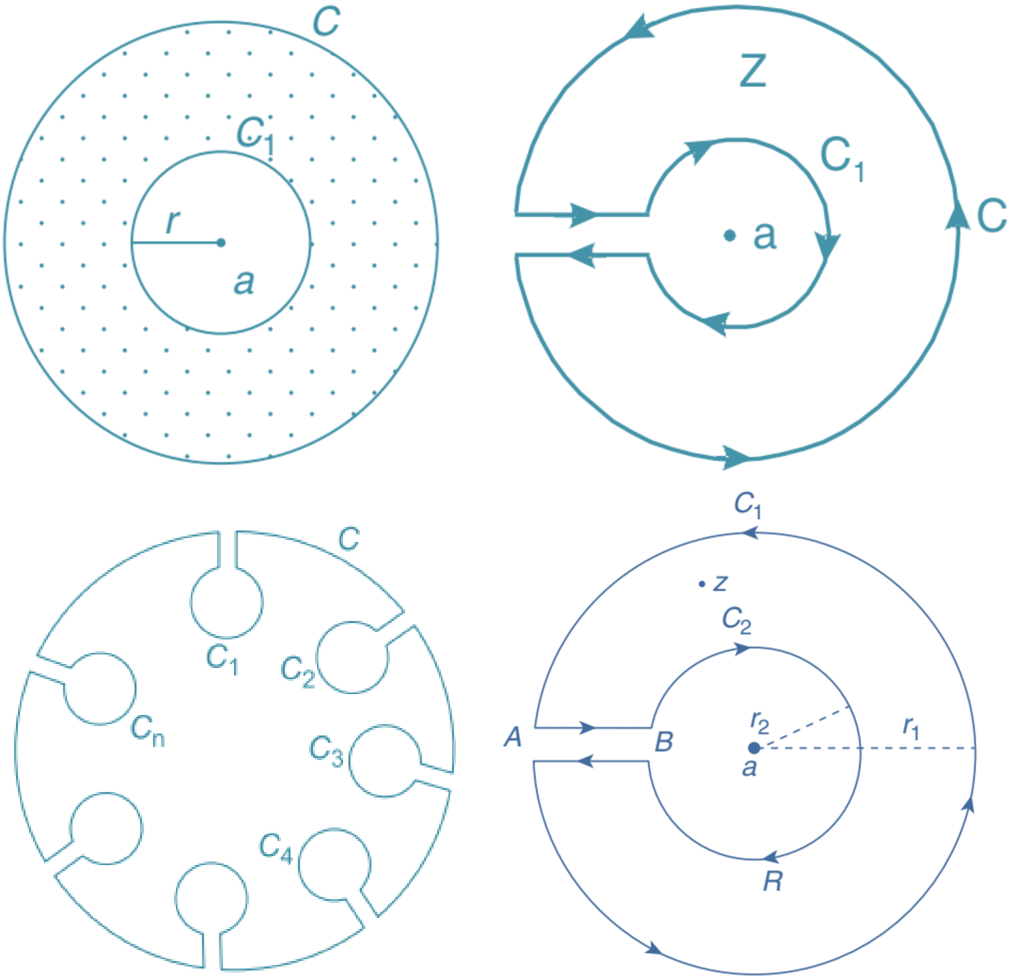
គណិតវិភាគទូទៅ ៤



គាំទ្រថវិកាលើការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អដោយៈ

“មូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍”

២០២៣

រៀបរៀង និពន្ធដោយ៖ លោក ឈាន ហាង

គណៈកម្មការរចនាទំព័រ៖ លោកស្រី សំបាត់ អ៊ាត លោកស្រី ឈុំ ពៅ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យ៖

១. លោក ហ៊ុន វ៉ារី	ព្រឹទ្ធបុរសរង	ប្រធាន
២. លោក សាង ធិតា	គ្រូឧទ្ទេស	សមាជិក
៣. លោក គឹម វិសោរ	គ្រូឧទ្ទេស	សមាជិក

បុព្វកថា

ដំណើរអភិវឌ្ឍនៃព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជានៅក្នុងយុគសម័យទំនើបនេះ ជាមេរៀនដ៏ជោគជ័យបំផុតមួយដែលចាប់ឫសគល់ចេញពីការបញ្ចប់របបប្រល័យពូជសាសន៍ ការបញ្ចប់សង្គ្រាម ការផ្សះផ្សារជាតិ ការកសាងមូលដ្ឋានរឹងមាំនៃសន្តិភាពនិងស្ថេរភាព និងការអភិវឌ្ឍសេដ្ឋកិច្ច។ នៅក្រោយពេលដែលសន្តិភាពត្រូវបានកើតឡើងដោយបរិបូរណ៍នៅឆ្នាំ១៩៩៨ កម្ពុជាទទួលកំណើនសេដ្ឋកិច្ចខ្ពស់ គឺប្រមាណ៨%ក្នុងមួយឆ្នាំ។ លើសពីនេះទៀតអត្រានៃភាពក្រីក្រត្រូវបានកាត់បន្ថយពីប្រមាណ៥៣% នៅឆ្នាំ២០០៤មកនៅទាបជាង១០% នៅឆ្នាំ២០១៩។ ដំណើរនៃការអភិវឌ្ឍជាតិជាសកម្មភាពដែលបន្តទៅមុខជាប់ជានិច្ច ហើយគោលនយោបាយថ្មីៗដែលមានលក្ខណៈអន្តរវិស័យគ្របដណ្តប់ ក៏កំពុងលេចរូបរាងឡើងដើម្បីតម្រង់ទិសកម្ពុជាឆ្ពោះទៅកាន់ប្រទេសមានប្រាក់ចំណូលមធ្យមកម្រិតខ្ពស់នៅឆ្នាំ២០៣០ និងឈានឡើងជាប្រទេសមានប្រាក់ចំណូលខ្ពស់ នៅឆ្នាំ២០៥០។ ការប្រែប្រួលឆាប់រហ័សនៃនិម្មាបនកម្មពិភពលោក និងតំបន់រួមទាំងទំនាក់ទំនងភូមិសាស្ត្រនយោបាយ បានផ្តល់កាលានុវត្តភាពសម្រាប់ការអភិវឌ្ឍឧស្សាហកម្មនៅកម្ពុជា ដែលត្រូវបានរាជរដ្ឋាភិបាលចាត់ទុកជាមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃកំណើនសេដ្ឋកិច្ចកម្ពុជា។ រាជរដ្ឋាភិបាលកម្ពុជាបានកំពុងបន្តពង្រឹង និងអភិវឌ្ឍវិស័យអប់រំឆ្ពោះទៅរកការស្រាវជ្រាវ និងនវានុវត្តន៍ដើម្បីពង្រឹងសមត្ថភាពនិងជំនាញរបស់ធនធានមនុស្សនៅកម្ពុជាឱ្យស្របទៅនឹងបរិបទថ្មីនៃការអភិវឌ្ឍ ជាពិសេសការពង្រឹងសហគ្រិនភាពក្នុងការរៀបចំម៉ូដែលធុរកិច្ចថ្មីៗ។ ដើម្បីចាប់យកកាលានុវត្តភាពពីបដិវត្តន៍ឧស្សាហកម្មទី៤ និងសេដ្ឋកិច្ចឌីជីថលដែលកំពុងផុសផុលឡើង ប្រព័ន្ធអេកូឡូហ្ស៊ីដែលបង្កលក្ខណៈអំណោយផលដល់ការបង្កើតថ្មី នវានុវត្តន៍ ការស្រាវជ្រាវ និងអភិវឌ្ឍន៍ ត្រូវតែមានការកែលម្អ។

បណ្តាប្រទេសនៅទ្វីបអាស៊ីកំពុងនាំមុខក្នុងការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍ ដោយមានភាគហ៊ុនប្រមាណ៤៤% នៃការវិនិយោគទាំងមូលរបស់ពិភពលោក។ ប្រទេសចិនកំពុងបន្តកសាងហេដ្ឋារចនាសម្ព័ន្ធនៃការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍ ក៏ដូចជាសមត្ថភាពមនុស្ស។ ផ្ទុយទៅវិញ ប្រទេសនៅទ្វីបអាមេរិកខាងត្បូង និងអាហ្វ្រិក កំពុងស្ថិតនៅឆ្ងាយពីការវិនិយោគនេះ ហើយជាលទ្ធផល ប្រទេសទាំងនោះក៏ពុំមានកំណើនសេដ្ឋកិច្ចគួរឱ្យកត់សម្គាល់ដែរ។ ទុនវិនិយោគសរុបលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍរបស់ប្រទេសនៅទ្វីបអាមេរិកខាងត្បូងនិងអាហ្វ្រិក មានប្រមាណ៥%នៃការវិនិយោគទាំងមូលរបស់ពិភពលោក ក្នុងពេលដែលតំបន់ទាំង២នេះមានប្រជាជនប្រមាណ២០%នៃប្រជាជនពិភពលោក។ ប្រទេសចំនួន៦ដែលមានលំដាប់ខ្ពស់ជាងគេនៅក្នុងការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍ រួមមានសហរដ្ឋអាមេរិក ចិន ជប៉ុន អាល្លឺម៉ង់ ឥណ្ឌា និងកូរ៉េខាងត្បូង ដែលស្មើនឹងប្រមាណ៧០%នៃទុនវិនិយោគសរុបរបស់ពិភពលោក។

តើចំណេះដឹង ផលិតផល និងសេវាកម្មថ្មីទាំងនេះកើតឡើងពីអ្វី? ហើយកើតឡើងដោយរបៀបណា? ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជាកំពុងតែកសាងមូលដ្ឋានសម្រាប់ការត្រៀមខ្លួនទទួល និងប្រកួតប្រជែងក្នុងយុគសម័យបដិវត្តឧស្សាហកម្មទី៤ នៅក្នុងសេដ្ឋកិច្ចដែលផ្អែកលើពុទ្ធិ ហើយដែលប្រការនេះ

ចាំបាច់តម្រូវឱ្យពលរដ្ឋកម្ពុជា ត្រូវក្លាយខ្លួនជាពលរដ្ឋឌីជីថល ពលរដ្ឋសកល និងពលរដ្ឋដែលប្រកបដោយការទទួលខុសត្រូវ ដែលមានសមត្ថភាពក្នុងការផលិត ចែកចាយ និងប្រើប្រាស់ពុទ្ធិដើម្បីទទួលមនុញ្ញផល និងរួមចំណែកក្នុងកំណើន។ ធនាគារពិភពលោកបានធ្វើការកត់សម្គាល់តាំងពីឆ្នាំ២០០២នូវបម្លាស់ប្តូរនៃមូលដ្ឋានសេដ្ឋកិច្ច ពីសេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើកម្លាំងពលកម្ម និងធនធានអតិកម្ម (Laboure and Resource Based Economy) ទៅកាន់សេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើពុទ្ធិ (Knowledge Based-Economy) ដែលក្នុងន័យនេះ ពុទ្ធិគឺជាគន្លឹះនៃការអភិវឌ្ឍ។ អាស្រ័យហេតុនេះ នៅលើគន្លងដែលកម្ពុជាកំពុងធ្វើដំណើរឆ្ពោះទៅកាន់សេដ្ឋកិច្ចឌីជីថល សង្គមកម្ពុជាត្រូវតែមានសមត្ថភាពក្នុងការ ផលិត ជ្រើសរើស បន្សាំ បង្កើតមុខរបរ និងប្រើប្រាស់ពុទ្ធិ ដើម្បីរក្សានិរន្តរភាពនៃកំណើន និងកែលម្អជីវភាពរស់នៅ។ សមត្ថភាពទាំងនេះ អាចកើតឡើងនៅពេលពលរដ្ឋកម្ពុជាមានឱកាសក្នុងការទទួលបានបទពិសោធន៍ពីការស្រាវជ្រាវ ការបណ្តុះគំនិតច្នៃប្រឌិត និងការស្វែងរកនវានុវត្តន៍។

កំណែទម្រង់វិស័យអប់រំ គឺជាការត្រួសត្រាយមាគ៌ាសម្រាប់ដំណើរឆ្ពោះទៅកាន់សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិ និងប្រជាពលរដ្ឋប្រកបដោយភាពរស់រវើក។ តាមរយៈមូលដ្ឋានអប់រំ សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិនឹងប្រមូលផ្តុំ បង្កើត និងចែករំលែក ទៅកាន់សមាជិកក្នុងសង្គមនូវសម្បទាអប់រំ ពិសេសគឺពុទ្ធិសម្បទាក្នុងបុព្វហេតុនៃមនុស្សជាតិនិងឧត្តមប្រយោជន៍នៃប្រទេស។ សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិ គឺពុំគ្រាន់តែជាសង្គមដែលសម្បូរព័ត៌មានប៉ុណ្ណោះទេ តែជាសង្គមដែលប្រជាពលរដ្ឋអាចធ្វើបរិវត្តកម្មពីព័ត៌មានទៅជាមូលធនប្រកបដោយប្រសិទ្ធភាព។ ការរីកចម្រើនទៅមុខជាលំដាប់នៃបច្ចេកវិទ្យានិងតំណភ្ជាប់ បានពង្រីកព្រំដែននៃការចូលទៅកាន់ និងការទទួលបានព័ត៌មានជាសកល ហើយដែលក្នុងន័យនេះ ការអប់រំនឹងបន្តវិវត្តទៅមុខនិងមានការផ្លាស់ប្តូរ។ សង្គមមួយដែលមានអំណាន និងរបាប់ជាបុរេលក្ខខណ្ឌនៃជីវភាពប្រចាំថ្ងៃនៃប្រជាពលរដ្ឋ ពេលនោះបំណិននៃអំណាន និពន្ធ និងការគណនាលេខនព្វន្ត គឺជាចលករនៃការរៀនរបស់សិស្ស។ ធាតុដ៏ចម្បងមួយដែលស្ថិតនៅក្នុងការកសាងសង្គមដែលប្រកបដោយពុទ្ធិគឺសៀវភៅសិក្សា ហើយការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សាជាប្រចាំ គឺជានវានុវត្តន៍នៃវិស័យអប់រំដែលនាំទៅរកការសិក្សាពេញមួយជីវិត ការអភិវឌ្ឍសម្បទាអប់រំ និងការចែករំលែកចំណេះដឹង។ មូលដ្ឋានអប់រំ ជាពិសេសគឺគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សាត្រូវមានតួនាទីដែលប្រកបដោយការឆ្លើយតបចំពោះតម្រូវការខាងលើនេះ។ សាស្ត្រាចារ្យ អ្នកស្រាវជ្រាវ និងបុគ្គលិកអប់រំត្រូវបន្តសិក្សាជាប់ជានិច្ចតាមរយៈការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ហើយដែលសៀវភៅសិក្សាទាំងនេះនឹងក្លាយជាស្ពាននៃទំនាក់ទំនងរវាងនវានុវត្តន៍នៃបច្ចេកវិទ្យា និងការរៀននិងបង្រៀននៅក្នុងថ្នាក់រៀន។

សង្គមដែលប្រកបពុទ្ធិ ក៏ជាសង្គមដែលបណ្តុះឱ្យមានរចនាសម្ព័ន្ធទន់នៃសេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើពុទ្ធិដែរ។ ឧទាហរណ៍ជាក់ស្តែងនៃបែបផែននេះរួមមាន Silicon Valley នៃសហរដ្ឋអាមេរិក សួនឧស្សាហកម្មវិស្វកម្មអាកាសយានយន្តនិងយានយន្តនៅទីក្រុង Munich ប្រទេសអាល្លឺម៉ង់ តំបន់ជីវបច្ចេកវិទ្យានៅក្រុង Hyderabad ប្រទេសឥណ្ឌា តំបន់ផលិតគ្រឿងអេឡិចត្រូនិក និងសារគមនាគមន៍ ឌីជីថលនៅទីក្រុង Seoul ប្រទេសកូរេខាងត្បូង ក៏ដូចជាសួនឧស្សាហកម្មថាមពល និងឥន្ធនគីមីសាស្ត្រនៃប្រទេសប្រេស៊ីល ហើយក៏នៅមានទីក្រុងនៃប្រទេសជាច្រើនទៀតនៅលើពិភពលោក

លក្ខណៈសម្បត្តិនៃទីក្រុងទាំងនេះគឺការប្រើប្រាស់និន្នាការនៃការអភិវឌ្ឍដែលជំរុញ និងតម្រង់ទិសដោយចំណេះដឹង ហើយដែលចំណេះដឹងទាំងនោះកើតចេញជាដំបូងពីការវិនិយោគទៅលើគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា ស្ថាប័នស្រាវជ្រាវ មជ្ឈមណ្ឌលឧត្តមភាពនៃជំនាញជាន់ខ្ពស់ ការប្រកួតប្រជែងដោយគុណាធិបតេយ្យ និង ជាពិសេសគឺការបណ្តុះវប្បធម៌អំណាននិងនិពន្ធសៀវភៅ។ ល្បឿននៃការរីកចម្រើនផ្នែកពុទ្ធិ និងបច្ចេកវិទ្យាកំពុងមានសន្ទុះលឿនជាងអ្វីដែលសិស្ស និងនិស្សិតអាចទទួលបានពីគ្រូនៅគ្រឹះស្ថានសិក្សា ដែលធ្វើឱ្យគោលដៅនៃការអប់រំនៅពេលបច្ចុប្បន្ននេះ មានការប្រឈមខ្លាំងជាងពេលណាទាំងអស់។ ឧទាហរណ៍ ក្នុងមួយឆ្នាំ មានសៀវភៅជាង២,២លានចំណងជើង ត្រូវបានសរសេរ និងបោះពុម្ព ដែលក្នុងនោះប្រទេសចិនមាន៤៤០ពាន់ ចំណែកឯសហរដ្ឋអាមេរិកមាន ៣០៥ពាន់ និងប្រទេសរុស្ស៊ីមាន ១២០ពាន់ចំណងជើង។

ខណៈពេលដែលបច្ចេកវិទ្យាកំពុងរីកចម្រើនជារៀងរាល់ថ្ងៃ មធ្យោបាយសម្រាប់អំណានក៏មានច្រើនជម្រើសសម្រាប់សិស្ស និស្សិត និងសាធារណៈជនរួមមានការអានសៀវភៅ ការអានលើឧបករណ៍អេឡិចត្រូនិក ការអានដោយប្រើទូរសព្ទវៃឆ្លាត និងការអានលើកុំព្យូទ័រ ដែលសុទ្ធសឹងជាមធ្យោបាយសំខាន់ៗដែលនាំអ្នកអានទាំងឡាយឱ្យសម្រេចគោលបំណងអានរបស់ខ្លួន។ម្យ៉ាងវិញទៀត អំណានដោយប្រើមធ្យោបាយបច្ចេកវិទ្យាទំនើប ចំណាយពេលតិច ងាយស្រួលអាន និងជួយដល់បរិស្ថានមួយកម្រិតទៀត។ នាពេលបច្ចុប្បន្ន សិស្ស និស្សិត និងសាធារណៈជនកម្ពុជាដែលស្រឡាញ់អំណានកំពុងតែប្រើប្រាស់មធ្យោបាយអំណានទាំងនេះ។ បើយើងក្រឡេកមើលទៅប្រទេសជឿនលឿន ទោះបីជាបច្ចេកវិទ្យារីកចម្រើនខ្លាំងយ៉ាងណា អំណានតាមរយៈសៀវភៅនៅតែមានសន្ទុះដដែល។ ម្យ៉ាងវិញទៀត បច្ចេកវិទ្យាអានបែបទំនើបតាមរយៈឧបករណ៍ទំនើប អាស្រ័យលើលទ្ធភាពនៃធនធានអប់រំឌីជីថល និងមាតិកាឌីជីថលគ្រប់គ្រាន់ដែលបានផលិត និងបង្ហោះចែកចាយសម្រាប់អំណាន។

ក្នុងបរិបទកម្ពុជា ជាពិសេសក្នុងបរិការណ៍នៃការផ្ទុះរីករាលដាលនៃជំងឺកូវីដ-១៩ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានជំរុញឱ្យមានបរិវត្តកម្មឌីជីថលនៅក្នុងអេកូស៊ីស្តែមនៃការអប់រំ ជាពិសេសការអប់រំតាមប្រព័ន្ធអេឡិចត្រូនិកនិងការអប់រំពីចម្ងាយដើម្បីលើកកម្ពស់អំណានតាមរយៈការផលិតមាតិកាឌីជីថលដែលមានភាពចំរុះ ការកសាងសមត្ថភាពផ្នែកតំណភ្ជាប់និងវេទិកាឌីជីថល ការពង្រីកវិសាលភាពនៃមជ្ឈមណ្ឌលទិន្នន័យ និងការលើកកម្ពស់គុណភាពនៃការផលិតធនធានអប់រំឌីជីថល គួបផ្សំជាមួយការចែកសន្លឹកកិច្ចការឱ្យសិស្សយកទៅរៀននៅផ្ទះ និងការចុះទៅជួបជាមួយសិស្សជាបណ្តុំនៅតាមសហគមន៍។ ក្នុងន័យលើកកម្ពស់អំណាន និងភាពសម្បូរបែបនៃធនធានសៀវភៅសិក្សាឱ្យកាន់តែមានប្រសិទ្ធភាពនិងភាពសក្តិសិទ្ធិ និងផ្តល់ឱកាសអំណានកាន់តែច្រើនថែមទៀតដល់សិស្សានុសិស្ស និស្សិត និងសាធារណៈជន ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាលើកទឹកចិត្តនូវចំណុចមួយចំនួនដូចខាងក្រោម៖

1. សាស្ត្រាចារ្យ អ្នកស្រាវជ្រាវ និងបុគ្គលិកអប់រំ សូមបន្តនិងបង្កើនការបោះពុម្ពស្នាដៃបន្ថែមទៀត ដើម្បីធ្វើឱ្យធនធានសម្រាប់អំណានកាន់តែសម្បូរបែប ជាពិសេសធនធានអំណានជាខេមរភាសា

2. គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា សូមផ្តល់លទ្ធភាពគ្រប់បែបយ៉ាង ដើម្បីឱ្យបុគ្គលិកអប់រំគ្រប់លំដាប់ថ្នាក់ និង និស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សាអាចចូលរួមអាន និងសិក្សាស្រាវជ្រាវតាមគ្រប់លទ្ធភាពជាមួយធនធានអំណាន ជាពិសេសការរៀបចំឱ្យមានពេលវេលាសម្រាប់សហសិក្សា និងអំណានក្នុងបណ្ណាល័យ
3. សាស្ត្រាចារ្យតាមមុខវិជ្ជា និងអ្នកស្រាវជ្រាវតាមជំនាញឬវិស័យ ត្រូវរៀបចំដំណើរការរៀនបង្រៀន និងស្រាវជ្រាវដែលមានដាក់បញ្ចូលកិច្ចការស្វ័យសិក្សា សហសិក្សា ឬការស្រាវជ្រាវបណ្ណាល័យដែលតម្រូវឱ្យនិស្សិត ត្រូវអាននិងស្រាវជ្រាវជាមួយធនធានអំណាន
4. គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងមជ្ឈមណ្ឌលស្រាវជ្រាវ ត្រូវខិតខំឱ្យអស់លទ្ធភាពក្នុងការបង្កើតបណ្ណាល័យ មជ្ឈមណ្ឌលរក្សាឯកសារ ឬមជ្ឈមណ្ឌលអប់រំឌីជីថល ជាដើម ដើម្បីឱ្យបុគ្គលិកអប់រំគ្រប់លំដាប់ថ្នាក់និងនិស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សា អាចទទួលបាន និងស្វែងរកប្រភពសម្រាប់អំណាន កាន់តែសម្បូរបែប និងមានភាពបត់បែន ឆ្លើយតបតាមតម្រូវការអ្នកអាន
5. និស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សា ត្រូវខិតខំនិងចំណាយពេលអាន និងចាត់ទុកវប្បធម៌ និងអកប្បកិរិយាអំណានជាផ្នែកមួយ នៃពេលវេលានិងភាពស៊ីវិល័យនៃជីវិតប្រចាំថ្ងៃ
6. បងប្អូនជនរួមជាតិ ដែលជាមាតាបិតា ឬអ្នកអាណាព្យាបាល សូមជួយជំរុញនិងបង្កលក្ខណៈកាន់តែ ច្រើនថែមទៀត ជាពិសេសការលៃលកចំណាយនៅក្នុងគ្រួសារសម្រាប់ការទិញសម្ភារៈសិក្សា សៀវភៅអាន និងឧបករណ៍សម្រាប់អំណានដល់កូនៗ ដែលចាត់ទុកជាការវិនិយោគមួយដ៏សំខាន់ សម្រាប់ បង្កើនចំណេះដឹង និងអនាគតរបស់ពួកគេ។

ដោយមានការគាំទ្រពីក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ នៅឆ្នាំ២០២០ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និង កីឡា បានបង្កើតមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ដែលហៅកាត់ថា“មូលនិធិ ស.គ.ន” និងហៅជាភាសាអង់គ្លេសថា The Research Creativity and Innovation Fund ដែលហៅកាត់ជាភាសាអង់គ្លេសថា “RCI Fund”។ គោលដៅចម្បងនៃមូលនិធិនេះ គឺរួមចំណែកលើកកម្ពស់វប្បធម៌នៃការស្រាវជ្រាវ បំផុសគំនិតច្នៃប្រឌិត និងជំរុញការធ្វើនវានុវត្ត ដើម្បីជាប្រយោជន៍ដល់វិស័យអប់រំ យុវជន និងកីឡា ដែលឆ្លើយតបទៅនឹងទីផ្សារពលកម្ម និងសាកលភាវូបនីយកម្ម។ មូលនិធិ ស.គ.ន បាន សម្រេចកំណត់ប្រធានបទ ជាអាទិភាពសម្រាប់ការគាំទ្រដោយមូលនិធិចំនួន៣ រួមមាន ឌីជីថលនីយកម្មសម្រាប់បដិវត្តឧស្សាហកម្ម៤.០ (Digitalization for IR.4.0) ការស្រាវជ្រាវអនុវត្តលើវិស័យកសិកម្ម (Applied Agricultural Research) និងការស្រាវជ្រាវគរុកោសល្យសតវត្សទី២១ (21st Century Pedagogy Research)។

ដោយមានការធ្វើអាទិភាពូបនីយកម្មទៅលើទិសដៅនៃការប្រើប្រាស់ថវិកាមូលនិធិសម្រាប់ ឆ្នាំ២០២០ ក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ និងក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានផ្តល់ការគាំទ្រដល់ការ**រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អ សៀវភៅសិក្សា(Text book) ដែលនឹងត្រូវប្រើប្រាស់នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា**។ គោលបំណងនៃការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អ សៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សាគឺ ដើម្បីបង្កើនបរិមាណ លើកកម្ពស់គុណភាព និងពង្រីកសមធម៌នៃធនធានសិក្សាជាខេមរភាសា ជូន

ដល់និស្សិតដែលកំពុងបន្តការសិក្សា និងត្រៀមខ្លួនធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។ លើសពីនេះទៀតការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា មានគោលដៅដូចខាងក្រោម ៖

- ឆ្លើយតបជាបន្ទាន់ចំពោះការខ្វះខាតធនធានសិក្សា ដែលជាតម្រូវការសិក្សារបស់និស្សិតនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា
- លើកកម្ពស់ទំនើបភាវូបនីយកម្ម និងឧត្តមានុវត្តន៍នៃការរៀននិងបង្រៀន និងការស្រាវជ្រាវនៅលើមុខវិជ្ជា កម្មវិធីសិក្សា ឬមុខជំនាញជាក់លាក់
- បង្កើនភាពស៊ីជម្រៅក្នុងការកសាងវិជ្ជាជីវៈនិងបទពិសោធន៍សម្រាប់សាស្ត្រាចារ្យ និងអ្នកស្រាវជ្រាវ
- រួមចំណែកដល់ការកសាងភាពជាសហគមន៍វិជ្ជាជីវៈ ការចែករំលែកបទពិសោធន៍ និងវប្បធម៌នៃការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានវាយតម្លៃខ្ពស់ចំពោះការបោះជំហានប្រកបដោយមនសិការវិជ្ជាជីវៈនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងបុគ្គលិកអប់រំទាំងអស់ ក្នុងការរៀបចំ រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ដើម្បីបង្កើនបរិមាណ លើកកម្ពស់គុណភាព និងពង្រឹងសមធម៌នៃធនធានសិក្សាជាខេមរភាសា ជូននិស្សិតដែលកំពុងបន្តការសិក្សា និងត្រៀមខ្លួនធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។ សៀវភៅសិក្សាជាផ្នែកមួយនៃការទទួលស្គាល់គុណភាពអប់រំនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងជាធនធានសិក្សាដែលជាមូលដ្ឋានមួយដ៏សំខាន់ ក្នុងការគាំទ្រដល់ការបង្រៀន និងរៀន ហើយត្រូវមានបរិមាណគ្រប់គ្រាន់ ឆ្លើយតបទៅនឹងកម្មវិធីអប់រំ និងតម្រូវការសិក្សាស្រាវជ្រាវ។ ជាគោលការណ៍ គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សាទាំងអស់ ត្រូវមានសៀវភៅសិក្សាដែលប្រើជាគោលសម្រាប់មុខវិជ្ជានីមួយៗ។ ចំនួនសៀវភៅសិក្សាដែលគ្រប់គ្រាន់សម្រាប់ការស្រាវជ្រាវ និងការសិក្សារបស់និស្សិត ត្រូវមានយ៉ាងតិចមួយចំណងជើងក្នុងមួយមុខវិជ្ជា ហើយត្រូវតម្កល់យ៉ាងតិច២ច្បាប់ នៅក្នុងបណ្ណាល័យ ឬអាចរកបានតាមប្រព័ន្ធអេឡិចត្រូនិក។ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា លើកទឹកចិត្តបន្ថែមទៀតជូនដល់គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សារដ្ឋ និងឯកជនដែលបានស្នើសុំថវិកាមូលនិធិរួច សូមចូលរួមបន្ថែមទៀតដើម្បីបង្កើនចំនួនចំណងជើងសៀវភៅ។ ចំណែកគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សារដ្ឋនិងឯកជនដែលពុំទាន់បានដាក់ពាក្យស្នើសុំ សូមចូលរួមដើម្បីជាគុណប្រយោជន៍ដល់តម្រូវការដ៏ទទូច និងថ្លៃថ្លានៃនិស្សិតកម្ពុជាក្នុងការសិក្សា និងស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។

សេចក្ដីបញ្ជាក់
នៃមូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍

សៀវភៅសិក្សានេះជាលទ្ធផលនៃការស្នើសុំអនុវត្តថវិកាមូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ក្នុងគម្រោង**រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ដែលនឹងត្រូវប្រើប្រាស់នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។** សៀវភៅសិក្សានេះ ត្រូវបានរៀបរៀង និពន្ធ ឬកែលម្អដោយមានការធានាអះអាងថាជាស្នាដៃរបស់អ្នកនិពន្ធផ្ទាល់ និងបានឆ្លងកាត់ត្រួតពិនិត្យ ផ្ដល់យោបល់ និងវាយតម្លៃដោយក្រុមប្រឹក្សាអប់រំ ក្រុមប្រឹក្សាស្រាវជ្រាវ ឬក្រុមប្រឹក្សាដែលមានតម្លៃស្មើនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងតាមរយៈកិច្ចសន្យាដែលបានធ្វើឡើង និងដែលបានតម្កល់ទុកនៅមូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍។ រាល់ខ្លឹមសារ ការបកស្រាយ និងរូបភាព គឺជាជំហរនិងទស្សនៈផ្ទាល់របស់អ្នកនិពន្ធ ហើយ ពុំឆ្លុះបញ្ចាំង ឬជាតំណាងដល់មូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ នៃក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ឡើយ។

មាតិកា

បុព្វកថា i
សេចក្តីបញ្ជាក់ vi
មាតិកា vii
អារម្ភកថា ix
សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ x
ការបរិយាយលើមុខវិជ្ជា xi
មូលន័យសង្ខេប xii
មេរៀនទី១៖ អនុគមន៍កុំផ្លិច 1
១.១. ចំនួនកុំផ្លិច 1
១.២. អនុគមន៍កុំផ្លិច 6
១.៣. ស្វ៊ីត និងស៊េរីនៃចំនួនកុំផ្លិច 14
១.៤. អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលកុំផ្លិច 19
១.៥. អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ និងអ៊ីពែបូលិក 25
១.៦. អនុគមន៍លោការីតកុំផ្លិច និងស្វ័យគុណ 31
មេរៀនទី២៖ អនុគមន៍វិភាគ 45
២.១. អនុគមន៍នៃអថេរកុំផ្លិច (Functions of a Complex Variable) 45
២.២. លីមីត និងភាពជាប់ 47
២.៣. អនុគមន៍វិភាគ (Analytic function) 55
២.៤. ដេរីវេនៃអនុគមន៍ចំនួនពិតពីរអថេរ 61
២.៥. សមីការកូស៊ីរីម៉ាន់ 67
២.៦. សមីការកូស៊ីរីម៉ាន់ក្នុងទម្រង់ប៉ូលែ 74
២.៧. ដេរីវេនៃ $w=f(z)$ ក្នុងទម្រង់ប៉ូលែរ 77
២.៨. អនុគមន៍អាម៉ូនិក (Harmonic function) 79
មេរៀនទី៣៖ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អថេរកុំផ្លិច 84
៣.១.អាំងតេក្រាលខ្សែកោងក្នុងប្លង់ 84
៣.២. អាំងតេក្រាលមិនអាស្រ័យគន្លង (Independence of Paths) 90

៣.៣. ទ្រឹស្តីបទអាំងតេក្រាលកូស៊ីលើគន្លងងាយ 94
៣.៤. ទ្រឹស្តីបទ Cauchy-Goursat 103
៣.៥. ទ្រឹស្តីបទអាំងតេក្រាលកូស៊ី-Goursat 103
៣.៦. រូបមន្តអាំងតេក្រាលកូស៊ី (Cauchy Integral formula) 104
៣.៧.ដេរីវេនៃអនុគមន៍វិភាគ(រូបមន្តអាំងតេក្រាលសម្រាប់ដេរីវេអនុគមន៍វិភាគ) 108
មេរៀនទី៤៖ ស៊េរីនៃអនុគមន៍វិភាគ និងឯកជាតុ 120
៤.១. ស្វ៊ីត និងស៊េរីអនុគមន៍វិភាគ 120
៤.២. ស៊េរីស្វ័យគុណ (Power Series) 122
៤.៣. ស៊េរីតៃល័រ (Taylor’s Series) 127
៤.៤. ស៊េរីម៉ាឡូរ៉ាំង (Laurent’s Series) 131
៤.៥. សូន្យ និងឯកជាតុ (Zero and Singularity) 140
៤.៦.ទ្រឹស្តីបទ Schwarz 141
មេរៀនទី៥៖ ទ្រឹស្តីបទរេស៊ីឌុយ 145
៥.១. ទ្រឹស្តីបទរេស៊ីឌុយកូស៊ី (Residue Cauchy Theorem) 145
៥.២. អាំងតេក្រាលកំណត់អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ 155
៥.៣. អាំងតេក្រាលអ៊ីមប្រូភើអនុគមន៍ សនិទាន និងអ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល 162
៥.៤.អាំងតេក្រាលអ៊ីមប្រូភើនៃអនុគមន៍សនិទានជាមួយអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ 171
៥.៥. អាំងតេក្រាលផលគុណនៃអនុគមន៍សនិទាន និងអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ 174
៥.៦. ទ្រឹស្តីបទ Rouché 178
ឯកសារពិគ្រោះ 185
សន្ទានុក្រម 185

អារម្ភកថា

សៀវភៅ គណិតវិភាគទូទៅ៤ នេះមានខ្លឹមសារសំខាន់ៗដូចខាងក្រោម៖

១. អនុគមន៍ចំនួនកុំផ្លិច

២. អនុគមន៍វិភាគ

៣. អាំងតេក្រាលអនុគមន៍កុំផ្លិច

៤. ស៊េរីអនុគមន៍វិភាគ និងឯកជាតុ

៥. ទ្រឹស្តីបទរេស៊ីឌុយ

ដើម្បីឱ្យការសិក្សាទទួលបានលទ្ធផលពេញលេញ និស្សិតត្រូវសិក្សាលើឧទាហរណ៍បន្ថែមទៀតពីប្រភពផ្សេងៗអនុវត្តន៍ចំណេះដឹងទៅមុខវិជ្ជាដទៃទៀត និងធ្វើលំហាត់ដែលមានក្នុងសៀវភៅនេះនិងក្នុងឯកសារផ្សេងទៀតជាប្រចាំ។

ខ្ញុំបាទសង្ឃឹមថា មិត្តអ្នកអានពិតជានឹងផ្តល់រាល់ការរិះគន់ស្ថាបនា និងជួយកែលម្អសៀវភៅនេះឱ្យកាន់តែប្រសើរឡើង។

សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ

ជាការពិតសៀវភៅ «គណិតវិភាគទូទៅ ៤ » ដែលលេចចេញជារូបរាងនៅពេលនេះគឺបានកើតឡើងពីការខិតខំ និងយកចិត្តទុកដាក់ចូលរួមពីភាគី និងស្ថាប័នពាក់ព័ន្ធជាច្រើន។

ខ្ញុំបាទសូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅបំផុតដល់ភាគី និងស្ថាប័នពាក់ព័ន្ធទាំងអស់ដូចជា ៖

- ក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ ដែលបានគាំទ្រយ៉ាងពេញទំហឹងដល់ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាឱ្យបង្កើតមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ហៅកាត់ថា «មូលនិធិ ស.គ.ន»។

- ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាដែលបានបង្កើតមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ដែលហៅកាត់ថា «មូលនិធិ ស.គ.ន» ដើម្បីរួមចំណែកលើកកម្ពស់វប្បធម៌នៃការស្រាវជ្រាវ បំផុសគំនិតច្នៃប្រឌិត និងជំរុញការធ្វើនវានុវត្ត ដើម្បីជាប្រយោជន៍ដល់វិស័យអប់រំ យុវជន និងកីឡា ដែលឆ្លើយតបទៅនឹងទីផ្សារពលកម្ម និងសាកលភាវូបនីយកម្ម។

- មូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ដែលបានគាំទ្រដល់ការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា (Text book) ដែលនឹងត្រូវប្រើប្រាស់នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា ដើម្បីបង្កើនបរិមាណ លើកកម្ពស់គុណភាព និងពង្រីកសមធម៌នៃធនធានសិក្សាជាខេមរភាសាជូនដល់និស្សិតដែលកំពុងបន្តការសិក្សា និងត្រៀមខ្លួនធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។

- ឯកឧត្តមវិទ្យាស្ថានគរុកោសល្យបាត់ដំបងដែលបានចាត់តាំងជាគណៈកម្មការនិពន្ធចូលរួមការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សានេះ។

- នាយកដ្ឋានបណ្តុះបណ្តាលដែលបានចាត់តាំងជាគណៈកម្មការនិពន្ធ និងគណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យ លើស្នាដៃនៃការចូលរួមការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សានេះ។

- លោកប្រធាន នាយកដ្ឋានបណ្តុះបណ្តាលដែលព្រមព្រៀងទទួលសិទ្ធិជាតំណាងអ្នករៀបរៀងក្នុងការចាត់ចែង និងសម្របសម្រួលជាមួយក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ចុះហត្ថលេខាលើកិច្ចព្រមព្រៀង និងកិច្ចដំណើការទូទាត់ថវិកាតាមរយៈការស្នើសុំ និងទទួលថវិកា បោះពុម្ព និងផ្សព្វផ្សាយបន្តនូវស្នាដៃរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អរបស់អ្នករៀបរៀងក្នុងការរៀន និងបង្រៀនក្នុងគ្រឹះស្ថានសិក្សា និងប្រគល់សិទ្ធិស្របតាមការកំណត់នៃកិច្ចព្រមព្រៀង ស្តីពីការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា ក្រោមការគាំទ្រនៃមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍។

- គ្រូឧទ្ទេសមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យានៃវិទ្យាស្ថានគរុកោសល្យបាត់ដំបងដែលបានផ្តល់មតិកែលម្អលើខ្លឹមសារ នៃមេរៀននីមួយៗឱ្យកាន់តែមានភាពសុក្រឹត និងមានលក្ខណៈវិទ្យាសាស្ត្រ។

ខ្ញុំបាទសង្ឃឹមថា សៀវភៅនេះនឹងឆ្លើយតបជាបន្ទាន់ចំពោះការខ្វះខាតធនធានសិក្សា ដែលជាតម្រូវការសិក្សារបស់សិស្ស និស្សិត នៅកម្រិតវិទ្យាល័យ និងឧត្តមសិក្សា។

ការបរិយាយលើមុខវិជ្ជា

ការសិក្សាលម្អិតលើកម្មវិធីដែលអាចឱ្យអ្នកសិក្សាចេះប្រើប្រាស់បានដូចជា៖ មេរៀន ឧទាហរណ៍ លំហាត់អនុវត្តន៍ និងលំហាត់ស្រាវជ្រាវរួមមានវិធីផ្សេងក្នុងការដោះស្រាយដោយវិភាគ ការគិតត្រិះរិះពិចារណា ជាដើម។ មុខវិជ្ជាគណិតវិភាគទូទៅ៤ផ្តោតសំខាន់ទៅលើមូលដ្ឋានគ្រឹះសំខាន់ៗបន្ថែមទៀតនៃវិភាគទូទៅដែលមានមាតិកាសំខាន់ៗរួមមាន៖ អនុគមន៍ចំនួនកុំផ្លិច ស៊ីត និងស៊េរីអថេរកុំផ្លិច អនុគមន៍វិភាគ អាំងតេក្រាលអនុគមន៍កុំផ្លិច ស៊េរីអនុគមន៍វិភាគនិងឯកជាតុ និងទ្រឹស្តីបទរេស៊ីឌុយ។

ខ្លឹមសារមេរៀនដែលបានលើកឡើងក្នុងសៀវភៅនេះអាចជួយដោះស្រាយបញ្ហាក្នុងការបង្រៀន និងរៀនណិតវិទ្យាដែលបង្កលក្ខណៈងាយស្រួលដល់គ្រូឧទ្ទេស គ្រូបង្រៀន គរុនិស្សិត គរុសិស្ស សិស្សានុសិស្សអាចអនុវត្តន៍ និងស្រាវជ្រាវសម្រាប់សាធារណៈជនទូទៅ។ ជាមូលដ្ឋានគ្រឹះសម្រាប់ហ្វឹកហាត់គរុនិស្សិត សិស្សសិក្សានូវរាល់ខ្លឹមសារស្របតាមកម្មវិធីដែលធ្វើឱ្យមេរៀននីមួយៗមានទំនាក់ទំនងគ្នាពីមួយចំណុចទៅមួយចំណុច។

មូលន័យសង្ខេប

សៀវភៅនេះផ្តោតសំខាន់ទៅការវិភាគដែលមានមេរៀនសង្ខេប និយមន័យ ទ្រឹស្តីបទឧទាហរណ៍ លំហាត់អនុវត្តន៍ជាដើមព្រមទាំងមានទំនាក់ទំនងនៃមេរៀននីមួយៗ។ នៅក្នុងមេរៀនអនុគមន៍កុំផ្លិច ស្វ៊ីត និងស៊េរីអថេរកុំផ្លិច អនុគមន៍វិភាគ អាំងតេក្រាលអនុគមន៍កុំផ្លិច ស៊េរីអនុគមន៍វិភាគនិងឯកជាតុ និងទ្រឹស្តីបទរេស៊ីឌុយស៊េរីតៃល័រក្នុងគោលបំណងដើម្បីឱ្យគរុនិស្សិតទទួលទទួលបានចំណេះដឹងអំពីមូលដ្ឋានគ្រឹះស្តីពីអថេរកុំផ្លិចសំខាន់ៗ និងកំណត់ខ្លឹមសារសំខាន់ៗនៅក្នុងមេរៀនវិភាគកុំផ្លិចដូចជា អនុគមន៍កុំផ្លិច អាំងតេក្រាលកុំផ្លិច ស៊េរីអថេរកុំផ្លិច សូន្យនិងឯកជាតុ និងទ្រឹស្តីបទរេស៊ីឌុយខាងលើផងដែរ។ នៅផ្នែកនៃមេរៀនប្រើប្រាស់ចំណេះដឹងមូលដ្ឋានគ្រឹះវិភាគកុំផ្លិច សម្រាប់ការរៀន និងការបង្រៀនដើម្បីបណ្តុះគំនិតគរុនិស្សិតឱ្យប្រើប្រាស់អនុគមន៍អថេរកុំផ្លិច អាំងតេក្រាលកុំផ្លិច ស៊េរីអថេរកុំផ្លិច សូន្យនិងឯកជាតុ និងទ្រឹស្តីបទរេស៊ីឌុយសម្រាប់ការបង្រៀន និងដើម្បីដោះស្រាយបញ្ហាដែលទាក់ទងនឹងជីវភាពប្រចាំថ្ងៃ។

មេរៀនទី១៖ អនុគមន៍កុំផ្លិច

១.១. ចំនួនកុំផ្លិច

១.១.១. កាយ $\mathbb{C}$ នៃចំនួនកុំផ្លិច

ទ្រឹស្តីបទ១៖ កាយមានលក្ខណៈត្រឡប់ $\mathbb{C}$ ដែលមានធាតុមួយតាងដោយ i ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដូចខាងក្រោម៖

(i) $\mathbb{R}$ ជាកាយរងនៃ $\mathbb{C}$

(ii) $\forall z \in \mathbb{C}, z$ សរសេរជាមួយទំនាក់ទំនងមួយបែបគត់ $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$

(iii) $i^2 = -1$

សម្រាយបញ្ជាក់

គេយក $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ ហើយគេកំណត់ប្រមាណវិធីក្នុងគឺ $\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$

ប្រមាណវិធីបូក $(+)$ ៖ $(x,y) + (x',y') = (x + x', y + y')$

ប្រមាណវិធីគុណ $(\bullet)$ ៖ $(x,y)\cdot(x',y') = (xx' - yy', xy' + yx')$

គេបាន $(\mathbb{R}^2, +, \bullet)$ មានទម្រង់ជាកាយមានលក្ខណៈត្រឡប់ព្រោះ៖

1) $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ជាកងឯកតា

❖ វិធីគុណមានលក្ខណៈត្រឡប់

$(x,y)\cdot(x',y') = (x',y')\cdot(x,y)$ ពិតព្រោះវិធីគុណក្នុង $\mathbb{R}$ មានលក្ខណៈត្រឡប់

❖ វិធីគុណមានលក្ខណៈផ្តុំ

$$[(x,y)\cdot(x',y')]\cdot(x'',y'') = (x,y)\cdot[(x',y')\cdot(x'',y'')]$$

$$\Leftrightarrow (xx' - yy', xy' + yx')(x'',y'') = (x,y)\cdot(x'x'' - y'y'', x'y'' + y'x'')$$

$$\Leftrightarrow [(xx' - yy')x'' - (xy' + yx')y'', (xx' - yy')y'' + (xy' + yx')x'']$$

$$= [x(x'x'' - y'y'') - y(x'y'' + y'x''), x(x'y'' + y'x'') + y(x'x'' - y'y'')]$$

❖ វិធីគុណមានលក្ខណៈបំបែកធៀបវិធីបូក

$$(x,y)\cdot[(x',y') + (x'',y'')] = (x,y)(x',y') + (x,y)(x'',y'')$$

$$\Leftrightarrow (x,y)(x' + x'', y' + y'') = [x(x' + x'') - y(y' + y''), x(y' + y'') + y(x' + x'')]$$

$$= (xx' + xx'' - yy' - yy'', xy' + xy'' + yx' + yx'')$$

$$= (xx' - yy', xy' + yx') + (xx'' - yy'', xy'' + yx'')$$

$$= (x,y)\cdot(x',y') + (x,y)(x'',y'')$$ ពិត

❖ ធាតុឯកតា ឬធាតុណឺតនៃវិធីគុណគឺ $(1,0)$

ព្រោះ $(x,y)(1,0) = (x\cdot 1 - y\cdot 0, x\cdot 0 + y\cdot 1) = (x,y)$

2) $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^2)^* = \mathbb{R}^2 - \{0,0\}$ មានធាតុច្រាសចំពោះប្រមាណវិធីគុណ

$$\left(x,y\right)\cdot\left(x',y'\right)=\left(1,0\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(xx'-yy',xy'+yx'\right)=\left(1,0\right)$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}xx'-yy'=1\\xy'+yx'=0\end{cases}$$
$D=\begin{vmatrix}x & -y\\ y & x\end{vmatrix}=x^2+y^2>0$ ព្រោះ $\left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)$

$$D_{x'}=\begin{vmatrix}1 & -y\\ 0 & x\end{vmatrix}=x$$
$$D_{y'}=\begin{vmatrix}x & 1\\ y & 0\end{vmatrix}=-y$$
ដូច្នេះ $\left(x',y'\right)=\left(x,y\right)^{-1}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ ។

តាង $\mathbb{C}'=\mathbb{R}^2$ ដែលប្រដាប់ដោយប្រមាណវិធីទាំងពីរខាងលើមានន័យថា $\left(\mathbb{C},+,\cdot\right)$ ជាកាយមានលក្ខណៈត្រឡប់។

$\left(\alpha\right)$ គេបាន $\mathbb{R}'=\left\{\left(x,0\right)\mid x\in\mathbb{R}\right\}$ ជាកាយរងនៃ $\mathbb{C}'$

- $\left(x,0\right)+\left(x',0\right)=\left(x+x',0\right)$
- $-\left(x,0\right)=\left(-x,0\right)\in\mathbb{R}$ ពិត
- $\left(x,0\right)\left(x',0\right)=\left(xx'-0,0+0\right)=\left(xx',0\right)\in\mathbb{R}'$ ពិត
- $\forall x\neq 0,\left(x,0\right)^{-1}=\left(\frac{x}{x^2+0},\frac{-0}{x^2+0}\right)=\left(\frac{1}{x},0\right)\in\mathbb{R}'$ ពិត

