) < D_{-}f(x)\}$ មានរង្វាស់សូន្យ ។

6.57. សម្រាយបញ្ជាក់ថា $\{x: D_{-}f(x) = -\infty\}$ មានរង្វាស់សូន្យបើសិនជាអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ម៉ូណូតូនកើននៅក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ ។

6.58. តើលទ្ធផលដោយលំហាត់ 6.55, 6.56 និង 6.57 នៅតែពិតដែរឬទេបើ $f(x)$ ជា

ក. ម៉ូណូតូនកើន ខ. កើនជានិច្ច

ចូរបកស្រាយៈ

6.59. សម្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ 6-14 (សេចក្តីណែនាំៈ ត្រូវស្រាយទ្រឹស្តីបទដោយអនុគមន៍ម៉ូណូតូនកើនជាមុនសិន) ។

អនុគមន៍ជាប់

6.60. សម្រាយបញ្ជាក់ថា

(a) $f(x) = x^2$ ជាប់នៅក្នុង $[0,1]$ និង

(b) អនុគមន៍ពហុធាមួយចំនួនជាប់នៅក្នុងចន្លោះបិទដែលរាប់បាន ។

6.61. ប្រសិន $f(x)$ និង $g(x)$ ជាប់នៅក្នុង $[a,b]$ ស្រាយថា (a) $f(x)-g(x)$

(b) $f(x)g(x)$ និង (c) $f(x)/g(x),\ g(x)\neq 0$ ក៏ជាប់នៅក្នុង $[a,b]$ ដែរ ។

6.62. បើ $f(x)$ និង $g(x)$ ជាប់នៅក្នុង $[a,b]$ និង $f'(x) = g'(x)$ នៅក្នុង $[a,b]$ សម្រាយបញ្ជាក់ថាបើ $f(x)$ និង $g(x)$ ស្មើគ្នានៅត្រង់ចំណុចណាមួយនៅក្នុង $[a,b]$ នោះវាជាអនុគមន៍ស្មើគ្នា ។

6.63. បើ $f(x)$ ជាប់នៅក្នុង $[a,b]$ សម្រាយបញ្ជាក់ថា $|f(x)|^p,\ p>0$ ក៏ជាប់នៅក្នុង $[a,b]$ ដែរ ។

6.64. បើ $f(x)$ មានដេរីវេ

ក) គ្រប់ទីតាំង

ខ) ស្ទើរតែគ្រប់ទីតាំង នៅក្នុង $[a,b]$ ។

តើវាជាប់ដែរឬទេ ?បង្ហាញអំណះអំណាងដោយចម្លើយរបស់អ្នកប្រៀបធៀបនឹងទ្រឹស្តីបទ6-18។

6.65. សម្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ 6-20 ។

6.66. គិតទៅលើអនុគមន៍ Weierstrass កំណត់ដោយ $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos\left(b^k{}_{\pi} x\right)$ ដែល $0<a<1$ និង $b>0$ គឺជាចំនួនគត់សេស

ក) សម្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x)$ ជាប់គ្រប់ទីតាំង

ខ) សរសេរស៊េរីដោយ $\left[f(x+h)-f(x)\right]/h$ ដែល $A_n + B_n$ ក្នុងនោះ A_n តាងដោយផលបូកដោយ ដំបូងដោយស៊េរី n ចំនួននិង B_n គឺជាចំនួនដែលនៅសល់បន្ទាប់ពី n សម្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \geq |B_n| - |A_n| \text{ ដែល } |A_n| < \frac{\pi a^n b^n}{ab-1},\quad |B_n| > \frac{2}{3}a^n b^n$$

គ) ប្រើចម្លើយដែលរកឃើញនៅ ខ) មកបង្ហាញថា បើ $ab > a + \frac{3\pi}{2}$ នោះ $f'(x)$ មិនអាចកើតឡើង នោះអាចបង្ហាញបានថា $f(x)$ ជាប់ ប៉ុន្តែគ្មានដេរីវេនោះទេ ។
ទ្រឹស្តីបទដោយអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

6.67. ត្រលប់ទៅមើលលំហាត់ 6.23 ដែលបង្ហាញថា $F(x) = \int_a^x f(u)du$ អាចញែកបានរវាងពីរអនុគមន៍ម៉ូណូតូនកើន ។

6.68. បើ $f(x)$ និង $g(x)$ ជាប់នៅក្នុង $[a,b]$ និង $\int_a^x f(u)du = \int_a^x g(u)du$ សម្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x) = g(x)$ គ្រប់ចំណុចទាំងអស់នៅក្នុង $[a,b]$ ។

6.69. សម្រាយបញ្ជាក់   ក) ទ្រឹស្តីបទ 6-26   ខ) ទ្រឹស្តីបទ 6-28

6.៧0. សម្រាយបញ្ជាក់ថាបើ $f'(x)$ មានអាំងតេក្រាលនៅក្នុង $[a,b]$ បើ $f(x)$ មានបម្រែបម្រួលទាល់ ។

6.71. បើ $f'(x)$ មានអាំងតេក្រាលនៅក្នុង $[a,b]$ និង $f(x)$ មានបម្រែបម្រួលទាល់ តើពិតដែរឬទេដែល $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$ ចូរបកស្រាយ ។

6.72. តើមានចម្លើយដែលគាំទ្រទៅនឹងទ្រឹស្តីបទ 6-23 សម្រាប់អនុគមន៍ម៉ូណូតូនចុះដែរឬទេ ? ចូរពន្យល់ ។