$\left(\beta\right)$ បើតាង $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}'$

$$x\mapsto\varphi\left(x\right)=\left(x,0\right)$$

គេបាន φ ជាអ៊ីសូម៉័រភីសនៃកាយព្រោះ φ

- φ មួយទល់មួយ (សម្រាយងាយ)
- $\varphi\left(x+x'\right)=\left(x+x',0\right)=\left(x,0\right)+\left(x',0\right)=\varphi\left(x\right)+\varphi\left(x'\right)$ ពិត
- $\varphi\left(x\cdot x'\right)=\left(x\cdot x',0\right)=\left(x,0\right)\cdot\left(x',0\right)=\varphi\left(x\right)\cdot\varphi\left(x'\right)$ ពិត

ដូច្នេះ គេអាចប្រដូច $\mathbb{R}'$ ទៅនឹង $\mathbb{R}$ ដែលកំណត់សរសេរដោយ $\left(x,0\right)=x$ ជាពិសេស $\left(0,0\right)=0,\left(1,0\right)=1$ ។

$\left(\gamma\right)$ ម្យ៉ាងទៀតបើតាង $i=\left(0,1\right)\in\mathbb{C}'$ គេបាន៖

$i^2=\left(0,1\right)\left(0,1\right)=\left(0-1,0+0\right)=\left(-1,0\right)=-1$ មានន័យថា $\left(iii\right)$ $i^2=-1$ ពិត ហើយតាមលក្ខណៈ $\mathbb{C}'$ ជាលំហវ៉ិចទ័រលើកាយ $\mathbb{R}$ គេអាចសរសេរ

$$\forall\left(x,y\right)\in\mathbb{C}',\left(x,y\right)=\left(x,0\right)+\left(0,y\right)=x\left(1,0\right)+y\left(0,1\right)=x+iy$$

ដូច្នេះ តាម (γ) បើតាង $\mathbb{C}=\{z=x+iy \mid x,y\in\mathbb{R}\}$ នោះគេបាន $\mathbb{C}$ ជាកាយមានលក្ខណៈត្រឡប់ ហើយមាន $\mathbb{R}$ ជាកាយរង។ ទ្រឹស្តីបទពិតហើយ $\mathbb{C}$ ជាសំណុំចំនួនកុំផ្លិច។

- **ចំណាំ**

ក. បើ $z=x+iy\in\mathbb{C}$ នោះ x ហៅថាផ្នែកពិតនៃ z តាងដោយ $x=\mathrm{Re}(z)$ និង y ហៅថាផ្នែកនិម្មិតនៃ z តាងដោយ $y=\mathrm{Im}(z)$

- បើ $y=0\Rightarrow z=x$ ហៅថាផ្នែកពិតសុទ្ធ
- បើ $x=0\Rightarrow z=iy$ ហៅថាផ្នែកនិម្មិតសុទ្ធ

ខ.បើ $z=x+iy\in\mathbb{C}$ គេកំណត់ $\bar{z}=x-iy$ ហៅថាកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ z

លក្ខណៈ

(i) z ជាចំនួនពិតសុទ្ធលុះត្រាតែ $\bar{z}=z,$ z ជាចំនួននិម្មិតសុទ្ធ $\bar{z}=-z$

(ii) $\quad z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z)\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$

$z-\bar{z}=2i\,\mathrm{Im}(z)\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z)=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

(iii) $\overline{z+z'}=\bar{z}+\overline{z'},\ \overline{zz'}=\bar{z}\cdot\overline{z'}$

គ.បើ $z=x+iy\in\mathbb{C}$ គេតាង $|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0$ ហៅថាម៉ូឌុលនៃ z

(i) $|z|=0\Leftrightarrow z=0$

(ii) $z\cdot\bar{z}=|z|^2\Leftrightarrow |z|=\sqrt{z\bar{z}}$

(iii) $|z|=|-z|=|\bar{z}|$

(iv) $|\mathrm{Re}(z)|,|\mathrm{Im}(z)|\leq|z|$

$|z|\leq|\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)|$

(v) $|z\bar{z}|=|z||\bar{z}|$ ពិតតាម (iii)

(vi) $|z+z'|\leq|z|+|z'|$ (សម្រាយបញ្ជាក់ដោយខ្លួនឯង)

សម្រាយបញ្ជាក់

(vi) $|z+z'|\leq|z|+|z'|$

យើងមាន $|z+z'|^2=(z+z')\left(\overline{z+z'}\right)=(z+z')\left(\bar{z}+\overline{z'}\right)$

$=z\bar{z}+z\overline{z'}+z'\bar{z}+z'\overline{z'}$

$=|z|^2+|z'|^2+2\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right)$

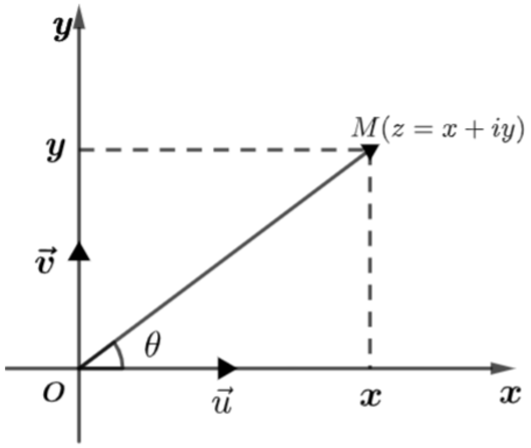
ដោយ $2\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right)\leq 2\left|z\overline{z'}\right|=2|z|\left|\overline{z'}\right|=2|z||z'|$

$\Rightarrow |z+z'|^2 \le |z|^2+|z'|^2+2|z||z'| = \left(|z|+|z'|\right)^2$

$\Rightarrow |z+z'| \le |z|+|z'|$

១.១.២.ប្លង់កុំផ្លិច $\mathbb{C}$

$a)$. ម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច



រូបទី១.១

ដោយ $\mathbb{C}$ ប្រដូចនឹង $\mathbb{R}^2$ គេហៅថា**ប្លង់កុំផ្លិច** គឺជាប្លង់អាភីន ρ (ចំណុច)ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរមេ (xOy) ដែលមានវ៉ិចទ័រឯកតា $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ដែលពី $\forall M(x,y)\in\rho$ គេផ្ដុំចំនួនកុំផ្លិច $z=x+iy$ ហើយម្យ៉ាងទៀតការផ្ដុំនេះជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយគេសរសេរដោយ $M(z)$ ។

មើល M មានអាភិច z *i.e* z ជាអាភិចនៃ y ហើយ M ជារូបនៃ z ក្នុងករណីនេះគេបាន៖

- $\rho=|z|=OM=\sqrt{x^2+y^2}\ge 0$ ម៉ូឌុលនៃ z
- បើ $z\ne 0$ *i.e* $\rho>0$ គេហៅថាអាគុយម៉ង់នៃ z គឺមានមុំទិសដៅ $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$ បើ $\theta\in[-\pi,\pi]$ ជាតម្លៃមួយនៃ $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$ នោះ θ ហៅថាអាគុយម៉ង់គោលនៃ z ។ គេតាងដោយ $\arg(z)=\theta$ ហើយអាគុយម៉ង់ទូទៅនៃ z គឺ

  $\arg(z)=(\vec{u},\overrightarrow{OM})=\theta\pm 2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

  ឬ $\arg(z)=\theta(\mathrm{mod}\,2\pi)$ ក្នុងករណីនេះគេបាន៖

  $[\rho,\theta]=[\rho,\theta+2k\pi]$ ហៅថា កូអរដោនេប៉ូលែនៃ $M(x,y)$ ហើយទំនាក់ទំនង

  $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$

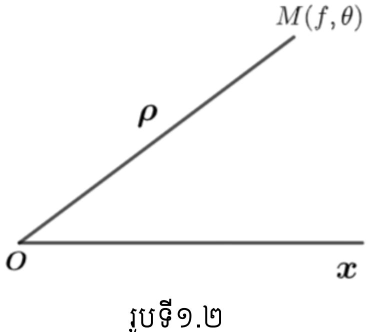
  $x=\rho\cos\theta$

  $y=\rho\sin\theta$

  គេបាន

  $\underbrace{z=x+iy}=\underbrace{[\rho,\theta]=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)}$

  រាងពីជគណិត រាងត្រីកោណមាត្រនៃ z



រូបទី១.២

ចំណាំ៖

១. បើ $z=0$ គ្មានអាគុយម៉ង់ ឬមានអាគុយម៉ង់កំណត់មិនបាន

២. ចំនួនកុំផ្លិចពិតសុទ្ធ $z=x\ne 0$ ដែលមានរូបនៅលើអ័ក្សចំនួនពិត (Ox) មានអាគុយម៉ង់គោលស្មើសូន្យលើ $x>0$ និង π បើ $x<0$ ។

ចំនួនកុំផ្លិចនិម្មិតសុទ្ធដែល $z=iy\ne 0$ មានរូបលើអ័ក្សចំនួននិម្មិត (Oy) មានអាគុយម៉ង់

ស្មើ $\frac{\pi}{2}$ បើ $y>0$ និងស្មើ $-\frac{\pi}{2}$ បើ $y<0$ ។

៣. ក្នុងករណីខ្លះចំនួនកុំផ្លិច $z=x+iy$ មានរូបជាវ៉ិចទ័រសេរី $\vec{v}(x,y)=\overrightarrow{OM}=x\vec{u}+y\vec{v}$ គេសរសេរដូចគ្នា $\vec{v}(z=x+iy)$ ដែល z ជាអាភិចនៃ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជារូបនៃ z នោះគេបាន $\rho=|z|=\|\vec{v}\|, \arg(z)=(\vec{u},\vec{v}) \pmod{2\pi}$ ។

លក្ខណៈ៖

ក. បើ $\vec{v}(z), \vec{v}'(z'), \lambda\in\mathbb{R}$ គេបាន $\vec{v}\pm\vec{v}'(z\pm z'), \lambda\vec{v}(\lambda z)$ ។

ខ. $A(z_A), B(z_B)\Rightarrow \overrightarrow{AB}(z_B-z_A)$ ព្រោះ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

b). ម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃផលគុណ ចម្រាស់ ផលចែក និងស្វ័យគុណ

- គេឱ្យ $z=[\rho,\theta], z'=[\rho',\theta'], \rho,\rho'>0, \theta,\theta'\in\mathbb{R}$ គេបាន៖

$$z\cdot z'=[\rho,\theta][\rho',\theta']=\left[\rho(\cos\theta+i\sin\theta)\right]\left[\rho'(\cos\theta'+i\sin\theta')\right]$$
$$=\rho\rho'\left[(\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta')+i(\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta')\right]$$
$$=\rho\rho'\left[\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')\right]=[\rho\rho',\theta+\theta']$$

$$\Rightarrow\begin{cases}|z\cdot z'|=\rho\rho'=|z|\cdot|z'|\\ \arg(z\cdot z')=\theta+\theta'=\arg(z)+\arg(z')\end{cases}$$

- គេឱ្យ $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$

បើ $z=x+iy\Rightarrow\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$

គេបាន $\bar{z}=x-iy=\rho\cos\theta-i\rho\sin\theta$
$$=\rho\left[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\right]$$

$$\Rightarrow\begin{cases}|\bar{z}|=\rho|z|\\ \arg(\bar{z})=-\theta=-\arg(z)\end{cases}$$

- គេឱ្យ $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)\neq 0$

គេមាន $\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\cdot\bar{z}}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}=\frac{\rho\left[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\right]}{\rho^2}$
$$=\frac{1}{\rho}\left[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\right]$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{\rho}=\frac{1}{|z|}\\ \arg\left(\frac{1}{z}\right)=-\theta=-\arg(z)\end{cases}$$

- គេឱ្យ $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ និង $z'=\rho'(\cos\theta'+i\sin\theta')$
- បើ $z'\neq 0 \Rightarrow \dfrac{z}{z'}=z\cdot\dfrac{1}{z'}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\left|\dfrac{z}{z'}\right|=\left|z\cdot\dfrac{1}{z'}\right|=|z|\cdot\left|\dfrac{1}{z'}\right|=|z|\cdot\dfrac{1}{|z|}=\dfrac{|z|}{|z'|}=\dfrac{\rho}{\rho'}\\ \arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)=\arg\left(z\times\dfrac{1}{z'}\right)=\arg(z)+\arg\left(\dfrac{1}{z'}\right)\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad=\arg(z)-\arg(z')=\theta-\theta'\end{cases}$$

ចំណាំ៖

- $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}=\dfrac{1}{[\rho,\theta]}=\dfrac{[\rho,-\theta]}{\rho^2}=\left[\dfrac{1}{\rho},-\theta\right]$
- $\dfrac{z'}{z}=\dfrac{[\rho',\theta']}{[\rho,\theta]}=\left[\dfrac{\rho'}{\rho},\theta'-\theta\right]$
- $z^2=[\rho,\theta][\rho,\theta]=[\rho^2,2\theta]$

ឧបមាថាពិតរហូតដល់ $n-1$ គឺ $z^{n-1}=[\rho,\theta]^{n-1}=[\rho^{n-1},(n-1)\theta]$

ចំពោះ $n\in\mathbb{N}$ ហើយ $n\geq 2$ គេបាន៖

$$z^n=[\rho,\theta]^n=[\rho,\theta]^{n-1}[\rho,\theta]=[\rho^{n-1},(n-1)\theta][\rho,\theta]$$

$$=[\rho^n,n\theta]\text{ ពិត}$$

ដូច្នេះ $[\rho,\theta]^n=[\rho^n,n\theta],\ \forall n\in\mathbb{N}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $\forall n\in\mathbb{N}:[\rho,\theta]^{-n}=\dfrac{1}{[\rho,\theta]^n}=\dfrac{1}{[\rho^n,n\theta]}=[\rho^{-n},-n\theta]$

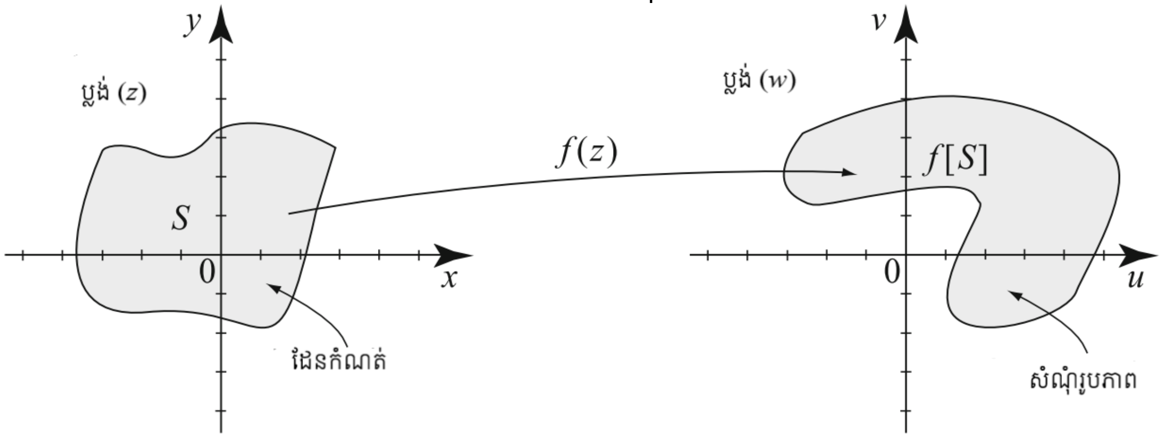
ដូចនេះ $\forall k\in\mathbb{Z},\ [\rho,\theta]^k=[\rho^k,k\theta]$ ។

១.២. អនុគមន៍កុំផ្លិច

តម្លៃអនុគមន៍កុំផ្លិច f នៃអថេរកុំផ្លិចគឺជាទំនាក់ទំនងដែលកំណត់ទៅគ្រប់ចំនួនកុំផ្លិច z នៅក្នុងសំណុំ S ដែល $f(z)$ មានចំនួនកុំផ្លិចតែមួយគត់។ សំណុំ S ជាសំណុំរងនៃចំនួនកុំផ្លិចហើយត្រូវបានហៅថាដែនកំណត់នៃ f ។ ចំនួនកុំផ្លិចតែមួយគត់ $f(z)$ ត្រូវបានគេហៅថាតម្លៃនៃ f ត្រង់ z ហើយពេលខ្លះត្រូវបានសរសេរ $w=f(z)$។

ដើម្បីមើលតម្លៃអនុគមន៍កុំផ្លិចពី $z\mapsto f(z)$ គឺនៅក្នុងមានវិមាត្របួន៖ វិមាត្រពីរចំពោះអថេរ z និងពីរសម្រាប់តម្លៃ $w=f(z)$។ ដោយសាររូបភាពនៅក្នុងវិមាត្របួនមិនអាចទៅរួច យើងប្រើប្លង់ពីរគឺប្លង់ z និងប្លង់ w ហើយមើលអនុគមន៍ជាអនុវត្តន៍ពីសំណុំរងនៃប្លង់ទៅប្លង់មួយទៀត (សូមមើលរូបភាព ១.៣)។ ប្រសិនបើយើងសរសេរ $z=x+iy$ និង $w=u+iv$ ដោយសន្មត់អ័ក្សប្លង់ z ត្រូវបាន

តាងដោយ x និង y ហើយអ័ក្សប្លង់ w ដោយ u និង v ។ រូបភាព $f[S]$ នៃសំណុំ S ដោយអនុវត្តន៍ f ជាសំណុំនៃគ្រប់ចំណុច w ដែល $w = f(z)$ ចំពោះ z នៅក្នុង S ។

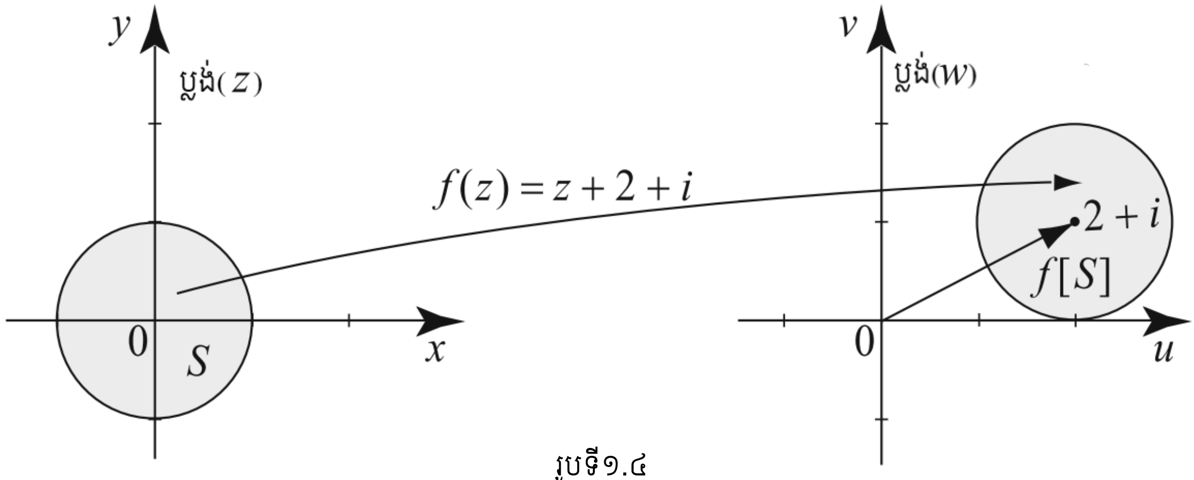


រូបទី១.៣

ឧទាហរណ៍ទី១៖ តាង S ជារង្វង់ដែល $S = \{z : |z| < 1\}$ ។ ចូររករូបភាពនៃ S ក្រោមបម្លែង $f(z) = z + 2 + i$ ។

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះ $z \subset S$ ចំនួន $f(z)$ ត្រូវបានកើតឡើងដោយការបូកបន្ថែម z ទៅ $2+i$ ។ បើ $z = (x, y)$ នោះ $f(z) = (x+2, y+1)$ ។ គេបានអនុគមន៍បម្លែងកិលគ្រង់ចំណុច z ពីរឯកតាទៅខាងស្តាំ និងមួយឯកតាទៅខាងលើ។ រូបភាពនៃ S គឺជាសំណុំ S បំប្លែងកិលពីរឯកតាទៅខាងស្តាំ និងមួយឯកតាទៅខាងលើដូចរូបទី១.៤។



រូបទី១.៤

បម្លែងកិលជាបម្លែងនៃទម្រង់ $f(z) = z + b$ ដែល b ជាចំនួនកុំផ្លិចហើយ $b = 2 + i$ ។

ដូច្នេះនេះហើយ រូបភាពនៃរង្វង់គឺជារង្វង់ដែលមានកាំដូចគ្នា និងផ្ចិត $2+i$ ។

នោះគេបាន $f[S] = \{w : |w - 2 - i| \le 1\}$ ។

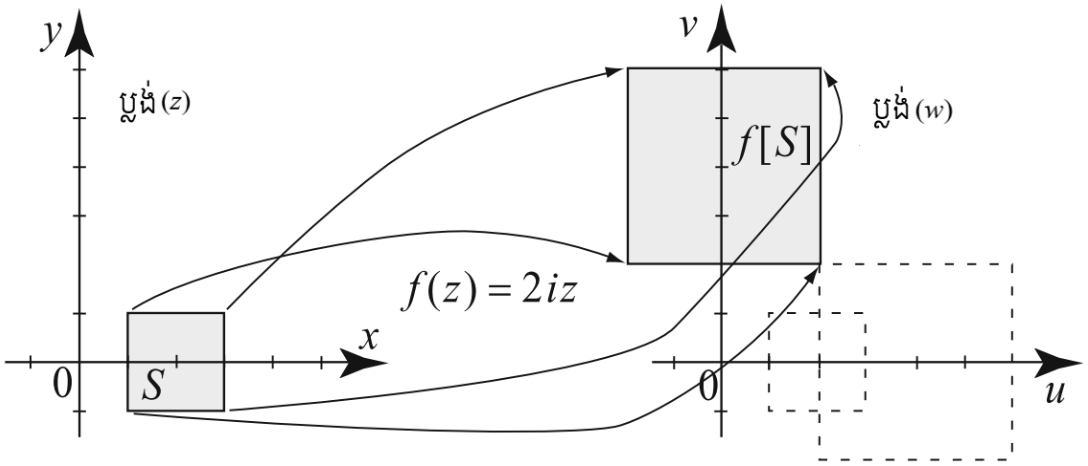
ឧទាហរណ៍ទី២៖ (បម្លែងចាំង និងបម្លែងវិល) តាង S ជាការេបិទជិតនៃប្រវែងជ្រុងពីរជាមួយស្របទៅនឹងអ័ក្សត្រង់ចំណុចកណ្តាលពីរ(ដូចរូបទី១.៥)។

ក. តើរូបភាព S ជាបម្លែងអ្វីនៃ $f(z) = 3z$?

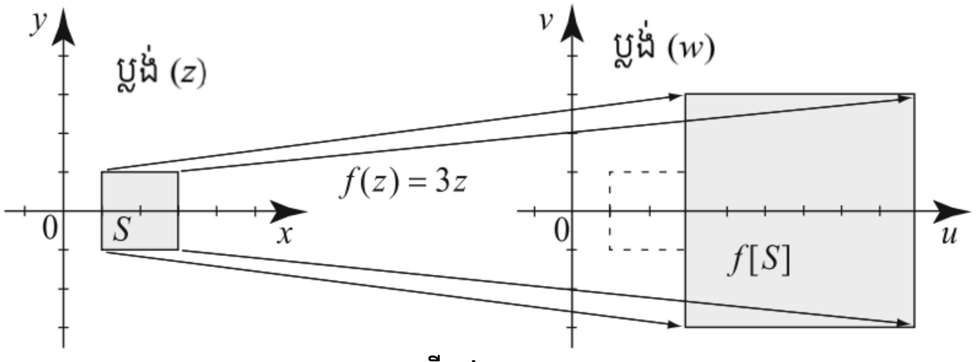
ខ. តើរូបភាព S ជាបម្លែងអ្វីនៃ $f\left(z\right)=2iz$?

ដំណោះស្រាយ

ក. ចំពោះ $z\subset S$ អនុគមន៍ $f\left(z\right)=3z$ មានរូបភាពកើនឡើងបីដង និងមិនផ្លាស់ប្តូររូបរាងដើម។ ដូច្នេះ $f\left(z\right)$ ស្ថិតនៅលើកាំរស្មីដែលលាតសន្ធឹងពីប្រភពដើមទៅ z នៅចម្ងាយបីដងពីរូបភាពដើមទៅ z ។ ជាពិសេសរូបភាពនៃការេគឺជាការេថ្មីមួយទៀតដែលកំពូលនៃជ្រុងគឺជារូបភាពកំពូលនៃជ្រុងការេដើម។



រូបទី១.៥



រូបទី១.៦

រូបភាពនៃកំពូលជ្រុង S ចំពោះ $f\left(z\right)=3z$ គឺ $f\left(1+i\right)=3+3i, f\left(1-i\right)=3-3i,$ $f\left(3+i\right)=9+3i, f\left(3-i\right)=9-3i$ ។

ដូចដែលបានឃើញពីរូបភាពទី១.៦ រូបភាពរបស់ S គឺជាការេនៃប្រវែងជ្រុង 6 ដែលស្ថិតនៅកណ្តាលចំណុច 6 នៅលើអ័ក្សពិត។

ខ. នៅក្នុងទម្រង់ប៉ូលែ យើងមាន $i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$ និង $f\left(z\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)z$

បម្លែង $f\left(z\right)=2iz$ មានបម្លែងបណ្តាក់ពីរ៖ បំប្លែងចាំងដោយពីរកត្តាមួយដោយវិលច្រាសទិសទ្រនិចនាឡិកានៃមុំ $\frac{\pi}{2}$ ហើយមួយទៀតដោយមុំនៃបម្លែងវិលតាមអាគុយម៉ង់ $2i$ ។

គេបានចំពោះ $z \subset S$ អនុគមន៍ $f(z)=2iz$ មានរូបភាពកើនឡើងពីរដង និងបូកបន្ថែម $\frac{\pi}{2}$ ទៅនឹងអាគុយម៉ង់។ ដើម្បីកំណត់ $f[S]$ យកសំណុំ S ដោយពង្រីកវាចំនួនពីរដង បន្ទាប់មកបង្វិលវាឱ្យប្រាសទ្រនិចនឡិកាដោយមុំ $\frac{\pi}{2}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៣៖ (ចម្រាស) ចូររករូបភាពនៃសំណុំក្រោមការបម្លែង $f(z)=\frac{1}{z}$ ដូចខាងក្រោម៖

ក. $S=\left\{z: 0<|z|<1, 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{2}\right\}$

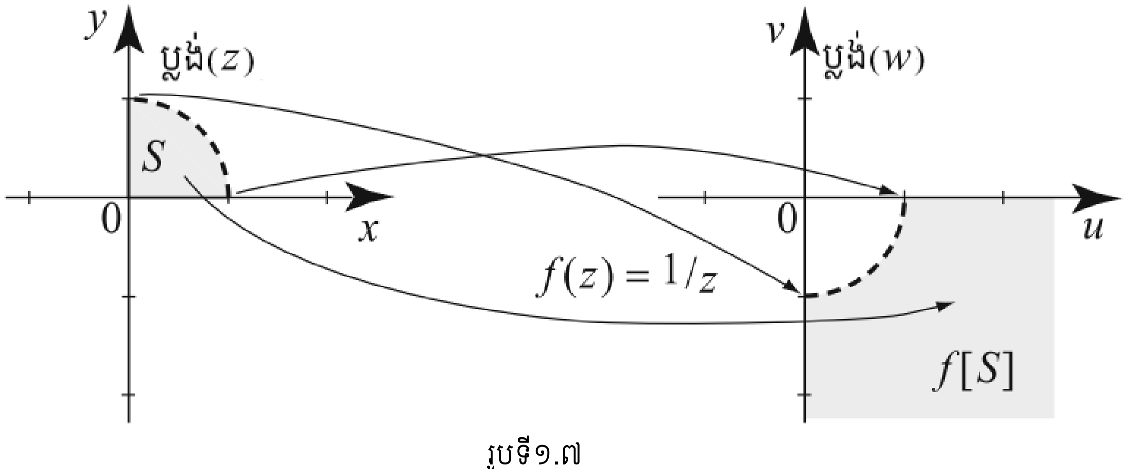
ខ. $S=\left\{z: 2<|z|, 0 \le \arg z \le \pi\right\}$

ដំណោះស្រាយ

ក. ដោយ $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\neq 0$ យើងមាន $\frac{1}{z}=\frac{1}{r}\left[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\right]$

តាមរូបមន្តម៉ូឌុលនៃ $\frac{1}{z}$ ជាការចម្រាសម៉ូឌុលនៃ z ហើយអាគុម៉ង់នៃ $f(z)$ ជាចំនួនអវិជ្ជមាននៃអាគុម៉ង់ z ។ សរុបមកចំនួននៅក្នុងរង្វង់ឯកតា $(|z|\le 1)$ ត្រូវបានបម្លែងទៅនឹងចំនួននៅខាងក្រៅរង្វង់ឯកតា $\left(\frac{1}{|z|}\ge 1\right)$ ហើយចំនួននៅពាក់កណ្តាលប្លង់ខាងលើត្រូវបានបម្លែងប្លង់ពាក់កណ្តាលខាងក្រោម។ ពិនិត្យមើល S នៅពេលដែលម៉ូឌុលនៃ z ចុះពី 1 មក 0 ហើយម៉ូឌុលនៃ $f(z)$ ឡើងពី 1 រហូតដល់គ្មានការកំណត់។ នៅពេលដែលអាគុយម៉ង់ z ឡើងចាប់ពី 0 រហូតដល់ $\frac{\pi}{2}$ ហើយអាគុយម៉ង់នៃ $\frac{1}{z}$ ចុះពី 0 មកដល់ $-\frac{\pi}{2}$ ។ ដូចនេះ $f[S]$ គឺជាសំណុំនៃចំណុចទាំងអស់នៅក្នុងកាដ្រង់ទាំងបួនរួមទាំងអ័ក្សព្រំដែនដែលស្ថិតនៅខាងក្រៅរង្វង់ឯកតា (សូមមើលរូបភាពទី១.៧)។

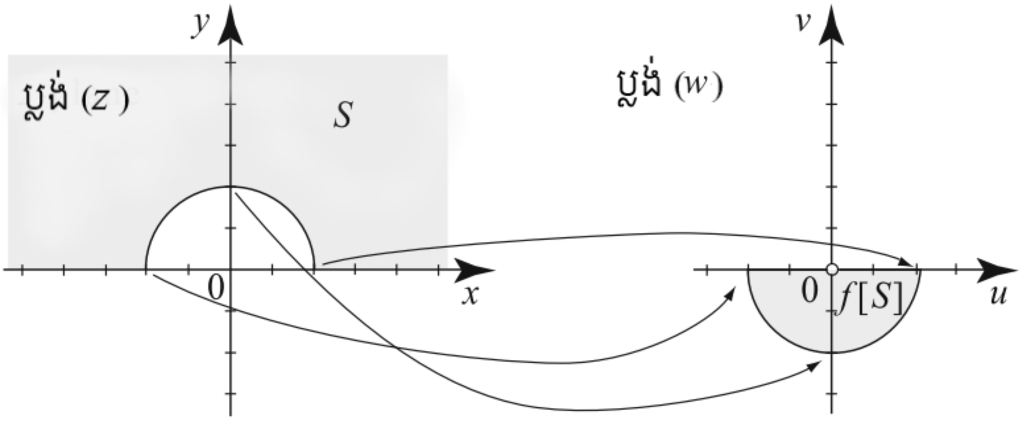
$$f[S]=\left\{w: 1<|w|, -\frac{\pi}{2} \le \arg z \le 0\right\}$$



រូបទី១.៧

ក្នុងរូបទី១.៧ ចម្រាស $w=\frac{1}{z}$ មានរូបភាពច្រាសនៃម៉ូឌុល និងប្តូរសញ្ញានៃអាគុយម៉ង់មានន័យថា $|w|=\frac{1}{|z|}$ និង $\arg w=-\arg z$ ។

ខ. ម៉ូឌុលនៃ z កើនឡើងពី 2 រហូតគ្មានកំណត់ ហើយម៉ូឌុលនៃ $\frac{1}{z}$ ចុះពី $\frac{1}{2}$ មក 0 (ប៉ុន្តែមិនស្មើសូន្យទេ)។ អាគុយម៉ង់នៃ z ឡើងចាប់ពី 0 ទៅ π ហើយអាគុយម៉ង់ $\frac{1}{z}$ ចុះពី 0 មកដល់ $-\pi$ ។



រូបទី១.៨

នៅក្នុងរូបទី១.៨នៅក្រោមរូបភាពច្រាសនៃ $f(z)=\frac{1}{z}$ ជាចំណុចនៅក្រៅរង្វង់មានកាំ 2 ហើយ $|z|\geq 2$ ត្រូវបានបម្លែងទៅជាចំណុចក្នុងរង្វង់ដែលមានកាំស្មើ $\frac{1}{2}$ ដែលម៉ូឌុល $|w|\leq\frac{1}{2}$ ។
ដូច្នេះ $f[S]$ គឺជាសំណុំនៃចំណុចមិនសូន្យនៅពាក់កណ្តាលប្លង់ខាងក្រោមអ័ក្សផ្នែកពិតជាមួយតម្លៃ $0<|w|<\frac{1}{2}$ (ដូចរូបទី១.៨)គេបាន៖

$$f[S]=\left\{w:0<|w|<\frac{1}{2},-\pi\leq\arg z\leq 0\right\}$$

អនុគមន៍ $f(z)=\frac{1}{z}$ នៅក្នុងឧទាហរណ៍ទី៣ វាជាករណីពិសេសនៃប្រភេទបម្លែងមានទម្រង់៖

$$w=\frac{az+b}{cz+d}\quad,\ (ad\neq bc)$$

គេដឹងថាការបម្លែងប្រភាគលីនេអ៊ែរ ឬការបម្លែង ម៉ូប៊ីស(Mobius)ហើយ a,b,c,d ជាចំនួនកុំផ្លិចនោះយើងឃើញថា $ad=bc$ ដែល w ថេរ។

១.២.១. ផ្នែកពិត និងផ្នែកនិមិត្តនៃអនុគមន៍

គេតាង $u=\operatorname{Re} f$ និង $v=\operatorname{Im} f$ ហើយអនុគមន៍ u និង v ដែលយកតម្លៃពិតនៃអនុគមន៍ពីរអថេរ ដែលកំណត់សរសេរដោយ៖

$$u(z)=u(x+iy)=u(x,y)\ \text{និង}\ v(z)=v(x+iy)=v(x,y)$$

នោះគេបាន៖ $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$

ឧទាហរណ៍ទី៤៖ តាង S ជាបន្ទះបញ្ឈរដែល $S=\{z=x+iy:1\le x\le 2\}$ ។
ចូររករូបភាពនៃ S ក្រោមរូបភាពបំប្លែង $f(z)=z^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $f(z)=z^2=x^2-y^2+i2xy$ នោះគេបាន

$$u(x,y)=x^2-y^2, v(x,y)=2xy$$

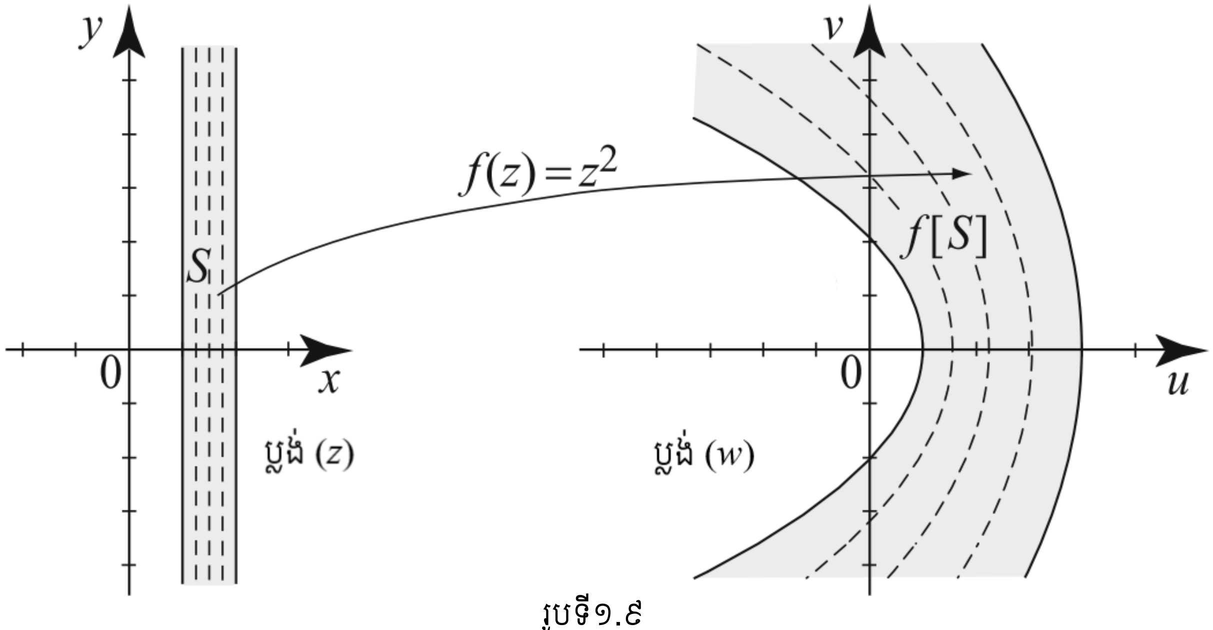
ដើម្បីរករូបភាពនៃបន្ទាត់បញ្ឈរយក $x=x_0$ កំណត់ $1\le x_0\le 2$ ។ ចំណុចនៅលើបន្ទាត់ត្រូវបំប្លែងទៅចំណុច (u,v) ដែល $u=x_0^2-y_0^2, v=2x_0y$

ដើម្បីរកសមីការខ្សែកោងដែលដាច់ៗដោយចំណុច (u,v) ដូចទៅនឹង y ផ្សេងៗគ្នាពី $-\infty$ ទៅ $+\infty$ ដែលមានទំនាក់ទំនងរវាង u និង v ។

ចំពោះ $v=2x_0y\Rightarrow y=\frac{v}{2x_0}$

$$\Rightarrow u=x_0^2-\frac{v^2}{4x_0^2}$$

ដោយ u ជាអនុគមន៍ដឺក្រេទីពីរនៃអថេរ v គេបានក្រាហ្វជាប៉ារ៉ាបូលបែរមុខទៅខាងឆ្វេងដែលមានកំពូលត្រង់ $(u,v)=(x_0^2,0)$ និង v ជាចំណុចប្រសព្វត្រង់ $(0,\pm 2x_0^2)$ ។



រូបទី១.៩

ចំពោះ $1\le x_0\le 2$ រូបភាពជាបន្ទាត់ $x=x_0$ ក្រោមរូបភាពបំប្លែង $f(z)=z^2$ ជាប៉ារ៉ាបូល $u=x_0^2-\frac{v^2}{4x_0^2}$ ដោយ x_0 នៅចន្លោះពី 1 ទៅ 2 នោះប៉ារ៉ាបូលនៅគន្លងកោងផ្ទៃនៃប៉ារ៉ាបូលដែលកំណត់ដោយ $f[S]$ ។ ដោយគ្រប់ចំណុចទាំងអស់ទេរទៅខាងស្តាំនៃប៉ារ៉ាបូលបើ $x_0=1$ និងទេរទៅខាងឆ្វេងនៃប៉ារ៉ាបូល បើ $x_0=2$ នោះយើងបាន៖

$$f[S]=\left\{w=u+iv:1-\frac{v^2}{4}\le u\le 4-\frac{v^2}{16}\right\}$$

ឧទាហរណ៍៥៖ (ភាពប្រាស) តាង $0<a<b$ ជាចំនួនពិត។

ក. បង្ហាញថាការបំប្លែង $f(z)=\frac{1}{z}$ នៅលើបន្ទាត់ឈរ $x=x_0>0$ នៅក្នុងប្លង់ (z) ទៅក្នុងរង្វង់ $\left(u-\frac{1}{2x_0}\right)^2+v^2=\frac{1}{(2x_0)^2}$ ក្នុងប្លង់ (w) ។

ខ. កំណត់រូបភាពនៃបន្ទះឈរ $S=\{z=x+iy:a\le x\le b\}$ ក្រោមការបំប្លែង $f(z)=\frac{1}{z}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គេមាន $z=x+iy$ យើងមាន $\frac{1}{z}=u(x,y)+iv(x,y)$ ដែល

$$u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2} \text{ និង } v(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

រូបភាពនៃចំណុច (x,y) នៅលើបន្ទាត់ $x=x_0$ គឺជាចំណុច (u,v) ហើយ

$$u=\frac{x_0}{x_0^2+y^2} \text{ និង } v(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

នោះគេបាន

$$u^2+v^2=\frac{x_0^2+y^2}{\left(x_0^2+y^2\right)^2}=\frac{1}{x_0^2+y^2}=\frac{u}{x_0}$$

$$\Rightarrow u^2-\frac{u}{x_0}+v^2=0$$

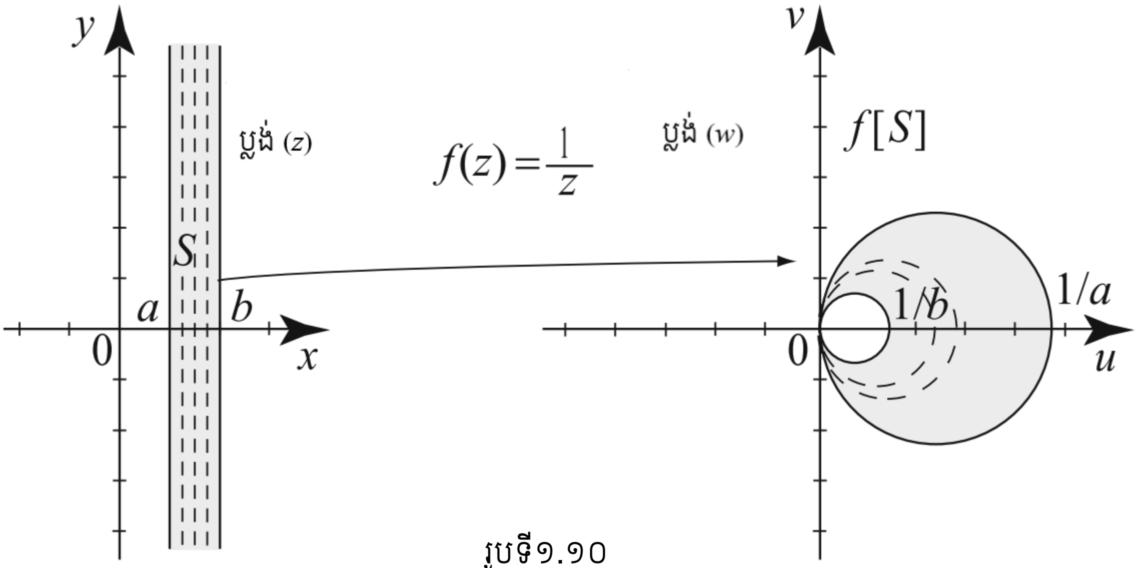
បូកអង្គទាំងពីរនឹង $\frac{1}{(2x_0)^2}$ គេបាន

$$u^2-\frac{u}{x_0}+v^2+\frac{1}{(2x_0)^2}=\frac{1}{(2x_0)^2}$$

$$\Rightarrow\left(u-\frac{1}{2x_0}\right)^2+v^2=\frac{1}{(2x_0)^2}$$

សមីការនេះជាសមីការរង្វង់នៅក្នុងប្លង់ (w) ត្រង់ផ្ចិត $\left(\frac{1}{2x_0},0\right)$ និងកាំ $\frac{1}{2x_0}$ ។

ចំណុច $(0,0)$ គឺនៅលើរង្វង់ប៉ុន្តែវាមិនជាផ្នែករូបភាពនៃបន្ទាត់ $x=x_0$



រូបទី១.១០

ភាពប្រាស $f\left(z\right)=\dfrac{1}{z}$ បំប្លែងទៅជាបន្ទាត់ $x=a$ នៅក្នុងរង្វង់

ខ.ចំណាំថា x_0 តម្លៃពី a ទៅ b បន្ទាត់ $x=x_0$ បន្ទះបញ្ឈរ S និងរូបភាពនៃបន្ទាត់ $x=x_0$ ជារូបភាពកោងនៃ S ។ តាមរូបទី១.១០ បានបង្ហាញថារូបភាព S គឺជាដែនខណ្ឌដោយរង្វង់ពីរដែលរង្វង់ខាងក្រៅមានកាំ $\dfrac{1}{2a}$ ត្រង់ផ្ចិត $\left(\dfrac{1}{2a},0\right)$ និងរង្វង់ខាងក្នុងមានកាំ $\dfrac{1}{2b}$ ត្រង់ផ្ចិត $\left(\dfrac{1}{2b},0\right)$ ។

១.២.២. ការបំប្លែងនៅក្នុងកូអរដោនេប៉ូលែ

បើអនុគមន៍កុំផ្លិច $z=r\cos\theta+ir\sin\theta$ ហើយ $w=f\left(z\right)$ នោះគេបាន $w=\rho\left(\cos\phi+i\sin\phi\right)$ នៅក្នុងកូអរដោនេប៉ូលែបើអនុគមន៍ w នៃកូអរដោនេប៉ូលែ $\left(r,\theta\right)$ នៃ z នោះគេបាន៖

$\rho\left(r,\theta\right)=\left|f\left(r\cos\theta+ir\sin\theta\right)\right|$ និង $\phi\left(r,\theta\right)=\arg\left(f\left(r\cos\theta+ir\sin\theta\right)\right)$

ឧទាហរណ៍៦៖ តាង S ជាចម្រៀកនៃរង្វង់ដែល $S=\left\{z:|z|\le\dfrac{3}{2},0<\arg z\le\dfrac{\pi}{4}\right\}$ ។

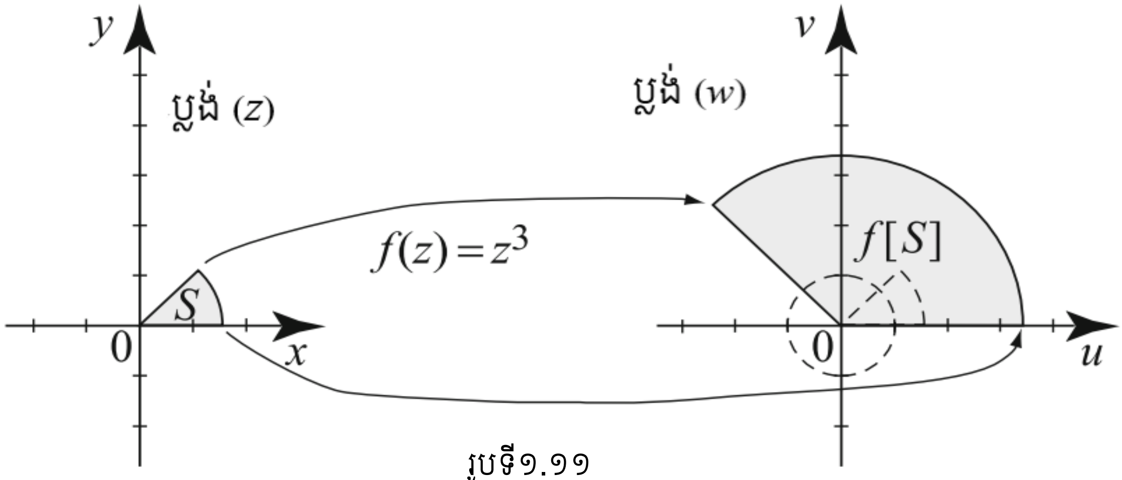
ចូររករូបភាព S ក្រោមការបម្លែងនៃ $f\left(z\right)=z^3$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $z=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$ នោះ $z^3=r^3\left(\cos3\theta+i\sin3\theta\right)$

នោះគេបានកូអរដោនេប៉ូលែ $w=f\left(z\right)=\rho\left(\cos\phi+i\sin\phi\right)$ ដែល $\rho=r^3,\phi=3\theta$

បើ $0\le r\le\dfrac{3}{2}\Rightarrow0\le\rho\le\dfrac{27}{8}$ និង $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow0\le\phi\le\dfrac{3\pi}{4}$



រូបទី១.១១

ការបម្លែង $w=z^3$ មានប្រសិទ្ធភាពចំពោះណមនៃគូប និងបីដងអាគុយម៉ង់៖

$$|w|=|z|^3,\ \arg w=3\arg z$$

គេបានរូបភាព S ជាសំណុំទាំងអស់នៃ w គឺ $f[S]=\left\{w:|w|\le\frac{27}{8},0\le\arg w\le\frac{3\pi}{4}\right\}$ ដូចរូបខាងលើ។

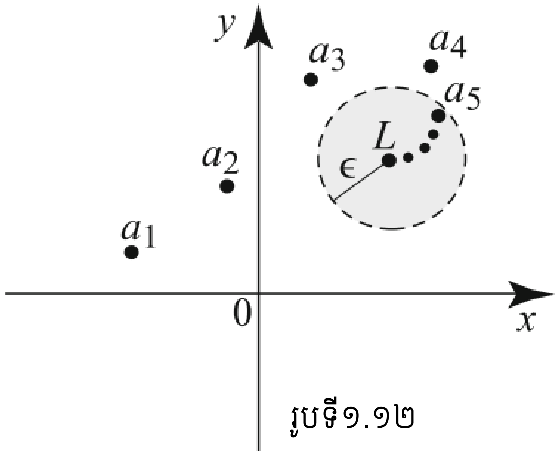
១.៣. ស្វ៊ីត និងស៊េរីនៃចំនួនកុំផ្លិច

ស្វ៊ីតចំនួនកុំផ្លិចជាអនុគមន៍មួយដែលដែនកំណត់របស់វាគឺជាសំណុំនៃចំនួនគត់វ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន $\{1,2,\ldots,n,\ldots\}$ និងសំណុំតម្លៃរបស់វាជាសំណុំរងនៃ $\mathbb{C}$ ។