6.73. គេមាន $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x^2} & \text{បើ } 0 < x \le \sqrt{\frac{2}{\pi}} \\ 0 & \text{បើ } x = 0 \end{cases}$ ។ សម្រាយបញ្ជាក់

ក) $f'(x)$ កើតមានឡើងនៅក្នុង $\left[0, \sqrt{2/\pi}\right]$

ខ) $f'(x)$ គ្មានអាំងតេក្រាលនៅក្នុង $\left[0, \sqrt{2/\pi}\right]$ ពិភាក្សាលើទំនាក់ទំនងទាំងពីរខាងលើធៀបជាមួយនឹងទ្រឹស្តីបទ 6-26 ។

6.74. បើ $F(x) = \int_a^x f(u)du$ ដែល $f(x)$ មានអាំងតេក្រាលនៅលើ $[a,b]$ សម្រាយបញ្ជាក់ថាអថេរសរុបដោយ $F(x)$ នៅក្នុង $[a,b]$ គឺ $\int_a^b |f(u)|du$ ។

6.75. សម្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ 6-29 ។

6.76. ឧទាហរណ៍ជាលក្ខខណ្ឌដែលអាចឱ្យសរសេរបាន ៖
$\int_a^b f(x)dg(x) = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$

6.77. គេមាន $f'(x)$ កើតមានគ្រប់ទីតាំងនៅក្នុង $[a,b]$ និង ឧបមាថា $f'(x) = g(x)$ កើតមានឡើងស្ទើតែគ្រប់ទីតាំងនៅក្នុង $[a,b]$ ។ សម្រាយបញ្ជាក់ថា $f'(x) = g(x)$ កើតមានគ្រប់ទីតាំងនៅក្នុង $[a,b]$ បើ $g(x)$ ជាប់ស្ទើតែគ្រប់ទីតាំងនៅក្នុង $[a,b]$ ។

6.78. គេមាន $f(x)$ មានអាំងតេក្រាលនៅក្នុង $[a,b]$ និង $g(x) \ge 0$ ជាអនុគមន៍ម៉ូណូតូនកើន នៅក្នុង $[a,b]$ ។ សម្រាយបញ្ជាក់ថាមាន n ចំនួន នៅក្នុងដែល
$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b-0)\int_n^b f(x)dx$

6.79. បើ (6.78) $g(x)>0$ ជាអនុគមន៍ម៉ូណូតូនចុះស្រាយថា

$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a+0)\int_a^n f(x)dx$

6.80. បើ (6.79) $g(x)>0$ ជាអនុគមន៍ម៉ូណូតូន ស្រាយថា

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a+0)\int_a^n f(x)dx + g(b+0)\int_n^b f(x)dx$$

មេរៀនទី៧៖ ភាពរួមមធ្យម

៧.១. លំហ L^p

លំហនៃរាល់អនុគមន៍ $f(x)$ ដែល $\left|f(x)\right|^p$, $p \ge 1$ ជាអាំងតេក្រាលឡឺបេសលើចន្លោះ $[a,b]$

$$\int_a^b \left|f(x)\right|^p dx < \infty$$

តាងដោយ $L^p[a,b]$ ឬ L^p ប្រសិនបើមិនមានចន្លោះជាក់លាក់ ។ នៅក្នុងករណីនេះ $f(x) \in L^p$
បើ $p = 1$ គេតាង L^p ដោយ L ។

នៅក្នុងមេរៀននេះ យើងអាចប្រើចន្លោះ $[a,b]$ តែលទ្ធផលដែលទទួលបានអាចជាសំណុំអាចវាស់បាន E ជំនួសឱ្យ $[a,b]$ ។

៧.២. លំហ Hilbert

លំហ L^2 មានផ្ទុកនូវរាល់អនុគមន៍ $f(x)$ ដែល $\int_a^b \left|f(x)\right|^2 dx < \infty$ ហៅថាលំហHilbert ។
អនុគមន៍ស្ថិតនៅក្នុងលំហនេះ អាចហៅថា អាំងតេក្រាលការេ ។

៧.៣. វិសមភាពសំខាន់ៗ

ក. វិសមភាព Schwarz

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \left\{\int_a^b \left|f(x)\right|^2 dx\right\}^{1/2} \left\{\int_a^b \left|g(x)\right|^2 dx\right\}^{1/2}$$ ដែល $f(x) \in L^2$, $g(x) \in L^2$

សមភាពកើតមានលុះត្រាតែ $f(x)/g(x)$ ជាចំនួនថេរស្មើគ្រប់កន្លែង។

ខ. វិសមភាព Holder

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \left\{\int_a^b \left|f(x)\right|^p dx\right\}^{1/p} \left\{\int_a^b \left|g(x)\right|^q dx\right\}^{1/q}$$ ដែល $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p > 1$

និង $f(x) \in L^p$ និង $g(x) \in L^p$ ។

សមភាពកើតមានលុះត្រាតែ $\left|f(x)\right|^p / \left|g(x)\right|^q$ ជាចំនួនថេរស្មើគ្រប់កន្លែង។

ចំពោះ $p = 2$ និង $q = 2$ វិសមភាពនេះ សម្រួលទៅជា វិសមភាពSchwarz ។

គ. វិសមភាព Minkowski

$$\int_a^b \left|f(x) + g(x)\right|^p dx \le \left\{\int_a^b \left|f(x)\right|^p dx\right\}^{1/p} + \left\{\int_a^b \left|g(x)\right|^p dx\right\}^{1/p}$$ ដែល $p \ge 1$