១.៣.១. ភាពរួមនៃស្វ៊ីត

និយមន័យ១៖ យើងអាចនិយាយថាស្វ៊ីតរួមទៅរកចំនួនកុំផ្លិច L ឬមានលីមីត L ពេលដែល n ខិតជិត ∞ កំណត់សរសេរដោយ៖

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$ បើ $\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n\ge N:|a_n-L|<\varepsilon$



រូបទី១.១២

ស្វ៊ីត $\{a_n\}$ រួមទៅរកចំនួនកុំផ្លិច L

បើស្វ៊ីត $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ មិនរួម នោះវាជាស្វ៊ីតរីក។ បើ $L=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ នោះជានិច្ចកាលគេកំណត់ $a_n\to L$ ដូចនឹង $n\to\infty$ ឬគ្រាន់តែ $a_n\to L$ ។

តាមនិយមន័យបើ $a_n\to L$ លុះត្រាតែស្វ៊ីតចំនួនពិត $|a_n-L|\to 0$

ចំពោះស្វ៊ីតរួមទៅរកសូន្យយើងមាន $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$

សំណើ១៖ បើ a មានលីមីតនៃស្វ៊ីតចំនួនកុំផ្លិចមួយ នោះវាមានតែមួយគត់។

សម្រាយបញ្ជាក់

បើ $a_n \to L$ និង $a_n \to L'$ ដែល $L' \neq L$ ចំពោះ $\varepsilon = \frac{1}{2}|L - L'| > 0$

មាន N ដែល $|a_n - L| < \varepsilon$ និង $|a_n - L'| < \varepsilon$ ចំពោះ $\forall n \geq N$ នៅក្នុងវិសមភាពត្រីកោណ

គេបាន $|L - L'| < 2\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{|L - L'|}{2}$ ដូច្នេះនេះគេបាន $L = L'$ ។

ឧទាហរណ៍៧៖ កំណត់ថាតើបានឬមិនបានចំពោះស្វ៊ីត $a_n = \frac{1}{n}\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + i\frac{1}{n}\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)$

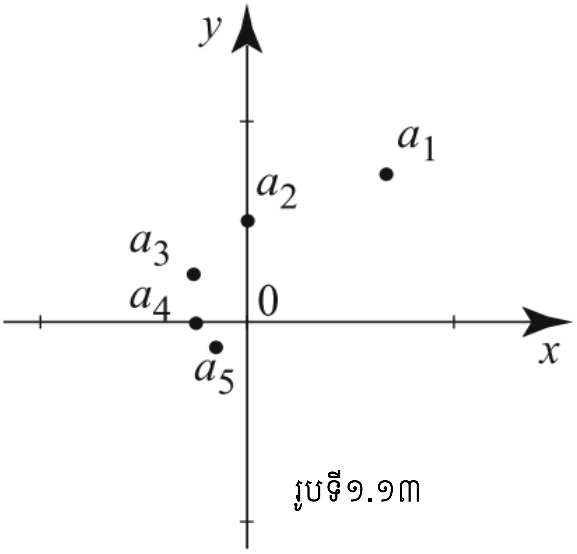
និង $b_n = \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)$ រួមបើ $n \to \infty$ ។ ចូរកំណត់លីមីតរបស់វា។

ដំណោះស្រាយ

តួទីមួយនៃស្វ៊ីត $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ គឺ

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, i, -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, -i, \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \ldots$$

ស្វ៊ីតនេះមិនរួមទេ ដោយសារតែប្រាំបីតួដំបូងគ្មានតួដូចគ្នា



រូបទី១.១៣

តាមរូបភាពទី១.១៣បង្ហាញថាវាជាស្វ៊ីតរួមទៅរក 0 ។

ដើម្បីបង្ហាញវាគេកត់សម្គាល់ថា $|b_n| = 1$ និង $|a_n| = \frac{1}{n}|b_n| = \frac{1}{n}$

ដោយ $\frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow n \to \infty$ យើងអាចសន្និដ្ឋានបានថា $|a_n| \to 0$ ពេល $n \to \infty$ និង a_n ខិតទៅរក 0 ។

និយមន័យ២៖ ស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ទាល់បើសិនមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន $M > 0$ ដូចនេះ $|a_n| \leq M, \forall n$ ។

ទ្រឹស្តីបទ២៖ គ្រប់ស្វ៊ីតរួមនៃចំនួនកុំផ្លិចគឺទាល់។

ទ្រឹស្តីបទ៣៖ តាង $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ និង $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច។

ក. ឧបមាថា $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ និង $|b_n| \le |a_n|, \forall n \ge n_0$ នោះគេបាន $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ ។

ខ. បើ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ និង $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ នោះគេបាន $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ ។

ទ្រឹស្តីបទ៤៖ បើ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ និង $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ គឺជាស្វ៊ីតរួមនៃចំនួនកុំផ្លិចហើយ α និង β ជាចំនួនកុំផ្លិច នោះគេបាន៖

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n + \beta \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \text{ បើ } \lim_{n\to\infty} b_n \ne 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\overline{a_n} = \overline{\lim_{n\to\infty} a_n}$$

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = \left|\lim_{n\to\infty} a_n\right|$$

ទ្រឹស្តីបទ៥៖ ឧបមាថា $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច និងកំណត់សរសេរដោយ $z_n = x_n + iy_n$ ដែល $x_n = \operatorname{Re} z_n, y_n = \operatorname{Im} z_n$ ។ នោះចំពោះ x, y ជាចំនួនពិតយើងបាន៖

$$\lim_{n\to\infty} z_n = x + iy \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ និង } \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

សម្រាយបញ្ជាក់

ឧបមាថា $z_n \to x + iy$ នោះតាមទ្រឹស្តីបទ៤យើងមាន $\overline{z_n} \to \overline{x+iy}$

តាមទ្រឹស្តីបទ៤យើងបាន $z_n + \bar{z} \to x + iy + \overline{x+iy} = 2x$

$$z_n - \bar{z} \to x + iy - \left(\overline{x+iy}\right) = 2iy$$

$$\Rightarrow 2x_n \to 2x \text{ និង } 2iy_n \to 2iy$$

$$\Rightarrow x_n \to x \text{ និង } y_n \to y \text{ បើ } n \to \infty$$

តាមទ្រឹស្តីបទ៤យើងមាន $iy_n \to iy$ ដោយបូកអង្គតាមអង្គនោះ $x_n + iy_n \to x + iy$

ឧទាហរណ៍៨៖ បង្ហាញថា $\lim_{n\to\infty} z^n = \begin{cases} 0 \text{ បើ } |z| < 1 \\ 1 \text{ បើ } z = 1 \end{cases}$ ។ រួចបង្ហាញថាគ្មានលីមីតចំពោះគ្រប់តម្លៃនៃ z បើ $|z| > 1$ ឬ $|z| = 1$ និង $z \ne 1$ នោះ $\lim_{n\to\infty} z^n$ គ្មានលីមីតដែរ។

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះចំនួនពិត $r \ge 0$ យើងមាន៖

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 \text{ បើ } 0 \le r < 1 \\ 1 \text{ បើ } r = 1 \\ \infty \text{ បើ } r > 1 \end{cases}$$

- ចំពោះចំនួនកុំផ្លិច $|z|<1$ យើងមាន $\lim_{n\to\infty}|z|^n=0$ ដោយ $|z|^n=|z^n|$ នោះគេបាន $\lim_{n\to\infty}z^n=0$
- ចំពោះ $|z|>1$ យើងមាន $|z|^n\to\infty$ ពេល $n\to\infty$ នោះស្ទីត $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ មិនរួមទេពីព្រោះវាមិនទាល់។
- បើ $z=1$ ស្ទីត $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ ជាស្ទីតមានភាពរួមថេរស្មើ1។
- ក្នុងករណី $|z|=1, z\neq 1$ វាងាយពីព្រោះស្ទីតទាល់តែមិនរួម។
  យើងនឹងបង្ហាញថាបើស្ទីតរួម នោះគេបាន $z=1$
  បើ $\lim_{n\to\infty}z^n=L$ នោះ $|L|=\left|\lim_{n\to\infty}z^n\right|=\lim_{n\to\infty}|z|^n=1\Rightarrow L\neq 0$
  ដូចគ្នាដែរបើ $z^n\to L\Rightarrow z^{n+1}\to L$ ពេល $n\to\infty$
  តែ $z^{n+1}=z^n\cdot z$ ដោយគុណអង្គទាំងពីរនឹងលីមីតនោះយើងបាន $L=Lz\Rightarrow z=1$។

១.៣.២. ស៊េរីចំនួនកុំផ្លិច

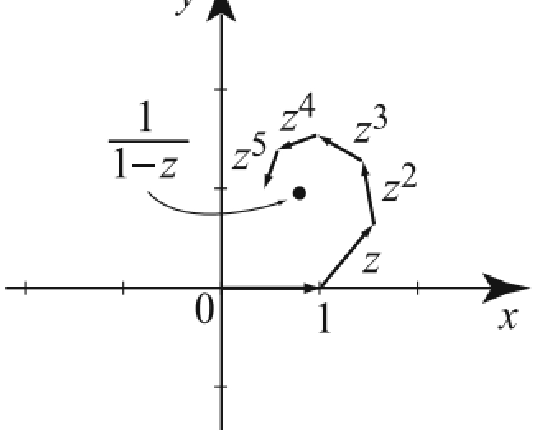
និយមន័យ៣៖ ស៊េរី $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ រួម ឬមានភាពរួមទៅរកចំនួនកុំផ្លិច s កំណត់សរសេរដោយ $s=\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ បើស្ទីតនៃផលបូករួមទៅរក s មានន័យថា $\lim_{n\to\infty}s_n=s$ ។ ម្យ៉ាងវិញទៀតយើងអាចនិយាយបានថា $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ រីក ឬមានភាពរីក។

ឧទាហរណ៍៩៖ បង្ហាញថាបើ $|z|<1$ ស៊េរីធរណីមាត្រ $\sum_{n=0}^{\infty}z_n$ រួម និង $\sum_{n=0}^{\infty}z_n=\frac{1}{1-z}$ ។ បង្ហាញថាស៊េរីនេះរីកចំពោះគ្រប់តម្លៃនៃ z ។

ដំណោះស្រាយ

ពិនិត្យផលបូកដោយផ្នែកបង្ហាញដូចរូបទី១.១៤

$S_n=1+z+z^2+\ldots+z^n$



រូបទី១.១៤

យើងធ្វើផលគុណអង្គទាំងពីរដោយ z នឹងបូកអង្គទាំងពីរដោយ1 គេបាន៖

$$1+zS_n=1+z+z^2+z^3+\ldots+z^{n+1}$$

$$=S_n+z^{n+1}$$

បើ $z\neq 1$ យើងដោះស្រាយរក S_n គេបាន៖

$$S_n=\frac{\left(1+z+z^2+\ldots+z^n\right)(1-z)}{(1-z)}=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

ស៊ីត $\left\{z^{n+1}\right\}_{n=0}^{\infty}$ រួមទៅរក 0 បើ $|z|<1$ និងរីកបើ $|z|>1$ ឬ $|z|=1$ និង $z\neq 1$

ដូចនេះ ស៊ីត $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ រួមទៅរក $\frac{1}{1-z}$ បើ $|z|<1$ និងរីកចំពោះគ្រប់តម្លៃទាំងអស់នៃ z ។

១.៣.៣.លក្ខណៈនៃស៊េរី និងតេស្តនៃភាពរួម

ទ្រឹស្តីបទ១៦៖ បើ $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ និង $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ ជាស៊េរីរួមនៃចំនួនកុំផ្លិច និង α,β ជាចំនួនកុំផ្លិចនោះ

$$(i)\ \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)=\alpha\sum_{n=0}^{\infty}a_n+\beta\sum_{n=0}^{\infty}b_n$$

$$(ii)\ \overline{\sum_{n=0}^{\infty}a_n}=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{a_n}$$

$$(iii)\ \operatorname{Re}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{Re}(a_n) \text{ និង } \operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{Im}(a_n)$$

ឧទាហរណ៍១០៖ បង្ហាញថា $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{2^n}$ រួមចំពោះគ្រប់ θ និងរកផលបូករបស់វា។

ដំណោះស្រាយ

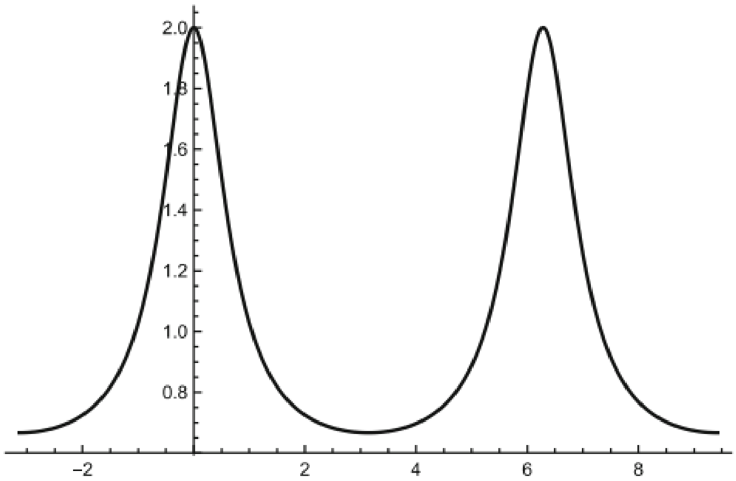
យើងដឹងថា $\cos n\theta$ ជាផ្នែកពិតនៃ $(\cos\theta+i\sin\theta)^n$ និងស៊េរីជាផ្នែកពិតនៃស៊េរីធរណីមាត្រ

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n,\ z=\frac{1}{2}(\cos\theta+i\sin\theta)$$

ដោយ $|z|=\frac{1}{2}<1$ យើងមាន

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}=\frac{1-\bar{z}}{(1-z)(1-\bar{z})}=\frac{1-\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{i}{2}\sin\theta}{\left(1-\frac{1}{2}\cos\theta\right)^2+\left(\frac{1}{2}\sin\theta\right)^2}$$

$$=\frac{4-2\cos\theta+2i\sin\theta}{5-4\cos\theta}$$



រូបទី១.១៥ ក្រាហ្វនៃស៊េរី $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{2^n}$ នៅលើចន្លោះ $[-\pi,3\pi]$

ដោយយកតែផ្នែកពិតនោះតាមទ្រឹស្តីបទ៦(iii)យើងបាន៖

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{2^n}=\operatorname{Re}\left(\frac{4-2\cos\theta+2i\sin\theta}{5-4\cos\theta}\right)=\frac{4-2\cos\theta}{5-4\cos\theta}$$

ស៊េរីជាចំណុចនៅលើក្រាហ្វនៅក្នុងរូបទី១.១៥ជាអនុគមន៍នៃ θ។

១.៤. អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលកុំផ្លិច

និយមន័យ៤៖ គេកំណត់អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលកុំផ្លិចដោយ $\exp(z)$ ឬ e^z ជាស៊េរីម

ដែល $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots,\forall z\in\mathbb{C}$។

ទ្រឹស្តីបទ៧៖ តាង z និង w ជាចំនួនកុំផ្លិចផ្សេងគ្នា។ យើងមាន $e^{z+w}=e^z\cdot e^w$ ហើយ $e^z\neq 0$

និង $e^{-z}=\frac{1}{e^z}\quad ,e^{z-w}=\frac{e^z}{e^w}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងមាន $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ និង $e^w=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!}$ គេបាន៖

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{w^k}{k!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\quad(1)$$

ហើយ c_n កំណត់ដោយ $c_n=\sum_{j=0}^{n}\frac{z^j}{j!}\cdot\frac{w^{n-j}}{(n-j)!}=\frac{1}{n}\overbrace{\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{j!(n-j)!}z^jw^{n-j}}^{(z+w)^n}=\frac{(z+w)^n}{n!}\quad(2)$

ដែលសមភាពចុងក្រោយជាវិបាកនៃឯកលក្ខណៈភាពទ្វេធា។

អង្គខាងឆ្វេង(1)គឺ $e^z\cdot e^w$ ប៉ុន្តែនៅអង្គខាងស្តាំគឺ e^{z+w} នោះគេបាន $e^{z+w}=e^z\cdot e^w$ ពិត។

នោះ $e^{-z}=\frac{1}{e^z}$ ជាវិបាកនៃ $e^{z+w}=e^z\cdot e^w$ និងជាការពិតថា $e^0=1$

ដោយ $1=e^{z-z}=e^z\cdot e^{-z}$ ចំពោះ $e^z\neq 0$ និង e^{-z} ជាចម្រាសនៃផលគុណនោះគេបាន៖

$$e^{z-w}=e^{z}\cdot e^{-w}=e^{z}\frac{1}{e^{w}}=\frac{e^{z}}{e^{w}}$$

ដូចនេះ អំណះអំណាងខាងលើជាការពិត។

សំណើ១៖បើ $z=i\theta$ ដែល θ ជាចំនួនពិតនោះគេបាន $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ ជារូបមន្តអឺល័រ។

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងប្រើនិយមន័យ៤ចំពោះ $z=i\theta$ នោះគេបាន៖

$$\begin{aligned}e^{i\theta}&=1+i\theta+\frac{(i\theta)^2}{2!}+\frac{(i\theta)^3}{3!}+\frac{(i\theta)^4}{4!}+\frac{(i\theta)^5}{5!}+\cdots\\&=1+i\theta-\frac{\theta^2}{2!}-i\frac{\theta^3}{3!}-\frac{\theta^4}{4!}-i\frac{\theta^5}{5!}+\cdots\\&=\left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\cdots\right)+i\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}+\cdots\right)\\&=\cos\theta+i\sin\theta\end{aligned}$$

យក $\cos\theta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\theta^{2n}}{(2n)!}$ និង $\sin\theta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ដែលជាស៊េរីស្វ័យគុណរួមទៅរកគ្រប់ចំនួនពិត θ ។

បើ $\theta\in\mathbb{R}$ គេកំណត់តាង $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

ព្រោះ $\begin{cases}e^{i\theta}\cdot e^{i\theta'}=(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta'+i\sin\theta')\\ \qquad\qquad=\left[\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')\right]=e^{i(\theta+\theta')}\\ \left(e^{i\theta}\right)^k=(\cos\theta+i\sin\theta)^k=\cos k\theta+i\sin k\theta=e^{ik\theta}\end{cases}$

ដូច្នេះ $[1,\theta]=e^{i\theta}$ និង $[\rho,\theta]=\rho e^{i\theta}$ រាងអ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនៃ z ជាពិសេស

$\forall k\in\mathbb{Z},\ e^{i2k\pi}=1, e^{ik\pi}=(-1)^k$ ។

មានន័យថា $e^{i(\theta+2k\pi)}=e^{i\theta'}$ គេបាន $f(\theta)=e^{i\theta}$ មានខួប $T=2\pi i$ ។

$$\rho e^{i\theta}=\rho' e^{i\theta'}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\rho=\rho'\\ \theta=\theta'+2k\pi\end{cases}$$

ម្យ៉ាងទៀត

$$e^{z}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots \qquad ...(1)$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots \qquad ...(2)$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots \qquad ...(3)$$

តាម (2) និង (3) គេបាន៖

$$\cos z + i\sin z = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots\right)$$

$$= 1 + \frac{(zi)^1}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \dots = e^{iz}$$

នោះគេបាន $\cos z + i\sin z = e^{iz}$ ...(4)

ដូចគ្នាដែរ $\cos z - i\sin z = e^{-iz}$ ...(5)

តាម(4) និង(5) គេបាន៖

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad ...(6)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad ...(7)$$

ដូចនេះ $e^{iz} = \cos z + i\sin z$ ។

ទ្រឹស្តីបទដឺម័រ (De Moivre)៖ $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងមាន $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

$$e^{in\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

នោះគេបាន $(\cos n\theta + i\sin n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$

បើ n ជាប្រេកាគនោះ $\cos n\theta + i\sin n\theta$ ជាតម្លៃមួយនៃ $(\cos\theta + i\sin\theta)$

ឧទាហរណ៍១១៖ បង្ហាញថា $\frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^8}{(\sin\theta + i\cos\theta)^4}$ ជាទម្រង់ $(x + iy)$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^8}{(\sin\theta + i\cos\theta)^4} = \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^8}{(i)^4\left(\cos\theta + \frac{1}{i}\sin\theta\right)^4}$

$$= \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^8}{(\cos\theta - i\sin\theta)^4} = \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^8}{\left[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right]^4}$$

$$= \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^8}{\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^{-1}\right]^4} = \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^8}{(\cos\theta + i\sin\theta)^{-4}}$$

$$= (\cos\theta + i\sin\theta)^{12}$$

$$= \cos 12\theta + i\sin 12\theta$$

ដូចនេះ $\dfrac{(\cos\theta+i\sin\theta)^8}{(\sin\theta+i\cos\theta)^4}=\cos12\theta+i\sin12\theta$ ។

ឧទាហរណ៍១២៖ បង្ហាញថា $(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n+(1+\cos\theta-i\sin\theta)^n=2^{n+1}\cos^n\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{n\theta}{2}$

ដែល n ជាចំនួនគត់។

ដំណោះស្រាយ

តាង $A=(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n+(1+\cos\theta-i\sin\theta)^n$

$$=\left[1+2\cos^2\frac{\theta}{2}-1+2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right]^n+\left[1+2\cos^2\frac{\theta}{2}-1-i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right]^n$$

$$=\left[2\cos^2\frac{\theta}{2}+2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right]^n+\left[2\cos^2\frac{\theta}{2}-2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right]^n$$

$$=\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^n\left[\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right]^n+\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^n\left[\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}\right]^n$$

$$=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left[\cos\frac{n\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right]+2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left[\cos\frac{n\theta}{2}-i\sin\frac{n\theta}{2}\right]$$

$$=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left[\cos\frac{n\theta}{2}+i\sin\frac{n\theta}{2}+\cos\frac{n\theta}{2}-i\sin\frac{n\theta}{2}\right]$$

$$=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left(2\cos\frac{n\theta}{2}\right)$$

$$=2^{n+1}\cos^n\frac{\theta}{2}\cos\frac{n\theta}{2}$$

ដូចនេះ $(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n+(1+\cos\theta-i\sin\theta)^n=2^{n+1}\cos^n\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{n\theta}{2}$ ។

ឧទាហរណ៍១៣៖ គណនា $\left(\dfrac{1+\sin\alpha+i\cos\alpha}{1+\sin\alpha-i\cos\alpha}\right)^n$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$

$$1=\sin^2\alpha-i^2\cos^2\alpha$$

$$1=(\sin\alpha+i\cos\alpha)(\sin\alpha-i\cos\alpha)\qquad(1)$$

ដោយបូក $\sin\alpha+i\cos\alpha$ ទៅអង្គទាំងពីរនៃ (1) យើងបាន៖

$$1+\sin\alpha+i\cos\alpha=(\sin\alpha+i\cos\alpha)(\sin\alpha-i\cos\alpha)+(\sin\alpha+i\cos\alpha)$$

$$=(\sin\alpha+i\cos\alpha)(\sin\alpha-i\cos\alpha+1)$$

$$\therefore\quad\frac{1+\sin\alpha+i\cos\alpha}{1+\sin\alpha-i\cos\alpha}=\sin\alpha+i\cos\alpha$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1+\sin\alpha+i\cos\alpha}{1+\sin\alpha-i\cos\alpha}\right)^n=\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right\}^n$$

$$=\cos n\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

ដូចនេះ $\left(\frac{1+\sin\alpha+i\cos\alpha}{1+\sin\alpha-i\cos\alpha}\right)^n=\cos n\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ ។

១.៤.១. ឫសនៃចំនួនកុំផ្លិច

យើងមាន $\cos\theta+i\sin\theta=\cos(2m\pi+\theta)+i\sin(2m\pi+\theta), m\in I$

$$[\cos\theta+i\sin\theta]^{\frac{1}{n}}=\left[\cos(2m\pi+\theta)+i\sin(2m\pi+\theta)\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$=\cos\frac{2m\pi+\theta}{n}+i\sin\frac{2m\pi+\theta}{n}, m=0,1,2,\dots,n-1$$

ចំពោះ $m=0$ នោះគេបាន $\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}$

ចំពោះ $m=1$ នោះគេបាន $\cos\left(\frac{2\pi+\theta}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi+\theta}{n}\right)$

ចំពោះ $m=2$ នោះគេបាន $\cos\left(\frac{4\pi+\theta}{n}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi+\theta}{n}\right)$

....

....

ចំពោះ $m=n-1$ នោះគេបាន $\cos\left(\frac{2(n-1)\pi+\theta}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2(n-1)\pi+\theta}{n}\right)$

ចំពោះ $m=n$ នោះគេបាន $\cos\left(\frac{2n\pi+\theta}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2n\pi+\theta}{n}\right)$

$$=\cos\left(2\pi+\frac{\theta}{n}\right)+i\sin\left(2\pi+\frac{\theta}{n}\right)$$

$$=\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}$$

ឧទាហរណ៍១៤៖ ដោះស្រាយសមីការ $x^4+i=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $x^4=-i=\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}$

$$x^4=\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)-i\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x=\left[\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)-i\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right]^{\frac{1}{4}}$$

$$=\cos(4n+1)\frac{\pi}{8}-i\sin(4n+1)\frac{\pi}{8}$$

ចំពោះ $n=0,1,2,3$ នោះយើងបានឫសដូចខាងក្រោម

$$x_1=\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8}\,,\qquad x_2=\cos\frac{5\pi}{8}-i\sin\frac{5\pi}{8}$$

$$x_3=\cos\frac{9\pi}{8}-i\sin\frac{9\pi}{8}\,,\qquad x_4=\cos\frac{13\pi}{8}-i\sin\frac{13\pi}{8}$$

ឧទាហរណ៍១៥៖ បើ ω ជាឫសគូបឯកតា បង្ហាញថា $(1-\omega)^6=-27$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $x^3=1$ នោះគេបាន៖

$$\Rightarrow\quad x=(1)^{\frac{1}{3}}=(\cos 0+i\sin 0)^{\frac{1}{3}}=(\cos 2n\pi+i\sin 2n\pi)^{\frac{1}{3}}$$

$$=\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$$

ចំពោះ $n=0,1,2$ នោះឫសនៃឯកតាគឺ

$$x_0=1$$

$$x_1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=\omega$$

$$x_2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=\left[\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right]^2=\omega^2$$

$$\Rightarrow 1+\omega+\omega^2=1+\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$$

$$=1+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=1-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=1-2\cos\frac{\pi}{3}=1-2\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\Rightarrow\quad 1+\omega+\omega^2=0$$

$$\Rightarrow\quad 1+\omega^2=-\omega$$

$$\Rightarrow\quad (1-\omega)^6=\left[(1-\omega)^2\right]^3=\left[1-2\omega+\omega^2\right]^3=\left[-\omega-2\omega\right]^3$$

$$=(-3\omega)^3=-27\omega^3=-27$$

ដូចនេះ $(1-\omega)^6=-27$ ។

១.៥. អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ និងអ៊ីពែបូលិក

១.៥.១. អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

ទំនាក់ទំនងរវាងអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រទៅអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលហៅថាឯកលក្ខណៈភាពអឺល័រកំណត់ដោយ $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ ដែល θ ជាចំនួនពិត។

ជំនួស θ ដោយ $-\theta$ យើងបាន $e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$

$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \text{ និង } \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

និយមន័យ៥៖ ចំពោះចំនួនកុំផ្លិច z យើងបានសំណុំ $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ និង $\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

ឧទាហរណ៍១៦៖ គណនា $\cos(2+i\pi)$ និង $\sin\left(i\dfrac{5\pi}{4}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងប្រើតាមនិយមន័យ៥ នោះយើងបាន៖

$$\begin{aligned}\cos(2+i\pi)&=\frac{1}{2}\left(e^{i(2+i\pi)}+e^{-i(2+i\pi)}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(e^{-\pi+2i}+e^{\pi-2i}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(e^{-\pi}e^{2i}+e^{\pi}e^{-2i}\right)\\&=\frac{1}{2}\left\{\left[\cos(2)+i\sin(2)\right]+e^{\pi}\left[\cos(2)-i\sin(2)\right]\right\}\\&=\cos(2)\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2}-i\sin(2)\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2}\\&=\cos(2)\cosh\pi-i\sin(2)\sinh\pi\end{aligned}$$

ដែល $\cosh t=\dfrac{1}{2}\left(e^{t}+e^{-t}\right)$ និង $\sinh t=\dfrac{1}{2}\left(e^{t}-e^{-t}\right)$ ជាអនុគមន៍អ៊ីពែប៉ូលិកចំនួនពិត។

ចំពោះ $\sin\left(i\dfrac{5\pi}{4}\right)$ យើងប្រើរូបមន្ត $\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ នោះគេបាន៖

$$\begin{aligned}\sin\left(i\frac{5\pi}{4}\right)&=\frac{1}{2i}\left(e^{i\left(i\frac{5\pi}{4}\right)}-e^{-i\left(i\frac{5\pi}{4}\right)}\right)\\&=\frac{-i}{2}\left(e^{-\frac{5\pi}{4}}-e^{\frac{5\pi}{4}}\right)=i\sinh\left(\frac{5\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\sin\left(i\dfrac{5\pi}{4}\right)=i\sinh\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)$ ។

សំណើរ២៖ ឯកលក្ខណៈភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z ខាងក្រោម៖

$$\cos(-z)=\cos z \qquad \sin(-z)=-\sin z \qquad (1)$$
$$\cos(z+2\pi)=\cos z \qquad \sin(z+2\pi)=-\sin z \qquad (2)$$
$$\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=\cos z \qquad \cos\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin z \qquad (3)$$
$$e^{iz}=\cos z+i\sin z \qquad \cos^2 z+\sin^2 z=1 \qquad (4)$$

សម្រាយបញ្ជាក់

ចំពោះឯកលក្ខណៈភាព(1)ខាងលើគេបាន៖

$$\cos(-z)=\frac{e^{i(-z)}+e^{-i(-z)}}{2}=\frac{e^{-iz}+e^{iz}}{2}=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos z$$

នៅក្នុងការបង្ហាញលក្ខណៈ(2)យើងប្រើរូបមន្ត $e^{\pm 2\pi i}=1$

$$\cos(z+2\pi)=\frac{e^{i(z+2\pi)}+e^{-i(z+2\pi)}}{2}=\frac{e^{iz}e^{2\pi i}+e^{-iz}e^{-2\pi i}}{2}=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos z$$

នៅក្នុងការបង្ហាញលក្ខណៈ(3)យើងធ្វើការគណនាដូចខាងក្រោម៖

$$\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{e^{i\left(z+\frac{\pi}{2}\right)}-e^{-i\left(z+\frac{\pi}{2}\right)}}{2i}=\frac{ie^{iz}-(-i)e^{-iz}}{2i}=\cos z$$

នៅក្នុងការបង្ហាញលក្ខណៈ(4)យើងបាន៖

$$1=e^{iz}e^{-iz}=\overbrace{(\cos z+i\sin z)}^{e^{iz}}\overbrace{(\cos z-i\sin z)}^{e^{-iz}}=\cos^2 z+\sin^2 z$$

សំណើ៣៖ (ឯកលក្ខណៈភាពត្រីកោណមាត្រ) តាង z_1,z_2,z_3 ជាចំនួនកុំផ្លិចនោះគេបាន៖

$$\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2 \qquad (1)$$
$$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2 \qquad (2)$$
$$\cos^2 z=\frac{1+\cos(2z)}{2} \qquad (3)$$
$$\sin^2 z=\frac{1-\cos(2z)}{2} \qquad (4)$$

សម្រាយបញ្ជាក់

ចំពោះឯកលក្ខណៈភាព (1)ក្នុងសំណើ៣ យើងធ្វើការពន្លាតអង្គខាងស្តាំយើងបាន៖

$$\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2=\frac{\left(e^{iz_1}+e^{-iz_1}\right)\left(e^{iz_2}+e^{-iz_2}\right)}{2^2}-\frac{\left(e^{iz_1}-e^{-iz_1}\right)\left(e^{iz_2}-e^{-iz_2}\right)}{(2i)^2}$$

ធ្វើការគុណពន្លាតភាគយក និងបូកប្រភាគបញ្ចូលគ្នានោះគេបាន៖

$$\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2=\frac{2e^{i(z_1+z_2)}+2e^{-i(z_1+z_2)}}{4}=\cos(z_1+z_2)$$

ចំពោះឯកលក្ខណៈភាព(2)ធ្វើការសម្រាយដូចគ្នា

ក្នុងករណី $z_1 = z_2 = z_3$ នោះគេបាន $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$

បើជំនួស $\sin^2 z$ ដោយ $1-\cos^2 z$ យើងបាន $\cos^2 z = \dfrac{1+\cos(2z)}{2}$

បើជំនួស $\cos^2 z$ ដោយ $1-\sin^2 z$ យើងបាន $\sin^2 z = \dfrac{1-\cos(2z)}{2}$

បើយក $z = iy$ ជំនួសក្នុង $\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ និង $\sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ យើងបាន៖

$$\cos(iy) = \frac{e^{i(iy)}+e^{-i(iy)}}{2} = \frac{e^{y}+e^{-y}}{2} = \cosh y \qquad (5)$$

$$\sin(iy) = \frac{e^{i(iy)}-e^{-i(iy)}}{2} = i\frac{e^{y}-e^{-y}}{2} = i\sinh y \qquad (6)$$

ឧទាហរណ៍១៧៖ បង្ហាញថា $\cos z$ និង $\sin z$ ជាអនុគមន៍មិនទាល់។

ដំណោះស្រាយ

យក $z = iy$ ដែល y ជាចំនួនពិត

តាមរូបមន្ត(5)ក្នុងសំណើ៣ យើងបាន $|\cos z| = |\cos iy| = \cosh y$

ដោយ $\cosh y \to \infty$ នោះ $y \to \pm\infty$ យើងឃើញថា $|\cos z|$ មិនទាល់ដោយចំនួនកំណត់

ដូច្នេះ $\cos z$ ជាអនុគមន៍មិនទាល់។

ដូចគ្នាដែរដោយប្រើរូបមន្ត(6)ក្នុងសំណើ៣យើងបាន $|\sin iy| = |i\sinh y| = |\sinh y|$

ដោយ $|\sinh y| \to \infty$ នោះ $y \to \pm\infty$

ដូច្នេះ $\sin z$ ជាអនុគមន៍មិនទាល់។

សំណើ៤៖ តាង $z = x+iy$ ជាចំនួនកុំផ្លិច (x, y ចំនួនពិត)នោះគេបាន៖

$$\cos z = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y \qquad (1)$$

$$\sin z = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y \qquad (2)$$

$$|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x + \sinh^2 y} \qquad (3)$$

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y} \qquad (4)$$

សម្រាយបញ្ជាក់

ដើម្បីបង្ហាញឯកលក្ខណៈ(1) ក្នុងសំណើ៤ យើងត្រូវប្រើសំណើ៣លក្ខណៈ(1) នោះគេបាន

$$\begin{aligned}\cos z &= \cos(x+iy)\\ &= \cos x\cos(iy) - \sin x\sin(iy)\\ &= \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y\end{aligned}$$

ចំពោះឯកលក្ខណៈភាព(3)ធ្វើការសម្រាយដូចគ្នា

ចំពោះឯកលក្ខណៈភាព(2)តាមឯកលក្ខណៈ(1) យើងបាន៖

$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$ ចំពោះអនុគមន៍អ៊ីពែបូលិកចំនួនពិត

$$\begin{aligned}|\cos z|^2 &= \cos^2 x\cosh^2 y+\sin^2 x\sinh^2 y\\ &= \cos^2 x\left(1+\sinh^2 y\right)+\sin^2 x\sinh^2 y\\ &= \cos^2 x+\sinh^2 y\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)\\ &= \cos^2 x+\sinh^2 y\end{aligned}$$

ដូចនេះ $|\cos z|=\sqrt{\cos^2 x+\sinh^2 y}$ ។

ចំពោះឯកលក្ខណៈភាព(4)ធ្វើការសម្រាយដូចគ្នា។

និយមន័យ៦៖ ចំពោះចំនួនកុំផ្លិច z គេកំណត់៖

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}=-i\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}\ ,\ \ (\cos z\neq 0)$$

$$\cot z=\frac{\cos z}{\sin z}=i\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}\ ,\ \ (\sin z\neq 0)$$

$$\sec z=\frac{1}{\cos z}=\frac{2}{e^{iz}+e^{-iz}}\ ,\ \ (\cos z\neq 0)$$

$$\csc z=\frac{1}{\sin z}=\frac{2i}{e^{iz}-e^{-iz}}\ ,\ \ (\sin z\neq 0)$$

ឧទាហរណ៍១៨៖ បង្ហាញថា $\tan z_1=\tan z_2$ លុះត្រាតែ $z_1=z_2+k\pi,k\in\mathbb{Z}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះ $\tan z$ មិនកំណត់ចំពោះ $z=\frac{\pi}{2}+k\pi$

ចំពោះ $z_1,z_2\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ យើងមាន៖

$$\begin{aligned}\tan z_1=\tan z_2 &\Leftrightarrow \frac{\sin z_1}{\cos z_1}=\frac{\sin z_2}{\cos z_2}\\ &\Leftrightarrow \sin z_1\cos z_2-\cos z_1\sin z_2=0\\ &\Leftrightarrow \sin\left(z_1-z_2\right)=0\\ &\Leftrightarrow z_1-z_2=k\pi\\ &\Leftrightarrow z_1=z_2+k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

១.៥.២. អនុគមន៍អ៊ីពែប៉ូលិក

និយមន័យ៧៖ គេកំណត់កូស៊ីនូសអ៊ីពែបូកលិក និងស៊ីនូសអ៊ីពែបូលិកនៃចំនួនកុំផ្លិច z ដូចខាងក្រោម៖

$$\cosh z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}\ \text{និង}\ \sinh z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}$$

គេកំណត់តង់សង់អ៊ីពែបូលិក សេកង់អ៊ីពែបូលិក កូសេកង់អ៊ីពែបូលិក និងកូតង់សង់អ៊ីពែបូលិកនៃ z នៅក្នុងតួនៃ $\cosh z$ និង $\sinh z$ ដូចខាងក្រោម៖

$$\tanh z=\frac{\sinh z}{\cosh z}\qquad (\cosh z\neq 0)$$

$$\operatorname{sech} z=\frac{1}{\cosh z}\qquad (\cosh z\neq 0)$$

$$\operatorname{csch} z=\frac{1}{\sinh z}\qquad (\sinh z\neq 0)$$

$$\coth z=\frac{\cosh z}{\sinh z}\qquad (\sinh z\neq 0)$$

អនុគមន៍អ៊ីពែបូលិកផ្ទៀងផ្ទាត់ឯកលក្ខណៈភាពដែលមានទំនាក់ទំនងទៅនឹងអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ។

សំណើ៥៖ ចំពោះអនុគមន៍កុំផ្លិចផ្សេងៗ $z=x+iy$ ដែល x,y ជាចំនួនពិតយើងបាន៖

$$\cosh(iz)=\cos z\ ,\ \cos(iz)=\cosh z\qquad (1)$$

$$\cos(iz)=i\sin z\ ,\ \sin(iz)=i\sinh z\qquad (2)$$

$$\cosh^2 z-\sinh^2 z=1\qquad (3)$$

$$\cosh z=\cosh x\cosh y+i\sinh x\sin y\qquad (4)$$

$$\sinh z=\sinh x\cos y+i\cosh x\sin y\qquad (5)$$

$$\tanh(iz)=i\tan z,\quad \tan(iz)=i\tanh z\qquad (6)$$

$$\coth(iz)=-i\cot z,\quad \cot(iz)=-i\coth z\qquad (7)$$

ឧទាហរណ៍១៩៖ បង្ហាញថា $(\cosh x-\sinh x)^n=\cosh nx-\sinh nx$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $\text{L.H.S}=(\cosh x-\sinh x)^n$

$$=\left[\frac{e^x+e^{-x}}{2}-\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]^n$$

$$=\left[\frac{2e^{-x}}{2}\right]^n$$

$$=\left(e^{-x}\right)^n$$

$$=e^{-nx}\qquad (1)$$

តាង $\text{R.H.S}=\cosh nx-\sinh nx$

$$=\left(\frac{e^{nx}+e^{-nx}}{2}-\frac{e^{nx}-e^{-nx}}{2}\right)$$

$$=\frac{2e^{-nx}}{2}$$

$$=e^{-nx}\qquad (2)$$

តាម (1) និង(2)គេបាន L.H.S=R.H.S

ដូចនេះ $\left(\cosh x-\sinh x\right)^n=\cosh nx-\sinh nx$ ។

ឧទាហរណ៍២០៖ បើ $\tan\left(\theta+i\phi\right)=\cos\alpha+i\sin\alpha$ បង្ហាញថា $\theta=\dfrac{n\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}$ និង $\phi=\dfrac{1}{2}\log\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\tan\left(\theta+i\phi\right)=\cos\alpha+i\sin\alpha$

$$\Rightarrow \quad \tan\left(\theta-i\phi\right)=\cos\alpha-i\sin\alpha$$

ប៉ុន្តែ $\tan 2\theta=\tan\left[\left(\theta+i\phi\right)+\left(\theta-i\phi\right)\right]$

$$=\frac{\tan\left(\theta+i\phi\right)+\tan\left(\theta-i\phi\right)}{1-\tan\left(\theta+i\phi\right)\tan\left(\theta-i\phi\right)}$$

$$=\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha+\cos\alpha-i\sin\alpha}{1-\left(\cos\alpha+i\sin\alpha\right)\left(\cos\alpha-i\sin\alpha\right)}$$

$$=\frac{2\cos\alpha}{1-\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)}$$

$$=\frac{2\cos\alpha}{1-1}=\infty=\tan\frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow 2\theta=\dfrac{\pi}{2}$ ឬចំពោះតម្លៃទូទៅ $2\theta=n\pi+\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\theta=\dfrac{n\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}$

ម្យ៉ាងវិញទៀត $\tan\left(2i\phi\right)=\tan\left[\left(\theta+i\phi\right)-\left(\theta-i\phi\right)\right]$

$$=\frac{\tan\left(\theta+i\phi\right)-\tan\left(\theta-i\phi\right)}{1+\tan\left(\theta+i\phi\right)\tan\left(\theta-i\phi\right)}$$

$$=\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha-\left(\cos\alpha-i\sin\alpha\right)}{1+\left(\cos\alpha+i\sin\alpha\right)\left(\cos\alpha-i\sin\alpha\right)}$$

$$=\frac{2i\sin\alpha}{1+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}$$

$$=\frac{2i\sin\alpha}{1+1}$$

$$=i\sin\alpha$$

$$\Rightarrow i\tanh 2\phi=i\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \tanh 2\phi=\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \frac{e^{2\phi}-e^{-2\phi}}{e^{2\phi}+e^{-2\phi}}=\frac{\sin\alpha}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{2\phi}-e^{-2\phi}+e^{2\phi}+e^{-2\phi}}{\left(e^{2\phi}+e^{-2\phi}\right)-\left(e^{2\phi}-e^{-2\phi}\right)}=\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$$

មានន័យថា $\dfrac{2e^{2\phi}}{2e^{-2\phi}}=\dfrac{1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$

$$\Rightarrow e^{4\phi}=\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow e^{4\phi}=\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Rightarrow e^{2\phi}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$$

នោះគេបាន $2\phi=\log_e\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)\Rightarrow \phi=\dfrac{1}{2}\log_e\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)$

ដូចនេះ $\theta=\dfrac{n\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}$ និង $\phi=\dfrac{1}{2}\log\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍៖

បើ $\cosh x=\sec\theta$ បង្ហាញថា៖

ក. $\theta=\dfrac{\pi}{2}-2\tan^{-1}\left(e^{-x}\right)$

ខ. $\tanh\dfrac{x}{2}=\tan\dfrac{\theta}{2}$

១.៦. អនុគមន៍លោការីតកុំផ្លិច និងស្វ័យគុណ

១.៦.១. អនុគមន៍លោការីតកុំផ្លិច

លោការីតត្រូវបានកំណត់ក្នុងពីជគណិតងាយវាជាការចម្រាស់នៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល។

យើងធ្វើតាមគំនិតនេះដើម្បីកំណត់លោការីតកុំផ្លិច $\log z$ ចំពោះ $z\neq 0$ ។ ទោះយ៉ាងណាក៏ដោយ យើងរំពឹងថានឹងជួបប្រទះការលំបាកខ្លះនៅទីនេះ ដោយសារអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល e^z គឺមិនមែនជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ។ ដើម្បីកំណត់អនុគមន៍កុំផ្លិច $w=\log z,\ z\neq 0$

ចំពោះ $w=\log z\Leftrightarrow e^w=z$ ដើម្បីកំណត់ w នៅក្នុងកន្សោម z កំណត់សរសេរដោយ $w=u+iv$ និង $z=re^{i\theta}$ ចំពោះ $|z|=r>0$ និង $\theta=\arg z$ នោះគេបាន៖

$$e^{u+iv}=e^u\cdot e^{iv}=z=re^{i\theta}$$

$$\Rightarrow e^u=r \text{ និង } e^{iv}=e^{i\theta}$$

$$\Rightarrow u=\ln r, r>0 \text{ និង } v=\theta+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \text{ ឬ } v=\arg z$$

យើងបានរូបមន្តលោការីតកុំផ្លិច $\log z = \ln|z| + i\arg z$, $z \neq 0$ ។

ឧទាហរណ៍២១៖ គណនាលោការីតខាងក្រោម៖

(a) $\log i$ (b) $\log(1+i)$ (c) $\log(-2)$

ដំណោះស្រាយ

$(a)\log i$

ទម្រង់ប៉ូលែរនៃ i គឺ $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ នោះ $|i| = 1$ និង $\arg i = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

នោះគេបាន $\log i = \overset{0}{\ln(1)} + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$

(b) $\log(1+i)$

សរសេរ $1+i$ នៅក្នុងទម្រង់ប៉ូលែរគឺ $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, |1+i| = \sqrt{2}$ និង $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

នោះគេបាន $\log(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$

$(c)\log(-2)$

យើងមាន $|-2| = 2, \arg(-2) = \pi + 2k\pi$

$\Rightarrow \log(-2) = \ln 2 + i(\pi + 2k\pi) = \ln 2 + (2k\pi + 1)\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$

និយមន័យ៨៖ តម្លៃសំខាន់ ឬផ្នែកសំខាន់នៃលោការីតកុំផ្លិចកំណត់ដោយ

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z\ ,\ (z \neq 0)$$

នោះ $\operatorname{Log} z$ គឺជាតម្លៃ $\log z$ ដែលជាផ្នែកនិម្មិតនៅក្នុងចន្លោះ $(-\pi, \pi]$ ។

ព្រោះ $\arg z = \operatorname{Arg} z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

តាមរូបមន្ត $\log z = \ln|z| + i\arg z$ និង $\operatorname{Log} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$

នោះគេបាន $\log z = \operatorname{Log} z + 2k\pi i$, $(z \neq 0)$

ឧទាហរណ៍២២៖ ចូរគណនាកន្សោមខាងក្រោម៖

$(a)\operatorname{Log} i$ $(b)\operatorname{Log}(1+i)$ $(c)\operatorname{Log}(-i)$ $(d)\operatorname{Log} 5$ $(e)\operatorname{Log}\left(e^{6\pi i}\right)$

ដំណោះស្រាយ

បើយើងដឹង $\log z$ នោះយើងអាចរក $\operatorname{Log} z$ ដើម្បីជ្រើសរើសតម្លៃនៃ $\log z$ ជាមួយផ្នែកនិមិត្ត ដែលនៅក្នុងចន្លោះ $(-\pi, \pi]$ ។

បើយើងមិនដឹង $\log z$ យើងគណនា $\operatorname{Log} z$ ដោយប្រើរូបមន្ត $\operatorname{Log} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$

នោះយើងបាន៖

$(a)\operatorname{Log} i = i\frac{\pi}{2}$ និង $(b)\operatorname{Log}(1+i) = \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4}$

ចំពោះ (c) យើងប្រើរូបមន្ត $\operatorname{Log} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$ គេបាន៖

$\left|-i\right|=1, \mathrm{Arg}\left(-i\right)=-\frac{\pi}{2} \Rightarrow \mathrm{Log}\left(-i\right)=\ln\left(1\right)-i\frac{\pi}{2}=-i\frac{\pi}{2}$

ចំពោះ (d) យើងប្រើរូបមន្ត $\mathrm{Log}\,z=\ln|z|+i\mathrm{Arg}\,z$ គេបាន៖

$$|5|=5, \mathrm{Arg}\,5=0 \Rightarrow \mathrm{Log}\,5=\ln 5$$

ចំពោះ (e) យើងប្រើរូបមន្ត $\mathrm{Log}\,z=\ln|z|+i\mathrm{Arg}\,z$ កត់សម្គាល់ថា $e^{6\pi i}$ ជាចំនួនមានអតិបរមានោះ $e^{6\pi i}=1$ គេបាន៖ $\left|e^{6\pi i}\right|=1, \mathrm{Arg}\left(e^{6\pi i}\right)=0 \Rightarrow \mathrm{Log}\left(e^{6\pi i}\right)=\ln 1=0$ ។

ការសង្កេតមួយចំនួនគឺដើម្បីបញ្ជាក់ពីភាពស្រដៀងគ្នា និងភាពខុសគ្នាមួយចំនួនរវាងលោការីតនៃពៃរ និងលោការីតកុំផ្លិច។