សមភាពកើតមាន បើ $f(x)/g(x)$ ជាចំនួនថេរស្មើគ្រប់កន្លែង។

វិសមភាពដូចគ្នានេះកើតមាន នៅពេលគេប្រើផលបូកនៃចំនួនពិតនៅក្នុងអាំងតេក្រាល ។

៧.៤. លំហ L^p ជាលំហមេទ្រិក

បើយើងកំណត់ចម្ងាយរវាងអនុគមន៍ពីរ $f(x)$ និង $g(x)$ នៅក្នុង L^p ហៅណមក្នុងលំហ L^p
កំណត់ដោយ $$D(f,g) = \|f - g\| = \left\{\int_a^b \left|f(x) - g(x)\right|^p dx\right\}^{1/p}$$

បន្ទាប់មកយើងអាចបង្ហាញថា L^p ជាលំហមេទ្រិក ។

ចំពោះវិសមភាពត្រីកោណ មានជាតុ $f(x), g(x)$ និង $h(x)$ នៅក្នុង L^p កំណត់ដោយ

$$\|f-g\| \le \|f-h\| + \|h-g\|$$

និង ជាលទ្ធផលនៃវិសមភាពMinkowski ។

អនុគមន៍ត្រូវបានហៅថាជា សំណុំចំណុចនៃលំហ ។ ដោយសារតែអនុគមន៍ពីរដែលស្មើគ្នាស្មើគ្រប់កន្លែង

គឺមានចម្ងាយរវាងគ្នាស្មើសូន្យ នោះយើងសន្មតបានថាអនុគមន៍ទាំងពីរនោះតំណាងឱ្យចំណុចដូចគ្នានៅក្នុងលំហ ។ នៅពេលវាចាំបាច់ក្នុងការកំណត់លំហឱ្យបានជាក់លាក់ យើងត្រូវសរសេរ $\|f-g\|_p$ ជំនួសឱ្យ $\|f-g\|$ ។

៧.៥. ទ្រឹស្តីបទពាក់ព័ន្ធនឹងអនុគមន៍ក្នុងលំហ L^p

ទ្រឹស្តីបទ១

បើ $f(x) \in L^p, p \ge 1$ វាក៏ស្ថិតនៅក្នុងលំហ L គឺ $L^p \subset L$ ។ ជាទូទៅ បើ $p > n \ge 1$ នោះ $L^p \subset L^n$ ។

ទ្រឹស្តីបទ២៖ បើ $g(x) \in L^p$ និង $|f(x)| \le |g(x)|$ នោះ $f(x) \in L^p$ ។

ទ្រឹស្តីបទ៣៖ បើ $f(x) \in L^p$ និង $g(x) \in L^p$ នោះ $f(x)g(x) \in L^{p/2}$ ។ ជាក់ស្តែង បើ $f(x) \in L^2$ និង $g(x) \in L^2$ នោះ $f(x)g(x) \in L$ ។

ទ្រឹស្តីបទ៤៖ បើ $f(x) \in L^p$ និង $g(x) \in L^q$ ដែល $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1$ នោះ $f(x)g(x) \in L$ ។

ទ្រឹស្តីបទ៥៖ បើ $f(x) \in L^p$ និង $g(x) \in L^p$ នោះ $f(x) \pm g(x) \in L^p$ ។

៧.៦. ភាពរួមមធ្យម

តាង $\langle f_n(x) \rangle$ ជាស្វ៊ីតនៃអនុគមន៍ ដែលស្ថិតក្នុង $L^p(a,b)$ ។ បើមានអនុគមន៍មួយ $f(x) \in L^p$ ដែល

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^p \, dx = 0 \qquad (1)$$

ស្វ៊ីត $\langle f_n(x) \rangle$ រួមនៅក្នុងមធ្យម ឬ មានភាពរួមមធ្យមទៅរក $f(x)$ នៅក្នុងលំហ L^p ។

ក្នុងករណីនេះ យើងសរសេរ (1) ទៅជា $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ដែលអានថា "លីមីតក្នុងមធ្យមនៃ $f_n(x)$ ដែល $n \to \infty$ ស្មើនឹង $f(x)$ ។

សមមូលគ្នានេះដែរ $f_n(x)$ ខិតទៅរក $f(x)$ ក្នុងមធ្យម បើគ្រប់ $\varepsilon > 0$ មានចំនួនមួយ $n_0 > 0$ ដែល $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$ ចំពោះគ្រប់ $n > n_0$ ។

ទ្រឹស្តីបទ៦៖

បើ $\underset{n\to\infty}{l.i.m.} f_n(x)$ មាន នោះវាមានតែមួយគត់ ។

៧.៧. ស្វ៊ីតកូស៊ីក្នុងលំហ L^p

ស្វ៊ីតនៃអនុគមន៍ $\langle f_n(x)\rangle$ នៅក្នុង L^p ហៅថាស្វ៊ីតកូស៊ីបើ

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \int_a^b \left|f_m(x)-f_n(x)\right|^p dx = 0 \qquad (3)$$

ឬម្យ៉ាងទៀត បើ $\varepsilon > 0$ មានចំនួនមួយ $n_0 > 0$ ដែល

$\left\|f_m - f_n\right\| = \int_a^b \left|f_m(x)-f_n(x)\right|^p dx < \varepsilon$ ចំពោះគ្រប់ $m > n_0$ និង $n > n_0$

ទ្រឹស្តីបទ៧

បើ $\langle f_n(x)\rangle$ រួមក្នុងមធ្យមទៅរក $f(x)$ ក្នុង L^p នោះ $\langle f_n(x)\rangle$ ជាស្វ៊ីតកូស៊ី Cauchy ។

៧.៨. ភាពពេញនៃ L^p និងទ្រឹស្តីបទ Riesz-Fischer

លំហ L^p ហៅថាពេញ ប្រសិនបើគ្រប់ស្វ៊ីតកូស៊ី Cauchy ក្នុងលំហរួមក្នុងមធ្យមទៅរកអនុគមន៍ក្នុងលំហ។ ទ្រឹស្តីបទខាងក្រោមនេះ ជាទ្រឹស្តីបទ Riesz-Fischer ជាចំណុចសំខាន់គ្រឹះ។

ទ្រឹស្តីបទ៨

[Riesz-Fischer] លំហ L^p មួយចំនួន ពេញ ។ ម្យ៉ាងទៀត បើ $\langle f_n(x)\rangle$ ជាស្វ៊ីតមួយនៃអនុគមន៍ក្នុង L^p និង

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \int_a^b \left|f_m(x)-f_n(x)\right|^p dx = 0$$

(បើ $\langle f_n(x)\rangle$ ជាស្វ៊ីតCauchy) នោះមានអនុគមន៍មួយ $f(x)\in L^p$ ដែល $f_n(x)$ រួមក្នុងមធ្យមទៅរក $f(x)$ ។ អនុគមន៍នេះខុសគ្នាជាច់ពីសំណុំនៃរង្វាស់សូន្យ ។

៧.៩. ភាពរួមក្នុងរង្វាស់

តាង $\langle f_n(x)\rangle$ ជាស្វ៊ីតមួយនៃអនុគមន៍អាចវាស់បានកំណត់ស្ទើគ្រប់កន្លែង នោះ $\langle f_n(x)\rangle$ ហៅថា រួមក្នុងរង្វាស់ចំទៅរកអនុគមន៍ $f(x)$ បើ $\lim_{n\to\infty} m\left\{x : \left|f_n(x)-f(x)\right| \geq \sigma\right\} = 0$ ចំពោះគ្រប់ $\sigma > 0$ ទ្រឹស្តីបទខាងក្រោមពិត

ទ្រឹស្តីបទ៩៖ បើ $\langle f_n(x)\rangle$ រួមស្ទើគ្រប់កន្លែងទៅរក $f(x)$ នោះ វារួមក្នុងរង្វាស់ទៅរក $f(x)$ ។ លក្ខណៈប្រាសមកវិញមិនពិតនោះទេ។

ទ្រឹស្តីបទ១០៖ បើ $\langle f_n(x)\rangle$ រួមក្នុងមធ្យមទៅរក $f(x)$ នោះ វារួមក្នុងរង្វាស់ទៅរក $f(x)$ ដែរ ។

ទ្រឹស្តីបទ១១៖ បើ $\langle f_n(x)\rangle$ រួមក្នុងរង្វាស់ទៅរក $f(x)$ លើសំណុំ E នោះមានស្វ៊ីរងមួយ $\langle f_{n_k}(x)\rangle$ រួមស្ទើគ្រប់កន្លែងទៅរក $f(x)$ ។

ទ្រឹស្តីបទ១២៖ បើ $\langle f_n(x)\rangle$ រួមក្នុងមធ្យមទៅរក $f(x)$ លើសំណុំ E នោះមានស្វ៊ីតរងមួយ $\langle f_{n_k}(x)\rangle$ រួមស្ទើគ្រប់កន្លែងទៅរក $f(x)$ ។ ប្រសិនបើ $\langle f_n(x)\rangle$ រួមទៅរក $f(x)$ គ្រប់កន្លែង វាមិនចាំបាច់ត្រូវរួមក្នុងមធ្យមទៅរក $f(x)$ ។ ប្រាសមកវិញ បើ $\langle f_n(x)\rangle$ រួមក្នុងមធ្យមទៅរក $f(x)$ វាមិនចាំបាច់រួមស្ទើគ្រប់កន្លែងទៅរក $f(x)$ នោះទេ ។

៧.១០.លំហាត់និងដំណោះស្រាយ

1) បង្ហាញថា $f(x) = 1\big/\sqrt[3]{x}$

ក. ជារបស់ $L[0,8]$

ខ. មិនមែនជារបស់ $L^3[0,8]$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. កំណត់យក $[f(x)]_p = \begin{cases} 1\big/\sqrt[3]{x} & , \ 1\big/\sqrt[3]{x} \le p \ \vee \ x \ge 1\big/p^3 \\ p & , \ 1\big/\sqrt[8]{x} > p \ \vee \ x < 1\big/p^8 \end{cases}$

នោះ

$$\begin{aligned}\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} &= \lim_{x\to\infty} \int_0^8 [f(x)]_p dx \\ &= \lim_{x\to\infty}\left[\int_0^{1/p^3} p dx + \int_{1/p^3}^8 \frac{dx}{\sqrt[8]{x}}\right] \\ &= \lim_{x\to\infty}\left[px\Big|_0^{1/p^3} + \frac{3}{2}\Big|_{1/p^3}^8 \right] \\ &= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{p^2} + 6 - \frac{3}{2p^2}\right] \\ &= 6\end{aligned}$$