- បើ x ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន នោះ $\mathrm{Log}\,x=\ln x$
- បើ x ជាចំនួនពិតអវិជ្ជមាន នោះ $\mathrm{Log}\,x=\ln|x|+i\pi$
- ចំពោះគ្រប់ z ឯកលក្ខណៈភាព $e^{\mathrm{Log}\,z}=z$ គឺពិត។ ប៉ុន្តែ $\mathrm{Log}\left(e^{z}\right)$ ជានិច្ចកាលមិនស្មើទៅនឹងទេ z ។ ជាការពិត $\mathrm{Log}\left(e^{z}\right)=z \Leftrightarrow -\pi \le \mathrm{Im}\,z \le \pi$
- មានលក្ខណៈពីជគណិតជាច្រើនទៀតនៃ $\ln x$ មិនដូចទៅនឹង $\mathrm{Log}\,z$ ។ ជាឧទាហរណ៍ $\ln\left(x_1x_2\right)=\ln x_1+\ln x_2$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន x_1 និង x_2 មិនពិចំពោះ $\mathrm{Log}\,z$ ។ ចំពោះ $\mathrm{Log}\,z$ យើងពិនិត្យករណីខាងក្រោម៖
  $\mathrm{Log}\left((-1)(-1)\right)=\mathrm{Log}(1)\ne \mathrm{Log}(-1)+\mathrm{Log}(-1)$ ដោយ $\mathrm{Log}(-1)=i\pi$ ។

❖ **ផ្នែកនៃអាគុម៉ង់ និងលោការីត**

និយមន័យ៩៖ តាង α ជាចំនួនពិតមិនប្រែប្រួល។ ចំពោះ $z\ne 0$ គេហៅតម្លៃដែលមានតែមួយនៃ $\arg z$ ដែលឋិតក្នុងចន្លោះ $(\alpha,\alpha+2\pi]$ ផ្នែកទី α នៃ $\arg z$ និងកំណត់សរសេរដោយ $\arg_{\alpha} z$ ។ យើងកំណត់ផ្នែកទី α នៃ $\log z$ ដោយឯកលក្ខណៈភាព៖

$$\log_{\alpha} z=\ln|z|+i\arg_{\alpha} z \quad , \ \alpha<\arg_{\alpha} z\le \alpha+2\pi$$

កន្លះបន្ទាត់ដែលកាត់តាមគល់តម្រុយជាផ្នែកនៃលោការីតមិនជាប់ត្រូវបានគេហៅថាផ្នែកដាច់។ ពេល $\alpha=-\pi$ និយមន័យនេះនាំទៅដល់តម្លៃសំខាន់នៃលោការីត នោះគឺ $\log_{-\pi} z=\mathrm{Log}z$ ។ ដោយសារតម្លៃពីរនៃ $\arg z$ ខុសគ្នាដោយចំនួនគត់ពហុគុណនៃ 2π វាដូចខាងក្រោមចំពោះចំនួនកុំផ្លិច $z\ne 0$ និងចំនួនពិត α និង β ហើយមានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប k (អាស្រ័យលើ z, α និង β) ដូចនេះគេបាន $n\log_{\alpha} z=\log_{\beta} z+2k\pi i$

ឧទាហរណ៍២៣៖ ចូរគណនាតម្លៃខាងក្រោម៖

$(a)\ \log_0 i \qquad (b)\ \log_{\frac{\pi}{2}} i \qquad (c)\ \log_{\frac{\pi}{2}}(-2)$

ដំណោះស្រាយ

បើយើងដឹង $\log z$ ដើម្បីរក $\log_{\alpha} z$ វាគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីជ្រើសរើសតម្លៃនៃ $\log z$ ជាមួយតម្លៃផ្នែកនិមិត្តដែលឋិតក្នុងចន្លោះ $(\alpha,\alpha+2\pi]$ ។ បើយើងមិនដឹងតម្លៃ $\log z$ យើងគណនា $\log_{\alpha} z$ ដោយប្រើរូបមន្ត $\log_{\alpha} z=\ln|z|+i\arg_{\alpha} z$ ។

(a) យើងមាន $\alpha = 0$ នោះគេបាន $\log_0 z, \arg_0 z$ ត្រូវតែនៅក្នុងចន្លោះ $(0,2\pi]$

នោះគេបាន $\log i = i\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi i$ និង $\log_0 i = i\dfrac{\pi}{2}$ កំណត់សម្គាល់ថា $\operatorname{Log} i = \log_0 i$ ។

(b) យើងមាន $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ នោះគេបាន $\arg_{\frac{\pi}{2}} z \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} + 2\pi\right] = \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}\right]$

ហើយ $\arg_{\frac{\pi}{2}} i = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi = \dfrac{5\pi}{2}$ ។

ដូចនេះ $\log_{\frac{\pi}{2}} i = i\dfrac{5\pi}{2}$ កំណត់សម្គាល់ $\operatorname{Log} i = \log_{\frac{\pi}{2}} i + 2\pi$ ។

(c) យើងរក $\arg_{\frac{\pi}{2}}(-2) = \pi$ ពីព្រោះតម្លៃនៃ $\arg(-2) \notin \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}\right]$

ដូចនេះ $\log_{\frac{\pi}{2}}(-2) = \ln 2 + i\arg_{\frac{\pi}{2}}(-2) = \ln 2 + i\pi$ ។

កំណត់សម្គាល់៖ $\operatorname{Log}(-2) = \log_{\frac{\pi}{2}}(-2)$ ។

❖ រូបភាពបំប្លែងលោការីត

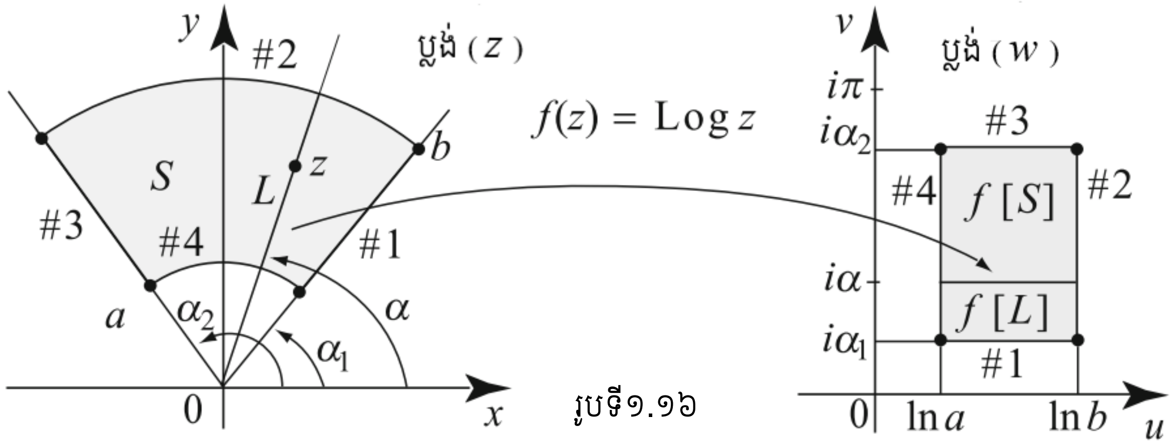
ក្នុងការសិក្សាអំពីលក្ខណៈនៃការបំប្លែងលោការីត យើងចាំថាអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលធ្វើឱ្យរូបភាពបំប្លែងដែនចតុកោណចកែងទៅជាដែនរាងជារង្វង់។ នៅទីនេះយើងរំពឹងថាលោការីតនឹងធ្វើផ្ទុយពីនេះ ពោលគឺការបំប្លែងដែនជារង្វង់ទៅជាដែនរាងចតុកោណកែង។

ឧទាហរណ៍២៤៖ តាង $0 < a < b$ និង $0 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le \pi$ ។ ចូររករូបភាពដែននៃរង្វង់

$S = \{z : a \le |z| \le b, \alpha_1 \le \operatorname{Arg} z \le \alpha_2\}$ ក្រោមរូបភាពបំប្លែង $f(z) = \operatorname{Log} z$ ។

ដំណោះស្រាយ

នៅក្នុង S ជាដែនទាល់ដោយកន្លះបន្ទាត់ត្រង់មុំ $0 \le \alpha_1$ និង $\alpha_2 \le \pi$ និងធ្នូរាងជារង្វង់ជាមួយកាំ a និង b ត្រូវបានបង្ហាញដូចរូប១.១៦៖



រូបទី១.១៦

រូបទី១.១៦ $\operatorname{Log} z$ ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយនៃការបំប្លែងដែនជារង្វង់ទៅជាចតុកោណកែង។ ព្រំដែនដែលជារង្វង់ជាអនុវត្តន៍ពេញលើដែននៃចតុកោណកែងដូចជា៖ ជ្រុង $\# j$ នៅក្នុងដែនជាការបំប្លែងទៅជ្រុង $\# j$ នៅក្នុងសំណុំរូបភាព។

ពិនិត្យមើលអង្គត់ត្រង់ L នៅលើកន្លះបន្ទាត់ត្រង់មុំ α ដែល $\alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2$ ។ ចំពោះ z នៅលើកន្លះបន្ទាត់យើងមាន $\operatorname{Arg} z = \alpha \Rightarrow \operatorname{Log} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z = \ln|z| + i\alpha$ ហើយ $|z|$ ជាតម្លៃប្រែប្រួលពី a ទៅ b និង $\ln|z|$ ជាតម្លៃប្រែប្រួលពី $\ln a$ ទៅ $\ln b$ នោះ $\operatorname{Log} z$ ជាបន្ទាត់ដេក $u + i\alpha,\ \ln a \le u \le \ln b$ ដោយតាង α ប្រែប្រួលពី α_1 ទៅ α_2 ហើយ L បត់មកលើ S និងរូបភាពនៃ L បត់ទៅជាផ្ទៃក្រឡាចតុកោណកែងជាមួយកំពូល $(\ln a, \alpha_1), (\ln b, \alpha_1), (\ln b, \alpha_2)$ និង $(\ln a, \alpha_2)$ បង្ហាញដូចរូបទី១.១៦។

១.៦.២. កុំផ្លិចស្វ័យគុណ

នៅក្នុងការគណនា ចំពោះចំនួនកុំផ្លិច $z \ne 0$ យើងកំណត់កុំផ្លិចស្វ័យគុណដោយ

$$z^a = e^{a \log z} \qquad (z \ne 0)$$

ដែល $\log z$ ជាលោការីតកុំផ្លិច ហើយ $\operatorname{Log} z$ ជាតម្លៃផលគុណយកតាមរូបមន្ត $z^a = e^{a \log z}$ ដែល z^a ជាតម្លៃពហុគុណទូទៅ។ ដោយបញ្ជាក់ផ្នែកនៃលោការីត យើងទទួលបានផ្នែកតម្លៃតែមួយនៃអនុគមន៍កុំផ្លិចស្វ័យគុណរូបមន្តខាងលើ។ បើជ្រើសរើសគោលលោការីតសំខាន់នោះយើងបានតម្លៃគោល(Principle value)នៃ z^a ៖

$$z^a = e^{a \operatorname{Log} z} \qquad (z \ne 0)$$

ឧទាហរណ៍២៥៖ ចូរបង្ហាញថា $\sin^{-1} z = -i \log\left[iz + \left(1 - z^2\right)^{\frac{1}{2}} \right]$ ដែលលោការីតកុំផ្លិចត្រូវបានកំណត់នៅក្នុងរូបមន្ត $\log z = \ln|z| + i \arg z$ (ចំពោះ $z \ne 0$ ឫសការេត្រូវយកតម្លៃពីរ និងលោការីតកុំផ្លិចជាតម្លៃមិនអាចរាប់បាន ជាលទ្ធផលចម្រាស់ស៊ីនុសជាតម្លៃមិនអាចរាប់បាន។)

ដំណោះស្រាយ

ដើម្បីដោះស្រាយ $\sin w = z$ យើងត្រូវប្រើតាមនិយមន័យ៥ដែល $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

យើងមាន $$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

$$\Rightarrow \left(e^{iw}\right)^2 - 2ize^{iw} - 1 = 0$$

តាង $t = e^{iw} > 0 \Rightarrow t^2 - 2izt - 1 = 0$

$$\Delta' = (iz)^2 + 1 = 1 - z^2$$

$$\Rightarrow e^{iw} = iz + \left(1 - z^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow iw = \log\left[iz + \left(1 - z^2\right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$\Rightarrow w = -i \log\left[iz + \left(1 - z^2\right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

តែ $\sin w = z \Rightarrow w = \sin^{-1} z$

ដូចនេះ $\sin^{-1} z = -i\log\left[iz + \left(1-z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$។

ឧទាហរណ៍២៦៖ បង្ហាញថា $\log\frac{x+iy}{x-iy} = 2i\tan^{-1}\frac{y}{x}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $\log(x+iy) = \log(r\cos\theta + ir\sin\theta) = \log re^{i\theta}$

$$= \log r + i\theta \quad (x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)$$

ដូចគ្នាដែរ $\log(x-iy) = \log r - i\theta$

$$\log\frac{x+iy}{x-iy} = \log(x+iy) - \log(x-iy) = (\log r + i\theta) - (\log r - ir) = 2i\theta$$

$$= 2i\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

ដូចនេះ $\log\frac{x+iy}{x-iy} = 2i\tan^{-1}\frac{y}{x}$ ។

ឧទាហរណ៍២៧៖ បង្ហាញថាចំពោះតម្លៃពិត a និង b នោះ $e^{2ai\cot^{-1}b}\left[\frac{bi-1}{bi+1}\right]^{-a} = 1$។

ដំណោះស្រាយ

ពិនិត្យ $\frac{bi-1}{bi+1} = \frac{bi+i^2}{bi-i^2} = \frac{b+i}{b-i}$

$$\Rightarrow \left(\frac{bi-1}{bi+1}\right)^{-a} = \left(\frac{b+i}{b-i}\right)^{-a}$$

$$\Rightarrow \log\left[\frac{bi-1}{bi+1}\right]^{-a} = \log\left(\frac{b+i}{b-i}\right)^{-a} = -a\left[\log(b+i) - \log(b-i)\right]$$

$$= -a\left[\log\sqrt{b^2+1} + i\tan^{-1}\frac{1}{b} - \log\sqrt{b^2+1} + i\tan^{-1}\frac{1}{b}\right]$$

$$= -2ai\tan^{-1}\frac{1}{b}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{bi-1}{bi+1}\right)^{-a} = e^{-2ai\tan^{-1}\left(\frac{1}{b}\right)}$$

$\left[\begin{array}{l}\text{បើ}\cot\theta = b, \tan\theta = \frac{1}{b}\\ \text{ដោយ}\cot^{-1}b = \tan^{-1}\left(\frac{1}{b}\right)\end{array}\right]$

$$e^{-2ai\tan^{-1}\left(\frac{1}{b}\right)}\left(\frac{bi-1}{bi+1}\right)^{-a} = \left[e^{2ai\tan^{-1}\left(\frac{1}{b}\right)}\right]\cdot\left[e^{-2ai\tan^{-1}\left(\frac{1}{b}\right)}\right] = 1 \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ $e^{2ai\cot^{-1}b}\left[\frac{bi-1}{bi+1}\right]^{-a} = 1$។

លំហាត់អនុគមន៍កុំផ្លិច

១.ចូរគណនា $f(z)$ និងសរសេរជាទម្រង់ $a+bi$ ដែល a និង b ជាចំនួនពិតចំពោះតម្លៃ z ខាងក្រោម៖

ក. $f(z)=iz+2+i,\ z=1+i,-1+i,-1-i,1-i$

ខ. $f(z)=(3+4i)z,\ z=1,i,-1,-i$

គ. $f(z)=z^2+2iz-1,\ z=-1-i,1+i,0,2i$

ឃ. $f(z)=\dfrac{z-i}{z+i}, z=i,1+i,-2i,3+\dfrac{i}{2}$

២. ចូរង្ហាញអនុគមន៍ $f(z)$ ជាទម្រង់ $u(z)+iv(z)$ ដែល u និង v ជាផ្នែកពិត និងផ្នែកនិមិត្តនៃ f ៖

ក. $f(z)=iz+2-i$ ខ. $f(z)=z+2+i$

គ. $f(z)=(1+i)z^2-2iz$ ឃ. $f(z)=z^2-2z+i$

ង. $f(z)=\dfrac{z-1}{z+1}$ ចៈ $f(z)=i|z|$

ជ. $f(z)=3\operatorname{Arg} z$ ឈ. $f(z)=\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z$

៣.ចូររកសំណុំរងធំបំផុតនៃ $\mathbb{C}$ នៅលើកន្សោមកំណត់ដូចខាងក្រោម៖

$(a)\ \dfrac{i-z}{2-i-z}$ $(b)\ 3+iz^2$

$(c)\ \dfrac{1}{1+z^2}$ $(d)\ 2+i\operatorname{Arg}(z-1)$

៤. ចូររកបំប្លែងលីនេអ៊ែរនៃអនុគមន៍ $f(z)$ ដែល $f(1)=3+i$ និង $f(3i)=-2+6i$ ។

៥. ចូររកបំប្លែងលីនេអ៊ែរនៃអនុគមន៍ $f(z)$ ដែល $f(2-i)=-3-3i$ និង $f(2)=-2-2i$ ។

៦. ចូររករូបភាព $f[S]$ នៅក្រោមបំប្លែងលីនេអ៊ែរ។ ចូរគូសរូបភាពនៃ S និង $f[S]$ ហើយពណ៌នាពីទិសដៅអនុវត្តន៍របស់វាដោយជ្រើសចំណុច។

$(1)\ S=\{z:|z|<1\},\ f(z)=4z$

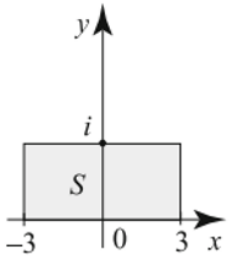
$(2)\ S=\{z:\operatorname{Re} z>0\},\ f(z)=iz+i$

$(3)\ S=\left\{z:|z|\le 2, 0\le \operatorname{Arg} z\le \dfrac{\pi}{2}\right\},\ f(z)=iz+2$

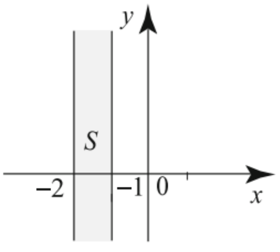
$(4)\ S=\{z:\operatorname{Re} z>0, \operatorname{Im} z>0\},\ f(z)=-z+2i$

៧. ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទនៅក្នុង**ឧទាហរណ៍៤**ដើម្បីរករូបភាព $f[S]$ ក្រោមរូបភាពបម្លែង $f(z)=z^2$ ។ រួចគូសរូបភាព $f[S]$ ដើម្បីបង្ហាញចម្លើយ និងដាក់លាក់ពីរូបភាពក្នុងដែនជាបន្ទាត់នៃ S ។

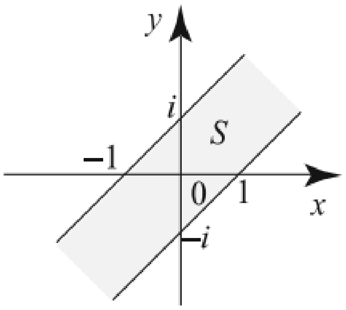
ក.



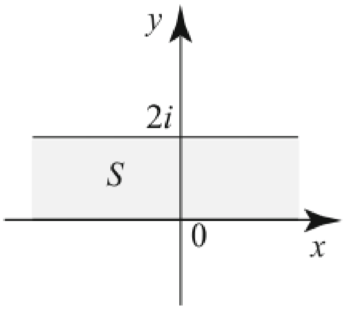
ខ.



គ.

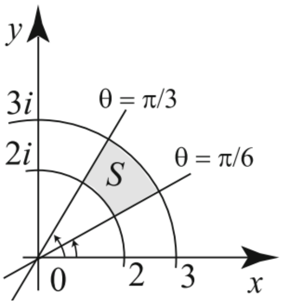


ឃ.

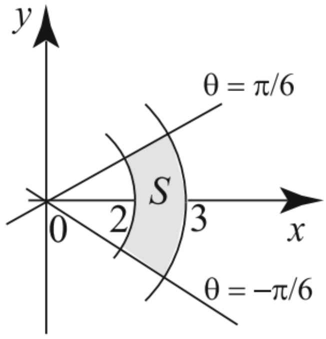


៨.ដោយប្រើកូអរដោនេប៉ូលែនៅក្នុង**ឧទាហរណ៍៦**ដើម្បីរករូបភាព $f[S]$ក្រោមរូបភាពបម្លែង។ រួចគូសរូបភាព $f[S]$ដើម្បីបង្ហាញចម្លើយ និងដាក់លាក់ពីរូបភាពក្នុងដែនជាបន្ទាត់នៃ S ។

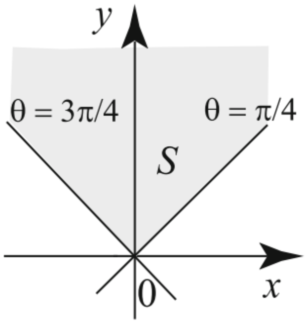
ក. $f(z) = z^3$



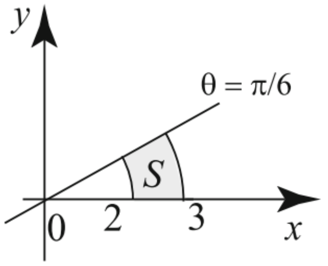
ខ. $f(z) = z^2$



គ. $f(z) = iz^2$



ឃ. $f(z) = \dfrac{i}{z^2}$



៩.ចូរកំណត់ថាតើស៊េរី $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ជាស៊េរីរួមឬមិនរួម និងរកលីមីតបើវារួម។

$(1).\ a_n = \dfrac{i\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)}{n}$ $\quad(2).\ a_n = \dfrac{\cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) + in}{n}$ $\quad(3).a_n = \dfrac{1}{n+i}$

$(4).\ a_n = \dfrac{\cos(\ln n) - i}{\sqrt{n}}$ $\quad(5).\ a_n = \dfrac{\cos n - in}{n^2}$ $\quad(6).\ a_n = \dfrac{(1+2i)n^2 + 2n - 1}{3in^2 + i}$

១០. ចូរគណនាលីមីតនៃស៊េរី $\dfrac{4^n + i5^n + (2-i)6^{-n}}{5^{n+1} - 2i4^n + 1}, n \to \infty$ ។

១១.ចូរកំណត់ថាតើស៊េរីរួម ឬរីកនិងរកផលបូករបស់វាបើវាជាស៊េរីរួម។

$(1).\ \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos n\theta}{3^n}$ $\quad(2).\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n$ $\quad(3).\ \sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{3-i}{(1+i)^n}$

$(4).\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{3^n}$ $(5).\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3+\sin n\theta}{10^n}$ $(6).\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\theta+(2i)^n}{3^n}$

$(7).\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+i)\left[(n-1)+i\right]}$ $(8).\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{(n+i)(n+200+2i)}$ $(9).\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{e^{-n}-e^{n}}{2in^2}$

១២. ចូរកំណត់ថាតើស៊េរីខាងក្រោមរួម ឬរីក៖

$(1).\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+3i}{4}\right)^n$ $(2).\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n+4^n}{(1+3i)^n}$ $(3).\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3i^n}{4+in^2}$

$(4).\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3+10i}{4+5in}\right)^n$ $(5).\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+2in)^n}{n^n}$ $(6).\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^n}{n^2}$

$(7).\ \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}\left[\left(\cos\left(\frac{1}{n^3}\right)+i\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^n\right]$ $(8).\ \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Im}\left[\left(\cos\left(\frac{1}{n^3}\right)+i\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^n\right]$

$(9).\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3+10i)n^n}{n!}$ $(10).\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2+3i)^n}{n!}$ $(11).\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3+i^n}$

១៣. នៅក្នុងលំហាត់ខាងក្រោមប្រើស៊េរីធរណីមាត្រដើម្បីកំណត់ដែនធំបំផុតដែលជាស៊េរីរួម និងរកតម្លៃនៃផលបូកមិនកំណត់។

$(1).\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$ $(2).\ \sum_{n=1}^{\infty}(1+z)^n$ $(3).\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(3+i)z}{4-i}\right)^n$

$(4).\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2+i)^n}{z^n}$ $(5).\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2-10z)^n}$ $(6).\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{(2+i-z)^n}$

$(7).\ \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{2}{z}\right)^n+\left(\frac{z}{3}\right)^n\right\}$ $(8).\ \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(1-z)^n}-z^n\right\}$

១៤. ចូរបង្ហាញជាទម្រង់ $a+bi$ ដែល a និង b ជាចំនួនពិត

1. $(a)\ e^{i\pi}$ $(b)\ e^{2i\pi}$ $(c)\ 3e^{-1+200i\pi}$ $(d)\ \frac{e^{\ln(3)+201i\frac{\pi}{2}}}{3}$

2. $(a)\ e^{i\frac{3\pi}{4}}$ $(b)\ e^{2-i\frac{\pi}{4}}$ $(c)\ e^{-1-i\frac{\pi}{6}}$ $(d)\ -2e^{i+\pi}$

3. $(a)\ 3e^{3+i\frac{\pi}{2}}$ $(b)\ e^{-701i\frac{\pi}{4}}$ $(c)\ -ie^{-i\frac{\pi}{3}}$ $(d)\ e^{e^{i\frac{\pi}{4}}}$

4. $(a)\ \frac{e^{-1-i}}{2i}$ $(b)\ e^{-\ln(7)+i\frac{\pi}{4}}$ $(c)\ (1-i)e^{-i\frac{\pi}{2}}$ $(d)\ e^{2-e^{i\frac{\pi}{3}}}$

១៥. ចូរបង្ហាញកន្សោមខាងក្រោមជាទម្រង់ $e^{i\alpha}$ ដែល α ជាចំនួនពិតយក θ ចំនួនពិតគ្រប់ករណី។

5. $(a)\cos\theta - i\sin\theta$ $(b)\sin\theta + i\cos\theta$ $(c)\dfrac{1}{\cos\theta + i\sin\theta}$

6. $(a)\dfrac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos(3\theta) + i\sin(3\theta)}$ $(b)\sin 2\theta - i\cos 2\theta$ $(c)(\cos\theta - i\sin\theta)^8$

8. $(a)\dfrac{1}{2}\cos\theta + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$ $(b)\dfrac{1}{\cos\theta - i\sin\theta}$ $(c)\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta$

9. $(a)(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos 2\theta - i\sin 2\theta)$ $(b)-i$ $(c)\dfrac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta}$

10. $(a)1$ $(b)(\sin\theta - i\cos\theta)^{11}$ $(c)\dfrac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\sin\theta\right)^3}$

១៦. ចូរគណនាកន្សោមខាងក្រោម និងសរសេរចម្លើយជាទម្រង់ $a+bi$ ដែល a និង b ជាចំនួនពិត។ យក $z_1 = 1+i,\ z_2 = 1-i,\ z_3 = 2+5i$ ។

1. $(a)e^{z_1}$ $(b)3ie^{z_2}$ $(c)e^{z_1}e^{z_2}$ $(d)\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$

2. $(a)e^{z_1}e^{z_2}e^{z_3}$ $(b)\dfrac{1}{e^{z_1}}$ $(c)\left(e^{z_1+z_2}\right)^{10}$ $(d)\dfrac{e^{z_1}+e^{z_2}}{e^{z_3}}$

3. $(a)\arg\left(e^{z_1}\right)$ $(b)\arg\left(e^{z_3}\right)$ $(c)\left|e^{z_1}e^{z_2}\right|$ $(d)\left|\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}\right|$

4. $(a)\mathrm{Re}\left(e^{z_1}\right)$ $(b)\mathrm{Im}\left(e^{z_1}\right)$ $(c)\mathrm{Re}\left(e^{z_1}e^{z_2}\right)$ $(d)\mathrm{Im}\left(e^{z_1+z_2+z_3}\right)$

១៧. ចូរសរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ $re^{i\theta}$ ៖

1. $(a)-3-3i$ $(b)-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}$ $(c)-1-\sqrt{3}i$ $(d)-3e^{2i}$

2. $(a)-\dfrac{i}{2}$ $(b)\dfrac{1+i}{1+\sqrt{3}i}$ $(c)\dfrac{1+i}{1-i}$ $(d)\dfrac{i}{10+10i}$

១៨. តាង $z = x+iy$ ដែល x, y ជាចំនួនពិត។ ចូររកផ្នែកពិត និងផ្នែកនិម្មិតនៃអនុគមន៍នៅក្នុងតួ x, y ។

$(a)\ e^{3z}$ $(b)\ e^{z^2}$ $(c)\ e^{\bar{z}}$ $(d)\ e^{iz}$

១៩. តាង z ជាចំនួនកុំផ្លិច។ បង្ហាញថា៖

$(a)\ \left(e^z\right)^n = e^{nz}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ $(b)\ \overline{e^z} = e^{\bar{z}}$ $(c)\ e^{z+i\pi} = -e^z$

២០. ចូរដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

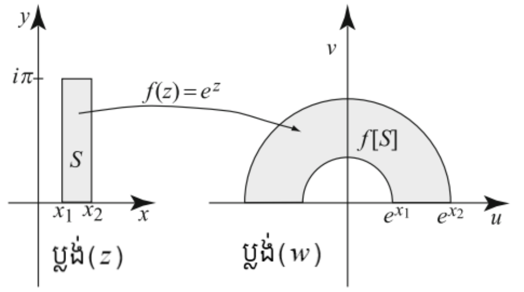
ក. $e^z = 2-2i$ ខ. $e^{2z} = i$ គ. $e^{-z+1} = -3-4i$ ឃ. $(1-i)e^z = 1+i$

២១. ចំពោះគ្រប់កុំផ្លិច z បង្ហាញថា៖ ក. $\overline{\cos z} = \cos\bar{z}$ ខ. $\overline{\sin z} = \sin\bar{z}$ ។

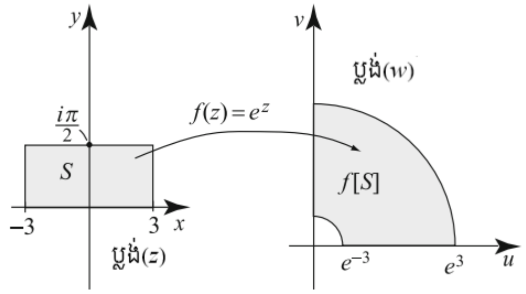
២២. ចំពោះគ្រប់កុំផ្លិច z បង្ហាញថា៖ ក. $\cos(z+2\pi) = \cos z$ ខ. $\sin(z+2\pi) = \sin z$ ។

២៣. នៅក្នុងលំហាត់ខាងក្រោមចូរបង្ហាញថាផ្ទៃក្រឡាដែលមានរាង S នៅក្នុងប្លង់ (z) ជារូបបម្លែងទៅជាផ្ទៃក្រឡានៅក្នុងប្លង់ (w) ដែលត្រូវគ្នា។

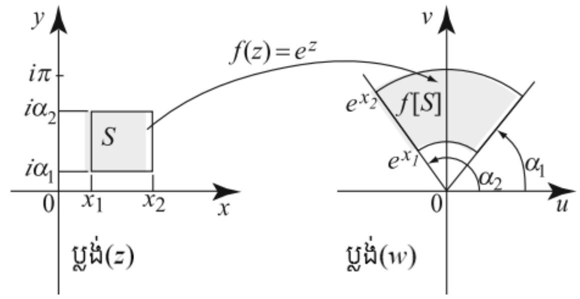
ក.



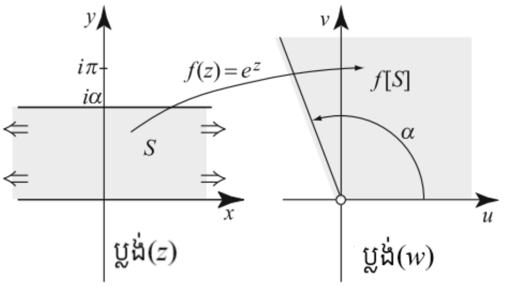
ខ.



គ.



ឃ.



២៤. ចូរគណនាតម្លៃ $\cos z$ និង $\sin z$ ចំពោះតម្លៃខាងក្រោមនៃ z ។

1. $(a)\ i$ $\quad (b)\ \dfrac{\pi}{2}$ $\quad (c)\ \pi+i$ $\quad (d)\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi i$

2. $(b)\ \dfrac{\pi}{4}+i\dfrac{\pi}{4}$ $\quad (b) -i\dfrac{\pi}{4}$ $\quad (c) -\dfrac{\pi}{2}+i\dfrac{\pi}{3}$ $\quad (d)\ \pi$

២៥.នៅក្នុងលំហាត់ចំពោះតម្លៃ z ខាងក្រោម៖

ក.គណនា $\cos z$, $\sin z$ និង $\tan z$ $\qquad$ ខ.គណនា $|\cos z|$ និង $|\sin z|$ ។ បើ

$(1).\ 1+i$ $\quad (2).\ 1-i$ $\quad (3).\ \dfrac{3\pi}{2}+i$ $\quad (4).\ \dfrac{\pi}{6}-i$

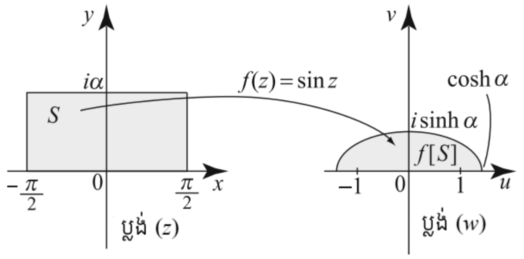
២៦. ចូរគណនាផ្នែកពិត និងផ្នែកនិម្មតខាងក្រោម៖

$(1).\ \sin(2z)$ $\quad (2).\ \cos\left(z^2\right)$ $\quad (3).\ z\sin z$

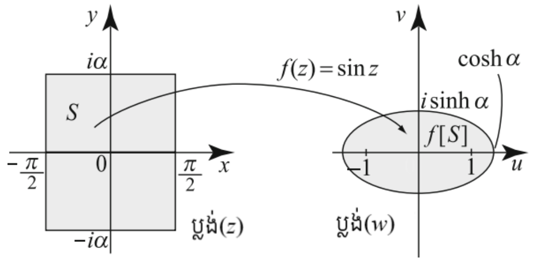
$(4).\ z\cos z$ $\quad (5).\ \tan z$ $\quad (6).\ \sec z$

២៧.នៅក្នុងលំហាត់ខាងក្រោមចូរបង្ហាញថាផ្ទៃក្រឡាដែលមានរាង S នៅក្នុងប្លង់ (z) ជារូបបម្លែងទៅជាផ្ទៃក្រឡានៅក្នុងប្លង់ (w) ក្រោមរូបភាពបំម្លែងដែលបង្ហាញដូចរូប។

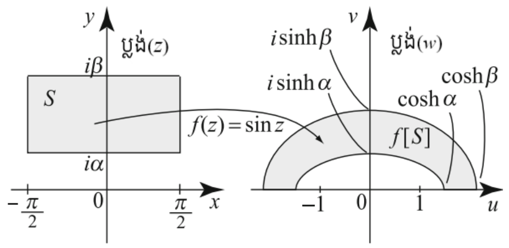
ក.



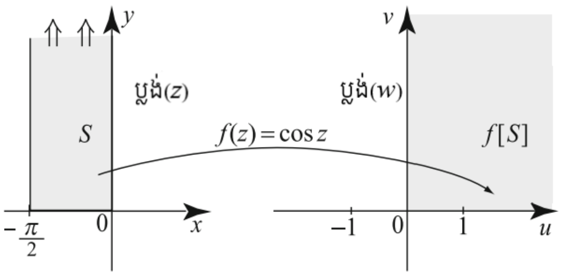
ខ.



គ.



ឃ.



២៨. គេមាន z_1, z_2, z_3 ជាចំនួនកុំផ្លិច ហើយ $z = x + iy$ ដែល x, y ជាចំនួនពិត។ ចូរបង្ហាញអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ និងអនុគមន៍អ៊ីពែកបូលិកកុំផ្លិចខាងក្រោម៖

$(1).\ \sin(-z) = -\sin z$ $\quad(2).\sin(z+2\pi) = \sin z$ $\quad(3).\ \cos(z+\pi) = -\cos z$

$(4).\ \sin(z+\pi) = -\sin z$ $\quad(5).\sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$

$(6).\ \cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z = 2\cos^2 z - 1 = 1 - 2\sin^2 z$

$(7).\ \sin 2z = 2\sin z \cos z$

$(8).\ 2\cos z_1 \cos z_2 = \cos(z_1 - z_2) + \cos(z_1 + z_2)$

$(9).\ \ 2\sin z_1 \sin z_2 = \cos(z_1 - z_2) - \cos(z_1 + z_2)$

$(10).\ 2\sin z_1 \cos z_2 = \sin(z_1 + z_2) + \sin(z_1 - z_2)$

$(11).\ \cosh(-z) = \cosh z\ ,\ \sinh(-z) = -\sinh z$

$(12).\ \cosh(z + 2\pi i) = \cosh z,\ \sinh(z + 2\pi i) = \sinh z$

$(13).\ \cosh(z + \pi i) = -\cosh z,\ \sinh(z + \pi i) = -\sinh z$

$(14).\ \sinh\left(z + i\dfrac{\pi}{2}\right) = i\cosh z,\ \ \cosh\left(z + i\dfrac{\pi}{2}\right) = i\sinh z$

$(15).\ e^z = \cosh z + \sinh z$ $\qquad(16).\ \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

$(17).\ \cosh 2z = \cosh^2 z + \sinh^2 z = 2\cosh^2 - 1 = 1 + 2\sinh^2 z$

$(18).\sinh 2z = 2\sinh z \cosh z$

$(19).\ \cosh^2 z = \dfrac{1 + \cosh 2z}{2}$ $\qquad(20).\ \sinh^2 z = \dfrac{-1 + \cosh 2z}{2}$

$(21).\ \cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$

$(22).\ \sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$

$(23).\ 2\cosh z_1 \cosh z_2 = \cosh(z_1 + z_2) + \cosh(z_1 - z_2)$

$(24).\ 2\sinh z_1 \sinh z_2 = \cosh(z_1 + z_2) - \cosh(z_1 - z_2)$

$(25).\ 2\sinh z_1 \cosh z_2 = \sinh(z_1 + z_2) + \sinh(z_1 - z_2)$

$(26).\ \cosh z = \cosh x \cos y + i\sinh z \sin y\ ,\ \sinh z = \sinh x \cos y + i\cosh z \sin y$

$(27).\ |\cosh z| = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 y}$ $\qquad(28).\ |\sinh z| = \sqrt{\sinh^2 x + \sin^2 y}$

២៩. ក. ចំពោះ $z\neq 1,\ n=0,1,2,\dots$ បង្ហាញថា $1+z+z^2+\cdots+z^n=\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$ ។

ខ. យក $z=e^{i\theta}$ ដែល θ ជាចំនួនពិត $\neq 2k\pi$ (k ជាចំនួនគត់) នោះគេបាន

$$1+e^{i\theta}+e^{2i\theta}+\cdots+e^{ni\theta}=\frac{i}{2}\frac{\left(1-e^{i(n+1)\theta}\right)e^{-i\frac{\theta}{2}}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

គ.យកផ្នែកពិត និងនិម្មិតផ្ទៀងផ្ទាត់នៅក្នុងសំណួរ(ខ)នោះគេបាន

$$\frac{1}{2}+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta=\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right]}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

និង $\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin n\theta=\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}-\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right]}{2\sin\frac{\theta}{2}}$

ផលបូក $D_n(\theta)=1+2\cos\theta+2\cos 2\theta+\cdots+2\cos n\theta$ ហៅថាDirichlet kernel។

៣០.ចូរគណនា $\log z$ ចំពោះតម្លៃ z ខាងក្រោម៖

1. $(a)\ 2i$ $(b)\ -3-3i$ $(c)\ 5e^{i\frac{\pi}{7}}$ $(d)\ -3$

2. $(a)\ 1$ $(b)\ 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ $(c)\ 4+4i$ $(d)\ -2e^{2+i\frac{2\pi}{11}}$

3. $(a)\ -\frac{1}{2}$ $(b)\ (1-i)^7$ $(c)\ 1+i\sqrt{3}$ $(d)\ e^{-1-i\frac{\pi}{7}}$

4. $(a)\ \dfrac{1}{(1+i)^4}$ $(b)\ (1-i)^{11}$ $(c)\ \left(1+i\sqrt{3}\right)^8$ $(d)\ \dfrac{e^{-i\frac{\pi}{7}}}{2e^{-i\frac{\pi}{5}}}$

៣១. គណនាលោការីតខាងក្រោម៖

$(a).\ \log_6 1$ $(b).\ \log_{\sqrt{3}}(1+i)$ $(c).\ \log_5(-5i)$ $(d).\ \log_{2\pi} i$

៣២. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

$(1).\ e^z=3$ $(2).\ e^{-z}=1+i$ $(3).\ e^{z+3}=i$

$(4).\ e^{2z}+3e^z+2=0$ $(5).\ e^{2z}+5=0$ $(6).\ e^z=\dfrac{1+i}{1-i}$

៣៣. ក. គណនា $\operatorname{Log}\left(e^{i\pi}\right),\operatorname{Log}\left(e^{3i\pi}\right)$ និង $\operatorname{Log}\left(e^{5i\pi}\right)$ ។

ខ. បង្ហាញថា $\operatorname{Log}\left(e^z\right)=z$ លុះត្រាតែ $-\pi<\operatorname{Im}z\leq\pi$

៣៤. បង្ហាញថា $\log z=i\arg z$ លុះត្រាតែ z ជាUnimodular។

៣៥. ចូរគ្រប់ដំណោះស្រាយកុំផ្លិចនៃសមីការ $\cos z=\sin z$ ។

៣៦. ដោះស្រាយ $\operatorname{Log} z+\operatorname{Log}(2z)=\frac{3\pi}{2}$ រួចផ្ទៀងផ្ទាត់ចម្លើយ។

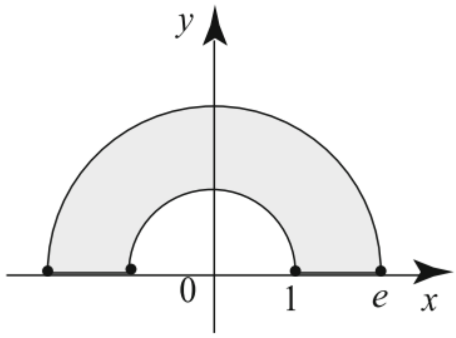
៣៧. ដោះស្រាយ $\operatorname{Log}(iz)-i\operatorname{Log} z=\frac{3\pi}{2}$ រួចផ្ទៀងផ្ទាត់ចម្លើយ។

៣៨. គណនាតម្លៃគោលនៃស្វ័យគុណខាងក្រោម៖

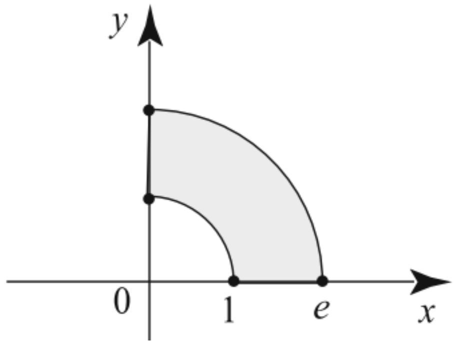
$(a).\ 5^i$ $\qquad (b).\ (1+i)^{3+i}$ $\qquad (c).\ i^i$ $\qquad (d).\ \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^i$

៣៩. ចូរកំណត់រូបភាពនៃដែនក្រោមរូបភាពបំប្លែងនៃ $\operatorname{Log} z$ ហើយកំណត់រូបភាពជាក់លាក់ពីរូបភាពនៃដែនរបស់វា។

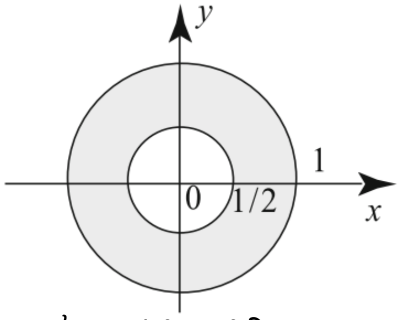
ក.



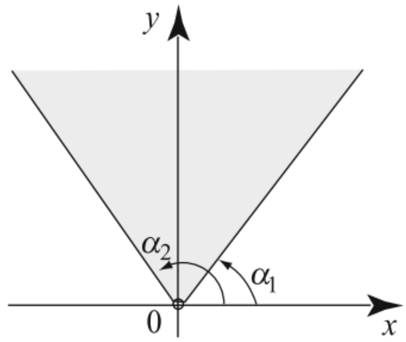
ខ.



គ.



ឃ.