ដោយ អាំងតេក្រាលមានតម្លៃស្មើ6 នាំឱ្យ $f(x)$ ស្ថិតក្នុង $L[0,8]$ ។

ខ. សិក្សាអំពីអត្ថិភាពនៃអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

$$\int_0^8 \left|\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right|^3 dx = \int_0^8 \frac{dx}{x}$$

ដោយ $1\big/x \notin [0,8]$ កំណត់យក

$$[1\big/x]_p = \begin{cases} 1\big/x & , \ 1\big/x \le p \ \vee \ x \ge 1\big/p \\ p & , \ 1\big/x > p \ \vee \ x < 1\big/p \end{cases}$$

នោះ

$$\begin{aligned}\int_0^8 \frac{dx}{x} &= \lim_{x\to\infty}\int_0^8 [1\big/x]_p dx \\ &= \lim_{x\to\infty}\left[\int_0^{1/p} p dx + \int_{1/p}^8 \frac{dx}{x}\right] \\ &= \lim_{x\to\infty}\left[px\Big|_0^{1/p} + \ln x\Big|_{1/p}^8 \right] \\ &= \lim_{x\to\infty}[1 + \ln 8 + \ln p]\end{aligned}$$

ដោយ អាំងតេក្រាលមិនតម្លៃកំណត់ នាំឱ្យ $f(x)$ មិននៅក្នុង $L^3[0,8]$ ។

2) បើ $f(x) \in L^2$ និង $g(x) \in L^2$ បង្ហាញថា $f(x)g(x) \in L$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $$\left(\left|f(x)\right|-\left|g(x)\right|\right)^2 \geq 0$$

$$\left|f(x)\right|^2 - 2\left|f(x)\right|\left|g(x)\right| + \left|g(x)\right|^2 \geq 0$$

ឬ $$\left|f(x)\right|\left|g(x)\right| \leq \frac{1}{2}\left(\left|f(x)\right|^2 + \left|g(x)\right|^2\right)$$

$$\left|f(x)g(x)\right| \leq \frac{1}{2}\left(\left|f(x)\right|^2 + \left|g(x)\right|^2\right)$$

នោះ $$\int_a^b \left|f(x)g(x)\right| dx \leq \frac{1}{2}\int_a^b \left|f(x)\right|^2 dx + \frac{1}{2}\int_a^b \left|g(x)\right| dx$$

ដោយ $f(x) \in L^2$ និង $g(x) \in L^2$ នាំឱ្យអាំងតេក្រាលផ្នែកខាងស្តាំមាន

ដូចនេះ អាំងតេក្រាលផ្នែកខាងឆ្វេងក៏មានគឺ $f(x)g(x) \in L$ ។

3) បើ $f(x) \in L^2$ បង្ហាញថា $f(x) \in L$ (គឺ $L^2 \subset L$) ។

ដំណោះស្រាយ

តាមសម្រាយលំហាត់២ខាងលើ

បើ $f(x) \in L^2$ និង $g(x) \in L^2$ នោះ $f(x)g(x) \in L$

ដោយយក $f(x) \in L^2$ និង $g(x) = 1 \in L^2$

នាំឱ្យ $f(x)g(x) = f(x) \in L$ ចំពោះ $I = [a,b]$ (ជាចន្លោះកំណត់បាន)

ដូចនេះ បើ $f(x) \in L^2$ នោះ $f(x) \in L$ គឺ $L^2 \subset L$ ។

4) បង្ហាញវិសមភាព Schwarz ៖

$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \left\{\int_a^b \left|f(x)\right|^2 dx\right\}^{1/2} \left\{\int_a^b \left|g(x)\right|^2 dx\right\}^{1/2}$ ដែល $f(x) \in L^2$ និង $g(x) \in L^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះ $\forall \lambda \in \mathbb{R}, f(x) \in L^2, g(x) \in L^2$ និង $f(x)g(x) \in L$

$$\int_a^b \left[\lambda f(x) + g(x)\right]^2 dx \geq 0$$

គឺ $$A\lambda^2 + 2B\lambda + C \geq 0 \quad (1)$$

ដែល $A = \int_a^b \left|f(x)\right|^2 dx, B = \int_a^b f(x)g(x)dx, C = \int_a^b \left|g(x)\right|^2 dx \quad (2)$

ដោយ $A > 0$ តាម (1)

$$\lambda^2 + \frac{2B}{A}\lambda + \frac{C}{A} \geq 0 \text{ ឬ } \left(\lambda + \frac{B}{A}\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A^2} \geq 0$$

តែវិសមភាពនេះពិតចំពោះ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ លុះត្រាតែ $AC - B^2 \geq 0$ ឬ $B^2 \leq AC$

តាម(2) $$\left\{\int_a^b f(x)g(x)dx\right\}^2 \le \left\{\int_a^b |f(x)|^2\,dx\right\}\left\{\int_a^b |g(x)|^2\,dx\right\}$$

នាំឱ្យ $$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \left|\int_a^b |f(x)|^2\,dx\right|^{1/2}\left|\int_a^b |g(x)|^2\,dx\right|^{1/2}$$