៤០. ផ្ទៀងផ្ទាត់ចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម៖

ក. $1+i\tan w=\frac{2e^{iw}}{e^{iw}+e^{-iw}}$ ដែល w ជាចំនួនកុំផ្លិចហើយ $e^{iw}+e^{-iw}\neq 0$ ។

ខ. ដូចគ្នាដែលចំពោះ w នៅក្នុងសំណួរ(ក)បង្ហាញថា $1-i\tan w=\frac{2e^{-iw}}{e^{iw}+e^{-iw}}$ ។

គ.ចែកកន្សោមនៅក្នុងសំណួរ(ក) និង(ខ)នោះគេបាន៖

$$\tan^{-1} z=\frac{i}{2}\log\frac{1-iz}{1+iz},\ (z\neq \pm i)$$

៤១. ផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះចំនួនកុំផ្លិច z នោះយើងមាន៖

ក. $\sinh^{-1} z=\log\left(z+\left(z^2+1\right)^{\frac{1}{2}}\right)$ $\qquad$ ខ. $\cosh^{-1} z=\log\left(z+\left(z^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\right)$

មេរៀនទី២៖ អនុគមន៍វិភាគ

Analytic function

២.១. អនុគមន៍នៃអថេរកុំផ្លិច (Functions of a Complex Variable)

២.១.១. និយមន័យ៖ គេឱ្យ D ជាសំណុំនៃចំនួនកុំផ្លិច $\left(D\subseteq\mathbb{C}\right)$ ។ អនុគមន៍ f កំណត់លើសំណុំ D គឺជាវិធានមួយដែលកំណត់ចំពោះ z នៅក្នុងសំណុំ D បានចំនួនកុំផ្លិច w មួយ។ ចំនួនកុំផ្លិច w ហៅថាតម្លៃនៃ f នៅត្រង់z ហើយដែលគេកំណត់សរសេរដោយ $w=f\left(z\right)$ ដែល $z=x+iy$ $\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$ ។

សំណុំ D ហៅថាដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f និង $z=x+iy$ ហៅថាអថេរកុំផ្លិច ។

$$f:D\to\mathbb{C}$$
$$z=x+iy\mapsto w=f\left(z\right)=x+iy\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$$

ដោយ $z=x+iy$ (អថេរកុំផ្លិច) នោះគេបាន $w=f\left(z\right)=f\left(x+iy\right)=u\left(x,y\right)+iv\left(x,y\right)$ នេះបង្ហាញថា អនុគមន៍កុំផ្លិច $f\left(z\right)$ នៃអថេរកុំផ្លិច $z=x+iy$ សមមូលនឹងគូនៃអនុគមន៍មានតម្លៃពិត u និង v ដែលមានពីរអថេរពិត x និង y ។

នៅក្នុងអនុគមន៍អថេរកុំផ្លិច $f\left(z\right)=f\left(x+iy\right)=u\left(x,y\right)+iv\left(x,y\right)$ អនុគមន៍ u ហៅថាអនុគមន៍ផ្នែកពិតនៃ f និងអនុគមន៍ v ហៅអនុគមន៍ផ្នែកនិមិត្តនៃ f ដែលគេកំណត់សរសេររៀងគ្នាដោយ $u=\operatorname{Re}\left(f\right)$ និង $v=\operatorname{Im}\left(f\right)$ ។

ឧទាហរណ៍១៖ ចូរកំណត់អនុគមន៍ផ្នែកពិតនិងអនុគមន៍ផ្នែកនិមិត្តនៃអនុគមន៍ $f\left(z\right)=z^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយ $z=x+iy$ នោះគេបាន៖

$$f\left(z\right)=z^2=\left(x+iy\right)^2=x^2-y^2+2ixy,\ \left(a+ib\right)^2=a^2-b^2+2iab$$

ដូចនេះ $u\left(x,y\right)=\operatorname{Re}\left(f\right)=x^2-y^2$ និង $v\left(x,y\right)=\operatorname{Im}\left(f\right)=2xy$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ គេឱ្យ $f\left(z\right)=z^2$ ។ ចូរគណនា $f\left(z\right)$ ចំពោះ $z=2+3i$ និង $z=-3-2i$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $f\left(z\right)=z^2$ គេបាន៖

ចំពោះ $z=2+3i$ នោះ $f\left(2+3i\right)=\left(2+3i\right)^2=2^2-3^2+2i\times2\times3=-5+12i$

ចំពោះ $z=-3-2i$ នោះ $f\left(-3-2i\right)=\left(-3-2i\right)^2=5+12i$

ដូចនេះ $f\left(2+3i\right)=-5+12i$ និង $f\left(-3-2i\right)=5+12i$ ។

ឧទាហរណ៍៣៖ គេឱ្យ $f\left(z\right)=z^2+3z$ ។ រកអនុគមន៍ u និង v រួចទាញរកតម្លៃនៃអនុគមន៍ f នៅត្រង់ $z=1+3i$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $f\left(z\right)=z^2+3z=\left(x+iy\right)^2+3\left(x+iy\right)$

$$=x^2+2ixy-y^2+3x+3iy$$
$$=x^2-y^2+3x+i\left(2xy+3y\right)$$

យក $u(x,y)=x^2-y^2+3x, v(x,y)=2xy+3y$

ដោយ $z=1+3i, x=1, y=3$

នោះគេបាន $u(1,3)=1^2-3^2+3(1)=-5$ និង $v(1,3)=2(1)(3)+3(3)=15$

ហើយ $f(1+3i)=u(1,3)+iv(1,3)=-5+15i$

ដូចនេះ $f(1+3i)=-5+15i$ ។

ឧទាហរណ៍៤៖ គេឱ្យ $f(z)=2iz+6\bar{z}$ ។ រកអនុគមន៍ u និង v រួចទាញរកតម្លៃនៃអនុគមន៍ f នៅត្រង់ $z=\frac{1}{2}+4i$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $f(z)=2iz+6\bar{z}=2i(x+iy)^2+6\overline{(x+iy)}$

$$=2ix^2+4xy-2iy^2+6x-6iy$$

$$=6x+4xy+i\left(2x^2-2y^2-6y\right)$$

យក $u(x,y)=6x+4xy,\ v(x,y)=2x^2-2y^2-6y$

ដោយ $z=\frac{1}{2}+4i, x=\frac{1}{2}, y=4$ នោះគេបាន $u\left(\frac{1}{2},4\right)=6\left(\frac{1}{2}\right)+4\left(\frac{1}{2}\right)(4)=11$

និង $v\left(\frac{1}{2},4\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)^2-2(4)^2-6(4)=\frac{111}{2}$

ហើយ $f\left(\frac{1}{2}+4i\right)=u\left(\frac{1}{2},4\right)+iv\left(\frac{1}{2},4\right)=11-\frac{111}{2}i$

ដូចនេះ $f(z)=11-\frac{111}{2}i$ ។

អនុវត្តន៍៖ ចូរសរសេរអនុគមន៍ខាងក្រោមជារាង $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ រួចកំណត់ $u(x,y)$ និង $v(x,y)$៖

ក. $f(z)=z+\bar{z}$ ខ. $f(z)=z^3+z+1$

គ. $f(z)=z+\frac{1}{z}, z\neq 0$ ឃ. $f(z)=\frac{1-z}{1+z}, z\neq -1$

ឃ. $f(z)=z^4$ ង. $f(z)=\bar{z}\,\mathrm{Re}(z)+z^2+\mathrm{Im}(z)$

ឧទាហរណ៍៥៖ ចូរសរសេរ $f(z)=4x^2+4iy^2$ ជាអនុគមន៍នៃ z និង $\bar{z}$ ដែល $z=x+iy$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $z=x+iy, \bar{z}=x-iy$ គេបាន

$$x=\frac{z+\bar{z}}{2}, y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$$

គេបាន $f(z)=4\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2+4i\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2$

$$= z^2 + 2z\bar{z} + \left(\bar{z}\right)^2 - z^2 + 2z\bar{z} - \left(\bar{z}\right)^2$$

$$= 4z\bar{z}$$

ដូចនេះ $f\left(z\right) = 4z\bar{z}$ ។

ឧទាហរណ៍៦៖ ចូរសរសេរ $f(z) = x^2 - y^2 - 2y + i(2x - 2xy)$ ជាអនុគមន៍នៃ z និង $\bar{z}$ ដែល $z = x + iy$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$ គេបាន

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

គេបាន $f\left(z\right) = \left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^2 - 2\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right) + i\left[2\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right) - 2\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)\right]$

$$= \frac{z^2 + 2z\bar{z} + \left(\bar{z}\right)^2}{4} - \frac{z^2 - 2z\bar{z} + \left(\bar{z}\right)^2}{4} - \frac{z - \bar{z}}{i} + iz + i\bar{z} - \frac{z^2 - \left(\bar{z}\right)^2}{2i}$$

$$= 2z\bar{z} - \frac{z^2 - \left(\bar{z}\right)^2}{2i} + iz - i\bar{z} + iz + i\bar{z}$$

$$= z\bar{z} + \frac{iz^2 - i\left(\bar{z}\right)^2}{2} + 2iz = z\bar{z} + i\left[\frac{z^2 - \left(\bar{z}\right)^2}{2} + 2z\right]$$

ដូចនេះ $f\left(z\right) = z\bar{z} + i\left[\frac{z^2 - \left(\bar{z}\right)^2}{2} + 2z\right]$ ។

សម្គាល់៖ បើ $z = re^{i\theta}$ នោះគេអាចសរសេរ $w = f\left(z\right) = f\left(re^{i\theta}\right) = u\left(r,\theta\right) + iv\left(i,\theta\right)$ ។

ឧទាហរណ៍៧៖ បើ $f(z) = z^2$ ហើយ $z = re^{i\theta}$ នោះគេបាន៖

$$f(z) = (re^{i\theta})^2 = r^2 e^{2i\theta} = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta), e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u\left(r,\theta\right) = r^2\cos 2\theta \\ v\left(r,\theta\right) = r^2\sin 2\theta \end{cases}$$

ឧទាហរណ៍៨៖ ចូរសរសេរ $f\left(z\right) = z^5 + 4z^2 - 6$ ក្នុងទម្រង់ $f\left(z\right) = u\left(r,\theta\right) + iv\left(r,\theta\right)$ ។

ជំនួស $z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$

ឧទាហរណ៍៩៖ ចូរសរសេរ $f\left(z\right) = z + \frac{1}{z}, \left(z \neq 0\right)$ ក្នុងទម្រង់ $f\left(z\right) = u\left(r,\theta\right) + iv\left(r,\theta\right)$ ។

២.២. លីមីត និងភាពជាប់

ក. លីមីត

និយមន័យ១៖ គេបាន $w = f\left(z\right) = f\left(x + iy\right) = u\left(x,y\right) + iv\left(x,y\right)$

i. ឧបមាថាកំណត់ត្រង់វ៉ស៊ីណាV មួយនៃ $z_0 = x_0 + iy_0$ ប្រហែលលើកលែងតែត្រង់ z_0 គេថា៖

f មានលីមីត $L = A + iB$ ឬខិតជិត L ពេល z ខិតជិត z_0 កំណត់ $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$ កាលណា៖

$$\forall\varepsilon>0, \exists y>0, \forall z\in V, 0<|z-z_o|<y \Rightarrow |f(z)-L|<\varepsilon$$

តែ $|z-z_o| = |(x+iy)-(x_o-iy_o)| = |(x-x_o)+i(y-y_o)|$

$$|f(z)-L| = |u(x,y)+iv(x,y)-(A+iB)| = |[u(x,y)-A]+i[v(x,y)-B]|$$

ដូចនេះ តាមលក្ខណៈម៉ូឌុល គេបាន $\lim_{z\to z_o} f(z) = L = A+iB = \begin{cases}\lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} u(x,y) = A\\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} v(x,y) = B\end{cases}$ ។

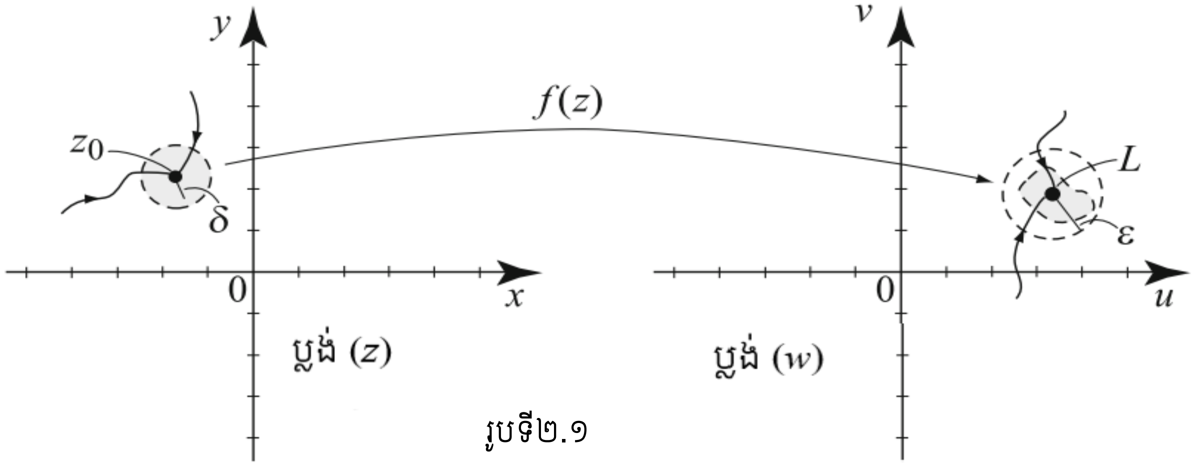
និយមន័យ២៖ តាង f ជាតម្លៃអនុគមន៍កុំផ្លិចកំណត់នៅលើសំណុំរង S នៃប្លង់កុំផ្លិច និងតាង z_0 ជាសំណុំចំណុចនៃ S ។ ចំនួនកុំផ្លិច L ជាលីមីតនៃ $f(z)$ ដែល z ខិតជិត z_0 ចំពោះ $\varepsilon>0$ មាន $\delta>0$ ហើយ $z\in S$ និង $0<|z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)-L|<\varepsilon$ ។

បើមានចំនួនកុំផ្លិច L នោះគេបាន $\lim_{z\to z_0} f(z)$ មាន ហើយស្មើនឹង L នៅក្នុងករណីនេះគេកំណត់សរសេរដោយ $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$ ឬ $f(z)\to L$ កាលណា $z\to z_0$ ។

តាមន័យធរណីមាត្រចំពោះបំណកស្រាយតម្លៃដាច់ខាត $|f(z)-L|$ ជាចម្ងាយរវាង $f(z)$ និង L យើងឃើញថាអនុគមន៍ $f(z)$ មានលីមីត L ចំពោះ $z\to z_0$ លុះត្រាតែចម្ងាយពី $f(z)$ និង L ខិតជិតសូន្យ កាលណា z ខិតជិត z_0 ។ តាមរូបទី២.១ នោះ $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$ លុះត្រាតែ៖

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)-L| = 0$$

ចំណាំថានៅក្នុងនិមយមន័យ២ អនុគមន៍ f មិនចាំបាច់កំណត់នៅត្រង់ z_0 ទេ។



រូបទី២.១

ដើម្បីឱ្យ $f(z)\to L$ ពេល $z\to z_0$ វាជាអំណះអំណាងដែលខ្លាំង មានន័យថាវាគ្មានបញ្ហាអ្វីពេល z ខិតជិត z_0 ហើយចម្ងាយ $|f(z)-L|$ ខិតទៅរក 0 ។

សំណើ១៖ បើ f កំណត់នៅលើសំណុំរង S នៃ $\mathbb{C}$ ហើយ z_0 ជាសំណុំចំណុចនៃ S និងមាន $\lim_{z\to z_0} f(z)$ កំណត់ នោះវាមានតែមួយគត់។

សម្រាយបញ្ជាក់

ឧបមាថា $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=L$ និង $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=L'$ ដែល L,L' ជាចំនួនកុំផ្លិចផ្សេងគ្នា។ នោះចំពោះ $\varepsilon=\dfrac{|L-L'|}{2}>0$ មាន $\delta>0$ គេបាន៖

$$0<|z-z_0|<\delta\Rightarrow\left|f(z)-L\right|<\frac{1}{2}|L-L'|$$

$$0<|z-z_0|<\delta\Rightarrow\left|f(z)-L'\right|<\frac{1}{2}|L-L'|$$

យើងបូកបញ្ចូលគ្នាគេបានចំពោះ $0<|z-z_0|<\delta$ នោះយើងបាន

$$|L-L'|\le\left|f(z)-L\right|+\left|f(z)-L'\right|<\frac{1}{2}|L-L'|+\frac{1}{2}|L-L'|=|L-L'|$$

ដែលជាសំណើផ្ទុយ ដោយ $|L-L'|<|L-L'|$ គឺមិនអាចកើតមានឡើង។

ដើម្បីនិយាយថា $f(z)\to L$ កាលណា $z\to z_0$ វាជាអំណះអំណាងខ្លាំង មានន័យថាគ្មានបញ្ហាថាតើ z ខិតជិត z_0 ហើយចម្ងាយ $\left|f(z)-L\right|$ ខិតទៅរក 0។

សំណើ២៖ បើ f កំណត់នៅលើសំណុំរង S នៃ $\mathbb{C}$ ហើយ z_0 ជាសំណុំចំណុចនៃ S និងមាន $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ កំណត់ នោះវាមានតែមួយគត់។

សម្រាយបញ្ជាក់

ឧបមាថា $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=L$ និង $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=L'$ ដែល L,L' ជាចំនួនកុំផ្លិចផ្សេងគ្នា។ នោះចំពោះ $\varepsilon=\dfrac{|L-L'|}{2}>0$ មាន $\delta>0$ គេបាន៖

$$0<|z-z_0|<\delta\Rightarrow\left|f(z)-L\right|<\frac{1}{2}|L-L'|$$

$$0<|z-z_0|<\delta\Rightarrow\left|f(z)-L'\right|<\frac{1}{2}|L-L'|$$

យើងបូកបញ្ចូលគ្នាគេបានចំពោះ $0<|z-z_0|<\delta$ នោះយើងបាន

$$|L-L'|\le\left|f(z)-L\right|+\left|f(z)-L'\right|<\frac{1}{2}|L-L'|+\frac{1}{2}|L-L'|=|L-L'|$$

ដែលជាសំណើផ្ទុយ ដោយ $|L-L'|<|L-L'|$ គឺមិនអាចកើតមានឡើង។

ឧទាហរណ៍១០៖ បង្ហាញថា

(a) $\lim\limits_{z\to z_0} z=z_0$ $\qquad$ (b) $\lim\limits_{z\to z_0} c=c$ ដែល c ជាចំនួនថេរ។

ដំណោះស្រាយ

(a) គេឱ្យ $\varepsilon>0$ យើងត្រូវរក $\delta>0$ ដែល $0<|z-z_0|<\delta\Rightarrow\left|f(z)-L\right|<\varepsilon$

ចំពោះ $f(z)=z$ និង $L=z_0$ ពីព្រោះ $0<|z-z_0|<\delta\Rightarrow|z-z_0|<\varepsilon$

ដោយគ្រាន់តែយក $\delta=\varepsilon$។

(b) វិសមីការ $\left|f(z)-L\right|=\left|c-c\right|<\varepsilon$ ដោយគ្រាន់តែជ្រើសយក $\delta>0$ នោះគេបាន $\lim\limits_{z\to z_0} c=c$ ។

ឧទាហរណ៍១១៖ គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

1. $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z^2+1}{z-i}=2i$ ព្រោះ

គេតាង $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z-i}, S=\mathbb{C}-\{i\}$

$$\forall z\neq i, \left|f(z)-2i\right|=\left|\frac{z^2+1}{z-i}-2i\right|=\left|\frac{(z-i)(z+i)}{z-i}-2i\right|=\left|z-i\right|$$

មានន័យថាតាម (1) ពិត $y=\varepsilon$

2. $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{z+1}{z+i}=1-i$

គេបាន $f(z)=\dfrac{z+1}{z+i}$ កំណត់លើ $\mathbb{C}-\{-i\}$

$$\forall z\neq -i, \left|f(z)-(1-i)\right|=\left|\frac{z+1}{z+i}-(1-i)\right|=\left|\frac{z+1}{z+i}-1+i\right|=\left|\frac{i(z-1)}{z+i}\right|=\frac{|z-1|}{|z+i|}$$

ឧបមាថា $\begin{cases}|z-1|<1\\ |z+i|>1\Rightarrow \dfrac{1}{|z+i|}<i\end{cases}$

$$\Rightarrow \left|f(z)-(1-i)\right|=\frac{|z-1|}{|z+i|}<|z-1|$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{z+1}{z+i}=1-i$ ពិតហើយយក $y=\min(1,\varepsilon)$ ។

ii. បើ f កំណត់ត្រង់វ៉ស៊ីណានៃ ∞ *i.e.* $\exists R>0, f$ កំណត់ត្រង់វ៉ស៊ីណា $|z|>R$ គេថា f មានលីមីត L ពេលខិតជិត ∞ ដែលគេសរសេរ $\lim\limits_{z\to\infty} L$ កាល $\forall\varepsilon>0, \exists R>0, \forall z, |z|>R\Rightarrow \left|f(z)-L\right|<\varepsilon (***)$

ឧទាហរណ៍១២៖ បង្ហាញថា $\lim\limits_{z\to+\infty}\dfrac{2z+i}{z-1}=2$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេបាន $f(x)=\dfrac{2z+i}{z-1}$ កំណត់ $\forall z$, $|z-i|>\alpha$, $\forall\alpha>0$

$$\forall z\neq i\ , \left|f(x)-2\right|=\left|\frac{2z+i}{z-i}-2\right|=\left|\frac{3i}{z-i}\right|=\frac{3}{|z-i|}$$

ដោយ $|z-i|\geq|z|-1>0$

ឧបមាថា $|z|>1$

$$\Rightarrow \frac{3}{|z-i|} \le \frac{3}{|z|-1}$$

នោះ $\left|f(x)-2\right| = \frac{3}{|z-1|} \le \frac{3}{|z|-1} \quad (\therefore)$

គេបាន $\frac{3}{|z|-1} < \varepsilon \ , \forall \varepsilon > 0$ ពិត

$$\Leftrightarrow |z|-1 > \frac{3}{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow |z| > \frac{3}{\varepsilon}+1$$ យក $R = \frac{3}{\varepsilon}+1$

ដូចនេះ $\lim_{z\to+\infty} \frac{2z+i}{z-1} = 2$ ។

iii. f មានលីមីត

- គេថា f មានលីមីត ∞ ពេល $z \to z_o$ ដែដលកំណត់សរសេរ $\lim_{z\to z_o} f(z) = \infty$ កាលណា

  $\forall R > 0, \exists y > 0, \forall z, 0 < |z - z_0| < y \Rightarrow |f(z)| > R \qquad (4)$

- គេថា f មានលីមីត ∞ ពេល $z \to \infty$ ដែលកំណត់សរសេរដោយ $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$ កាលណា

  $\forall R > 0, \exists R' > 0, \forall z, |z| < R \Rightarrow |f(z)| > R \qquad (5)$

ឧទាហរណ៍១៣៖ គេមានអនុគមន៍ $f(z) = \frac{z^2+1}{z}$ ។

- ចំពោះ $\lim_{z\to 0} \frac{z^2+1}{z} = \infty$ ព្រោះ $\forall z \ne 0, |f(z)| = \left|\frac{z^2+1}{z}\right| = \left|z+\frac{1}{z}\right| \ge \frac{1}{|z|} - |z|$

ឧបមាថា $|z| < 1 \Rightarrow -|z| > -1 \Rightarrow f(x) \ge \frac{1}{|z|} - |z| > \frac{1}{z} - 1$

ដូចនេះ បើ $R > 0 \Rightarrow (4)$ ពិតបើយក $\frac{1}{|z|} - 1 > R \Leftrightarrow \frac{1}{|z|} > R-1 \Leftrightarrow |z| < \frac{1}{|R+1|}$ គឺយក $y = \frac{1}{R+1}$

- ចំពោះ $\lim_{z\to\infty} \frac{z^2+1}{z} = \infty$ ព្រោះ $\forall z \ne 0, |f(z)| = \left|z+\frac{1}{z}\right| \ge |z| - \frac{1}{|z|}$

បើឧបមា $|z| > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|z|} < 1 \Rightarrow -\frac{1}{|z|} > -1$

គេបាន $|f(z)| \ge |z| - \frac{1}{|z|} \ge |z| - 1$

ដូចនេះ $\forall R > 0 \Rightarrow (5)$ ពិតបើយក $|z| - 1 > R \Leftrightarrow |z| > R+1$ គឺយក $R' = R+1$

ឧទាហរណ៍១៤៖ បង្ហាញថា $\lim_{z\to 0} \frac{z}{|z|}$ មិនមានលីមីត។

ដំណោះស្រាយ

យើងបាន $\lim_{z\to 0} \frac{z}{|z|} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+iy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

តាង $y = mx \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+iy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+imx}{\sqrt{x^2+(mx)^2}} = \frac{1+im}{\sqrt{1+m^2}}$

តម្លៃនៃ $\frac{1+mi}{\sqrt{1+m^2}}$ គឺផ្សេងគ្នាចំពោះតម្លៃខុសគ្នានៃ m

ដូចនេះ លីមីតនៃអនុគមន៍នេះគឺមិនមានលីមីត។

ឧទាហរណ៍១៥៖ បង្ហាញថា $\lim\limits_{z\to 0} \frac{z}{\bar{z}}$ គ្មានលីមីត។

ដំណោះស្រាយ

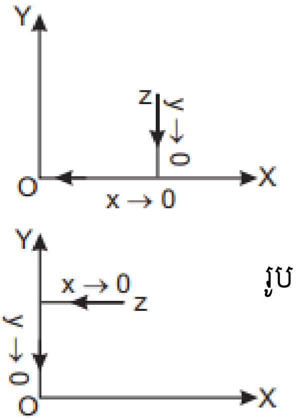
ករណីទី១៖ $\lim\limits_{z\to 0} \frac{z}{\bar{z}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+iy}{x-iy} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0} \frac{x+iy}{x-iy}\right]$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

ត្រង់ចំណុចនេះបើ $y \to 0$ នោះ $x \to 0$

ករណីទី២៖ $\lim\limits_{z\to 0} \frac{z}{\bar{z}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+iy}{x-iy} = \lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+iy}{x-iy}\right]$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{iy}{-iy} = -1$$



រូបទី២.២

នៅក្នុងករណីនេះយើងមានផ្នែកផ្សេងៗគ្នាដំបូងពេល $x \to 0$ នោះ $y \to 0$ ហើយ $z \to 0$ ទៅផ្នែកពីរផ្សេងគ្នាយើងបានលីមីតពីរផ្សេងគ្នា។

ដូចនេះ លីមីតនៃអនុគមន៍គឺមិនមានលីមីត។

ឧទាហរណ៍១៦៖ ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

$(a).\ \lim\limits_{z\to\infty} \frac{iz^3+iz-1}{(2z+3i)(z-i)^2}$ $(b).\ \lim\limits_{z\to 1+i} \frac{z^2-z-i+1}{z^2-2z+2}$

ដំណោះស្រាយ

$$(a).\ \lim_{z\to\infty} \frac{iz^3+iz-1}{(2z+3i)(z-i)^2} = \lim_{y\to\infty} \frac{z^3\left(i+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}\right)}{z^3\left(2+\frac{3i}{z}\right)\left(1-\frac{i}{z}\right)^2} = \frac{i}{2}$$

$$(b).\ \lim_{z\to 1+i} \frac{z^2-z-i+1}{z^2-2z+2} = \lim_{z\to 1+i} \frac{[z-(1+i)][z+(1+i)]+2i-z-i+1}{[z-(1+i)][z+(1+i)]+2i-2z+2}$$

$$= \lim_{z\to 1+i} \frac{[z-(1+i)][z+(1+i)]-(z-(i+1))}{[z-(1+i)][z+(1+i)]-2[z-(1+i)]}$$

$$= \lim_{z\to 1+i} \frac{z+i}{z+i-1} = \frac{1+2i}{2i} = \frac{2-i}{2}$$

ខ. ភាពជាប់

និយមន័យ៣៖ គេឱ្យ $w=f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$

តាង f ជាអនុគមន៍កំណត់លើសំណុំរង S នៃ $\mathbb{C}$ និងតាង z_0 ជាចំណុចមួយនៅក្នុង S ។

គេថា f ជាប់ត្រង់ z_0 បើចំពោះគ្រប់ $\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$ ដែល

$$z\in S,|z-z_0|<\delta\Rightarrow|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$$

អនុគមន៍ f ហៅថាអនុគមន៍ជាប់នៅលើ S បើវាជាត្រង់គ្រប់ចំណុចនៅក្នុង S ។

- បើ z_0 មិនមែនជាសំណុំចំណុចនៃ S មាន $\exists\delta>0:B'(z_0,\delta)\cap S=\varnothing$ នោះ $z\in S$

និង $|z-z_0|<\delta\Rightarrow z=z_0$ ដូច្នេះ f ជាប់ត្រង់ z_0 ដែលបំពេញលក្ខខ័ណ្ឌចំពោះគ្រប់ $\varepsilon>0$ ។

- បើ $z_0\in S$ ជាសំណុំចំណុចនៃ S នោះគេបាន $L=f(z_0)$ (តាមនិយមន័យ២)គឺស្មើគ្នាទៅនឹងនិយមន័យ៣ខាងលើ នោះគេបាន $z=z_0$ នៅក្នុងករណី f ជាប់ត្រង់ z_0 លុះត្រាតែ $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$
- បើ f កំណត់ត្រង់វ៉ស៊ីណាមួយនៃ $z_0=x_0+iy_0$ គេថា f ជាប់ត្រង់ z_0 កាលណា៖

$$\forall\varepsilon>0,\exists y>0,\forall z,|z-z_0|<y\Rightarrow|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow\lim_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)(*)$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}P(x,y)=P(x_0,y_0)\\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}Q(x,y)=Q(x_0,y_0)\end{cases}$$

- បើ f កំណត់ត្រង់លើសំណុំបើក $U\subset\mathbb{C}$ គេថា f ជាប់លើ $\mathbb{C}$ កាលណា f ជាប់ត្រង់ $\forall z_0\in U$

ទ្រឹស្តីបទ១៖ ដូចករណីអនុគមន៍ពិតគេបាន៖បើ f,g ជាប់ត្រង់ z_0 (រៀងគ្នាជាប់លើសំណុំបើក U និង $\lambda\in\mathbb{C}$)គេបាន៖

- $f+g$ ជាប់ត្រង់ z_0 (រៀងគ្នាជាប់លើ U)
- λf ជាប់ត្រង់ z_0 (រៀងគ្នាជាប់លើ U)
- $f\cdot g$ ជាប់ត្រង់ z_0 (រៀងគ្នាជាប់លើ U)
- បើ $f(z)$ និង $f(z_0)\neq0$
- $\frac{1}{f}$ ជាប់ត្រង់ z_0 (រៀងគ្នាជាប់លើ U)
- $\frac{g}{f}$ ជាប់ត្រង់ z_0 (រៀងគ្នាជាប់លើ U)

វិបាក៖ $\forall n\in\mathbb{N},f^n$ ជាប់ត្រង់ z_0 (រៀងគ្នាជាប់លើ U)

ចំណាំ៖

1) $f(z)=K$ ជាប់លើ $\mathbb{C}$ ព្រោះ $|f(z)-f(z_0)|=0<\varepsilon$ ។

2) $f(z)=z$ ជាប់លើ $\mathbb{C}$ ព្រោះ $\left|f(z)-f(z_0)\right|=\left|z-z_0\right|, i.e\, y=\varepsilon, \forall\varepsilon>0$

វិបាក៖ តាម(1) និង(2)ចំពោះទ្រឹស្តីបទខាងលើគេបាន៖

I. គ្រប់អនុគមន៍ពហុធា(មេគុណនិងអថេរតកុំផ្លិច) $P(z)=\sum_{K=0}^{n}a_k z^k$ ជាប់លើ $\mathbb{C}$ ។

II. គ្រប់អនុគមន៍(ប្រភាគសនិទាន) $R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}, P(z)$ និង $Q(z)$ ជាពហុធាជាប់ត្រង់ $\forall z\in\mathbb{C}, Q(z)\neq 0$ ។

ឧទាហរណ៍១៧៖ (1). ចូរកំណត់ភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^3-iz^2+z-i}{z-i} & ,z=i\\ 0 & ,z=0\end{cases}$ ត្រង់ $z=i$

(2). បង្ហាញថាអនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់ដោយ $f(z)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{Re}(z)}{z} & ,z\neq 0\\ 0 & ,z=0\end{cases}$ មិនជាប់ត្រង់ $z=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

(1). $f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^3-iz^2+z-i}{z-i} & ,z\neq i\\ 0 & ,0\end{cases}$ ត្រង់ $z=i$

យើងមាន $f(0)=0$ កំណត់

គណនា $\lim\limits_{z\to i} f(z)=\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z^3-iz^2+z-i}{z-i}=\lim\limits_{z\to i}\left(z^2+1\right)=0$

ដោយ $\lim\limits_{z\to i} f(z)=f(0)=0$ នោះ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $z=i$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $z=i$ ។

(2). បង្ហាញថាអនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់ដោយ $f(z)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{Re}(z)}{z}, & z\neq 0\\ 0 & ,0\end{cases}$ មិនជាប់ត្រង់ $z=0$

យើងមាន $f(0)=0$ កំណត់

គណនា $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\operatorname{Re}(z)}{z}$ បើ $z\neq 0$

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{Re}(z)}{z}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x}{x+iy}=\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{x}{x+iy}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$$

ហើយ $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\operatorname{Re}(z)}{z}=\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x+iy}\right]=0$

ដោយ $z\to 0$ លីមីតមានតម្លៃពីរផ្សេងគ្នា នោះ f ជាអនុគមន៍មិនជាប់ត្រង់ $z=0$

ឬ $\lim\limits_{z\to 0} f(z)\neq f(0)$ នោះ f ជាអនុគមន៍មិនជាប់ត្រង់ $z=0$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍មិនជាប់ត្រង់ $z=0$ ។

គ. ភាពជាប់នៃអនុគមន៍លោការីត

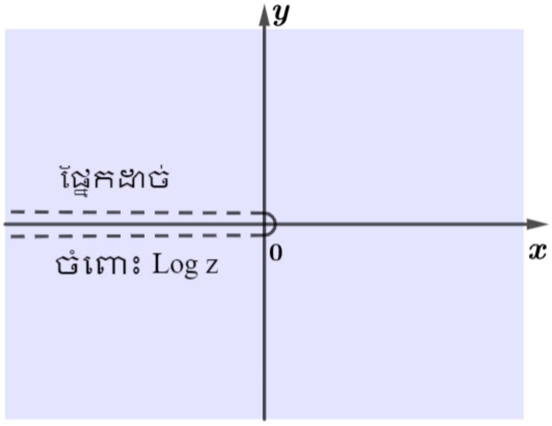
ទ្រឹស្តីបទ២៖ ផ្នែកសំខាន់នៃអនុគមន៍លោការីត

$$\operatorname{Log}(z)=\ln|z|+i\operatorname{Arg}(z),\ -\pi\le \operatorname{Arg} z\le \pi,\ (z\neq 0)$$

ជាប់ចំពោះគ្រប់ z នៅក្នុង $\mathbb{C}-(-\infty,0]$ ។ ចំពោះ z នៅក្នុង $(-\infty,0]$ នោះ $\operatorname{Log} z$ ដាច់ហើយមិនអាចចោលបានត្រង់ចំណុចនោះ(Not removable)។

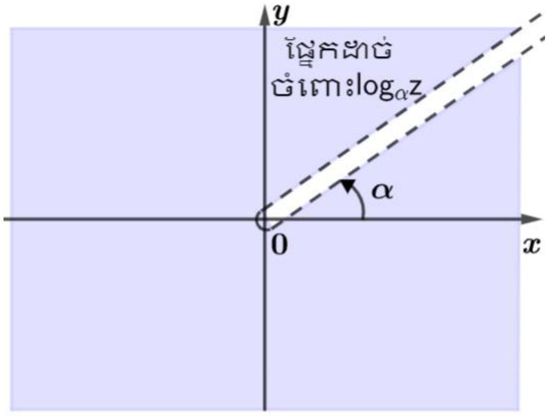
សម្រាយបញ្ជាក់

ដោយអនុគមន៍ $f(z)=u(z)+iv(z)$ ដាច់ត្រង់ $z=z_0$ ហើយអាចចោលបានលុះត្រាតែ z_0 គឺដាច់អាចចោលបានទាំង u និង v ។ នោះយើងឃើញថា $\operatorname{Arg} z$ ដាច់ដែលមិនអាចចោលបានចំពោះ $z=y, y\le 0$ គឺដាច់ដែលមិនអាចចោលបាននៃ $\operatorname{Log} z$ ។ ដូចនេះ សំណុំចំណុចនៃភាពជាប់ $\operatorname{Log} z$ គឺ $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ ។



រូបទី២.៣

$\operatorname{Log} z$ មានភាពដាច់មិនអាចចោលបានត្រង់ $z=0$ និងគ្រប់ចំនួនពិតអវិជ្ជមាន z ។ ចំពោះគ្រប់ z ផ្សេងទៀតហើយ $\operatorname{Log} z$ គឺជាប់។



រូបទី២.៤

ផ្នែកដាច់នៃ $\log_\alpha z$ គឺជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ α ។ផ្នែកដាច់គឺជាសំណុំនៃភាពដាច់មិនអាចចោលបាននៃ $\log_\alpha z$ ។

តាមការពិភាក្សាវាស្រដៀងនឹងចំណុចមុនបង្ហាញថា ផ្នែកនៃលោការីត $\log_\alpha z$ គឺជាប់គ្រប់ z លើកលែងតែការដាច់មិនអាចចោលបាននៅត្រង់ $z=0$ និង z នៅលើកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ α ។ សំណុំនៃភាពដាច់ដែលមិនអាចចោលបាននៃ $\log_\alpha z$ គេហៅថា**ផ្នែកដាច់ (Branch cut)**។ ជាឧទាហរណ៍ផ្នែកដាច់ $\operatorname{Log} z$ គឺ $(-\infty,0]$ (រូបទី ២.៣) និងផ្នែកដាច់ $\log_\alpha z$ គឺជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ α (រូបទី២.៤) ។

២.៣. អនុគមន៍វិភាគ (Analytic function)

និយមន័យ៤៖ តាង f កំណត់នៅលើសំណុំរងបើក U នៃ $\mathbb{C}$ និងតាង $z_0\in U$ ។ យើងអាចនិយាយថា f មានដេរីវេកុំផ្លិចត្រង់ចំណុច z_0 បើលីមីត $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ កំណត់។

បើនៅក្នុងករណីនេះ នោះរូបមន្តខាងលើហៅថាដេរីវេកុំផ្លិចនៃ f ត្រង់ z_0 កំណត់សរសេរដោយ

$f'(z_0)$ ឬ $f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ ។ គេអាចនិយាយបានថា f គឺវិភាគនៅលើ U បើវាមានដេរីវេកុំផ្លិចត្រង់គ្រប់ចំណុចនៅក្នុង U ។ យើងអាចនិយាយថា f គឺជាចំណុចវិភាគត្រង់ w នៅក្នុង U បើវាគឺវិភាគនៅលើវ៉ស៊ីណាបើមួយចំនួននៃ w ដែលផ្ទុកនៅក្នុង U ។

និយមន័យ៥៖ អនុគមន៍វិភាគកំណត់នៅលើប្លង់កុំផ្លិច $\mathbb{C}$ ត្រូវបាននិយាយថាជាប់។

ឧទាហរណ៍១៨៖ បង្ហាញថាអនុគមន៍ខាងក្រោមគឺជាប់ និងរកដេរីវេរបស់វា។

$(a).\quad f(z)=2+4i \qquad (b).\quad g(z)=(3-i)z \qquad (c).\quad h(z)=z^2$

ដំណោះស្រាយ

យើងប្រើផលធៀបនៃផលសងដើម្បីគណនាដេរីវេ

(a) កំណត់ z_0 នៅក្នុងប្លង់ ដោយ $f(z)=2+4i$ គឺចំនួនថេរ ហើយ $f(z)=f(z_0)$ ចំពោះគ្រប់ z ។

គេបាន $\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=0$ នោះលីមីត $z\to z_0$ គេបាន $f'(z_0)=0$

ដូច្នេះ $f'(z)=0,\forall z$ និងគេបាន f វិភាគនៅលើ $\mathbb{C}$ ឬជាប់។

(b) កំណត់ z_0 នៅក្នុងប្លង់ យើងមាន៖

$$g'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{(3-i)z-(3-i)z_0}{z-z_0}=3-i$$

ដូចនេះ $g'(z)=3-i,\forall z$ នោះគេបាន g ជាប់។

(c) កំណត់ z_0 នៅក្នុងប្លង់ យើងមាន៖

$$h'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{z^2-z_0^2}{z-z_0}$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)(z+z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}(z+z_0)=2z_0$$

ដូចនេះ $h'(z)=2z_0,\forall z$ នោះគេបាន h ជាប់។

ជាទូទៅបើ c ជាចំនួនថេរ យើងមាន $f(z)=c\Rightarrow f'(z)=0$

ដូចគ្នាដែរយើងមាន $g(z)=cz\Rightarrow g'(z)=c$

ទ្រឹស្តីបទ៣៖ អនុវគមន៍វិភាគកំណត់នៅលើសំណុំរងបើកនៃប្លង់កុំផ្លិចគឺជាអនុគមន៍ជាប់។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង z_0 ជាចំណុចនៅក្នុងសំណុំបើក U និងតាង f ជាអនុគមន៍វិភាគនៅលើ U ។ យើងត្រូវបង្ហាញថា $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$ ។ ការប្រើលីមីតនៃផលគុណជាផលគុណនៃលីមីត នោះគេបាន៖

$$\lim_{z\to z_0}\left[f(z)-f(z_0)\right]=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}(z-z_0)$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\times\lim_{z\to z_0}(z-z_0)$$

$$=f'(z_0)\cdot 0=0$$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ z_0 ។

ទ្រឹស្តីបទ៤៖ ឧបមាថា f និង g ជាអនុគមន៍វិភាគនៅលើសំណុំរងបើក U នៃប្លង់កុំផ្លិច ហើយតាង c_1,c_2 ជាកុំផ្លិចថេរ។

(i).បើ c_1f+c_2g និង fg វិភាគនៅលើ U ចំពោះ $\forall z\in U$ គេបាន៖

$$(c_1f+c_2g)'(z)=c_1f'(z)+c_2g'(z)$$

(ii).បើអនុគមន៍ fg វិភាគនៅលើ U ចំពោះ $\forall z\in U$ គេបាន៖

$$(f\cdot g)'(z)=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$$

(iii).បើអនុគមន៍ $\frac{f}{g}$ វិភាគនៅលើ $W=U\setminus\{w\in U:g(w)=0\}$ ចំពោះ $\forall z\in W$

គេបាន៖ $$\left(\frac{f}{g}\right)'(z)=\frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{\left(g(z)\right)^2}$$

សម្រាយបញ្ជាក់

ដោយប្រើនិយមន័យដេរីវេ និងភាពជាប់នៃ g យើងមាន៖

$$(fg)'(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)g(z)-f(z_0)g(z_0)}{z-z_0}$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)g(z)-f(z_0)g(z)+f(z_0)g(z)-f(z_0)g(z_0)}{z-z_0}$$

$$=\lim_{z\to z_0}g(z)\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}+\lim_{z\to z_0}f(z_0)\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}$$

$$=g(z_0)f'(z_0)+f(z_0)g'(z_0)$$

ចំពោះ (iii).បើយក $f=1$ យើងចំណាំថាដោយ $g(z_0)\neq 0$ ត្រង់ z_0 នោះចំពោះ

$\varepsilon=\frac{1}{2}\left|g(z_0)\right|>0,\exists\delta>0:\left|z-z_0\right|<\delta$

យើងមាន $\left|g(z)-g(z_0)\right|<\frac{1}{2}\left|g(z_0)\right|\Rightarrow\frac{1}{2}\left|g(z_0)\right|<\left|g(z)\right|$ ហើយ $g(z)\neq 0$

នោះចំពោះ $\left|z-z_0\right|<\delta$ កំណត់សរសេរដោយ៖

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{\dfrac{1}{g(z)}-\dfrac{1}{g(z_0)}}{z-z_0}$$
$$=\lim_{z\to z_0}\frac{-1}{g(z)g(z_0)}\lim_{z\to z_0}\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}$$
$$=-\frac{1}{\left[g(z_0)\right]^2}g'(z_0)$$

ដែលគេត្រូវប្រើភាពជាប់នៃ g ត្រង់ z_0 និង $g(z)\neq 0$ ចំពោះ $|z-z_0|<\delta$ ។

ឧទាហរណ៍១៩៖ បង្ហាញថា $z^n\ (n=1,2,\ldots)$ ជាប់ និង $\dfrac{d}{dz}z^n=nz^{n-1}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ករណី $n=1$ បានបង្ហាញរួចនៅក្នុងឧទាហរណ៍១៨។

ឧបមាថាវាពិតរហូតដល់ n វាពិត នោះគេនឹងបង្ហាញឱ្យពិត $n+1$ គឺត្រូវបង្ហាញថា $(n+1)z^n$

យើងមាន $h(z)=z^{n+1}=z^n\cdot z$ ដោយធ្វើដេរីវេនៃផលគុណគេបាន៖

$$\Rightarrow h'(z)=\left(z^n\right)'z+z^nz'$$
$$=nz^{n-1}z+z^n$$
$$=(n+1)z^n$$

ដូចនេះ z^n ជាអនុគមន៍ជាប់ និង $\dfrac{d}{dz}z^n=nz^{n-1}$ ពិត។

ឧទាហរណ៍២០៖ ចូររកដេរីវេកុំផ្លិចនៃអនុគមន៍ $h(z)=\dfrac{(z+1)(z+i)^2}{z+1-3i}$ និងកំណត់ h ជាអនុគមន៍វិភាគ។

ដំណោះស្រាយ

យើងប្រើរូបមន្តផលចែក និងផលគុណចំពោះការគណនាដេរីវេ នោះគេបាន

$$h'(z)=\frac{\left[(z+i)^2+(z+1)2(z+i)\right](z+1-3i)-(z+1)(z+i)^2}{(z+1-3i)^2}$$
$$=\frac{2z^3+(4-7i)z^2+(14-2i)z+(6+5i)}{(z+1-3i)^2}$$

អនុគមន៍នេះគឺវិភាគនៅលើ $\mathbb{C}\setminus\{-1+3i\}$ ត្រង់ភាគបែង $z=-1+3i$ នៃ h ធ្វើឱ្យសូន្យ។

សំណើ២៖ តាង n ជាចំនួនគត់វ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន។ ពហុធាដឺក្រេទី n ដែល $p(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z_0+a_0$ ជាអនុគមន៍ជាប់ ហើយដេរីវេរបស់វាគឺ

$$p'(z)=na_n z^{n-1}+(n-1)a_{n-1}z^{n-2}+\ldots+a_1 \qquad (1)$$

អនុគមន៍សនិទាន $f(z)=\dfrac{p(z)}{q(z)}$ ដែល $p(z)$ និង $q(z)$ ជាពហុធាហើយវាជាអនុគមន៍វិភាគត្រង់គ្រប់ចំណុច z ដែល $q(z)\neq 0$ ហើយដេរីវេរបស់វាគឺ៖

$$f'(z)=\frac{p'(z)q(z)-p(z)q'(z)}{\left[q(z)\right]^2}$$

មិនគ្រប់អនុគមន៍តម្លៃកុំផ្លិចជាអនុគមន៍វិភាគ។ ចំពោះអនុគមន៍ $\operatorname{Re}(z),\operatorname{Im}(z),\bar{z}$ និង $|z|$ មិនមែនជាអនុគមន៍វិភាគទេ។

ឧទាហរណ៍២១៖ បង្ហាញថាអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

$(a)\ \bar{z}$ $\qquad (b)\ \operatorname{Re} z$

មិនមានដេរីវេកុំផ្លិចនៅត្រង់ចំណុចនីមួយៗនៅក្នុង $\mathbb{C}$ ។

ដំណោះស្រាយ

(a) កំណត់ចំណុចនឹង $z_0=x_0+iy_0$ មួយនៅក្នុងប្លង់។ យើងនឹងបង្ហាញថាលីមីត $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{\bar{z}-\overline{z_0}}{z-z_0}$ គឺគ្មានលីមីត។ យើងឃើញថា z_0 ខិតជិតទិសដៅពីរដូចក្នុងរូបទី២.៥

ចំពោះ z នៅលើ C យើងមាន

$z=z_0+t\Rightarrow z-z_0=t,\ \bar{z}-\overline{z_0}=\overline{z-z_0}=\bar{t}=t$ ពីព្រោះ t ជាចំនួនពិតនោះគេបាន៖

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\text{ នៅលើ }C'}}\frac{\bar{z}-\overline{z_0}}{z-z_0}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{t}=1$$

ចំពោះ z នៅលើ C' យើងមាន

$z=z_0+it\Rightarrow z-z_0=it,\ \bar{z}-\overline{z_0}=\overline{it}=-it$

ដោយ it ជាផ្នែកនិម្មិតនោះយើងបាន៖

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\text{ នៅលើ }C'}}\frac{\bar{z}-\overline{z_0}}{z-z_0}=\lim_{t\to 0}\frac{-it}{t}=-1$$

ដោយលីមីតនៅតាមបណ្តោយ C វាមិនស្មើលីមីតនៅតាមបណ្តោយ C' យើងអាចសន្និដ្ឋានបានថា $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{\bar{z}-\overline{z_0}}{z-z_0}$ គឺគ្មានលីមីត។ គេបានអនុគមន៍ $\bar{z}$ គឺមិនវិភាគត្រង់ z_0 ទេ។ ដោយ z_0 ជាតម្លៃណាមួយដែលយកទៅតាម $\bar{z}$ ហើយវាគ្មានកន្លែងណាដែលវិភាគបានទេ។

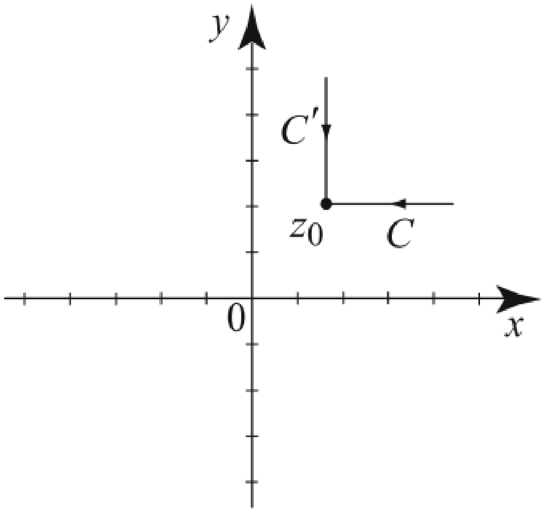
(b) យើងយកតាមដូចនៅក្នុង (a) និងប្រើទិសដៅនៅតាមបណ្តោយ C និង C' ។

ចំពោះ z នៅលើ C គេបាន $\operatorname{Re} z-\operatorname{Re} z_0=x_0+t-x_0=t$

ចំពោះ z នៅលើ C' គេបាន $\operatorname{Re} z-\operatorname{Re} z_0=x_0-x_0=0$
នោះយើងកំណត់សរសេរដោយៈ

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z \text{ នៅលើ } C}}\frac{\operatorname{Re} z-\operatorname{Re} z_0}{z-z_0}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{t}=1$$

និង $$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z \text{ នៅលើ } C'}}\frac{\operatorname{Re} z-\operatorname{Re} z_0}{z-z_0}=\lim_{t\to 0}\frac{0}{it}=0$$



រូបទី២.៥

ចំពោះ $z\in C$ យើងមាន $z-z_0=0$ ចំពោះ $z\in C', z-z_0=it$

ដូចនេះ ដេរីវេនៃ $\operatorname{Re} z$ គឺគ្មានលីមីតត្រង់ z_0 ទេ។ ដោយ z_0 ជាតម្លៃណាមួយយើងអាចសន្និដ្ឋានបានថាគ្មានកន្លែងណាដែលវិភាគបានទេ។

មានការស្រាយបញ្ជាក់ដោយរហ័សនៃ (b) ដោយផ្អែកលើលទ្ធផល (a) និងតាមឯកលក្ខណៈភាព $\bar{z}=2\operatorname{Re} z-z$ ។ បើ $\operatorname{Re} z$ មានដេរីវេត្រង់ z_0 នោះតាមលក្ខណៈនៃដេរីវេវាគួរតែ $\bar{z}$ មានមានដេរីវេត្រង់ z_0 ដែលជាការផ្ទុយទៅនឹងសំណួរ (a) ។

ឧបមាថា $f(z)$ មានដេរីវេកុំផ្លិចត្រង់ចំណុច z_0 និងតាង

$$\varepsilon(z)=\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f'(z_0)$$

នោះ $\varepsilon(z)\to 0$ ពេល $z\to z_0$ ពីព្រោះសមីការផលដកនៅក្នុង $\varepsilon(z)$ ខិតទៅរក $f'(z_0)$ ចំពោះការដោះស្រាយសមីការ $f(z)$ នេះយើងបាន៖

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\varepsilon(z)(z-z_0) \text{ ជាសមីកាលីនេអ៊ែរនៃ } z$$

កន្សោមបង្ហាញថាចំណុចក្បែរៗដែល f ជាអនុគមន៍វិភាគ ហើយ $f(z)$ ប្រហែលជាអនុគមន៍លីនេអ៊ែរ។ ដូចនេះសំណើដែលផ្ទុយគឺពិត។

សំណើ៣៖ តាង U ជាសំណុំរងបើកនៃ $\mathbb{C}$ ។ A ជាអនុគមន៍ f នៅលើ U មានដេរីវេកុំផ្លិចត្រង់

ចំណុច $z_0 \in U$ លុះត្រាតែមានចំនួនកុំផ្លិច A និងអនុគមន៍ $\varepsilon(z)$ កំណត់ដោយ៖

$$f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + \varepsilon(z)(z - z_0)$$

និង $\varepsilon(z) \to 0$ ពេល $z \to z_0$ នោះគេបាន $A = f'(z_0)$។

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងមានទិសដៅមួយ ចំពោះទិសដៅផ្សេងទៀត ឧបមាថា $f(z)$ អាចសរសេរជាទម្រង់ $f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + \varepsilon(z)(z - z_0)$ នោះក្នុងករណី $z \neq z_0$ គេបាន

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = A + \varepsilon(z)$$

ពេលលីមីត $z \to z_0$ និង $\varepsilon(z) \to 0$ យើងអាចសន្និដ្ឋានបានថា $f'(z_0)$ កំណត់ និងស្មើ A។

២.៤. ដេរីវេនៃអនុគមន៍ចំនួនពិតពីរអថេរ

២.៤.១. ភាពមានដេរីវេត្រង់មួយចំណុច

និយមន័យ៦៖ គេឱ្យ $Z = f(z), z = x + iy$ កំណត់ត្រង់វ៉ស៊ីណា V នៃ $z_0 = x_0 + iy_0$ គេថា f មានដេរីវេ ឬមានឌីផេរ៉ង់ស្យែលត្រង់ z_0 កាលណា៖

$$\forall h \in \mathbb{C}^*, h \in V, \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \in \mathbb{C}$$

លីមីតនេះហៅថាដេរីវេនៃ f ត្រង់ z_0 តាង $f'(z_0)$ គឺ

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \quad (*)$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (**)$$

ដោយតាង $z = x + iy - z_0 + h$

ដូចនេះ បើ f មានដេរីវេ $f'(z_0)$ ត្រង់ z_0 គេបាន៖ $\forall h \in \mathbb{C}^*, z_0 + h \in V$ គេបាន

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0) + \varepsilon(h), \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

$$\Leftrightarrow f(z_0 + h) - f(z_0) = h\left[f'(z_0) + \varepsilon(h)\right], \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0 \quad (***)$$

ឬ $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\left[f'(z_0) + \varepsilon(z - z_0)\right], \lim_{h \to 0} \varepsilon(z - z_0) = 0 \quad (****)$

ឧទាហរណ៍២២៖ គណនាដេរីវេខាងក្រោមតាមនិយមន័យ៖

$(1).\ f(z) = z^2$ $\qquad$ $(3).\ f(z) = |z|^2$

$(2).\ f(z) = \bar{z}$ $\qquad$ $(4).\ f(z) = z^n$

ដំណោះស្រាយ

$(1).\ f(z) = z^2$ គេបាន

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{(z_0 + h)^2 - z_0^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2z_0+h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(2z_0+h)$$

$$=2z_0$$

ដូចនេះ $f'(z_0)=2z_0$ ។

$(2).\ f(z)=\overline{z}$

គេបាន

$$f'(z_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0-h)-f(z_0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\overline{z_0+h}-\overline{z_0}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\overline{h}}{h}$$

$$=\begin{cases}-1 & \text{បើ } h \text{ Re}\\ 1 & \text{បើ } h \text{ Im}\end{cases}$$

ដូចនេះ f គ្មានលីមីតត្រង់ $\forall z_0\in\mathbb{C}$ ។

$(3).\ f(z)=|z|^2$

គេបាន

$$f'(z_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|z_0+h|^2-\overline{z_0}(z_0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(z_0+h)\overline{|z_0+h|}-z_0\overline{z_0}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(z_0+h)\left(\overline{z_0}+\overline{h}\right)-z_0\overline{z_0}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{z_0\overline{z_0}+z_0\overline{h}+h\overline{z_0}+h\overline{h}-z_0\overline{z_0}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(z_0\cdot\frac{\overline{h}}{h}+\overline{z_0}+\overline{h}\right)$$

ដូចនេះ f មានដេរីវេត្រង់ $z_0=0$ គឺ $f'(z)=0$

$(3).\ f(z)=z^n$

គេបាន

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(z_0+h\right)^n-z_0^n}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left(nz_0^{n-1}+C_n^2z_0^{n-2}+\cdots+h^{n-1}\right)$$
$$=nz_n^{n-1}$$

ii. **ទ្រឹស្តីបទ៥៖** f មានដេរីវេត្រង់ $z_0 \Rightarrow f$ ជាប់ត្រង់ z_0 ព្រោះ $(****)$ បើ f មានដេរីវេ $f'(z_0)$ ត្រង់ z_0 គេបាន $\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}\left[f(z_0)+(z-z_0)\left(f'(z_0)+\in(z-z_0)\right)\right]=f(z_0)$

iii. **ទ្រឹស្តីបទ៦៖** ដូចអនុគមន៍ពិតដែរនោះគេបាន៖

❖ បើ f,g មានដេរីវេត្រង់ z_0 និង $\lambda\in\mathbb{C}$ គេបាន

- $(f+g)'(z_0)=f'(z_0)+g'(z_0)$

  $(\lambda f)'(z_0)=\lambda f'(z_0)$

  $(f\cdot g)'(z_0)=f'(z_0)g(z_0)+g'(z_0)f(z_0)$

❖ បើ $f(z),\ f(z)\neq 0$

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0)=-\frac{f'(z)}{f^2(z_0)}$$
$$\left(\frac{g}{f}\right)'(z_0)=\frac{g'(z_0)f(z_0)-f'(z_0)g(z_0)}{f^2(z_0)}$$

វិបាក៖ $\left(f^n\right)'(z_0)=nf'(z_0)f^{n-1}(z_0)$

ចំពោះដេរីវេអនុគមន៍ពហុធា និងប្រភាគសនិទាន

$$P(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k\Rightarrow P'(z)=\sum_{k=0}^{n}ka_kz^{k-1}$$
$$R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)},P,Q \text{ ពហុធា}$$
$$\Rightarrow R'(z)=\frac{P'(z)Q(z)-Q'(z)P(z)}{Q^2(z)}$$

២.៤.២ ភាពមានដេរីវេនៃសំណុំបើក

(i) **និយមន័យ៧៖** គេឱ្យ $f(z)$ កំណត់លើសំណុំបើកU និង $z_0\in U$ គេថា f ជាអនុគមន៍វិភាគត្រង់ z_0 កាលណាវាមានដេរីវេត្រង់ $\forall z$ ក្នុងថាសបើកផ្ចិត z_0 ដែលនៅក្នុងU ។

ឧទាហរណ៍២៣៖ $(1).\ f(z)=z^n$ ជាអនុគមន៍វិភាគត្រង់ $\forall z_0\in\mathbb{C}$

$(2).\ f(z)=\frac{1}{z}$ ជាអនុគមន៍វិភាគត្រង់ $\forall z_0\in\mathbb{C}^*\left(f'(z_0)=-\frac{1}{z_0^2}\right)$

(ii) **លក្ខខណ្ឌកូស៊ីរីម៉ាន់**

α). ទ្រឹស្តីបទ α ៖គេឱ្យ $f(z)=f(x+iy)=P(x,y)+iQ(x,y)$ កំណត់លើសំណុំបើកU នឹង $\mathbb{C}$ និង $z_0=x_0+iy_0\in U$ គេបាន៖

f មានដេរីវេ $f'(z_0)$ ត្រង់ z_0 $\Rightarrow P(x,y)\,\&\,Q(x,y)$ មានដេរីវេដោយផ្នែកត្រង់

$\left(x_0, y_0\right)$ គេបាន $\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y}\left(x_0, y_0\right) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}\left(x_0, y_0\right) \\ \dfrac{\partial P}{\partial y}\left(x_0, y_0\right) = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}\left(x_0, y_0\right) \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} P'_x = Q'_y \\ P'_y = -Q'_x \end{cases}$ ។

ឧទាហរណ៍២៤៖ ចូរគណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

$(1).\ f\left(z\right) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

$(2).\ f\left(z\right) = \dfrac{1}{z}$

$(3).\ f\left(z\right) = \bar{z} = x - iy$

$(4).\ f\left(z\right) = f\left(x + iy\right) = \ln\sqrt{x^2 + y^2} + i\,\text{Arctan}\dfrac{y}{x}, x \neq 0$

ដំណោះស្រាយ

$(1).\ f\left(z\right) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

គេបាន $\begin{cases} P = x^2 - y^2 \\ Q = 2xy \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} P'_x = 2x \\ Q'_y = 2x \end{cases} \Rightarrow P'_x = Q'_y = 2x$

$\Rightarrow \begin{cases} Q'_x = 2y \\ P'_y = -2y \end{cases} \Rightarrow P'_y = -Q'_x = -2y$

ដូចនេះ $\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow f'\left(z_0\right) = 2x + 2iy = 2z$ ។

$(2).\ f\left(z\right) = \dfrac{1}{z}$

គេបាន $\begin{cases} P = \dfrac{x}{x^2 + y^2} \\ Q = -\dfrac{y}{x^2 + y^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} P'_x = \dfrac{x^2 + y^2 - 2x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \dfrac{-x^2 + y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \\ Q'_y = \dfrac{x^2 + y^2 - 2y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \dfrac{-x^2 + y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \end{cases} \Rightarrow P'_x = Q'_y = \dfrac{-x^2 + y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q'_x = -\dfrac{-2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \dfrac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \\ P'_y = \dfrac{-2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \dfrac{-2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \end{cases} \Rightarrow P'_y = -Q'_x = \dfrac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

ដូចនេះ $\forall z\in\mathbb{C}\Rightarrow f'(z_0)=\dfrac{2xyi}{\left(x^2+y^2\right)^2}-\dfrac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=-\dfrac{\left(x-yi\right)^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=-\dfrac{\left(\bar{z}\right)^2}{|z|^2}$ ។

$(3).\ f(z)=\bar{z}=x-iy$

គេបាន $\begin{cases}P=x\\Q=-y\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}P'_x=1\\Q'_y=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}Q'_x=0\\P'_y=1\end{cases}$$

ដូចនេះ $f(z)$ គ្មានដេរីវេ។

$(4).\ f(z)=f(x+iy)=\ln\sqrt{x^2+y^2}+i\,\text{Arctan}\,\dfrac{y}{x},x\neq 0$

គេបាន $\begin{cases}P=\ln\sqrt{x^2+y^2}\\Q=\text{Arctan}\,\dfrac{y}{x}\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}P'_x=\dfrac{\dfrac{\left(x^2+y^2\right)'}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{x}{x^2+y^2}\\Q'_y=\dfrac{x}{x^2+y^2}\end{cases}\Rightarrow P'_x=Q'_y=\dfrac{x}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}Q'_x=-\dfrac{y}{x^2+y^2}\\P'_y=\dfrac{\dfrac{\left(x^2+y^2\right)'}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\dfrac{y}{x^2+y^2}\end{cases}\Rightarrow P'_y=-Q'_x=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$$

ដូចនេះ $\forall z\in\mathbb{C}\Rightarrow f'(z_0)=\dfrac{x}{x^2+y^2}-\dfrac{y}{x^2+y^2}=\dfrac{x-yi}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{z}$

(γ)រូបមន្តដេរីវេក្នុងប្រព័ន្ធប៉ូលែ

គេឱ្យ $f(z)=f(x+iy)=f\left(\rho e^{i\theta}\right),z=\rho e^{i\theta}\neq 0$

$$\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2}\\x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(z)=P(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)+iQ(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$$
$$=P(\rho,\theta)+iQ(\rho,\theta)$$

ម៉ាទ្រីសប្តូរដោយ $A=\begin{pmatrix} x'_\rho & y'_\rho \\ x'_\theta & y'_\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$ (1)

គេបាន $\begin{pmatrix} P'_\rho \\ P'_\theta \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} P'_x \\ P'_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P'_x \\ P'_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P'_x\cos\theta & P'_y\sin\theta \\ -P'_x\rho\sin\theta & P'_x\rho\cos\theta \end{pmatrix}$

ដូចគ្នាដែរ $\begin{pmatrix} Q'_\rho \\ Q'_\theta \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} Q'_x \\ Q'_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Q'_x\cos\theta & Q'_y\sin\theta \\ -Q'_x\rho\sin\theta & Q'_x\rho\cos\theta \end{pmatrix}$

តែតាមកូស៊ីរីម៉ាន់ $\begin{cases} P'_x=Q'_y \\ P'_y=Q'_x \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} Q'_\rho=-P'_y\cos\theta+P'_x\sin\theta \\ Q'_\theta=P'_y\rho\sin\theta+P'_x\rho\cos\theta \end{cases}$ (2)

តាម(1) និង(2)នោះគេបាន $\boxed{\begin{cases} Q'_\theta=\rho P'_\rho \\ P'_\theta=-\rho P'_\rho \end{cases}}$ ជាកូស៊ីរីម៉ាន់ចំពោះប្រព័ន្ធកូអរនេប៉ូលែ។

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, ad-bc\neq 0\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^t$$

$$\det A=\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix}=\rho>0$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \rho\cos\theta & -\sin\theta \\ \rho\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\frac{\sin\theta}{\rho} \\ \sin\theta & \frac{\cos\theta}{\rho} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} P'_x \\ P'_y \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} P'_\rho \\ P'_\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\frac{\sin\theta}{\rho} \\ \sin\theta & \frac{\cos\theta}{\rho} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P'_\rho \\ P'_\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P'_\rho\cos\theta-P'\frac{\sin\theta}{\rho} \\ P'_\rho\sin\rho+P'_\theta\frac{\cos\theta}{\rho} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f'\left(\rho e^{i\theta}\right)=f'(z)=P'_x-iP'_y=P'_\rho\cos\theta-P'_\theta\frac{\sin\theta}{\rho}-i\left(P'_\rho\sin\theta-P'_\theta\frac{\cos\theta}{\rho}\right)$$

$$=P'_\rho\cos\theta+Q'_\rho\sin\theta-iP'_\rho\sin\theta+iQ'_\rho\cos\theta$$

$$=e^{-i\theta}\left(P'_\rho+iQ'_\rho\right)\qquad(3)$$

ដូចនេះ $\boxed{f'\left(\rho e^{i\theta}\right)=e^{-i\theta}\left(P'_\rho+iQ'_\rho\right)}$ (4)

ឧទាហរណ៍២៥៖ ចូរគណនាដេរីវេអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

(1). $f(z)=\frac{1}{z}$ (2). $f(z)=\sqrt[3]{z}$

ដំណោះស្រាយ

1. $f(z)=\frac{1}{z}=\frac{1}{\rho e^{i\theta}}=\frac{1}{\rho}e^{-i\theta}=\frac{1}{\rho}(\cos\theta-i\sin\theta)$

$$\begin{cases} P = \dfrac{1}{\rho}\cos\theta \\ Q = -\dfrac{1}{\rho}\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_\rho = -\dfrac{1}{\rho^2}\cos\theta \ , \ P'_\theta = -\dfrac{1}{\rho}\sin\theta \\ Q'_\rho = \dfrac{1}{\rho^2}\sin\theta \quad , \ Q'_\theta = \dfrac{1}{\rho}\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q'_\theta = \rho P'_\rho = -\dfrac{1}{\rho}\cos\theta \\ P'_\theta = -\rho Q'_\rho = -\dfrac{1}{\rho}\sin\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(z) = f'\left(\rho e^{i\theta}\right) = e^{-i\theta}\left(-\frac{1}{\rho^2}\cos\theta + i\frac{1}{\rho^2}\sin\theta\right) = -\frac{1}{\rho^2 e^{i2\theta}} = -\frac{1}{z^2}$$

ដូចនេះ $f'(z) = -\dfrac{1}{z^2}$ ។

2. $\left(\rho e^{i\theta}\right) = f(z) = \rho^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i\theta}{3}} = \rho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\dfrac{\theta}{3} + i\sin\dfrac{\theta}{3}\right)$

$$\begin{cases} P = \rho^{\frac{1}{3}}\cos\dfrac{\theta}{3} \\ Q = \rho^{\frac{1}{3}}\sin\dfrac{\theta}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P'_\rho = \dfrac{1}{3\rho^{\frac{2}{3}}}\cos\dfrac{\theta}{3} \ , \ P'_\theta = -\dfrac{1}{3}\rho^{\frac{1}{3}}\sin\dfrac{\theta}{3} \\ Q'_\rho = \dfrac{1}{3\rho^{\frac{2}{3}}}\sin\dfrac{\theta}{3} \ , \ Q'_\theta = \dfrac{1}{3}\rho^{\frac{1}{3}}\cos\dfrac{\theta}{3} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ , \ ad - bc \neq 0$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & c \\ -b & a \end{pmatrix}^t = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & d \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q'_\theta = \rho P'_\rho = -\dfrac{\rho^{\frac{1}{3}}}{3}\cos\dfrac{\theta}{3} \\ P'_\theta = -\rho Q'_\rho = -\dfrac{\rho^{\frac{1}{3}}}{3}\sin\dfrac{\theta}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(z) = f\left(\rho e^{i\theta}\right) = e^{-i\theta}\left(\frac{1}{3\rho^{\frac{2}{3}}}\cos\frac{\theta}{3} + i\frac{1}{3\rho^{\frac{2}{3}}}\sin\frac{\theta}{3}\right) = \frac{1}{3\left(\rho e^{i\theta}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

ដូចនេះ $f'(z) = \dfrac{1}{3\left(\rho e^{i\theta}\right)^{\frac{2}{3}}}$ ។

២.៥. សមីការកូស៊ីរីម៉ាន់

លក្ខខណ្ឌចាំបាច់ចំពោះអនុគមន៍ $f(z) = u + iv$ ជាអនុគមន៍វិភាគត្រង់គ្រប់ចំណុចនៅក្នុង ដែន R គឺ៖

$$(i)\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad\qquad (ii)\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង $f\left(z\right)=u+iv$ ជាអនុគមន៍វិភាគ និង $\Delta u,\Delta v$ ជាកំណើននៅក្នុង u និង v ដែលត្រូវគ្នាទៅនឹងកំណើន $\Delta x,\Delta y$ នៅក្នុង x និង y រៀងគ្នា។

$$f'\left(z\right)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f\left(z+\Delta z\right)-f\left(z\right)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\left[\left(u+\Delta u\right)-i\left(v+\Delta v\right)\right]-\left(u+iv\right)}{\Delta z}$$

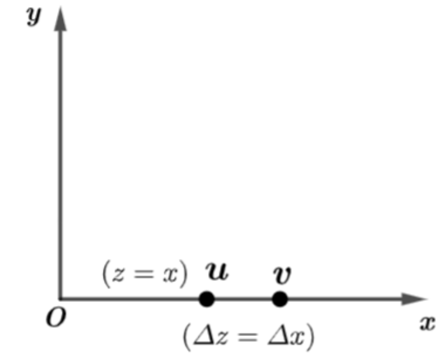
$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta z}\qquad(1)$$

ដោយ $f\left(z\right)$ ជាឌីផេរ៉ង់ស្យែលត្រង់ចំណុចនីមួយៗនៃដែន R ហើយ Δz ខិតទៅជិត 0 នៅតាមបណ្ដោយគន្លងផ្សេងៗ។ ចូរពិនិត្យទៅលើគន្លងពីរដូចខាងក្រោម៖

(1). ស្របអ័ក្សអាប់ស៊ីស $\Delta y=0$ គេបាន៖

$$\Delta z=\Delta x+i\Delta y$$

$$=\Delta x$$



រូបទី២.៦

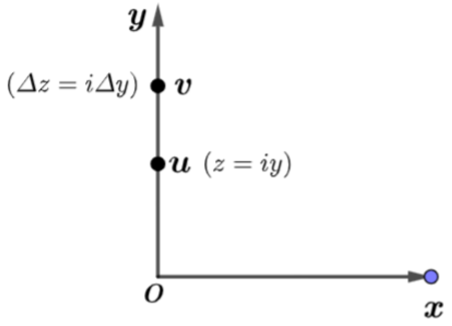
ជំនួសចូលក្នុងសមីការ(1) គេបាន៖

$$f'\left(z\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$f'\left(z\right)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\qquad(3)$$

(2). ស្របអ័ក្សអរដោន $\Delta x=0$ គេបាន៖



រូបទី២.៧

$$\Delta z=\Delta x+i\Delta y$$

$$=i\Delta y$$

ជំនួនចូលក្នុងសមីការ(1)គេបាន៖

$$f'\left(z\right)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{i\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u}{i\Delta y}+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta y}$$

$$f'\left(z\right)=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\qquad(4)$$

ដោយ $f\left(z\right)$ជាឌីផេរ៉ង់ស្យែលនោះតាមសមីការ(3) និង(4)គេបាន៖

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

ដោយឱ្យផ្នែកពិតស្មើនិងផ្នែកពិត ហើយផ្នែកនិម្មិតស្មើនិងផ្នែកនិម្មិតយើងបាន៖

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

សមីការនេះហៅថា**សមីការកូស៊ីរីម៉ាន់**។

❖ **លក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់ចំពោះ $f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគ**

ចំពោះអនុគមន៍ $f(z)=u+iv$ បើមានដេរីវេដោយផ្នែក $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x}$ និង $\frac{\partial v}{\partial y}$ គឺជាប់នៅក្នុងដែន R និង $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ នោះអនុគមន៍ $f(z)$ គឺអនុគមន៍វិភាគ។

ឧទាហរណ៍២៦៖ ចូរកំណត់ថាតើ $\frac{1}{z}$ ជាអនុគមន៍វិភាគដែរឬទេ ?

ដំណោះស្រាយ

តាង $w=f(z)=u+iv=\frac{1}{z}\Rightarrow u+iv=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$

ដោយឱ្យផ្នែកពិតស្មើផ្នែកពិត និងនិម្មិតស្មើផ្នែកនិម្មិតយើងបាន៖

$$u=\frac{x}{x^2+y^2}, \qquad v=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\left(x^2+y^2\right)\cdot 1-x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

ដូច្នេះ $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ និង $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ ។

នោះសមីកាកូស៊ីរីម៉ាន់គឺត្រូវបានបំពេញលក្ខខ័ណ្ឌ។ ដូចគ្នាផងដែរដេរីវេដោយផ្នែកគឺជាប់លើកលែងត្រង់ $(0,0)$ ។ នោះ $\frac{1}{z}$ គឺអនុគមន៍វិភាគគ្រប់ទាំងអស់លើកលែងត្រង់ $z=0$ ។

ដូចគ្នាដែរ $\qquad \frac{dw}{dz}=-\frac{1}{z^2}$

ការបង្ហាញម្តងទៀតថា $\frac{dw}{dz}$ គឺកំណត់គ្រប់ទាំងអស់លើកលែងត្រង់ $z=0$ ។ គេបាន $\frac{1}{z}$ គឺអនុគមន៍វិភាគគ្រប់ទាំងអស់លើកលែងត្រង់ $z=0$ ។

ឧទាហរណ៍២៧៖ ចូរកំណត់ថាតើអនុគមន៍ $2xy+i\left(x^2-y^2\right)$ ជាអនុគមន៍វិភាគឬមិនវិភាគ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $f(z)=2xy+i\left(x^2-y^2\right)$

$$u+iv=2xy+i\left(x^2-y^2\right)$$

ឱ្យផ្នែកពិតស្មើផ្នែកពិត និងផ្នែកនិមិត្តស្មើផ្នែកនិមិត្តយើងបាន៖

$$u=2xy,\qquad v=x^2-y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2y,\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=2x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2x,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-2y$$

គេបាន $\frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}\neq-\frac{\partial v}{\partial x}$ នោះសមីការកូស៊ីរីម៉ាន់មិនបំពេញលក្ខខណ្ឌទេ។

ដូចនេះ $f(z)$ មិនវិភាគទេ។

ឧទាហរណ៍២៨៖ បង្ហាញថា $f(z)=z|z|$ មិនវិភាគគ្រប់ទាំងអស់ទេ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $f(z)=z|z|$

$$u+iv=(x+iy)\sqrt{x^2+y^2}$$

$$=x\sqrt{x^2+y^2}+iy\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow u=x\sqrt{x^2+y^2},\qquad v=y\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=\sqrt{x^2+y^2}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x,\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=y\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x$$

$$=\frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\qquad\qquad =\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial y}=x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y,\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=\sqrt{x^2+y^2}+y\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y$$

$$=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\qquad\qquad =\frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

គេបាន $\frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}\neq-\frac{\partial v}{\partial x}$ នោះសមីការកូស៊ីរីម៉ាន់មិនបំពេញលក្ខខណ្ឌទេ។

ដូចនេះ $f(z)$ មិនវិភាគគ្រប់ទាំងអស់ទេ។

ឧទាហរណ៍២៩៖ ចូររកដែននៃអនុគមន៍វិភាគនៃ $f(z)=(x-y)^2+2i(x+y)$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $f(z)=(x-y)^2+2i(x+y)$

$$u+iv=(x-y)^2+2i(x+y)$$

ប្រៀបធៀបផ្នែកពិត និងផ្នែកនិមិត្តគេបាន៖

$$u=(x-y)^2 \quad , \quad v=2(x+y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2(x-y) \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x}=2$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-2(x-y), \quad \frac{\partial v}{\partial y}=2$$

គ្រប់ផ្នែកដេរីវេគឺជាប់ទាំងអស់ ហើយចំពោះ $f(z)$ ដើម្បីបានជាអនុគមន៍វិភាគ u និង v បំពេញលក្ខខណ្ឌជាកូស៊ីរីម៉ាន់គេបាន៖

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$2(x-y)=2 \ , \quad -2(x-y)=-2$$

$$x-y=1 \ , \quad x-y=1$$

$f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគគ្រប់ចំណុចដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $x-y=1$។

ដូចនេះ ដែននៃអនុគមន៍វិភាគគឺជាបន្ទាត់ $x-y=1$។

ឧទាហរណ៍៣០៖ បង្ហាញថាអនុគមន៍ $e^x(\cos y+i\sin y)$ ជាអនុគមន៍វិភាគ និងរកដេរីវេរបស់វា។

ដំណោះស្រាយ

តាង $u+iv=e^x(\cos y+i\sin y)$ នោះគេបាន៖

$$u=e^x\cos y \quad , \quad v=e^x\sin y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y$$

យើងឃើញថា $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ នោះវាជាកូស៊ីរីម៉ាន់ហើយបំពេញលក្ខខណ្ឌ និងដេរីវេរបស់គឺជាប់។

គេបាន $e^x(\cos y+i\sin y)$ ជាអនុគមន៍វិភាគ។

$f(z)=u+iv=e^x(\cos y+i\sin y)$ និង $\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y$, $\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y$

$$\Rightarrow f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\cos y+ie^x\sin y$$

$$=e^x(\cos y+i\sin y)$$

$$=e^x\cdot e^{iy}$$

$$=e^{x+iy}=e^z$$

ដូចនេះ $f'(z)=e^z$ ។

ឧទាហរណ៍៣១៖ ចូរពិភាក្សាការវិភាគនៃអនុគមន៍ $f(z)=z\bar{z}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $f(z)=z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2-i^2y^2=x^2+y^2$

$$\Rightarrow f(z)=x^2+y^2=u+iv$$

$$u=x^2+y^2,\ v=0$$

នៅត្រង់គល់តម្រុយ $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{u(0+h,0)-u(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2}{h}=0$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{k\to 0}\frac{u(0,0+k)-u(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{k^2}{k}=0$$

ដូចគ្នាដែរ $\dfrac{\partial v}{\partial x}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{v(0+h,0)-v(0,0)}{h}=0$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{k\to 0}\frac{v(0,0+k)-v(0,0)}{k}=0$$

នោះ $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$ និង $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ ។

គេបានសមីការរីម៉ាន់ត្រូវបានបំពេញលក្ខខណ្ឌនៅត្រង់គល់តម្រុយ។

$$f'(0)=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{(x^2+y^2)-0}{x+iy}$$

តាង $z\to 0$ នៅលើបន្ទាត់ $y=mx$ នោះគេបាន៖

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+m^2x^2)-0}{x+imx}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+m^2)x}{1+im}=0$$

ដូច្នេះ $f'(0)$ មានតែមួយ។

ដូចនេះអនុគមន៍ $f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគត្រង់ $z=0$ ។

ឧទាហរណ៍២២៖ បង្ហាញថាអនុគមន៍ $f(z)=u+iv$ ដែល

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{x^3(1+i)-y^3(1-i)}{x^2+y^2}, & z\neq 0\\ 0 & ,z=0\end{cases}$$

បំពេញលក្ខខណ្ឌសមីការកូស៊ីរីម៉ាន់ត្រង់ $z=0$ ។ តើអនុគមន៍វិភាគត្រង់ $z=0$ ដែរឬទេ ?

ដំណោះស្រាយ

គេបាន $f(z)=\dfrac{x^3(1+i)-y^3(1-i)}{x^2+y^2}=u+iv$

$$\Rightarrow u=\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2},\qquad v=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

ដោយធ្វើឌីផេរ៉ង់ស្យែលតម្លៃនៃ $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$ ត្រង់ $(0,0)$ យើងបាន $\frac{0}{0}$ ដូច្នេះយើងអនុវត្តន៍រូបមន្តគោលទីមួយ។

នៅត្រង់គល់តម្រុយគេបាន៖

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{u(0+h,0)-u(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3}{h^2}}{h}=1 \quad (\text{នៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{k\to 0}\frac{u(0,0+k)-u(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{-k^3}{k^2}}{k}=-1 \quad (\text{នៅលើអ័ក្សអរដោនេ})$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{v(0+h,0)-v(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3}{h^2}}{h}=1 \quad (\text{នៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស})$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\lim_{k\to 0}\frac{v(0,0+k)-v(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{k^3}{k^2}}{k}=1 \quad (\text{នៅលើអ័ក្សអរដោនេ})$$

យើងឃើញថា $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ និង $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ សមីការកូស៊ីរីម៉ាន់បំពេញលក្ខខណ្ឌត្រង់ $z=0$

ចំពោះ $f'(0)=\lim_{z\to 0}\frac{f(0+z)-f(0)}{z}=\lim_{z\to 0}\left[\frac{\frac{x^3-y^3+i(x^3-y^3)}{x^2+y^2}-0}{x+iy}\right]$

$$=\lim_{z\to 0}\left[\frac{x^3-y^3+i(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{x+iy}\right]$$

តាង $z\to 0$ នៅតាមបណ្តោយ $y=x$ គេបាន៖

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-y^3+i(x^3+x^3)}{x^2+x^2}\cdot\left(\frac{1}{x+ix}\right)$$

$$=\frac{2i}{2(1+i)}=\frac{i}{1+i}$$

$$=\frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{i+1}{1+1}=\frac{1}{2}(1+i) \qquad (1)$$

តាង $z\to 0$ នៅតាមបណ្តោយ $y=0$ គេបាន៖

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+ix^3}{x^2}\cdot\frac{1}{x}=1+i \qquad (2)$$

តាម(1) និង(2) យើងឃើញថា $f'(0)$គឺមិនមានតែមួយទេ។

ដូចនេះអនុគមន៍ $f(z)$ មិនមែនជាអនុគមន៍វិភាគត្រង់ $z=0$ ។

២.៦. សមីការកូស៊ីរីម៉ាន់ក្នុងទម្រង់ប៉ូលែ

បើ $f(z)=u+iv$ ជាអនុគមន៍វិភាគដែល u និង v ជាអនុគមន៍នៃ r,θ និង $z=re^{i\theta}$ នោះគេបាន៖

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial\theta},\quad \frac{\partial u}{\partial\theta}=-r\frac{\partial v}{\partial r}}$$

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងមាន $f(z)=u+iv, z=re^{i\theta}$

$$\Rightarrow u+iv=f\left(re^{i\theta}\right) \qquad (1)$$

ធ្វើដេរីវេសមីការ(1)ធៀបនឹងr យើងបាន៖

$$\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}=f'\left(re^{i\theta}\right)\cdot e^{i\theta}$$

$$=f'(z)\cdot e^{i\theta}$$

$$\Rightarrow f'(z)=\frac{1}{e^{i\theta}}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right) \qquad (2)$$

ធ្វើដេរីវេសមីការ(2)ធៀបនឹងθយើងបាន៖

$$\frac{\partial u}{\partial\theta}+i\frac{\partial v}{\partial\theta}=f'\left(re^{i\theta}\right)\cdot ire^{i\theta}$$

$$=f'(z)\cdot ire^{i\theta}$$

$$\Rightarrow f'(z)=\frac{1}{ire^{i\theta}}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right) \qquad (3)$$

ដោយ $f(z)$ មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលនោះ $f'(z)$ត្រូវតែមានតែមួយ។

ផ្ទឹមសមីការ(2) និង(3) យើងបាន៖

$$\frac{1}{e^{i\theta}}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)=\frac{1}{ire^{i\theta}}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}+i\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{i}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta}+i\frac{\partial v}{\partial\theta}$$

ប្រៀបធៀបផ្នែកពិត និងផ្នែកនិមិត្តយើងបាន៖

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial \theta},\quad \frac{\partial u}{\partial r}=-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial \theta}$$
$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial \theta},\quad \frac{\partial u}{\partial \theta}=-r\frac{\partial v}{\partial r}$$

ឧទាហរណ៍៣៣៖ ចូររកផ្នែកពិត និងផ្នែកនិមិត្តនៃ $f(z)=z^2+3z$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $f(z)=z^2+3z$
$$=(x+iy)^2+3(x+iy)$$
$$=\left(x^2+i^2y^2+2ixy\right)+i(2xy+3y)$$
$$=\left(x^2-y^2+3x\right)+i(2xy+3y)$$

ដូចនេះ ផ្នែកពិតគឺ x^2-y^2+3x និងផ្នែកនិមិត្តគឺ $2xy+3y$ ។

ឧទាហរណ៍៣៤៖ ចូររក p ដែលអនុគមន៍ $f(z)=r^2\cos 2\theta+ir^2\sin p\theta$ ជាអនុគមន៍វិភាគ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $f(z)=r^2\cos 2\theta+ir^2\sin p\theta$ គេបាន៖
$$u+iv=r^2\cos 2\theta+ir^2\sin p\theta$$

ដោយប្រៀបធៀបផ្នែកពិត និងផ្នែកនិមិត្តយើងបាន៖
$$u=r^2\cos 2\theta,\qquad v=r^2\sin p\theta$$

ដោយ $f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគហើយសមីការកូស៊ីរីម៉ាន់ត្រូវបានបំពេញលក្ខខណ្ឌ
$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial \theta},\quad \frac{\partial u}{\partial \theta}=-r\frac{\partial v}{\partial r}$$
$$\Rightarrow r^2(-2\sin 2\theta)=-r(2r\sin p\theta)$$
$$\sin 2\theta=\sin p\theta$$
$$\Rightarrow\qquad p=2$$

ដូចនេះ $p=2$ ។

ឧទាហរណ៍៣៥៖ បង្ហាញថា $f(z)=\frac{1}{z}$ ជាអនុគមន៍វិភាគគ្រប់ចំណុចទាំងអស់លើកលែងត្រង់ $z=0$ និងរក $f'(z)$។

ដំណោះស្រាយ

តាង $z=re^{i\theta}$ ដោយ $f(z)=\frac{1}{z}$
$$\Rightarrow u+iv=\frac{1}{re^{i\theta}}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}=\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{r}\cos\theta, \quad v = -\frac{1}{r}\sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\cos\theta, \ \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\sin\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{1}{r}\sin\theta, \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{1}{r}\cos\theta$$

នោះគេបាន $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\frac{\partial v}{\partial r}$

សមីការកូស៊ីរីម៉ាន់ត្រូវបានបំពេញលក្ខខណ្ឌ

គ្រប់ដេរីវេគឺជាប់គ្រប់ចំណុចទាំងអស់លើកលែងត្រង់ $r = 0$ (ព្រោះ $z = 0$)

ដូចនេះ $f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគគ្រប់ចំណុចទាំងអស់លើកលែងត្រង់ $z = 0$ ។

ដោយ $f(z) = u + iv$ ធ្វើដេរីវេធៀបនឹង r គេបាន៖

$$f'(z)\cdot\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}$$

$$f'(z)\cdot e^{i\theta} = -\frac{1}{r^2}\cos\theta + i\frac{1}{r^2}\sin\theta$$

$$= -\frac{(\cos\theta - i\sin\theta)}{r^2}$$

$$\Rightarrow f'(z) = \frac{-e^{i\theta}}{r^2 e^{i\theta}}$$

$$= -\frac{1}{r^2 e^{2i\theta}}$$

$$= -\frac{1}{(re^{i\theta})^2} = -\frac{1}{z^2}$$

ដូចនេះ $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$ ។

ឧទាហរណ៍៣៦៖ បង្ហាញថា $f(z) = \log z$ ជាអនុគមន៍វិភាគគ្រប់ចំណុចលើកលែងតែត្រង់គល់តម្រុយ និងរកដេរីវេរបស់វា។

ដំណោះស្រាយ

តាង $z = re^{i\theta}$ គេបាន

$$f(z) = \log z$$

$$u + iv = \log(re^{i\theta})$$

$$= \log r + \log e^{i\theta}$$

$$= \log r + i\theta$$

ធ្វើការផ្ទឹមអង្គទាំងពីរគេបាន៖

$$u=\log r,\qquad v=\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r},\qquad \frac{\partial v}{\partial r}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=0,\qquad \frac{\partial v}{\partial \theta}=1$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\qquad \frac{\partial u}{\partial \theta}=-r\frac{\partial v}{\partial r}$$

នោះគេបានទ្រឹស្តីបទកូស៊ីរីម៉ាន់ត្រូវបានបំពេញលក្ខខណ្ឌ

ប៉ុន្តែ $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}$ មិនជាប់ត្រង់ $r=0$ (មានន័យថា $z=0$)

គេបាន $\log z$ ជាអនុគមន៍វិភាគគ្រប់ចំណុចលើកលែងត្រង់គល់តម្រុយ $(z=0)$

នោះគេបាន $\qquad f(z)=u+iv$

ធ្វើដេរីវេអង្គទាំងពីរគេបាន

$$f'(z)\cdot\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}$$

$$f'(z)\cdot e^{i\theta}=\frac{1}{r}+i(0)$$

$$f'(z)=\frac{1}{re^{i\theta}}$$

$$=\frac{1}{z}$$

២.៧. ដេរីវេនៃ $w=f(z)$ ក្នុងទម្រង់ប៉ូលែរ

ទម្រង់ទី១៖

យើងដឹងថា $w=u+iv,\ \frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$

ប៉ុន្តែ $\frac{dw}{dz}=\frac{\partial w}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial r}\cos\theta-\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}+i\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)\frac{\sin\theta}{r}$

$$=\frac{\partial w}{\partial r}\cos\theta-\left(-r\frac{\partial v}{\partial r}+i\cdot r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\frac{\sin\theta}{r}$$

$$=\frac{\partial w}{\partial r}\cos\theta-i\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)\sin\theta,\qquad \frac{\partial u}{\partial \theta}=-r\frac{\partial v}{\partial r}$$

$$=\frac{\partial w}{\partial r}\cos\theta-i\frac{\partial}{\partial r}(u+iv)\sin\theta,\qquad \frac{\partial v}{\partial \theta}=r\frac{\partial u}{\partial r}$$

$$=\frac{\partial w}{\partial r}\cos\theta-i\frac{\partial w}{\partial r}\sin\theta\qquad [\because w=u+iv]$$

$$=\left(\cos\theta - i\sin\theta\right)\frac{\partial w}{\partial r} \qquad (1)$$

ទម្រង់ទី២នៃ $\frac{\partial w}{dz}$ ៖

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\partial w}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\partial\left(u+iv\right)}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial w}{\partial\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{r} \qquad \left[w=u+iv\right]$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)\cos\theta-\frac{\partial w}{\partial\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{r}$$

$$=\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial\theta}-i\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\cos\theta-\frac{\partial w}{\partial\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{r}$$

$$=-\frac{i}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}+i\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)\cos\theta-\frac{\partial w}{\partial\theta}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)$$

$$=-\frac{i}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(u+iv\right)\cos\theta-\frac{\partial w}{\partial\theta}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)$$

$$=-\frac{i}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial\theta}\cos\theta-\frac{\partial w}{\partial\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{r},\quad\left[w=u+iv\right]$$

$$=-\frac{i}{r}\left(\cos\theta-i\sin\theta\right)\frac{\partial w}{\partial\theta} \qquad (2)$$

$$\boxed{\frac{dw}{dz}=\left(\cos\theta-i\sin\theta\right)\frac{\partial w}{\partial r}} \qquad \left[-\frac{i}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial\theta}=\frac{\partial w}{\partial r}\right]$$

$$\boxed{\frac{dw}{dz}=-\frac{i}{r}\left(\cos\theta-i\sin\theta\right)\frac{\partial w}{\partial\theta}}$$

ទាំងពីរទម្រង់នេះគេបាន $\frac{dw}{dz}$ ។

ឧទាហរណ៍៣៧៖ បើ n ជាចំនួនពិត បង្ហាញថា $r^n\left(\cos n\theta+i\sin n\theta\right)$ ជាអនុគមន៍វិភាគលើកលែងត្រង់ $r=0$ និងត្រង់ដេរីវេរបស់គឺ $nr^{n-1}\left[\cos\left(n-1\right)\theta+i\sin\left(n-1\right)\theta\right]$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $f\left(z\right)=u+iv=r^n\left(\cos n\theta+i\sin n\theta\right)$ នោះគេបាន៖

$$u=r^n\cos n\theta,\ v=r^n\sin n\theta$$

$$\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial r}=nr^{n-1}\cos n\theta,\ \frac{\partial u}{\partial\theta}=-nr^n\sin n\theta$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}=nr^{n-1}\sin n\theta,\ \frac{\partial v}{\partial\theta}=nr^n\cos n\theta$$

ដោយ $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}$ និង $\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}=-\frac{\partial v}{\partial r}$ នោះ $f\left(z\right)$ បំពេញលក្ខខ័ណ្ឌសមីការកូស៊ីរីម៉ាន់។ នោះ $f\left(z\right)$ ជាអនុគមន៍វិភាគ បើ $f'\left(z\right)$ កំណត់គ្រប់តម្លៃកំណត់នៃ z ។

យើងមាន $f'(z)=(\cos\theta - i\sin\theta)\dfrac{\partial f}{\partial r}$

$$=(\cos\theta - i\sin\theta)nr^{n-1}(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

$$=nr^{n-1}\{\cos(n-1)\theta + i\sin(n-1)\theta\}$$

ដែលកំណត់គ្រប់តម្លៃនៃ r រួមទាំងសូន្យលើកលែងត្រង់ $r=0$ និង $n\le 1$ ។

២.៨. អនុគមន៍អាម៉ូនិក (Harmonic function)

ទ្រឹស្តីបទ៧៖ បើ $f(z)=u+iv$ ជាអនុគមន៍វិភាគ នោះទាំង u និង v ជាអនុគមន៍អាម៉ូនិក។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង $f(z)=u+iv$ ជាអនុគមន៍អាម៉ូនិក នោះយើងមាន៖

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\partial v}{\partial y} &\quad (1)\\ \frac{\partial u}{\partial y}&=-\frac{\partial v}{\partial x} &\quad (2)\end{aligned}\right]$$ ជាសមីការកូស៊ីរីម៉ាន់

ធ្វើឌីផេរ៉ង់ស្យែល (1) ធៀបទៅនឹង x យើងបាន $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$ $\qquad(3)$

ធ្វើឌីផេរ៉ង់ស្យែល (2) ធៀបទៅនឹង y យើងបាន $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$ $\qquad(4)$

បូកសមីការ (3) និង (4) យើងបាន $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)$$

ដូចគ្នាដែរ $\qquad \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$

ទាំង u និង v ជាអនុគមន៍អាម៉ូនិកដោយអនុគមន៍ u និង v ហៅថា**អនុគមន៍អាម៉ូនិកឆ្លាស់បើ $u+iv$ ជាអនុគមន៍វិភាគ**។

ឧទាហរណ៍៣៨៖ បង្ហាញថា $u=x^2-y^2$ និង $v=\dfrac{y}{x^2+y^2}$ ជាអនុគមន៍អាម៉ូនិកនៃ (x,y) ប៉ុន្តែវាមិនមែនអាម៉ូនិកឆ្លាស់ទេ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $u=x^2-y^2$ គេបាន៖

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2y,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2-2=0$$

$u(x,y)$ បំពេញលក្ខខណ្ឌសមីការឡាផ្លាស គេបាន $u(x,y)$ ជាអនុគមន៍អាម៉ូនិក

$$v=\frac{y}{x^2+y^2},\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\left(x^2+y^2\right)^2(-2y)-(-2xy)2\left(x^2+y^2\right)2x}{\left(x^2+y^2\right)^4}=\frac{6x^2y-2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^3}\quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\left(x^2+y^2\right)\cdot 1-y(2y)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{\left(x^2+y^2\right)^2(-2y)-\left(x^2-y^2\right)2\left(x^2+y^2\right)(2y)}{\left(x^2+y^2\right)^4}$$

$$=\frac{\left(x^2+y^2\right)(-2y)-\left(x^2-y^2\right)(4y)}{\left(x^2+y^2\right)^3}$$

$$=\frac{-2x^2y-2y^3-4x^2y+4y^3}{\left(x^2+y^2\right)^3}=\frac{-6x^2y+2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^3}\qquad (2)$$

តាម(1) និង(2)យើងបាន $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$

$v(x,y)$ ត្រូវបានបំពេញលក្ខខណ្ឌសមីការឡាផ្លាសផងដែរ គេបាន $v(x,y)$ ជាអនុគមន៍អាម៉ូនិកផងដែរ។

ប៉ុន្តែ $\frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}$ និង $\frac{\partial u}{\partial y}\neq-\frac{\partial v}{\partial x}$

ដូចនេះ u និង v មិនមែនជាអនុគមន៍អាម៉ូនិកឆ្លាស់។

លំហាត់អនុគមន៍វិភាគ

១. ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

1. $\lim_{z\to i} 3z^2+2z-1$ 2. $\lim_{z\to 2+iz} z+\frac{1}{z}$ 3. $\lim_{z\to 0}\frac{z}{\cos z}$

4. $\lim_{z\to 2}\frac{z^4-16}{z-2}$ 5. $\lim_{z\to i}\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z^2+1}$ 6. $\lim_{z\to 0} z\arg z$

7. $\lim_{z\to 0} ze^{i\operatorname{Re} z}$ 8. $\lim_{z\to i}\operatorname{Re}(z)\sin z$ 9. $\lim_{z\to -3}(\arg z)^2$

10. $\lim_{z\to 1}(z+1)\operatorname{Im}(iz)$ 11. $\lim_{z\to 0}\sin\bar{z}$ 12. $\lim_{z\to 0} ze^{\frac{i}{|z|^2}}$

២. ចូរគណនាលីមីត

$(1)\ \lim_{z\to\infty}\frac{z+1}{3iz+2}$ $(2)\ \lim_{z\to\infty}\frac{z^2+i}{z^3+3z^2+z+1}$ $(3)\ \lim_{z\to\infty}\left(\frac{z^3+i}{z^3-i}\right)^2$

$(4)\ \lim_{z\to i}\frac{1}{z^2+1}$ $(5)\ \lim_{z\to 1}\frac{-1}{(z-1)^2}$ $(6)\ \lim_{z\to\infty}\frac{\operatorname{Log} z}{z}$

៣.នៅក្នុងលំហាត់ខាងក្រោម ចូរកំណត់សំណុំចំណុចបើអនុគមន៍ជាប់។ ចំពោះចំណុចមិនជាប់ចូរកំណត់ថាតើវាអាចផ្លាស់ប្តូរបាន ឬមិនបាន។

$(1).\ \frac{z-i}{z+1+3i}$ $(2).\ \frac{2z+1}{z^2+3z+2}$ $(3).\ \bar{z}$

$(4).\ \operatorname{Log}(z+1)$ $(5)\ \sin z$ $(6).\ (\arg z)^2$

$(7).\ z(\arg z)^2$ $(8).\ \frac{z}{|z|}$

៤. នៅក្នុងលំហាត់ខាងក្រោមចូរកំណត់សំណុំធំបំផុតដែលជាអនុគមន៍វិភាគ និងគណនាកុំផ្លិចដេរីវេរបស់វា។

$(1).\ 3(z-1)^2+2(z-1)$ $(2).\ z^3+\frac{z}{1+i}$ $(3).\ \operatorname{Im} z$

$(4).\ \left(\frac{z-2+i}{z-1+i}\right)^2$ $(5).\ \frac{1}{z^3+1}$ $(6).\ 8\bar{z}+i$

$(7).\ \frac{1}{z^2-(1-2i)z-3-i}$ $(8).\ \frac{1}{z^2+(1+2i)+3+i}$ $(9).\ z^{\frac{2}{3}}$

$(10).\ (z-1)^{\frac{1}{2}}$ $(11).\ (z-3+i)^{\frac{1}{10}}$ $(12).\ \frac{1}{(z+1)^{\frac{1}{2}}}$

៥. ចូរគណនាលីមីតនៅក្នុងលំហាត់ខាងក្រោមដែលដែនកំណត់របស់វាជាមួយនឹងដេរីវេកុំផ្លិចនៅចំណុចមួយ។ នៅក្នុងលំហាត់ទី 3–4 សូមប្រើស្វ័យគុណគោល។

$(1).\ \lim_{z\to 1}\dfrac{z^{100}-1}{z-1}$　　　　$(2).\ \lim_{z\to i}\dfrac{z^{99}+i}{z-i}$

$(3).\ \lim_{z\to 0}\dfrac{1}{z\sqrt{1+z}}-\dfrac{1}{z}$　　　　$(4).\ \lim_{z\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{z}-1}{z-1}$

៦.ចូរកំណត់អនុគមន៍ខាងក្រោមជាអនុគមន៍វិភាគ៖

$(1).\ xy+iy$　　$(2).\ e^{x}(\cos y-i\sin y)$　　$(3).\ z^2+z$　　$(4).\ z^3$　　$(5).\ z+2\overline{z}$

៧. ចូររកអថេរ a,b,c,d និង c បើអនុគមន៍

$f(z)=\left(ax^4+bx^2y^2+cy^4+dx^2-2y^2\right)+i\left(4x^3y-exy^3+4xy\right)$ ជាអនុគមន៍វិភាគ។

៨. ចូរកំណត់តម្លៃ p បើអនុគមន៍ $f(z)=\dfrac{1}{2}\log\left(x^2+y^2\right)+\tan^{-1}\left(\dfrac{px}{y}\right)$ ជាអនុគមន៍វិភាគ។

៩. ចំពោះតម្លៃ z តើអនុគមន៍ខាងក្រោមមួយណាខ្លះជាអនុគមន៍វិភាគ ?