ដូចនេះ វិសមភាព Schwarz ត្រូវបានសម្រាយបញ្ជាក់ ។

5) បង្ហាញថា បើ $f(x)\in L^2$ និង $g(x)\in L^2$ នោះ

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \le \left\{\int_a^b |f(x)|^2\,dx\right\}^{1/2}\left\{\int_a^b |g(x)|^2\,dx\right\}^{1/2}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមសម្រាយលំហាត់ (៤)

ចំពោះ $\forall\lambda\in\mathbb{R}, |f(x)|\in L^2, |g(x)|\in L^2, |f(x)||g(x)|\in L$

$$\int_a^b \left[\lambda|f(x)|+|g(x)|\right]^2 dx \ge 0$$

គឺ $$A\lambda^2+2B\lambda+C\ge 0 \quad (1)$$

ដែល $$A=\int_a^b |f(x)|^2\,dx, B=\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx, C=\int_a^b |g(x)|^2\,dx \quad (2)$$

ដោយ $A>0$ តាម(1)

$$\lambda^2+\frac{2B}{A}\lambda+\frac{C}{A}\ge 0 \text{ ឬ } \left(\lambda+\frac{B}{A}\right)^2+\frac{AC-B^2}{A^2}\ge 0$$

តែវិសមភាពនេះពិតចំពោះ $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ លុះត្រាតែ $AC-B^2\ge 0$ ឬ $B^2\le AC$

តាម(2) $\left\{\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx\right\}^2 \le \left\{\int_a^b |f(x)|^2\,dx\right\}\left\{\int_a^b |g(x)|^2\,dx\right\}$

នាំឱ្យ $\left|\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx\right| \le \left|\int_a^b |f(x)|^2\,dx\right|^{1/2}\left|\int_a^b |g(x)|^2\,dx\right|^{1/2}$

ឬ $\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \le \left|\int_a^b |f(x)|^2\,dx\right|^{1/2}\left|\int_a^b |g(x)|^2\,dx\right|^{1/2}$

6) ក. បើ u និង v ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន នោះមធ្យមនព្វន្តកំណត់ដោយ $\frac{1}{2}(u+v)$ និងមធ្យមធរណីមាត្រកំណត់ដោយ $\sqrt{uv}$ ។ បង្ហាញថាមធ្យមធរណីមាត្រតូចជាងឬស្មើមធ្យមនព្វន្ត។

ខ. បើយើងយក n_1 ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានស្មើនឹង u និង n_2 ជាចំនួនមិនអវិជ្ជមានស្មើនឹង v បង្ហាញថាមធ្យមធរណីមាត្រតូចជាងឬស្មើមធ្យមនព្វន្ត លុះត្រាតែ $(u^{n_1}v^{n_2})^{1/(n_1+n_2)}\le\frac{n_1u+n_2v}{n_1+n_2}$ ។

គ. បង្ហាញថាវិសមភាពក្នុងលំហាត់(ខ) សមមូលនឹង $u^\alpha v^\beta\le\alpha u+\beta v$ ដែល $\alpha+\beta=1$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. យើងមាន $(\sqrt{u}-\sqrt{v})^2\ge 0 \Leftrightarrow u+v-2\sqrt{uv}\ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{uv}\le\frac{1}{2}(u+v)$

ខ. ចំពោះ n ចំនួនមិនអវិជ្ជមាន $x_1, x_2, \ldots, x_n$

មធ្យមនព្វន្តកំណត់ដោយ $\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$

និងមធ្យមធរណីមាត្រកំណត់ដោយ $\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = (x_1 x_2 \ldots x_n)^{1/n}$

នោះចំពោះ n_1 ចំនួនមិនអវិជ្ជមាន u និង n_2 ចំនួនមិនអវិជ្ជមាន v

មធ្យមធរណីមាត្រគឺ $(u^{n_1} v^{n_2})^{1/(n_1+n_2)}$ និង មធ្យមនព្វន្ត $\frac{n_1 u + n_2 v}{n_1 + n_2}$

មធ្យមធរណីមាត្រតូចជាងឬស្មើមធ្យមនព្វន្តលុះត្រាតែ $(u^{n_1} v^{n_2})^{1/(n_1+n_2)} \le \frac{n_1 u + n_2 v}{n_1 + n_2}$ ។

គ. វិសមភាពក្នុងសម្រាយ(ខ) អាចសរសេរទៅជា

$$u^{n_1/(n_1+n_2)} v^{n_2/(n_1+n_2)} \le \frac{n_1}{n_1 + n_2} u + \frac{n_2}{n_1 + n_2} v$$

តាង $\alpha = \frac{n_1}{n_1 + n_2}$ និង $\beta = \frac{n_2}{n_1 + n_2}$ ដែល $\alpha + \beta = 1$

នោះ $u^\alpha v^\beta \le \alpha u + \beta v$ ។

7) បង្ហាញថាចំពោះចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន u, v និងចំនួនវិជ្ជមាន α, β ដែល $\alpha + \beta = 1$ នោះ $u^\alpha v^\beta \le \alpha u + \beta v$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថាសម្រាប់ចំនួនពិតដែលមិនអវិជ្ជមានណាមួយ u, v និងលេខវិជ្ជមាន α, β ដែល $\alpha + \beta = 1$, នោះ $u^\alpha v^\beta \le \alpha u + \beta v$