$(i)\ \dfrac{z^2-4}{z^2+1}$　　$(ii)\ \dfrac{z}{z^2-1}$　　$(iii)\ \tan^2 z$

១០. បង្ហាញថា $f(z)=\begin{cases}\dfrac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4}, & z\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$ វាមិនមែនជាអនុគមន៍វិភាគនៅត្រង់គល់តម្រុយ

ទោះបីសមីការកូស៊ីរីម៉ាន់ត្រូវបានបំពេញលក្ខខ័ណ្ឌត្រង់គល់តម្រុយក៏ដោយ។

១១. បង្ហាញថាអនុគមន៍ខាងក្រោមជាអនុគមន៍អាម៉ូនិច៖

ក. $\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{2}\right)$　　　　ខ. $\log\sqrt{x^2+y^2}$

១២. បើ $f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគបង្ហាញថា៖

ក. $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left|\operatorname{Re} f(z)\right|^2=2\left|f'(z)\right|^2$

ខ. $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left|\operatorname{Im} f(z)\right|^2=2\left|f'(z)\right|^2$

គ. $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x}\left|f(z)\right|\right\}^2+\left\{\dfrac{\partial}{\partial y}\left|f(z)\right|\right\}^2=\left|f'(z)\right|^2$

១៣. បង្ហាញថា $\log\left\{(x-1)^2+(y-2)^2\right\}$ ជាអនុគមន៍អាម៉ូនិចនៅគ្រប់ដែនដែលមិនរាប់បញ្ចូលត្រង់ចំណុច $(1,2)$ ។

១៤. បង្ហាញថាអនុគមន៍ $v=e^{-x}(x\cos y+y\sin y)$ ជាអនុគមន៍អាម៉ូនិក និងកំណត់អនុគមន៍វិភាគដែលត្រូវគ្នា $f(z)=u+iv$ ។

១៥. ចូរសង់អនុគមន៍វិភាគនៃផ្នែកពិតគឺ៖

$(i)\ \dfrac{y}{x^2+y^2}$ $(ii)\ e^{2x}(x\cos 2y - y\sin 2y)$

$(iii)\ \cos x\cosh y$ $(iv)\ e^{x}\left[\left(x^2-y^2\right)\cos y - 2xy\sin y\right]$

១៦. បង្ហាញថាអនុគមន៍ $u=\sin x\cosh y+2\cos x\sinh y+x^2-y^2+4xy$ ជាអនុគមន៍អាម៉ូនិក និងរកអនុគមន៍វិភាគ $f(z)=u+iv$ ។

១៧. ចូររកអនុគមន៍វិភាគ $f(z)=u+iv$ ដែល $2u+3v=e^{x}(\cos y-\sin y)$ ។

១៨. ចូររកអនុគមន៍វិភាគ $f(z)=u+iv$ ដែល
$2u+v=e^{2x}\left\{(2x+y)\cos 2y+(x-2y)\sin 2y\right\}$ ។

១៩. ចូររកអនុគមន៍វិភាគ $z=u+iv$ បើ $u-v=\dfrac{\cos x+\sin x-e^{-y}}{2\cos x-e^{y}-e^{-y}}$ ពេល $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ ។

២០. បង្ហាញថាអនុគមន៍ $u=e^{-2xy}\sin\left(x^2-y^2\right)$ ជាអនុគមន៍អាម៉ូនិក។ ចូររកអនុគមន៍ឆ្លាស់ v និងបង្ហាញថា $u+iv$ ជាអនុគមន៍វិភាគនៃ z ។

២១. ចូររកគន្លងកែងនៃគ្រួសារខ្សែកោងខាងក្រោម៖

$(i)\ x^3y-xy^3$ $(ii)\ e^{x}-\cos y-xy=c$

មេរៀនទី៣៖ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អថេរកុំផ្លិច

៣.១.អាំងតេក្រាលខ្សែកោងក្នុងប្លង់

នៅក្នុងករណីនៃអថេរពិត គន្លងនៃអាំងតេក្រាល $\int_a^b f(x)dx$ គឺតាមអ័ក្សអាប់ស៊ីសពី a ទៅ b ។ ប៉ុន្តែក្នុងករណីអនុគមន៍អថេរកុំផ្លិច $f(z)$ គន្លងនៃអាំងតេក្រាលកំណត់ $\int_a^b f(z)dz$ អាចតាមខ្សែកោងណាមួយពី $z=a$ ទៅ $z=b$ ។

$$z = x + iy \Rightarrow dz = dx + idy \quad (1)$$

$$dz = dx \text{ បើ } y = 0 \quad (2)$$

$$dz = idy \text{ បើ } x = 0 \quad (3)$$

នៅក្នុងសមីការ $(1),(2),(3)$ ទិសដៅនៃ dz គឺខុសៗគ្នា។ តម្លៃរបស់វាអាស្រ័យទៅលើខ្សែកោងនៃអាំងតេក្រាល។ ប៉ុន្តែតម្លៃនៃអាំងតេក្រាលពី a ទៅ b អ្វីដែលនៅសល់ដូចគ្នាទៅនឹងខ្សែកោងធម្មតាពី a ទៅ b ។

នៅក្នុងករណីចំណុចខាងដើម និងចំណុចបញ្ចប់វាត្រួតស៊ីគ្នា ដូច្នេះ c ជាខ្សែកោងបិទ ហើយអាំងតេក្រាលបែបនេះហៅថាគន្លងអាំងតេក្រាល និងកំណត់សរសេរដោយ $\oint_C f(z)dz$ ។

- បើ $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ហើយ $dz = dx + idy$ យើងបាន៖

$$\oint_C f(z)dz = \int_C (u+iv)(dx+idy) = \int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy)$$

- បើគន្លង C មានសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $z(t) = x(t) + iy(t)$ ដែល $a \le t \le b$ នោះគេបាន៖

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f[z(t)]z'(t)dt, (z = z(t), dz = z'(t)dt)$$

ទម្រង់ខាងលើនេះ ហៅថាទម្រង់ប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃអាំងតេក្រាលខ្សែកោងកុំផ្លិច។

- សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃរង្វង់ដែលមានផ្ចិតត្រង់ z_0 និងកាំ r កំណត់ដោយ៖

  $z(t) = z_0 + re^{it}$ ដែល $0 \le t \le 2\pi, e^{it} = \cos t + i\sin t$

  (រង្វង់ដែលមានផ្ចិតត្រង់ z_0 និងកាំ r មានសមីការ $|z - z_0| = r$)

- សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃអង្កត់ដែលភ្ជាប់ចំណុច z_1 និង z_2 កំណត់ដោយ៖

  $z(t) = (1-t)z_1 + z_2t, 0 \le t \le 1$ ឬ $z(t) = z_1 + (z_2 - z_1t), 0 \le t \le 1$

  $z(t) = (1-t)z_1 + z_2t = z_1 - z_1t + z_2t = z_1 + (z_2 - z_1)t, 0 \le t \le 1$

ឧទាហរណ៍១៖ ចូរគណនា $\int_0^{2+i} z^2dz$ តាមបណ្តោយបន្ទាត់ $y = \dfrac{x}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $f(z) = z^2$ នោះគេបាន $f'(z) = 2z$

ដោយ $f(z)$ មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលចំពោះគ្រប់តម្លៃកំណត់នៃ z វាជាអនុគមន៍វិភាគនៅក្នុងប្លង់ (z)

គេបាន $\int_0^{2+i} z^2 dz$ មិនអាស្រ័យនៃគន្លង

$$\int_0^{2+i} z^2 dz = \left|\frac{z^3}{3}\right|_0^{2+i}$$

$$= \frac{1}{3}(2+i)^3$$

$$= \frac{1}{3}\left(8+i^3+6i^2+12i\right)$$

$$= \frac{1}{3}(8-i-6+12i)$$

$$= \frac{1}{3}(2+11i)$$

ឧទាហរណ៍២៖ ចូរគណនា $\int_0^{1+i}\left(x^2-iy\right)dz$ នៅលើគន្លង៖

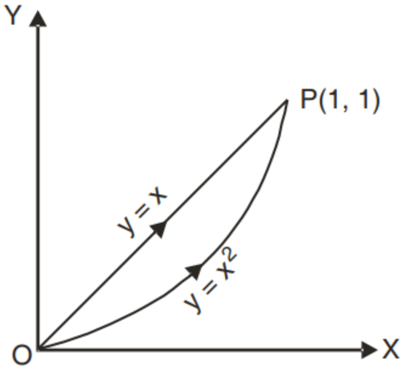
$(a).\ y = x$ $\qquad\qquad (b).\, y = x^2$

ដំណោះស្រាយ

(a) នៅលើបន្ទាត់ $y = x$ គេបាន៖

$$dy = dx \Rightarrow dz = dx + idy$$

$$\Rightarrow dz = dx + idx = (1+i)dx$$



រូបទី៣.១

ដូច្នេះ $\int_0^{1+i}\left(x^2-iy\right)dz = \int_0^1\left(x^2-ix\right)(1+i)dx$

$$= (1+i)\left[\frac{x^3}{3} - i\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$= (1+i)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}i\right)$$

$$= \frac{(1+i)(2-3i)}{6}$$

$$= \frac{5}{6}-\frac{1}{6}i$$

ដូចនេះ $\int_0^{1+i}\left(x^2-iy\right)dz = \frac{5}{6}-\frac{1}{6}i$ ។

(b) នៅលើប៉ារ៉ាបូល $y = x^2 \Rightarrow dy = 2xdx$

នោះគេបាន $dz = dx + idy \Rightarrow dz = dx + 2ixdx = (1+2ix)dx$

ហើយ x នៅចន្លោះពី 0 ទៅ 1 គេបាន

$$\int_0^{1+i}\left(x^2-iy\right)dx=\int_0^1\left(x^2-ix^2\right)\left(1+2ix\right)dx$$
$$=\int_0^1 x^2\left(1-i\right)\left(1+2ix\right)dx$$
$$=\left(1-i\right)\int_0^1 x^2\left(1+2ix\right)dx$$
$$=\left(1-i\right)\left[\frac{x^3}{3}+i\frac{x^4}{2}\right]_0^1$$
$$=\left(1-i\right)\left[\frac{1}{3}+i\frac{1}{2}\right]$$
$$=\frac{1}{6}\left(2+3i-2i+3\right)=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}i$$

ដូចនេះ $\int_0^{1+i}\left(x^2-iy\right)dz=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}i$ ។

ឧទាហរណ៍៣៖ ចូរគណនា $\int_C\left(12z^2-4iz\right)dz$ តាមបណ្តោយខ្សែកោង C ដែលភ្ជាប់ចំណុច $(1,1)$ និង $(2,3)$ ។

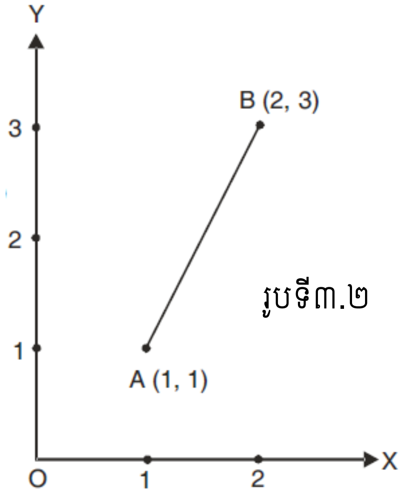
ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\int_C\left(12z^2-4iz\right)dz=\int_C\left[12\left(x+iy\right)^2-4i\left(x+iy\right)\right]\left(dx+idy\right)$

$$=\int_C\left[12\left(x^2-y^2+2ixy\right)-4ix+4y\right]\left(dx+idy\right)$$
$$=\int_C\left(12x^2-12y^2+24ixy-4ix+4y\right)\left(dx+idy\right)\ (1)$$

សមីការបន្ទាត់ (AB) កាត់តាមចំណុច $(1,1)$ និង $(2,3)$ គឺ៖

$$y-1=\frac{3-1}{2-1}(x-1)$$
$$y-1=2(x-1)$$
$$\Rightarrow y=2x-1\Rightarrow dy=2dx$$



រូបទី៣.២

យកតម្លៃ y និង dy ជំនួសក្នុង (1) គេបាន៖

$$\int_C\left(12z^2-4iz\right)dz$$
$$=\int_1^2\left[12x^2-12\left(2x-1\right)^2+24ix\left(2x-1\right)-4ix+4\left(2x-1\right)\right]\left(dx+2idx\right)$$

$$=\int_1^2\left[12x^2-48x^2+48x-12+48ix^2-24ix-4ix+8x-4\right](1+2i)\,dx$$

$$=(1+2i)\int_1^2\left[(-36+48i)x^2+(56-28i)x-16\right]dx$$

$$=(1+2i)\left[(-36+48i)\frac{x^3}{3}+(56-28i)\frac{x^2}{2}-16x\right]_1^2$$

$$=(1+2i)\left[(-36+48i)\frac{8}{3}+(56-28i)2-16\times 2-(-36+48i)\frac{1}{3}-(56-28i)\frac{1}{2}+16\right]$$

$$=(1+2i)(-96+128i+112-56i-32+12-16i-28+14i+16)$$

$$=(1+2i)(-16+70i)$$

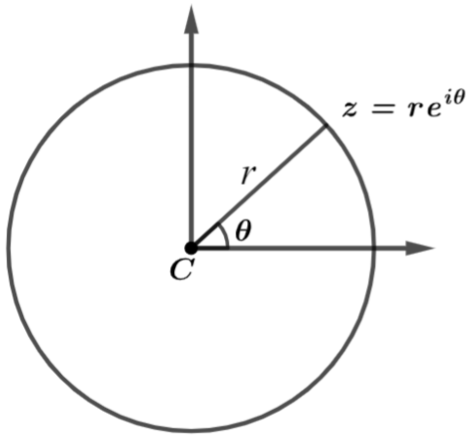
$$=-156+38i$$

ឧទាហរណ៍៤៖ ចូរគណនា $\oint_C (z-a)^n\,dz$ ដែល C ជារង្វង់ផ្ចិត a និងកាំ r ។ ចូរពិភាក្សាករណី $n=-1$។

ដំណោះស្រាយ

សមីការរង្វង់ C គឺ $|z-a|=r$ ឬ $z-a=re^{i\theta}$ ដែល θ មានតម្លៃពី 0 ទៅ 2π

$$\Rightarrow dz=ire^{i\theta}d\theta$$



រូបទី៣.៣

$$\oint_C (z-a)^n\,dz=\int_0^{2\pi} r^n e^{in\theta}\cdot ire^{i\theta}d\theta$$

$$=ir^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta}d\theta \quad [\because n\neq -1]$$

$$=ir^{n+1}\left[\frac{e^{i(n+1)\theta}}{i(n+1)}\right]_0^{2\pi}$$

$$=\frac{r^{n+1}}{n+1}\left[e^{i2(n+1)\pi}-1\right]$$

$$=\frac{r^{n+1}}{n+1}\left[\cos 2(n+1)\pi+i\sin 2(n+1)\pi-1\right]$$

$$=\frac{r^{n+1}}{n+1}(1+0i-1)$$

$$=0 \qquad [n\neq -1]$$

ករណី $n=-1$ យើងបាន៖

$$\oint_C (z-a)^n\,dz=\int_0^{2\pi}\frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}}d\theta=i\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi i$$

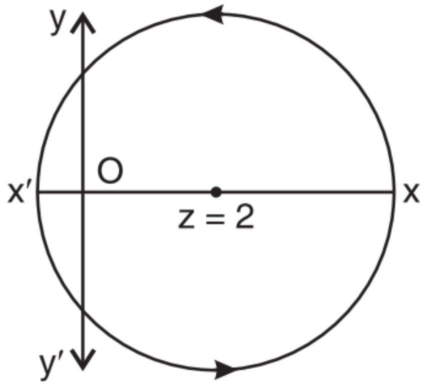
ឧទាហរណ៍៥៖ ចូរគណនា $\int_C (z-z^2)\,dz$ ដែល C គឺជាផ្នែកពាក់កណ្ដាលខាងលើរង្វង់ និងផ្នែកពាក់

កណ្ដាលខាងក្រោមរង្វង់ $|z-2|=3$ ។

ដំណោះស្រាយ

យក $z=re^{i\theta}=3e^{i\theta}\Rightarrow dz=3i\cdot e^{i\theta}d\theta$

ផ្នែកខាងលើរង្វង់



រូបទី៣.៤

$$\int_C\left(z-z^2\right)dz=\int_0^{\pi}\left(3e^{i\theta}-9e^{2i\theta}\right)3ie^{i\theta}d\theta$$
$$=\int_0^{\pi}\left[9ie^{2i\theta}-27ie^{3i\theta}\right]d\theta$$
$$=\left[\frac{9}{2}e^{2i\theta}-\frac{27}{3}e^{3i\theta}\right]_0^{\pi}.$$
$$=\left(\frac{9}{2}e^{2i\pi}-9e^{3i\pi}\right)-\left(\frac{9}{2}-9\right)$$
$$=\frac{9}{2}\left(e^{2i\pi}-2e^{3i\pi}+1\right)\qquad\left(\begin{array}{l}e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta\\ \therefore e^{2i\pi}=1,e^{i3\pi}=-1\end{array}\right)$$
$$=\frac{9}{2}\left(1+2+1\right)=18$$

ផ្នែកខាងក្រោមរង្វង់

$$\int_C\left(z-z^2\right)dz=\int_{\pi}^{2\pi}\left(9ie^{2i\theta}-27e^{3i\theta}\right)d\theta$$
$$=\left[\frac{9}{2}e^{2i\pi}-9e^{3i\pi}\right]_{\pi}^{2\pi}$$
$$=\left(\frac{9}{2}e^{4\pi i}-9e^{6i\pi}\right)-\left(\frac{9}{2}e^{2\pi i}-9e^{3\pi i}\right)$$
$$=\left(\frac{9}{2}-9\right)-\left(\frac{9}{2}+9\right)$$
$$=-18$$

ឧទាហរណ៍៦៖ គណនាអាំងតេក្រាលខ្សែកោងក្រោម៖

$(1).I=\int\limits_{AB}\left[\left(x-y\right)dx+\left(x+y\right)dy\right], AB$ ជាធ្នូកន្លះរង្វង់

$(2).I=\int\limits_{AB}\left(y^2dx-x^2dy\right)$ ដែល AB ជាធ្នូ $\frac{1}{4}$ អេលីប

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\begin{cases}x=R\cos t\\ y=R\sin t\end{cases}, t\in\left[0,\pi\right]$

គេបាន

$$I=\int_0^{\pi}\left[\left(R\cos t-R\sin t\right)\left(-R\sin t\right)+\left(R\cos t+R\sin t\right)\left(R\cos t\right)\right]dt$$
$$=R^2\int_0^{\pi}\left[\left(\sin^2 t-\sin t\cos t\right)+\left(\cos^2 t+\sin t\cos t\right)\right]dt$$
$$=\pi R^2$$

$(2).\ I=\int_{AB}\left(y^2dx-x^2dy\right)$ ដែល AB ជាធ្នូ $\frac{1}{4}$ អេលីប

យើងមាន $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases},t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

គេបាន

$$I=-ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(b\sin^3 t+a\cos^3 t\right)dt$$
$$=-ab\left[-\int_0^{\frac{\pi}{2}}b\left(1-\cos^2 t\right)d\left(\cos t\right)+\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\left(1-\sin^2 t\right)d\left(\sin t\right)\right]$$
$$=-\frac{2}{3}ab\left(a+b\right)$$

+បើ C ជាខ្សែកោងបិទគេសរសេរ $\oint_C\left(Pdx+Qdy\right),\oint_{C^+}\left(Pdx+Qdy\right)$ អាំងតេក្រាលលើខ្សែកោងបិទ

(តាមទិសគឺតាមទិសដៅវិជ្ជមានផ្ទុយទ្រនិចនាឡិកា)

ឧទាហរណ៍៧៖ ចូរគណនា $I=\oint_{C^+}\left(y^3dx-x^3dy\right),C$ ជារង្វង់ឯកតា។

ដំណោះស្រាយ

យើបាន $\begin{cases}x=R\cos t\\ y=R\sin t\end{cases},t\in\left[0,2\pi\right]$

គេបាន

$$I=\int_0^{2\pi}\left[\left(R\sin t\right)^3\left(-R\sin t\right)-\left(R\cos t\right)^3\left(R\cos t\right)\right]dt$$
$$=-R^4\int_0^{2\pi}\left(\sin^4 t+\cos^4 t\right)dt$$
$$=-R^4\left(\frac{3\pi}{16}+\frac{3\pi}{16}\right)$$
$$=-\frac{3\pi}{8}R^4$$

ខ. លក្ខណៈ

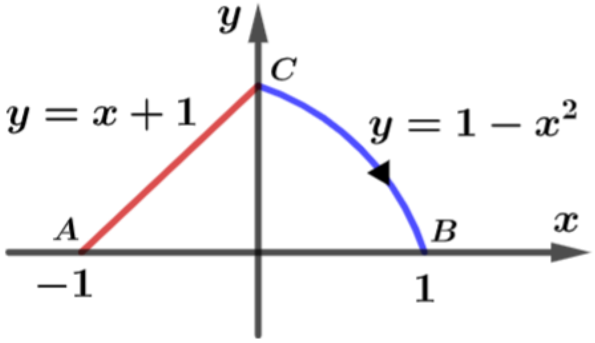
(i). $\int_{AB}\omega$ មិនអាស្រ័យនឹងការជ្រើសរើសយកការតាងសប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃខ្សែកោង AB

(ii). $\int_{AB}\omega+\omega'=\int_{AB}\omega+\int_{AB}\omega',\forall\lambda\in\mathbb{R},\int_{AB}\lambda\omega=\lambda\int_{AB}\omega$

(iii). បើ $C \in AB, \int\limits_{AB} \omega = \int\limits_{AC} \omega + \int\limits_{CB} \omega$

(iv). វិសមភាពអាំងតេក្រាល $\left| \int\limits_{C} f(z)dz \right| \le \int\limits_{c} |f(z)||dz|$

ឧទាហរណ៍៨៖ គណនា $I = \int\limits_{AB} \left(y^2dx + xdy\right)$ ដែល AB ឱ្យដោយរូប



រូបទី៣.៥

ដំណោះស្រាយ

$$\overrightarrow{AC}:\begin{cases} x = x \\ y = x+1 \end{cases} \quad , \ -1 \le x \le 0$$

$$\overrightarrow{CB}:\begin{cases} x = x \\ y = 1-x^2 \end{cases} \quad , \ 0 \le x \le 1$$

$$I = \int\limits_{\overrightarrow{AC}} \left(y^2dx + xdy\right) + \int\limits_{\overrightarrow{CB}} \left(y^2dx + xdy\right)$$

$$= \int_{-1}^{0} \left[(x+1)^2 dx + xd(x+1)\right] + \int_{0}^{1} \left[\left(1-x^2\right)^2 dx + xd\left(1-x^2\right)\right]$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(x^2 + 2x + 1 + x\right)dx + \int_{0}^{1} \left(1 - 2x^2 + x^4 - 2x^2\right)dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(x^2 + 3x + 1\right)dx + \int_{0}^{1} \left(1 - 4x^2 + x^4\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + x\right]_{-1}^{0} + \left[x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right]_{0}^{1}$$

$$= -\left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 1\right) + \left(1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{10 - 15 + 2}{10} = -\frac{3}{10}$$

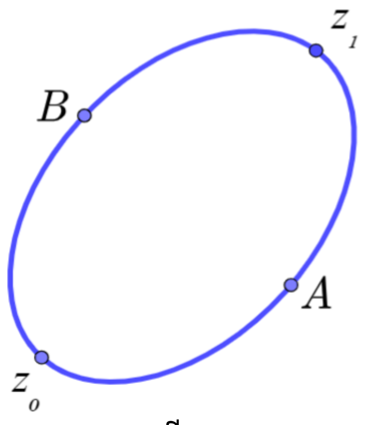
៣.២. អាំងតេក្រាលមិនអាស្រ័យគន្លង (Independence of Paths)

បើ $f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគនៅក្នុងដែនកំណត់ D ហើយ z_0 និង z_1 ជាពីរចំណុចនៃដែន D នោះគេបានអាំងតេក្រាលនៃ $f(z)$ ពីចំណុច z_0 ទៅ z_1 មិនអាស្រ័យនឹងគន្លងពី z_0 ទៅ z_1 មានន័យថា តម្លៃនៃអាំងតេក្រាលដូចគ្នាទាំងអស់។

សម្រាយបញ្ជាក់

យក $C = z_0Az_1Bz_0$

យើងបាន៖



រូបទី៣.៦

$$\oint_C f(z)dz = \int_{z_0Az_1Bz_0} f(z)dz$$

$$= \int_{z_0Az_1} f(z)dz + \int_{z_1Bz_0} f(z)dz$$

តែ $\oint_C f(z)dz = 0$ (ទ្រឹស្តីបទកូស៊ី)

$$\Rightarrow \int_{z_0Az_1} f(z)dz + \int_{z_1Bz_0} f(z)dz = 0$$

$$\Rightarrow \int_{z_0Az_1} f(z)dz = -\int_{z_1Bz_0} f(z)dz$$

$$\Rightarrow \int_{z_0Az_1} f(z)dz = \int_{z_0Bz_1} f(z)dz$$ ព្រោះ $-\int_{z_1Bz_0} f(z)dz = \int_{z_0Bz_1} f(z)dz$

ដូចនេះ អាំងតេក្រាលមិនអាស្រ័យនឹងគន្លងពី z_0 ទៅ z_1 ទេ ។

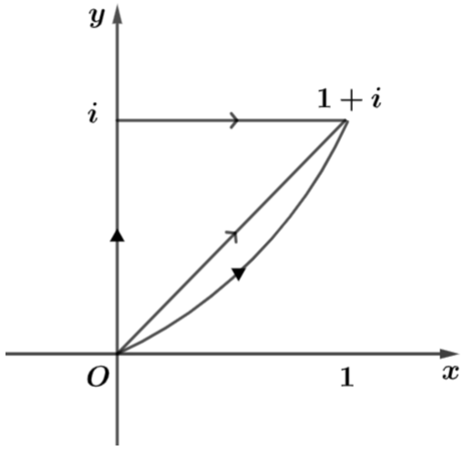
ឧទាហរណ៍៩៖ គណនា $\int_0^{1+i} z^2dz$ តាម៖

ក.គន្លង C អង្កត់ភ្ជាប់ចំណុច $z=0$ និង $z=1+i$

ខ.គន្លង $C: y = x^2$

គ.គន្លង C តាមអ័ក្សអរដោនេពី 0 ទៅ i បន្ទាប់មកតាមបន្ទាត់ស្របអ័ក្សអាប់ស៊ីសពី i ទៅ $1+i$ ។

ដំណោះស្រាយ



រូបទី៣.៧

ក.គន្លង C អង្កត់ភ្ជាប់ចំណុច $z=0$ និង $z=1+i$

សមីការនៃគន្លង C ៖

$$y = x, 0 \le x \le 1$$

$$z^2 = (x+iy)^2 = (x+ix)^2 = x^2 - x^2 + 2ix^2$$

$$dz = dx + idy = dx + idx = (1+i)dx$$

យើងបាន៖

$$\int_0^{1+i} z^2dz = \int_0^1 2ix^2\left(1+i\right)dx$$

$$= 2i\left(1+i\right)\int_0^1 x^2dx$$

$$= 2i\left(1+i\right)\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$= 2i\left(1+i\right)\times\frac{1}{3}$$

$$= -\frac{2}{3}+\frac{2}{3}i$$

ដូចនេះ $\int_0^{1+i} z^2dz = -\frac{2}{3}+\frac{2}{3}i$ ។

ខ. គន្លង $C: y = x^2$

សមីការនៃគន្លង C ៖

$$y = x^2, 0 \le x \le 1$$

$$z^2 = \left(x+iy\right)^2 = \left(x+ix^2\right)^2 = x^2 - x^4 + 2ix^3$$

$$dz = dx + idy = dx + i2xdx = \left(1+2ix\right)dx$$

យើងបាន៖

$$\int_0^{1+i} z^2dz = \int_0^1 (x^2 - x^4 + 2ix^3)(1+2ix)dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 + 2ix^3 - x^4 - 2ix^5 + 2ix^3 - 4x^4)dx$$

$$= \int_0^1 (-2ix^5 - 5x^4 + 4ix^3 + x^2)dx$$

$$= \left[-\frac{i}{3}x^6 - x^5 + ix^4 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$= -\frac{i}{3} - 1 + i + \frac{1}{3}$$

$$= -\frac{2}{3}+\frac{2}{3}i$$

ដូចនេះ $\int_0^{1+i} z^2dz = -\frac{2}{3}+\frac{2}{3}i$ ។

គ. យក $C = C_1 \cup C_2$ ដែល C_1 ពី 0 ទៅ i និង C_2 ពី i ទៅ 1 + i

សមីការគន្លង C_1 ៖

$$x = 0, 0 \le y \le 1$$
$$z^2 = (x+iy)^2 = (iy)^2 = -y^2$$
$$dz = dx + idy = idy$$

សមីការគន្លង C_2 ៖

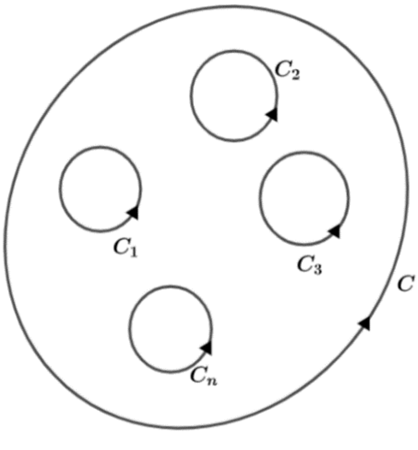
$$y = 1,\ 0 \le x \le 1$$
$$z^2 = \left(x+iy\right)^2 = \left(x+i\right)^2 = x^2 - 1 + 2ix$$
$$dz = dx + idy = dx$$

យើងបាន៖

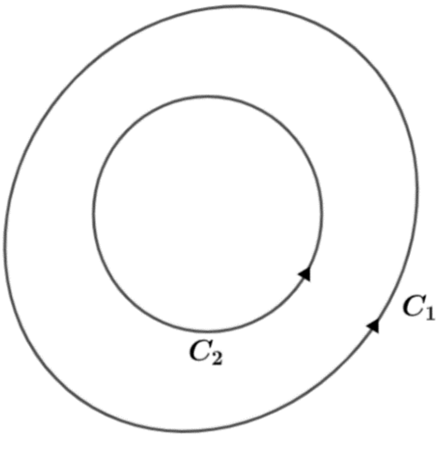
$$\int_0^{1+i} z^2 dz = \int_{C_1} z^2 dz + \int_{C_2} z^2 dz$$
$$= \int_0^1 \left(-y^2\right) idy + \int_0^1 (x^2 - 1 + 2ix)\,dx$$
$$= -i\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x + ix^2\right]_0^1$$
$$= -\frac{i}{3} + \frac{1}{3} - 1 + i$$
$$= -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i$$

ដូចនេះ $\int\limits_0^{1+i} z^2 dz = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i$ ។

ចំណាំ៖ យក C_1 និង C_2 ជាខ្សែកោងបិទមានទិសដៅវិជ្ជមានដែល C_2 ស្ថិតនៅខាងក្នុង C_1 ។ បើ $f\left(z\right)$ ជាអនុគមន៍វិភាគនៅក្នុងដែនកំណត់ D ដែលមាន C_1 និង C_2 ទាំងពីរហើយតំបន់នៅចន្លោះ C_1 និង C_2 នោះគេបាន $\int\limits_{C_1} f\left(z\right)dz = \int\limits_{C_2} f\left(z\right)dz$ ។



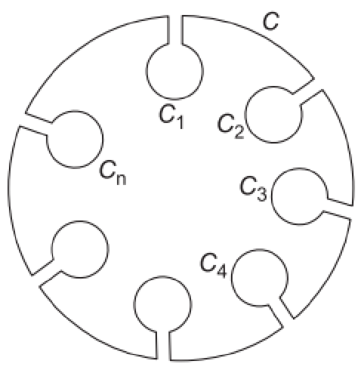
រូបទី៣.៨



រូបទី៣.៩

ជាទូទៅ៖ បើ $C_1,C_2,...,C_n$ ជាខ្សែកោងបិទមានទិសដៅវិជ្ជមាន ដែលស្ថិតនៅដាច់ៗគ្នាពីរៗ នៅក្នុងខ្សែកោងបិទ C (មានទិសដៅវិជ្ជមាន) ហើយ $f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគលើខ្សែកោង C និងផ្ទៃកខាងក្នុង នោះគេបាន៖

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + ... + \int_{C_n} f(z)dz$$ ។



រូបទី៣.១០

៣.៣. ទ្រឹស្តីបទអាំងតេក្រាលកូស៊ីលើគន្លងខាយ

(Cauchy's Integral Theorem for Simple Paths)

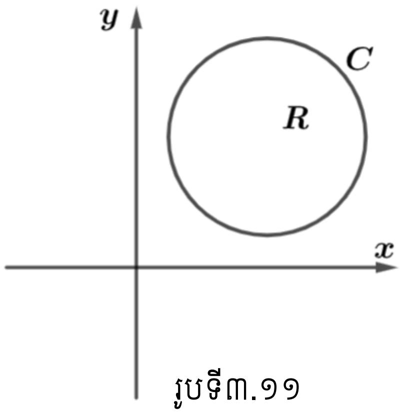
ទ្រឹស្តីបទកូស៊ី៖ បើ f ជាអនុគមន៍វិភាគនៅក្នុងដែនកំណត់ D ហើយ C ជាគន្លងបិទស្ថិតនៅក្នុងខាងដែន D នោះគេបាន $\oint_C f(z)dz = 0$ ។

- **អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍វិភាគលើគន្លងបិទមានតម្លៃស្មើសូន្យ ។**
- **បញ្ជាក់៖ ទិសដៅនៃគន្លង C យកតាមទិសដៅប្រាសនឹងទ្រនិចនាឡិកា។**

យើងស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីខាងលើ ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទហ្គ្រីន(Green Theorem) ។

ទ្រឹស្តីបទហ្គ្រីន(Green)៖ បើ C ជាខ្សែកោងបិទព័ទ្ធជុំវិញដែន R ហើយ $f(x,y)$ និង $g(x,y)$ មានដេរីវេដោយផ្នែកលំដាប់មួយជាប់ក្នុងដែន R នោះគេបាន៖

$$\oint_C f(x,y)dx + g(x,y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)dR$$ ដែល $dR = dxdy$ ឬ $dR = dydx$



រូបទី៣.១១

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងមាន៖

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$ ជាអនុគមន៍វិភាគ

$$z = x + iy$$

$$dz = dx + idy$$

យើងបានGreen៖

$$\oint_C f(x,y)dx + g(x,y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dR \text{ }, dR = dxdy, dR = dydx$$

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C \left[u(x,y) + iv(x,y) \right](dx + idy)$$

$$= \oint_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\oint_C v(x,y)dx + u(x,y)dy$$

$$= \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dR + i\iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dR$$

តាមលក្ខខណ្ឌកូស៊ី-រីម៉ាន់៖ $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

$$\Rightarrow \oint_C f(z)dz = \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dR + i\iint_R \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dR$$

$$\Rightarrow \oint_C f(z)dz = 0 + i \cdot 0 = 0$$

ដូចនេះ $\oint_C f(z)dz = 0$ ដែល f ជាអនុគមន៍វិភាគលើគន្លងបិទ C ។

សរុបមក៖ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍វិភាគលើគន្លងបិទ មានតម្លៃស្មើសូន្យ។

ឧទាហរណ៍១០៖ ក.បង្ហាញថា អនុគមន៍ $f(z) = e^z$ ជាអនុគមន៍វិភាគក្នុងប្លង់កុំផ្លិច។

ខ.ទាញរកតម្លៃនៃ $\int_C f(z)dz$ ដែលគន្លង C ជារង្វង់ $|z| = 1$ (ទិសដៅវិជ្ជមាន)។

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(z) = e^z = e^{(x+iy)} = e^x \times e^i y = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y$

ដែល $u(x,y) = e^x \cos y, v(x,y) = e^x \sin y$

ខ. ដោយ $f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគលើគន្លង C ដែលជារង្វង់ $|z| = 1$ នោះតាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីគេបាន $\int_C f(z)dz = 0$ ។

ឧទាហរណ៍១១៖ ប្រើទ្រឹស្តីបទហ្គ្រីនដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$(a).\int_\gamma xdx + ydy$ $\quad$ $(b).\int_\gamma -ydx + xdy$ ដែល γ ជាគន្លងបិទងាយជាមួយទិសវិជ្ជមាន។

ដំណោះស្រាយ

(a). តាង $P(x,y) = x$ និង $Q(x,y) = y$ ដេរីវេដោយផ្នែកទីមួយនៃ P,Q គឺជាប់ចំពោះគ្រប់ (x,y) ហើយយើងអនុវត្តន៍ទ្រឹស្តីបទហ្គ្រីនយើងមាន $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ និង $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$ តាមទ្រឹស្តីបទហ្គ្រីន

យើងបាន $\int_\gamma xdx + ydy = \iint_D 0dxdy = 0$

(b). យើងមាន $P(x,y) = -y$ និង $Q(x,y) = x, \frac{\partial Q}{\partial x} = 1, \frac{\partial P}{\partial y} = -1$ តាមទ្រឹស្តីបទ

ហ្គ្រីនយើងបាន៖

$$\int_{\gamma} -ydx + xdy = \iint_D 2dxdy = 2\times \text{ (ផ្ទៃក្រឡានៃ } D \text{)}$$

បើ γ ជារង្វង់ឯកតាមានទិសវិជ្ជមាននោះអាំងតេក្រាលគឺស្មើ $2\times$ (ផ្ទៃក្រឡានៃថាសឯកតា) $=2\pi$ ។

៣.៣.២. ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីលើគន្លងខាយ

គេឱ្យខ្សែកោង Jordan បិទងាយមានឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលកំណត់បានដែនងាយ៖ បើ $f(z)= f(x+iy)=P(x,y)+iQ(x,y)$ ជាអនុគមន៍វិភាគលើ $D\cup C$ នោះគេបាន $\oint_C f(z)dz=0$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាមនិយមន័យគេបាន៖ $\oint_C f(z)dz=\oint_C (Pdx-Qdy)+i\oint_C (Qdx-Pdy)$

តាមរូបមន្តG.Rគេបាន៖

$$\oint_C f(z)dz=\oint_{C^+} (Pdx-Qdy)+i\oint_{C^+} (Qdx-Pdy)$$

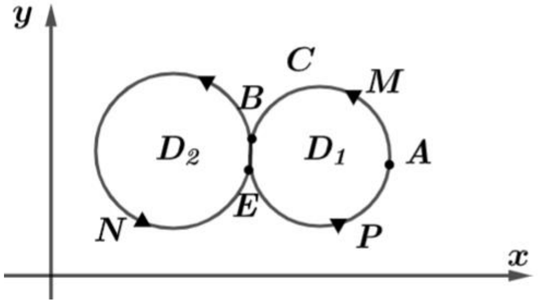
$$=\iint_D -\left(\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy+i\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy$$

តាមលក្ខខណ្ឌកូស៊ីរីម៉ាន់គេបាន $\begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{\partial Q}{\partial y}\\ \dfrac{\partial P}{\partial y}=-\dfrac{\partial Q}{\partial x}\end{cases}$

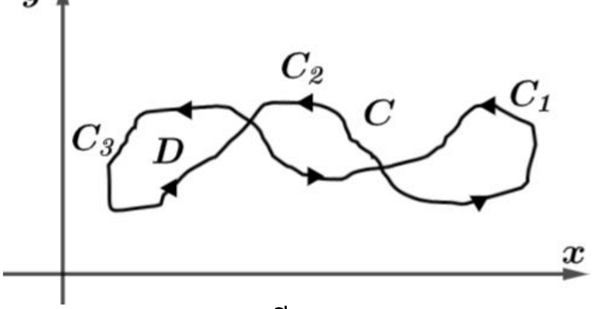
$$\Rightarrow \oint_C f(z)dz=0$$

កូរ៉ូលែ១៖ គេឱ្យ C ជាខ្សែកោង $Jordan$ បិទទូទៅ(រូប៣.១២និងរូប៣.១៣) ដែលកំណត់ដោយដែន D ហើយ $f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគលើ $D\cup C$ នោះគេបាន៖ $\oint_C f(z)dz=0$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់



រូបទី៣.១២



រូបទី៣.១៣

ក្នុងរូបទី៣.១២ គេបំបែកដែនជាដែន D ពីរដោយប្រើផ្លូវតាមទ្រឹស្តីបទខាងលើគេបាន៖

$$\oint_C f(z)dz = \int_{AA} f(z)dz = \int_{AMB} f(z)dz + \int_{BNE} f(z)dz + \int_{EB} f(z)dz + \int_{BE} f(z)dz + \int_{EBA} f(z)dz$$

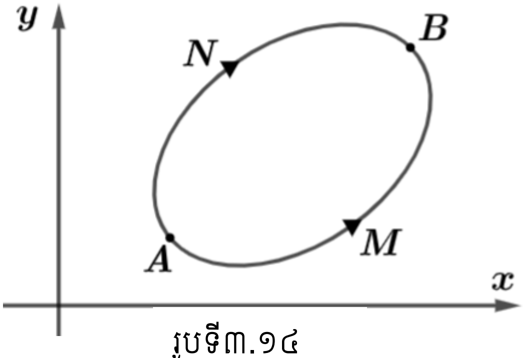
$$= \int_{C_1^+} f(z)dz + \int_{C_2^+} f(z)dz = 0+0=0$$

$C_1 = AMBEPA$, $C_2 = BNEB$ ព្រោះ D_1 & D_2 ជាដែនងាយ

ក្នុងរូបទី៣.១៣ គេបាន៖ $\oint_{C^+} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \int_{C_3} f(z)dz = 0$

កូរ៉ូលែ២៖ គេឱ្យ D ជាដែនមួយនៃប្លង់កុំផ្លិចនិង $f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគក្នុង D បើ A និង B ជាចំណុចពីរនៃដែន D នោះគេបាន៖ $\int_{AB} f(z)dz$ មានតម្លៃថេរគឺមិនអាស្រ័យគន្លងក្នុង D ដែលភ្ជាប់ពី $A \to B$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់



រូបទី៣.១៤

បើ AMB និង ANB ជាគន្លង២ក្នុង D ដែលភ្ជាប់ពី $A \to B$ (រូបទី៣.១៣) បើតាង $C = AMBNA$ តាមកូរ៉ូលែ១ គេបាន៖ $\oint_{C^+} f(z)dz = \int_{AMB} f(z)dz + \int_{BNA} f(z)dz = 0$

$$\Rightarrow \int_{AMB} f(z)dz = -\int_{BMA} f(z)dz = \int_{ANB} f(z)dz = K$$

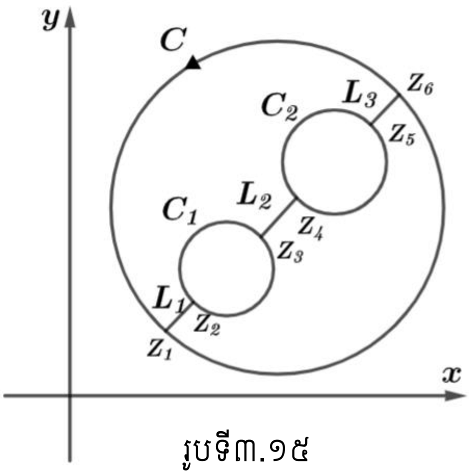
កូរ៉ូលែ៣៖ គេឱ្យ C ជាខ្សែកោងបិទងាយមួយនិង $C_1, C_2, ..., C_n$ ជាខ្សែកោងតូចៗដាច់គ្នាពីរៗដែលស្ថិតនៅផ្ទៃក្នុងនៃ C (រូបទី៣.១៥) បើ $f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគលើគ្រប់ខ្សែកោងទាំងអស់និងនៅផ្ទៃក្នុងនៃ C ដែលនៅក្នុង $C_1, C_2, ..., C_n$ នោះគេបាន៖

$$\oint_{C^+} f(z)dz + \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz = 0 \text{ ។}$$

សម្រាយបញ្ជាក់

គេភ្ជាប់ C ទៅនឹង C_1 ដោយអង្កត់ $L_1 = z_1z_2$ និង C_1 ទៅ C_2 ដោយអង្កត់ $L_2 = z_3z_4, ...$

ក្នុងរូបទី៣.១៥យក $n=2$, $T_1 = z_1z_2 \cdot z_3z_4 \cdot z_5z_6z_1$ តាមទិសវិជ្ជមាន



រូបទី៣.១៥

គេបាន $\int_{L_1} f(z)dz+\int_{z_2z_3} f(z)dz+\int_{L_2} f(z)dz+\int_{z_4z_5} f(z)dz+\int_{L_3} f(z)dz+\int_{z_6z_1} f(z)dz=0$

និងយកខ្សែកោងបិទ $T_2 = z_6z_5\cdot z_4z_3\cdot z_2z_1z_6$ តាមទិសវិជ្ជមាន នោះគេបាន៖

$$\int_{-L_3} f(z)dz+\int_{z_5z_4\in C_2} f(z)dz+\int_{-L_2} f(z)dz+\int_{z_3z_2\in C_1} f(z)dz+\int_{-L_1} f(z)dz+\int_{z_1z_2\in C} f(z)dz=0$$

កូរ៉ូលែ៤៖ គេឱ្យខ្សែកោង C បិទងាយនិងនៅផ្នែកក្នុងនៃ C គេបាន៖

$$\oint_{C^+}\frac{dz}{z\cdot z_o}=2\pi i \text{ ឬ } \oint_{C^-}\frac{dz}{z\cdot z_o}=2\pi i$$

ឧទាហរណ៍១២៖ គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

1. គណនា $I=\int_C\frac{dz}{z}$ ដែល C ជាខ្សែកាច់ដែលភ្ជាប់ $-i$ ទៅ i តាមជ្រុងចតុកោណកែង $ABCD$ ៖

$$A(-i)\ ,\ B(1-i)\ ,\ C(1+i)\ ,\ D(i)$$

$$I=\int_{C'}\frac{dz}{z} \quad , \quad C':z(t)=e^{it}\ ,\ -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{ie^{it}}{e^{it}}dt=i\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=i\pi$$

2. $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^z dz,\ A(a=a_1+ia_2),B(b=b_1+ib_2)$

គេបាន

$$I=\int_a^b e^z\,dz=\int_{AB} e^z \ ,A=(a=a_1+ia_2)$$

$$B(b=b_1+ib_2),a_1<b_1,a_2<b_2$$

ដោយ $f(z)=e^3$ ជាអនុគមន៍វិភាគដែល $\overrightarrow{AB}$ ជាខ្សែកាច់ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}\cup\overrightarrow{DB},D(b_1,a_2)$

គេបាន $\begin{cases}\overrightarrow{AD}:z(t)=t+ia_2\ ,a_1\le t\le b_1\\ \overrightarrow{DB}:z(t)=b_1+it\ ,a_2\le t\le b_2\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int_{\overrightarrow{AD}} e^z dz+\int_{\overrightarrow{DB}} e^z dz$$

$$=\int_{a_1}^{b_1} e^{t+ia_2}d(t+ia_2)+\int_{a_2}^{b_2} e^{b_1+it}d(b_1+it)$$

$$=ie^{ia_2}\int_{a_1}^{b_1} e^t dt+ie^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} e^{it}dt$$

$$=ie^{ia_2}\left(e^{b_1}-e^{a_1}\right)+e^{b_1}\left(e^{ib_2}-e^{ia_2}\right)$$

$$=e^{b_1+ib_2}-e^{a_1+ia_2}$$

3. $I=\oint\limits_{C^+}\frac{dz}{z^2+2z+2}$, C ជាកំពូលការេ $(0,0),(-2,0),(-2,-2)$

គេបាន

$$f(z)=\frac{1}{z^2+2z+2}=\frac{1}{(z+1)^2-i^2}$$

$$=\frac{1}{(z+1-i)(z+1+z)}$$

$$=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z+1-i}+\frac{1}{z+1+i}\right)$$

ដោយ $f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគ $\mathbb{C}-\{-1\pm i\}$

តាមរូបមន្តកូស៊ីលើ៣គេអាចជំនួស $\mathbb{C}$ ដោយ $C_0=\{z:|z+1+i|=1\}$

$$I=\oint\limits_{C^+}\frac{dz}{z^2+2z+2}=\frac{1}{2i}\oint\limits_{C^+}\left(\frac{1}{z+1+i}+\frac{1}{z+1-i}\right)dz=\frac{1}{2i}(0-2\pi i)=-\pi$$

4. $I=\int\limits_{C^+}\frac{dz}{z^2-1}\ :\ C:|z|=2$

ឧទាហរណ៍១៣៖ បង្ហាញថា $\int\limits_C\frac{dz}{z-a}=2\pi i$ និង $\int\limits_C(z-a)^n\,dz=0,$ (n ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប និង $n\neq-1$) ដែល C ជារង្វង់ $|z-a|=r$ ។

ដំណោះស្រាយ

$(a).(i)$ តាង $I=\int\limits_C\frac{dz}{z-a}$

(ii) C ជារង្វង់ $|z-a|=r$ ដែលមានផ្ចិត $(a,0)$ និងកាំ r (ដូចរូប៣.១៦)

(iii) ចំពោះ $z=a,|z-a|=|a-a|=0<r$ គេបាន $z=a$ ជាបន្ទាត់នៅខាងក្នុងរង្វង់ C ។

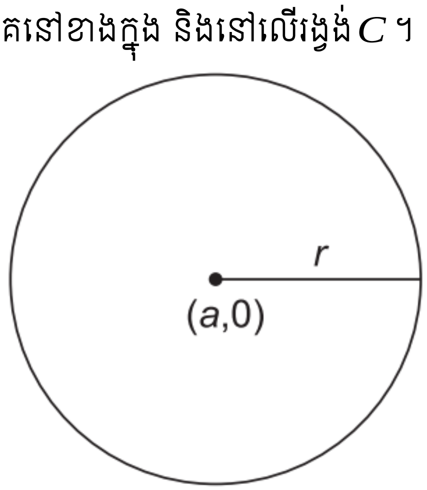
(iv) តាង $f(z)=1$ ដែល $f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគនៅខាងក្នុង និងនៅលើរង្វង់ C ។