ប្រសិនបើ $u = 0$ វិសមភាពគឺតូចតាច ដូច្នេះយើងអាចសន្មតថា $u > 0$ ។

បន្ទាប់មកតាង $v = ux$, $\alpha + \beta = 1$ វិសមភាពអាចសរសេរជា $1 + \beta x - x^\beta - \beta \ge 0$

កំណត់ផ្នែកខាងឆ្វេងដោយ $F(x)$ វាដូចខាងក្រោមថាដេរីវេគឺ $F'(x) = \beta\left(1 - x^{\beta-1}\right)$ ។

ឥឡូវនេះ $F(x) = 0$ សម្រាប់ $x = 1$

ដូច្នេះចាប់តាំងពី $F(x) < 0$ សម្រាប់ $0 < x < 1$

វាធ្វើតាម $F(x) = 0$ សម្រាប់ $0 < x < 1$ ពោលគឺវិសមភាព (1) គឺ ពិតសម្រាប់ $0 < x < 1$ ។ ស្រដៀងគ្នាដែរចាប់តាំងពី $F(x) = 0$ សម្រាប់ $x = 1$ វាធ្វើតាម $F(x) > 0$ សម្រាប់ $x > 1$ ពោលគឺវិសមភាព (1) គឺពិតសម្រាប់ $x > 1$ និង សមភាពក៏មានសម្រាប់ $x = 1$

ដូច្នេះ (1) គឺពិតសម្រាប់ទាំងអស់ $x > 0$ ហើយដូច្នេះវិសមភាពដែលត្រូវការត្រូវបានបង្ហាញ។

8) បង្ហាញវិសមភាព Holder

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \left\{\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right\}^{1/p} \left\{\int_a^b |g(x)|^q\, dx\right\}^{1/q}$$

ដែល $p>0, q>0, 1/p+1/q=1$ និង $f(x)\in L^p, g(x)\in L^q$ ។

ដំណោះស្រាយ

ចូរបង្ហាញ វិសមភាពខាងក្រោម

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \left\{\int_a^b |f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int_a^b |g(x)|^q dx\right\}^{\frac{1}{q}}$$

ដែលមាន $p>0$, $q>0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ និង $f(x)\in L^p$, $g(x)\in L^q$

ក្នុងលំហាត់(7) គេតាង បាន $u=\frac{|f(x)|^p}{F}$, $v=\frac{|g(x)|^q}{G}$, $\alpha=\frac{1}{p}$, $\beta=\frac{1}{q}$

$$\left\{\frac{|f(x)|^p}{F}\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\frac{|g(x)|^q}{G}\right\}^{\frac{1}{q}} \le \frac{|f(x)^p|}{pF}+\frac{|g(x)^q|}{qG}$$

$$\int_a^b \left\{\frac{|f(x)|^p}{F}\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\frac{|g(x)|^q}{G}\right\}^{\frac{1}{q}} \le \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

$$\int_a^b |f(x)||g(x)|dx \le \left\{\int_a^b |f(x)|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\int_a^b |g(x)|^q\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)||g(x)|dx$$

ដូចនេះ វិសមភាព Holder ត្រូវបានសម្រាយបញ្ជាក់។

៧.១១.លំហាត់អនុវត្តន៍

1) បង្ហាញវិសមភាព Holder៖ $\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \left\{\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right\}^{1/p} \left\{\int_a^b |g(x)|^q\, dx\right\}^{1/q}$

ដែល $p > 0, q > 0, 1/p + 1/q = 1$ និង $f(x) \in L^p, g(x) \in L^q$ ។

2) បង្ហាញវិសមភាព Minkowski

$\left\{\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\, dx\right\}^{1/p} \le \left\{\int_a^b |f(x)^p|\, dx\right\}^{1/p} \left\{\int_a^b |g(x)|^p\, dx\right\}^{1/p}$ ដែល $p \ge 1$ ។

3) ចូរសម្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទទី២ ៖ បើ $g(x) \in L^p$ និង $|f(x)| \le |g(x)|$ នោះ $f(x) \in L^p$ ។

4) ចូរសម្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទទី៣ ៖ បើ $f(x) \in L^p$ និង $g(x) \in L^p$ នោះ $f(x)g(x) \in L^{p/2}$

5) បង្ហាញថាលំហ L^p ជាលំហមេទ្រិក ។

6) បង្ហាញថា បើស្វីតមួយ $\langle f_n(x) \rangle$ រួមក្នុងមធ្យម ទៅរកអនុគមន៍ពីរផ្សេងគ្នា $f(x)$ និង $g(x)$ នោះ $f(x) = g(x)$ ស្ទើគ្រប់កន្លែង។ ដូចនេះ បើ $\underset{n\to\infty}{l.i.m.} f_n(x)$ មានលីមីត នោះវាមានតែមួយគត់។

7) ចូរសម្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទទី៧ ៖ បើស្វីតមួយ $\langle f_n(x) \rangle$ រួមក្នុងមធ្យម ទៅរក $f(x)$ ក្នុងលំហ L^p នោះ វាជាស្វីត Cauchy ។

8) បើ $\underset{n\to\infty}{l.i.m.} f_n(x) = f(x)$ បង្ហាញថា $\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x)|^p\, dx = \int_a^b |f(x)|^p\, dx$

ឬសមមូល $\lim_{n\to\infty} \|f_n\| = \|f\|$ ។

9) គេឱ្យ $f_n(x) = \begin{cases} n\ ,\ 0 < x < 1/n \\ 0\ ,\ 1/n < x < 1 \end{cases} \quad n = 1, 2, \ldots$

ចូរបង្ហាញថាក្នុងលំហ L^2 ៖

ក. $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

ខ. $\underset{n\to\infty}{1.i.m.} f_n(x) \ne 0$

គ. បកស្រាយលទ្ធផលនេះ ។

10) ចូរសម្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ Riesz-Fischer ។

11) ចូរសម្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទទី១០ ៖ បើ $\langle f_n(x) \rangle$ រួមក្នុងមធ្យមទៅរក $f(x)$ នោះវារួមក្នុងរង្វាស់ទៅរក $f(x)$ ។

12) ចូរសម្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទទី១១ ៖ បើ $\langle f_n(x) \rangle$ រួមក្នុងរង្វាស់ទៅរក $f(x)$ លើសំណុំ E នោះមានស្វីតរងមួយ $f_{n_1}(x), f_{n_2}(x), \ldots$ ចំពោះ $n_1 < n_2 < \cdots$ (គឺ $\langle f_{n_k}(x) \rangle$) ដែលរួមស្ទើគ្រប់កន្លែងទៅរក $f(x)$ ។

13) បង្ហាញថាអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ ៖

ក. ស្ថិតក្នុង $L^p[0, 8]$ បើ $1 \le p < 3$

ខ. មិនស្ថិតក្នុង $L^p\left[0,8\right]$ បើ $p \ge 3$

គ. រកតម្លៃ p ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ស្ថិតក្នុងលំហ $L^p\left[0,1\right]$ ។

14) បង្ហាញថា បើ $f(x)\in L^p, p\ge 1$ នោះ $cf(x)\in L^p$ ចំពោះចំនួនថេរ c ។

15) បើ $f(x)\in L^2$ និង $g(x)\in L^2$ បង្ហាញថា ៖

ក. $[f(x)+g(x)]\in L^2$

ខ. $[f(x)-g(x)]\in L^2$ ។

16) បើ $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ ស្ថិតក្នុង L^2 និង $c_1, c_2, \dots, c_n$ ជាចំនួនថេរ បង្ហាញថា $\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x)\in L^2$ ។

17) បើអនុគមន៍មួយស្ថិតក្នុង L តើវាស្ថិតក្នុង L^2 ដែរឬទេ ? ចូរពន្យល់ ។

18) បង្ហាញថា សមភាពក្នុងវិសមភាព Schwarz កើតមាន លុះត្រាតែ $f(x)/g(x)$ ជាចំនួនថេរស្មើគ្រប់កន្លែង ។

19) បង្ហាញថាវិសមភាព Schwarz ខាងក្រោមចំពោះចំនួនពិត a_k, b_k , $k=1,\dots,n$

$$\left|a_1b_1+\cdots+a_nb_n\right| \le \left(\left|a_1\right|^2+\cdots+\left|a_n\right|^2\right)\left(\left|b_1\right|^2+\cdots+\left|b_n\right|^2\right)$$

និង បង្ហាញថាសមភាពកើតមានលុះត្រាតែ a_k/b_k ជាចំនួនថេរ ។

20) ចូរទាញរកវិសមភាព Schwarz ចំពោះអាំងតេក្រាលដោយប្រើលទ្ធផលនៃលំហាត់ខាងលើ និងទាញរកនិយមន័យនៃអាំងតេក្រាលជាលីមីតនៃផលបូក ។

21) បង្ហាញថា បើ $f(x)\in L^2$ នោះ $\int_a^b \left|f(x)\right| dx \le \sqrt{b-a}\left[\int_a^b \left|f(x)\right|^2 dx\right]^{1/2}$ និងបង្ហាញថា $L^2 \subset L$ ។

22) បង្ហាញថា $f(x)=e^{-x}/\sqrt{x}\in L\left[0,8\right]$ ។

ឯកសារពិគ្រោះ

Burk, F. (1998). *Lebesgue measure and integration an introduction* (1 ed.). Wiley-Interscience.

Colin Adams, R. F. (2008). *Introduction to Topology: Pure and Applied*. Pearson Prentic Hall.

Colley, S. J. (2012). *Vector Calculus* (4th ed.). Addison Wesley.

Florescu, L. C. (2021). *Lebesgue integral* (1st ed.). Birkhäuser.

Kesavan, S. (2019). *Measure and Integration* (1st ed.). Springer.

Kolmogorov A.N., F. S. V. (1961). *Measure, Lebesgue Integrals, and Hilbert Space*. Academic Press.

Peterson, J. K. (2020). *Measure and integration* (1st ed.). CRC Press.

Ratha, L. (2023). *វិភាគទូទៅ (General analysis)*.

Salamon, D. A. (2016). *Measure and integration*. European Mathematical Society.

Shirali Satish, a. H. L. V. (2006). *Metric space* (1 ed.). Springer-Verlag London.

Sovann, S. (2008). *វិភាគចំនួនពិត ភាគ៣ (Real analysis 3)*. Royal university of Phnom Penh.

Spiegel, M. R. (1969). *Schaum's outline of theory and problems of real variables Lebesque measure and integration*. McGraw-Hill.

សន្ទានុក្រម

[1] សន្ទានុក្រមគណិតវិទ្យាសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ

[2] សន្ទានុក្រមគណិតវិទ្យារាជបណ្ឌិតសភាកម្ពុជា

[3] វចនានុក្រមសម្ដេចព្រះសង្ឃរាជ **ជួន ណាត**