(v) ដោយប្រើរូបមន្តអាំងតេក្រាលកូស៊ីគេបាន៖

$$\int\limits_C\frac{dz}{z-a}=2\pi i\,f(a)$$

$$\int\limits_C\frac{dz}{z-a}=2\pi i(1)$$

$$=2\pi i$$



រូបទី៣.១៦

$(b).(i)$ តាង $f(z)=(z-a)^n$

(ii) ដោយ $f(z)$ ជាពហុធាវាជាអនុគមន៍វិភាគនៅខាងក្នុង និងនៅលើរង្វង់ C ហើយ $f'(z)$ ជាប់នៅខាង

ក្នុងរង្វង់ C ។

(iii) ដោយប្រើរូបមន្តអាំងតេក្រាលកូស៊ីគេបាន៖

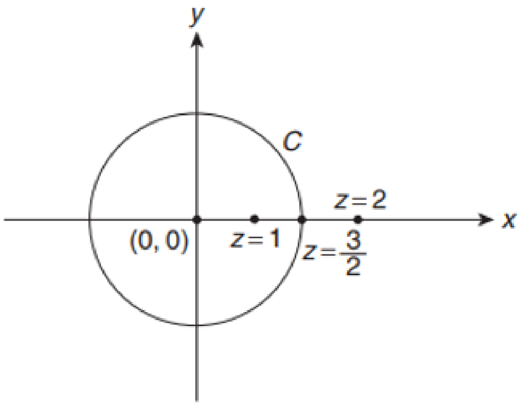
$$\int_C (z-a)^n \, dz = 0$$

ឧទាហរណ៍១៤៖ គណនា $\int_C \frac{\cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz$ ដែល C ជារង្វង់ $|z| = \frac{3}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

(i) តាង $I = \int_C \frac{\cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz$

(ii) C ជារង្វង់ $|z| = \frac{3}{2}$ ដែលមានផ្ចិតត្រង់ $(0,0)$ និងកាំ $\frac{3}{2}$ ដូចរូបទី៣.១៧



រូបទី៣.១៧

(iii) ចំពោះ $z = 1, |z| = |1| = 1 < \frac{3}{2}$ គេបានបន្ទាត់ $z = 1$ នៅខាងក្នុងរង្វង់ C ។

ចំពោះ $z = 2, |z| = |2| = 2 > \frac{3}{2}$ គេបានបន្ទាត់ $z = 2$ នៅខាងក្នុងរង្វង់ C ។

(iv) តាង $f(z) = \frac{\cos \pi z^2}{z-2}$

$f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគនៅខាងក្នុង និងលើរង្វង់ C

$$\int_C \frac{\cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz = \int_C \frac{\frac{\cos \pi z^2}{z-2}}{z-1} dz$$

(v) ដោយប្រើរូបមន្តកូស៊ីរីម៉ាន់គេបាន៖

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a)$$

(vi) $$\int_C \frac{\frac{\cos \pi z^2}{z-2}}{z-1} dz = 2\pi i \left[\frac{\cos \pi z^2}{z-2} \right]_{z=1}$$

$$\int_C \frac{\cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)}dz = 2\pi i\left[\frac{\cos \pi}{1-2}\right]$$
$$= 2\pi i(1)$$
$$= 2\pi i$$

ទ្រឹស្តីបទអាំងតេក្រាលកូស៊ី៖ បើអនុគមន៍ $f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគ និងមានដេរីវេ $f'(z)$ ជាប់គ្រប់ចំណុចនៅខាងក្នុង និងនៅលើខ្សែកោងបិទងាយ C នោះគេបាន $\int_C f(z)dz = 0$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាងដែលព័ទ្ធជុំវិញដោយខ្សែកោង C គឺ R និងតាង $f(z) = u + iv,\ z = x + iy,\ dz = dx + idy$

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u+iv)(dx+idy)$$
$$= \int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy)$$
$$= \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy + i\iint_C \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy \quad \text{(តាមទ្រឹស្តីបទគ្រីន)}$$

ជំនួស $-\frac{\partial v}{\partial x}$ ដោយ $\frac{\partial u}{\partial y}$ និង $\frac{\partial v}{\partial y}$ ដោយ $\frac{\partial u}{\partial x}$ យើងបាន៖

$$\int_C f(z)dz = \iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy + i\iint_C \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\right)dxdy = 0 + i0 = 0$$

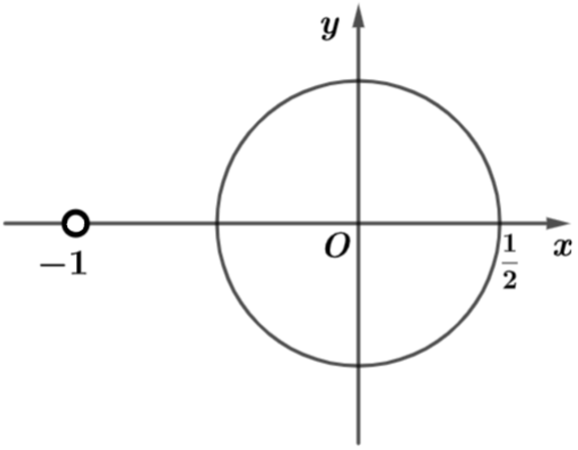
ដូចនេះ $\int_C f(z)dz = 0$ ។

ចំណាំ៖ បើមិនមានប៉ូលនៅក្នុង និងនៅលើគន្លងនោះតម្លៃអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍គឺស្មើសូន្យ។

ឧទាហរណ៍១៥៖ ចូររកអាំងតេក្រាល $\int_C \frac{3z^2 + 7z + 1}{z+1}dz$ ដែល C គឺជារង្វង់ $|z| = \frac{1}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ប៉ូលនៃអនុគមន៍យើងឱ្យភាគបែងវាស្មើសូន្យគឺ $z + 1 = 0 \Rightarrow z = -1$



រូបទី៣.១៨

ចំពោះរង្វង់ $|z|=\frac{1}{2}$ និងផ្ចិត $z=0$ ហើយកាំ $\frac{1}{2}$ មិនព័ទ្ធជុំវិញចំណុចទោលនៃអនុគមន៍ដែលគេឱ្យ។ នោះគេបាន $\int_C \frac{3z^2+7z+1}{z+1}dz$ (តាមទ្រឹស្តីបទអាំតេក្រាលកូស៊ី)

ឧទាហរណ៍១៦៖ គណនា $\oint_C \frac{dz}{z^2+9}$ ដែល C កំណត់ដូចខាងក្រោម៖

(i) $|z+3i|=2$ (ii) $|z|=5$

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $f(z)=\frac{1}{z^2+9}$

ប៉ូលនៃ $f(z)$ យើងគណនាដោយឱ្យភាគបែងស្មើសូន្យគេបាន៖

$(i) \therefore z^2+9=0 \Rightarrow z=\pm 3i$

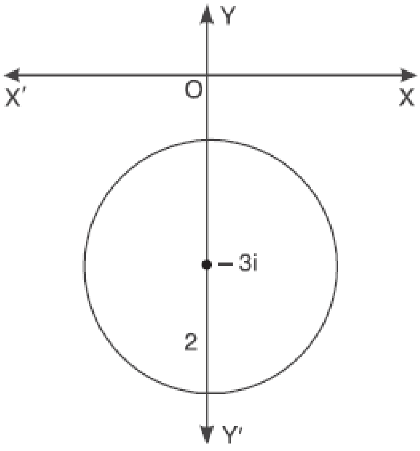
ចំពោះប៉ូលត្រង់ $z=-3i$ នៅក្នុងរង្វង់ C គឺ៖

$$\int_C f(z)dz=\int_C \frac{1}{z^2+9}dz=\int_C \frac{1}{(z+3i)(z-3i)}dz$$

$$=\int_{C_1} \frac{\frac{1}{z-3i}}{z+3i}dz+\int_{C_2} \frac{\frac{1}{z+3i}}{z-3i}dz$$

$$=2\pi i\left[\frac{1}{z-3i}\right]_{z=-3i}$$

$$=2\pi i\left[\frac{1}{-3i-3i}\right]=\frac{-2\pi i}{6i}=-\frac{\pi}{3}$$



រូបទី៣.១៩

ដូចនេះ $\oint_C \frac{dz}{z^2+9}=-\frac{\pi}{3}$ ។

(ii) ចំពោះប៉ូលទាំងពីរ $z=-3i$ និង $z=3i$ នៅផ្នែកខាងក្នុងរង្វង់នៃគន្លង

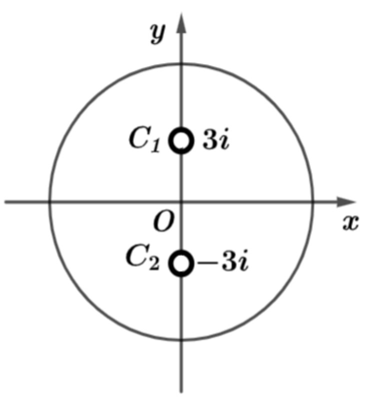
$$\int_C f(z)dz=\int_C \frac{1}{z^2+9}dz=\int_C \frac{1}{(z+3i)(z-3i)}dz$$

$$=\int_{C_1} \frac{\frac{1}{z-3i}}{z+3i}dz+\int_{C_2} \frac{\frac{1}{z+3i}}{z-3i}dz$$

$$=2\pi i\left[\frac{1}{z-3i}\right]_{z=-3i}+2\pi i\left[\frac{1}{z+3i}\right]_{z=3i}$$

$$=2\pi i\left[\frac{1}{-3i-3i}\right]+2\pi i\left[\frac{1}{3i+3i}\right]$$

$$=-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=0$$



រូបទី៣.២០

៣.៤. ទ្រឹស្តីបទ Cauchy-Goursat

បើ $f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគដែលមានដេរីវេ $f'(z)$ ជាប់គ្រប់ចំណុចនៅខាងក្នុង និងនៅលើខ្សែកោងបិទងាយ C នោះគេបាន $\oint_C f(z)dz = 0$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ដោយ $f(z) = u + iv$ ជាអនុគមន៍វិភាគ និងមានដេរីវេជាប់

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

តាមដេរីវេដោយផ្នែកយើងបាន៖

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (2)$$

នោះ $f(z)$ ជាប់នៅខាងក្នុង និងនៅលើខ្សែកោង C យើងបានតាមទ្រឹស្តីបទគ្រីនគេបាន៖

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C (u+iv)(dx+idy)$$

$$= \oint_C udx - vdy + i\oint_C vdx + u\,dy$$

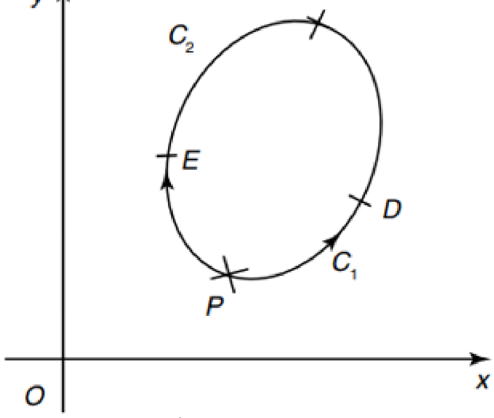
$$= \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy + i\iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy = 0$$

ដោយប្រើសមីការកូស៊ីរីម៉ាន់(1) និង(2)។

៣.៥. ទ្រឹស្តីបទអាំងតេក្រាលកូស៊ី-Goursat

បើ $f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគនៅក្នុងដែន D និងបើ P និង Q ជាចំណុចពីរនៅក្នុង D ហើយបើ C_1 និង C_2 ជាពីរគន្លងផ្សេងគ្នាភ្ជាប់ពី P និង Q នោះគេបាន $\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់



រូបទី៣.២១

គេឱ្យ $f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគនៅក្នុងដែន D ។ C_1 និង C_2 ជាគន្លងពីរភ្ជាប់គ្នារវាង P និង Q ។ ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទកូស៊ីគេបាន $\int_{PDQEP} f(z)dz = 0$

$$\Rightarrow \int_{Q} f(z)dz + \int_{QEP} f(z)dz = 0$$

$$\Rightarrow \int_{C_1} f(z)dz + \int_{-C_2} f(z)dz = 0$$

$$\Rightarrow \int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz = 0$$

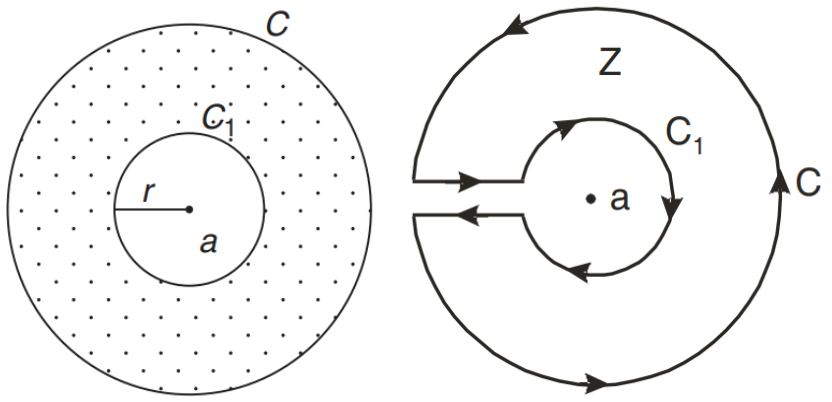
$$\Rightarrow \int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

ចំណាំ៖ ទ្រឹស្តីបទនិយាយថាប្រសិនបើ $f(z)$ គឺជាអនុគមន៍វិភាគនៅក្នុងដែន D នោះ $\int_C f(z)dz$ មិនអាស្រ័យលើគន្លងនៅពេលដែលចំនុចបញ្ចប់ដូចគ្នានោះទេ។

៣.៦. រូបមន្តអាំងតេក្រាលកូស៊ី (Cauchy Integral formula)

ទ្រឹស្តីបទ១៖ គេឱ្យ $f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគក្នុងដែននិងនៅក្នុងជាខ្សែកោងបិទក្នុង C និងបើ a ជាចំណុចទូទៅនៅផ្នែកក្នុង C នោះគេបាន $f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់



រូបទី៣.២២

ដោយ $f(z)$ ជាអនុគមន៍ $\frac{f(z)}{z-a}$ ជាអនុគមន៍វិភាគគ្រប់ចំណុចក្នុងគន្លង C ហើយលើកលែងតែត្រង់ $z = a$ ។ សង់គន្លងបិទ C_1 ដែលមានផ្ចិត a និងកាំ r ស្ថិតនៅខាងក្នុងគន្លង C ។

យើងបាន $\frac{f(z)}{z-a}$ ជាអនុគមន៍វិភាគនៅក្នុងតំបន់ចន្លោះ C និង C_1 ។

ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទអាំងតេក្រាលកូស៊ីនោះ យើងបាន៖

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz = \int_{C_1} \frac{f(z)}{z-a}dz = \int_{C_1} \frac{f(z)-f(a)+f(a)}{z-a}dz$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz = \int_{C_1} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz + f(z_0)\int_{C_1} \frac{dz}{z-a} \qquad (*)$$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃគន្លង C_1 ៖

$$z(t) = a + re^{it}, 0 \le t \le 2\pi$$

$$z'(t) = rie^{it}$$

$$\Rightarrow \int_{C_1} \frac{f(z)+f(a)}{z-a}dz = \int_0^{2\pi} \frac{f\left(a+re^{it}\right)-f(a)}{re^{it}} ire^{it}dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[f\left(a+re^{it}\right)-f(a)\right] idt = 0 ,(r \to 0)$$

$$\Rightarrow \int_{C_1} \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}dt}{re^{it}} = i\int_0^{2\pi} dt = i[t]_0^{2\pi} = 2\pi i, dz = z'(t)dt$$

ដូចនេះ(*) ទៅជា៖ $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 0 + 2\pi i f(z_0) \Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$ ។

• ពី $f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}$ យើងទាញបាន $\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i\, f(a)$ ។

ចំណាំ៖ បើចំណុច a ស្ថិតនៅខាងក្រៅគន្លងបិទ C (ក្រៅដែន)នោះយើងបាន $\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz = 0$ ។

ឧទាហរណ៍១៧៖ គណនា $\oint_C \frac{z^2-4z+4}{z+i}dz$ ដែល C ជារង្វង់ $|z| = 2$ ។

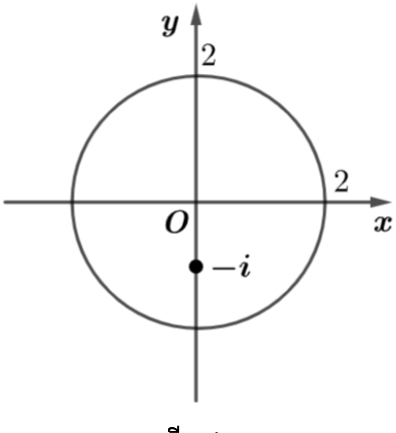
ដំណោះស្រាយ

យើងឃើញថា $z = -i$ ស្ថិតនៅខាងក្នុងរង្វង់ C ហើយ $f(z) = z^2 - 4z + 4$ ជាអនុគមន៍វិភាគនៅខាងក្នុង និងនៅលើគន្លង C នោះតាមរូបមន្តអាំងតេក្រាលកូស៊ី យើងបាន៖

$$\oint_C \frac{z^2-4z+4}{z+i}dz = 2\pi i f(-i)$$

$$= 2\pi i(3+4i)$$ ។

$$= \pi(-8+6i)$$



រូបទី៣.២៣

ឧទាហរណ៍១៨៖ គណនា $\int_C \frac{e^{-z}}{z+1}dz$ ដែល C ជារង្វង់ $|z| = 2$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយ e^{-z} ជាអនុគមន៍វិភាគ និង $z = -1$ នៅក្នុងគន្លង C នោះតាមរូបមន្តអាំងតេក្រាលកូស៊ី យើងបាន៖

$$\int_C \frac{e^{-z}}{z+1}dz = \int_C \frac{e^{-z}}{z-(-1)}dz = 2\pi i\left[e^{-z}\right]_{z=-1} = 2\pi ie$$

ដូចនេះ $\int_C \frac{e^{-z}}{z+1}dz = 2\pi ie$ ។

ឧទាហរណ៍១៩៖ គណនា $\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z(z-1)}dz$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $z(z-1)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=0 \\ z=1 \end{array}\right.$

យើងឃើញថា មានតែ $z=0$ ដែលស្ថិតនៅក្នុងដែន នោះតាមអាំងតេក្រាលកូស៊ី យើងបាន៖

$$\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z(z-1)}dz = \int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{e^z}{z-1}}{z}dz$$

$$= 2\pi i\left[\frac{e^z}{z-1}\right]_{z=0}$$

$$= 2\pi i(-1) = -2\pi i$$

ឧទាហរណ៍២០៖ ចូរគណនា

ក. $\int_{|z|=3} \frac{ze^z}{z-2i}dz$ ខ. $\int_{|z|=3} \frac{z^2e^{2z}}{z-4}dz$

ដំណោះស្រាយ

ក.ដោយ $z=2i$ នៅក្នុងរង្វង់ $|z|=3$ នោះតាមអាំងតេក្រាលកូស៊ី យើងបាន៖

$$\int_{|z|=3} \frac{ze^z}{z-2i}dz = 2\pi i\left[ze^z\right]_{z=2i}$$

$$= 2\pi i\left(2ie^{2i}\right)$$

$$= -4\pi e^{2i}$$

ខ.ដោយ $z=4$ នៅក្រៅរង្វង់ $|z|=3$ នោះតាមរូបមន្តកូស៊ីយើងបាន $\int_{|z|=3} \frac{ze^z}{z-4}dz = 0$ ។

ឧទាហរណ៍២១៖ គណនា $\int_{|z-2i|=4} \frac{z}{z^2+9}dz$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $z^2+9 = z^2-(3i)^2 = (z-3i)(z+3i)$

$|z-z_0| = r$ ជារង្វង់ដែលមានផ្ចិតត្រង់ z_0 និងកាំ r

$|z-2i| = 4$ ជារង្វង់មានផ្ចិត $2i$ និងកាំ 4

យើងមាន $z^2+9=0 \Rightarrow z^2=-9 \Rightarrow z=\left[\begin{array}{l} z=3i \\ z=-3i \end{array}\right.$

យើងឃើញថា មានតែ $z=3i$ ដែលឋិតក្នុងរង្វង់ $\{z:|z-2i|=4\}$ នោះតាមអាំងតេក្រាលកូស៊ី យើងបាន៖

$$\int_{|z-2i|=4} \frac{z}{z^2+9}dz = \int_{|z-2i|=4} \frac{z}{(z-3i)(z+3i)}dz$$

$$= \int_{|z-2i|=4} \frac{\frac{z}{z+3i}}{z-3i}dz$$

$$= 2\pi i\left[\frac{z}{z+3i}\right]_{z=3i}$$

$$= 2\pi i\left(\frac{3i}{6i}\right) = \pi i$$

ដូចនេះ $\int_{|z-2i|=4} \frac{z}{z^2+9}dz = \pi i$ ។

ឧទាហរណ៍២២៖ គណនា $\int_{|z|=3} \frac{\cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-1)}dz$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $(z-1)(z-2)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z=2 \end{array}\right.$

យើងឃើញថា $z=1$ និង $z=2$ សុទ្ធតែនៅក្នុងរង្វង់ $\{z:|z|=3\}$ នោះតាមអាំងតេក្រាលកូស៊ី យើងបាន៖

$$\int_{|z|=3} \frac{\cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-1)}dz = \int_{|z|=3} \frac{\frac{\cos(\pi z^2)}{z-2}}{z-1}dz + \int_{|z|=3} \frac{\frac{\cos(\pi z^2)}{z-1}}{z-2}dz$$

$$= 2i\pi\left[\frac{\cos(\pi z^2)}{z-2}\right]_{z=1} + 2i\pi\left[\frac{\cos(\pi z^2)}{z-1}\right]_{z=2}$$

$$= 2i\pi(-\cos\pi) + 2\pi i(\cos 4\pi)$$

$$= 2\pi i + 2\pi i = 4\pi i$$

ដូចនេះ $\int_{|z|=3} \frac{\cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-1)}dz = 4\pi i$ ។

អនុវត្តន៍៖ គណនា $\int_{|2z-4i|=1} \left(\frac{3}{z+2} - \frac{1}{z-2i}\right)dz$ ។

៣.៧.ដេរីវេនៃអនុគមន៍វិភាគ(រូបមន្តអាំងតេក្រាលសម្រាប់ដេរីវេអនុគមន៍វិភាគ)

បើ $f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគនៅក្នុងដែនកំណត់ D ហើយ C ជាខ្សែកោងបិទនៅក្នុងដែន D និង z_0 ជាចំណុចនៅខាងក្នុងខ្សែកោង C នោះគេបាន៖

$$\forall z \in C,\ f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{C^+}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, n = 1,2,3,......$$

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងមាន៖ $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz \quad (1)$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃ (1) ធៀបនឹង z_0 ៖ $\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\frac{d}{dz_0}\left(\frac{1}{z-z_0}\right)dz$$

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint f(z)\cdot\frac{1}{(z-z_0)^2}dz$$

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz \qquad (2)$$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃ (2) ធៀបនឹង z_0 ៖

$$f''(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\cdot\frac{d}{dz_0}\left[\frac{1}{(z-z_0)^2}\right]dz$$

$$f''(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\cdot\frac{2}{(z-z_0)^3}dz$$

$$f''(z_0) = \frac{1\cdot 2}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz$$

$$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz \qquad (3)$$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃ (3) ធៀបនឹង z_0 ៖

$$f'''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i}\oint_C f(z)\cdot\frac{d}{dz_0}\left[\frac{1}{(z-z_0)^3}\right]dz = \frac{2!}{2\pi i}\oint_C f(z)\cdot\frac{3}{(z-z_0)4}dz$$

$$f'''(z_0) = \frac{2!\cdot 3}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^4}dz = \frac{3!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_o)^4}dz$$

តាមលំនាំគំរូនេះ យើងទាញបាន $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$ ។

ចំណាំ៖ ពីរូបមន្ត $f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$ ទាញបាន

$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)$ ។

ឧទាហរណ៍២៣៖ ចូរគណនា $\int_C \frac{e^{3z}}{(z-\log 2)^4}dz$ ដែល C ជាការេមានកំពូល $\pm1,\pm i$ ។

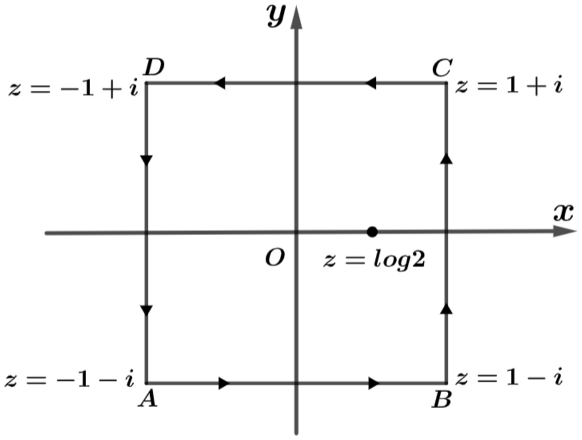
ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\int_C \frac{e^{3z}}{(z-\log 2)^4}dz$

ប៉ូលគឺត្រូវបានរកដោយការដាក់ភាគបែងស្មើសូន្យ

$$(z-\log 2)^4=0 \Rightarrow z=\log 2$$

អាំងតេក្រាលមានប៉ូលលំដាប់4



រូបទី៣.២៤

$$\int_C \frac{e^{3z}}{(z-\log 2)^4}dz=\frac{2\pi i}{3!}\frac{d^3}{dz^3}\left(e^{3z}\right)_{z=\log 2}$$

$$=\frac{2\pi i}{3!}3\cdot 3\cdot 3\left(e^{3z}\right)_{z=\log 2}$$

$$=9\pi i e^{\log 2^3}$$

$$=9\pi i(2)^3=72\pi i$$

ឧទាហរណ៍២៤៖ ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$a).\oint_C \frac{\sin\pi z^2+\cos\pi z^2}{(z-1)(z-2)}dz$ $\qquad$ $b).\oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}dz$ ដែល C ជារង្វង់ហើយ $|z|=3$ ។

ដំណោះស្រាយ

$$a).\oint_C \frac{\sin\pi z^2+\cos\pi z^2}{(z-1)(z-2)}dz=\oint_C \frac{\sin\pi z^2+\cos\pi z^2}{z-2}dz-\oint_C \frac{\sin\pi z^2+\cos\pi z^2}{z-1}dz$$

តាមរូបមន្តអាំងតេក្រាលកូសុីគេបាន $z_0=2, z_0=1$

+ ចំពោះ $z_0=2 \Rightarrow \oint_C \frac{\sin\pi z^2+\cos\pi z^2}{z-2}dz=2\pi i\left[\sin\pi 2^2+\cos\pi 2^2\right]=2\pi i$

+ ចំពោះ $z=1 \Rightarrow \oint_C \frac{\sin\pi z^2+\cos\pi z^2}{z-1}dz=2\pi i\left[\sin\pi 1^2+\cos\pi 1^2\right]=-2\pi i$

គេបាន $\oint_C \frac{\sin\pi z^2+\cos\pi z^2}{(z-2)(z-1)}dz=2\pi i+2\pi i=4\pi i$

$b).\oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}dz$ ដែល C ជារង្វង់ហើយ $|z|=3$ ។

ឧទាហរណ៍២៥៖ គណនា $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^2-1}{(z-2)^2}dz$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយ $z=2$ នៅក្នុងរង្វង់ $\{z:|z|=3\}$ នោះយើងបាន៖

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^2-1}{(z-2)^2}dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(2) \ , f(z) = z^2-1$$

$$f'(z) = 2z$$

$$f'(2) = 2\cdot 2 = 4$$

$$\Rightarrow \oint\limits_{|z|=3} \frac{z^2-1}{(z-2)^2}dz = \frac{2\pi i}{1!}\times 4 = 8\pi i$$

ដូចនេះ $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^2-1}{(z-2)^2}dz = 8\pi i$ ។

ឧទាហរណ៍២៦៖ គណនា $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}dz$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយ $z=0$ នៅក្នុងរង្វង់ $|z|=1$ នោះយើងបាន៖

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(0), f(z) = \cos z$$

$$f'(z) = -\sin z$$

$$f''(z) = -\cos z \Rightarrow f''(0) = -\cos 0 = -1$$

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}(-1) = -\pi i$$

អនុវត្តន៍៖ ១. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{ze^z}{(z-1)^3}dz$ ខ. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{z^3(z-4)}dz$

គ. $\oint\limits_{|z-1|=3} \frac{e^z}{(z+1)^2}dz$ ឃ. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\sin^2 z}{\left(z-\frac{\pi}{6}\right)^3}dz$

ង. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z+1}{z^3-2z^2}dz$ ច. $\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{ze^z}{(z-1)^3}dz$

២. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

$(1).I = \oint\limits_{C^+} \frac{\sin z}{z^2}dz, C$ ជារង្វង់ឯកតា

$(2).I=\oint\limits_{C^+}\frac{dz}{z\left(z^2+1\right)^2}, C$ ជាចតុកោណកែងកំពូល $2\pm\frac{i}{2}, -2\pm\frac{i}{2}$

$(3).I=\oint\limits_{C^+}\frac{e^{2z}}{z^4}dz$

$(4).I=\oint\limits_{C}\frac{4e^{z^2}}{\left(z-i\right)^3}dz$

$(5).I=\oint\limits_{C^+}\frac{2\sin\left(z^3\right)}{\left(z-1\right)^4}dz$

លំហាត់អាំងតេក្រាលអនុគមន៍អថេរកុំផ្លិច

៤.១.អាំងតេក្រាលខ្សែកោង

1.គណនា $I=\int\limits_{C^+} y^2dx-x^2dy$ កាលណា៖

ក.C ជារង្វង់ $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$, $0\le t\le 2\pi$

ខ.C ជាអង្កត់ AB ភ្ជាប់ $A(1,0)$ ទៅ $B(0,1)$ ។

2.គណនា $I=\int\limits_{C}\left(xy^2+y\right)dx+x^2dy$ ដែលគន្លង C ផ្គុំឡើងដោយអង្កត់ AB ស្របអ័ក្ស Ox និងអង្កត់ BC ស្របអ័ក្ស Oy ចំពោះ $A(1,1)$, $B(2,1)$ និង $C(2,2)$ ។

3.គណនា $I=\int\limits_{C^+} y^2dx+x^2dy$ ដែល C កន្លះអេលីបមានទិសដៅវិជ្ជមាន $x^2+4y^2-4=0$, $y\ge 0$ ។

4.គណនា $I=\int\limits_{C^+}(x+y)dx+(x-y)dy$ កាលណា៖

ក.C ជាកន្លះរង្វង់មានទិសដៅវិជ្ជមានកំណត់ដោយ $x=\cos\theta,\ y=\sin\theta,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ ។

ខ.C ជាអង្កត់ AB ភ្ជាប់ $A(1,0)$ ទៅ $B(0,1)$ ។

5.គណនា $I=\int\limits_{C^+} xydx+(x+y)dy$ ក្នុងពីរករណីដូចខាងក្រោម៖

ក.C ជារង្វង់មានទិសដៅវិជ្ជមាន កំណត់ដោយ $x=\cos\theta,\ y=\sin\theta,\ 0\le\theta\le 2\pi$

ខ.C ជាធ្នូ AB នៃប៉ារ៉ាបូលមានសមីការ $y=x^2$ ដែល $A(-1,1),B(2,4)$ ។

6.គណនា $I=\int\limits_{C} x^2ydy-y^2xdx$ ដែល C កំណត់ដោយ $x=\sqrt{\cos t}$, $y=\sqrt{\sin t}$ ចំពោះ $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ ។

7.គណនា $I=\int\limits_{\gamma^+}\left(x^2+y^2\right)dx+\left(x^2-y^2\right)dy$ ដែល γ^+ ជាបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ABC មានកំពូល $A(0,0),B(1,0),\ C(0,1)$ ។

8.គណនា $I=\int\limits_{\gamma^+}\left(x^2+y\right)dx+\left(2x+y^2\right)dy$ ដែល γ^+ ជាបរិមាត្រនៃការេ $ABCD$ មានកំពូល ៖ $A(1,1)$, $B(1,2)$, $C(2,2)$, $D(2,1)$ ។

9.គណនា $I=\int\limits_{C} -ydx+xdy$ ដែល C ជាកន្លះរង្វង់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $x^2+y^2=a^2$ ។

10.គណនា $I=\int\limits_{C}\left(x-y^2\right)dx+2xydy$ ដែល C ជាបរិមាត្រនៃត្រីកោណដែលមានកំពូល ៖ $M(0,0)$, $N(0,1)$, $P(1,1)$ ។

11.គណនា $\int_{(0,3)}^{(2,4)}\left(2y+x^2\right)dx+(3x-y)dy$ តាមគន្លង៖

ក. ប៉ារ៉ាបូល $x=2t,\ y=t^2+3$

ខ. អង្កត់ភ្ជាប់ពី$(0,3)$ទៅ$(2,3)$រួចពី$(2,3)$ទៅ$(2,4)$

គ. អង្កត់ភ្ជាប់ពី$(0,3)$ទៅ$(2,4)$ ។

12.គណនា $\int_{(0,1)}^{(2,5)}(3x+y)dx+(2y-x)dy$ តាមគន្លង៖

ក. ខ្សែកោង $y=x^2+1$

ខ. អង្កត់ភ្ជាប់ចំណុច$(0,1)$ និង$(2,5)$

គ. អង្កត់ភ្ជាប់ពី$(0,1)$ទៅ$(0,5)$រួចពី$(0,5)$ទៅ$(2,5)$ ។

13. គណនា $\int_C (x+y)dx+x^2ydy$ ក្នុងករណីខាងក្រោម៖

ក.C ជាធ្នូMNនៃប៉ារ៉ាបូលមានសមីការ$y=x^2$ដែល$M(0,0)$ និង $N(3,9)$

ខ.C ជាអង្កត់MNភ្ជាប់$M(0,0)$ ទៅ$N(3,9)$។

14. គណនា $\oint(x+2y)dx+(y-2x)dy$ ដែលC ជាអេលីបកំណត់ដោយ $x=4\cos\theta$,

$y=3\sin\theta$,$0\le\theta\le 2\theta$ ក្នុងករណីដែល៖

ក.គន្លងC មានទិសដៅច្រាសនឹងទ្រនិចនាឡិកា

ខ.គន្លងC មានទិសដៅស្របនឹងទ្រនិចនាឡិកា។

15. គណនា $\int_{1-i}^{2+i}(2x+2iy+3)dz$ តាមគន្លង៖

ក. $x=t+1$, $y=2t^2-1$

ខ.អង្កត់ភ្ជាប់ចំណុច $z_1=1-i$ និង $z_2=2+i$ ។

16. គណនា $\int_C\left(x^2-iy^2\right)dz$ ក្នុងករណីខាងក្រោម៖

ក.គន្លងC ជាធ្នូ AB នៃប៉ារ៉ាបូលមានសមីការ $y=2x^2$ ដែល $A(1,1)$, $B(2,8)$

ខ.គន្លងC ជាអង្កត់ AC ដែលភ្ជាប់ $A(1,1)$ ទៅ $B(1,8)$ រួចពី $B(1,8)$ ទៅ $C(2,8)$

គ.គន្លងC ជាអង្កត់ AC ភ្ជាប់ $A(1,1)$ ទៅ $C(2,8)$ ។

17. គណនា $\int_C\bar{z}dz$ ពី $z=0$ ទៅ $z=4+2i$ តាមគន្លងC កំណត់ដោយ៖

ក. $z=t^2+it$

ខ.បន្ទាត់ពី $z=0$ ទៅ $z=2i$ រួចពី $z=2i$ ទៅ $z=4+2i$ ។

18. គណនា $\oint_C|z|^2dz$ ដែលគន្លងC ជាការេមានកំពូល$(0,0)$,$(1,0)$,$(1,1)$,$(0,1)$ ។

19. គណនា $\int_C\left(z^2+3z\right)dz$ ក្នុងករណីខាងក្រោម៖

ក.គន្លងC ជារង្វង់$|z|=2$ ពីចំណុច $A(2,0)$ ទៅ $B(0,2)$ ទិសដៅច្រាសនឹងទ្រនិចនាឡិកា

ខ.គន្លងC ជាអង្កត់ AB ភ្ជាប់ $A(2,0)$ ទៅ $B(0,2)$

គ.គន្លងC ជាអង្កត់ភ្ជាប់ពី $A(2,0)$ ទៅ $C(2,2)$ រួចពី $C(2,2)$ ទៅ $B(0,2)$ ។

20.គណនា $\int_C 2i\bar{z}\,dz$ ដែល C ជារង្វង់ $|z-i|=2$ មានទិសដៅច្រាសនឹងទ្រនិចនាឡិកា ។

21.គណនា $\oint_C \left(\frac{1}{(z+i)^3}-\frac{5}{z+i}+8\right)dz$ ដែល C ជារង្វង់ $|z+i|=1,\ 0\le t\le 2\pi$ ។

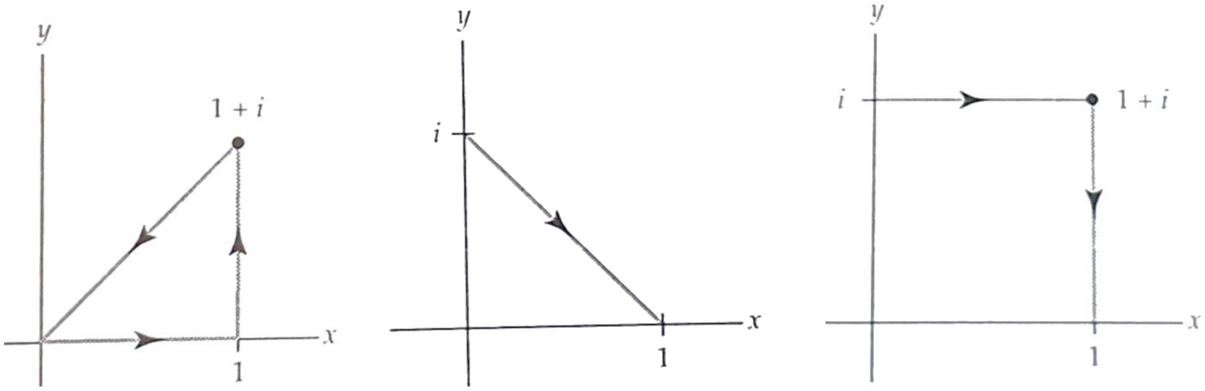
22.គណនា $\int \frac{z+1}{z}dz$ ដែល C ជាកន្លះរង្វង់ $|z|=1$ ពី $z=-i$ ទៅ $z=i$ ។

23.គណនា $\int_C dz$ ដែល C ជាកន្លះអេលីប $\frac{1}{36}x^2+\frac{1}{4}y^2=1,\ x\le 0$ ពី $z=2i$ ទៅ $z=-2i$ ។

24.គណនា $\oint_C ze^z dz$ ដែល C ជាការេដែលមានកំពូល $z=0,\ z=1,\ z=1+i$ និង $z=i$ ។

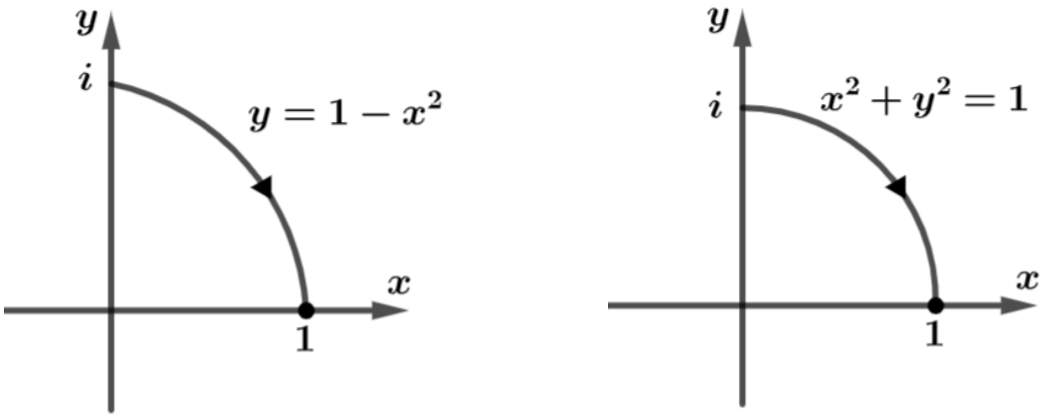
25.គេឱ្យគន្លង C នៃអាំងតេក្រាលដូចខាងក្រោមចូរគណនាអាំងតេក្រាល៖

ក.$\oint_C x\,dz$ ខ.$\oint_C (2z-1)\,dz$ គ.$\oint_C z^2 dz$ ឃ.$\oint_C (\bar{z})^2 dz$



(a) (b) (c)

26. ចូរគណនា $\int_C (z^2-z+2)\,dz$ ពី $z=i$ ទៅ $z=1$ តាមគន្លង C ដូចរូបខាងក្រោម៖

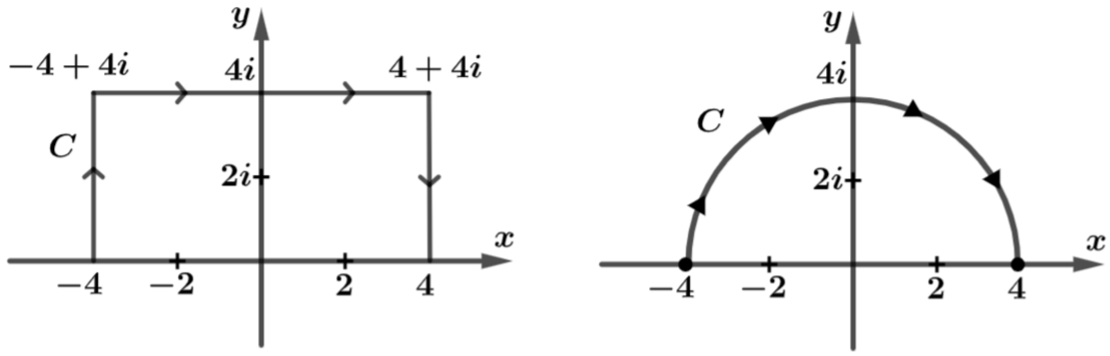


(a) (b)

27.គណនា $\int_C x\,dz$ ពី -4 ទៅ 4 តាមគន្លងដូចបង្ហាញក្នុងរូប (a) និង (b) ខាងក្រោម៖

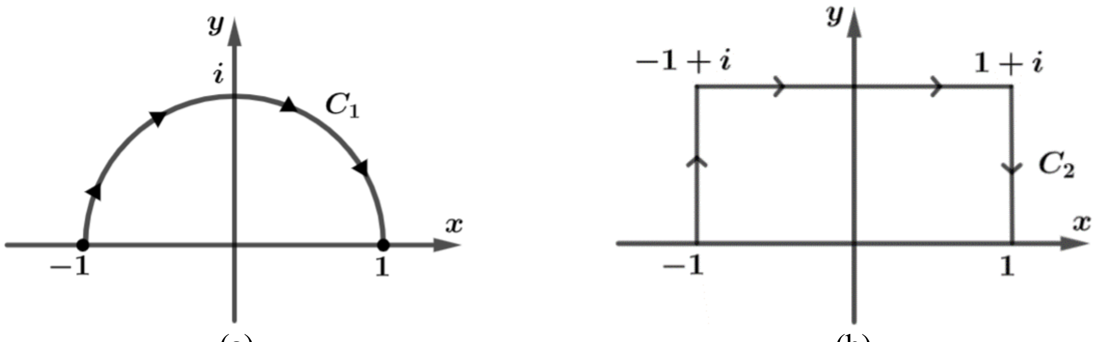
ក.គន្លង C ជាពហុកោណដែលមានកំពូល $-4,\ -4+4i,\ 4+4i$ និង 4 ។

ខ.គន្លង C គឺជាកន្លះរង្វង់ $|z|=4$ ត្រូវនឹង $y\ge 0$ ។



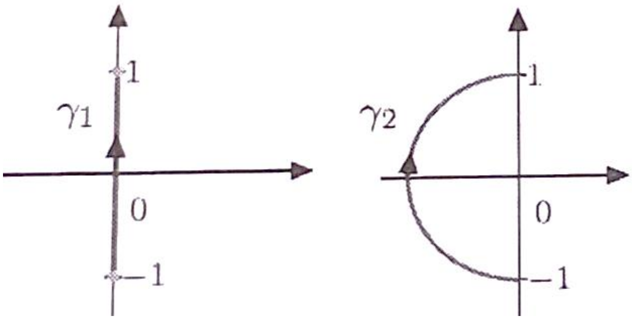
(a) (b)

28.គណនា $\int_C \bar{z}\,dz$ ពី -1 ទៅ 1 តាមគន្លងដូចបង្ហាញក្នុងខាងក្រោម៖



(a) (b)

29.គណនា $\int_\gamma \bar{z}\,dz$ ពី -1 ទៅ 1 តាមគន្លងដូចបង្ហាញក្នុងខាងក្រោម៖



(a) (b)

30.គណនា $\int_C \left(x^2 - iy^2\right)dz$ ដែល C ជាកន្លះរង្វង់ផ្នែកខាងលើ $C: z(t) = \cos t + i\sin t$ ចំពោះ $0 \le t \le \pi$ ។

៤.២. រូបមន្តអាំងតេក្រាលកូស៊ី

31.គណនា $I = \oint_C \left(z + \frac{1}{z}\right)dz$; $|z| = 2$

32.គណនា $I = \oint_C \frac{z^2 \sin \pi z}{z - \frac{1}{2}}dz$; $|z| = 1$

33. គណនា $I = \oint_C \frac{3z^2 + 7z + 1}{z + 1}dz$ ក្នុងករណីខាងក្រោម៖

ក. គន្លង C ជារង្វង់ $|z+1| = 1$

ខ. គន្លង C ជារង្វង់ $|z+i|=1$

គ. គន្លង C ជាអេលីប $x^2+2y^2=8$

34. គណនា $I=\oint\limits_C \frac{\cos z}{z}dz$ ដែល C ជាអេលីប $9x^2+4x^2=1$ ។

35. គណនា $I=\oint\limits_C \frac{z}{z^2-\pi^2}dz$; $|z=3|$

36. គណនា $I=\oint\limits_C \frac{2z+1}{z^2+z}dz$ ក្នុងករណីខាងក្រោម៖

ក. $|z|=\frac{1}{2}$ ខ. $|z|=2$ គ. $|z-3i|=1$

37. គណនា $I=\oint\limits_C \frac{2z}{z^2+3}dz$ ក្នុងករណីខាងក្រោម៖

ក. $|z|=1$ ខ. $|z-2i|=1$ គ. $|z|=4$

38. គណនា $I=\int_{|z+2|=\frac{3}{2}} \frac{z^2+1}{z(z+1)}dz$

39. ដោយប្រើរូបមន្តអាំងតេក្រាល Cauchy ចូរគណនា៖

ក. $\int\limits_{|z-2|=1} \frac{e^z}{z^2-6z}dz$ ខ. $\int_{|z-2|=3} \frac{e^z}{z^2-6z}dz$ គ. $\int_{|z-2|=5} \frac{e^z}{z^2-6z}dz$

40. ចូរគណនា $I=\oint\limits_C \frac{-3z+2}{z^2-8z+12}dz$ ក្នុងករណីខាងក្រោម៖

ក. $|z-5|=2$ ខ. $|z|=9$

41. ចូរគណនា $I=\oint\limits_C \left(\frac{3}{z+2}-\frac{1}{z-2i}\right)dz$ ក្នុងករណីខាងក្រោម៖

ក. $|z|=5$ ខ. $|z-2i|=\frac{1}{2}$

42. គណនា $I=\int_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{z-1}{z(z-i)(z-3i)}dz$

43. គណនា $I=\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1}dz$

44. គណនា $I=\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2-4z+4}{z+i}dz$

45. គណនា $I=\oint\limits_C \frac{z^2}{z^2+1}dz$ ក្នុងករណីខាងក្រោម៖

ក. $|z-1|=1$ ខ. $|z-i|=1$ គ. $|z-1|=2$

46.ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $I=\int_{|z|=4}\frac{dz}{z^2+1}$ ខ. $I=\int_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{e^z}{z(z-1)}dz$ គ. $\int_{|z|=2a}\frac{e^z}{z^2+a^2}dz$

ឃ. $I=\int_{|z|=2}\frac{\cos(\pi z)}{(z+1)(z-3)}dz$ ង. $\int_{|z|=\frac{1}{2}}\left(e^z-\frac{4}{3}\pi z^4\right)dz$

47.គណនាអាំងតេក្រាល $I=\oint_C\frac{z-1}{2z^2+3z-2}dz$ ដែល C ជាបរិមាត្រការេដែលមានកំពូល $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$ ។

48.គណនាតម្លៃនៃអាំងតេក្រាល $\oint_C\frac{z+4}{z^2+2z+5}dz$ ក្នុងករណីខាងក្រោម៖

ក.គន្លង C ជារង្វង់ $|z|=1$

ខ.គន្លង C ជារង្វង់ $|z+1-i|=2$

គ.គន្លង C ជារង្វង់ $|z+1+i|=2$

49.គណនា $\oint_C\frac{e^{3z}}{z-\pi i}dz$ បើគន្លង C ជា៖

ក.រង្វង់ $|z-1|=4$

ខ.អេលីប $|z-2|+|z+2|=6$

50.គណនា $I=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{\cos\pi z}{z^2-1}dz$ ជុំវិញចតុកោណកែងដែលមានកំពូល៖

ក. $2\pm i$, $-2\pm i$

ខ. $-i$, $2-i$, $2+i$, i

51.គណនា $I=\int_{|z|=3}\frac{\sin\pi z^2+\cos\pi z^2}{(z-1)(z-2)}dz$ ។

52.គណនា $I=\oint_C\frac{z^2+1}{z^2-1}dz$ ក្នុងករណីគន្លង C ដូចខាងក្រោម៖

ក. $|z|=\frac{3}{2}$ ខ. $|z-1|=1$ គ. $|z|=\frac{1}{2}$

53.គណនា $I=\int_{|z|=2}\frac{3z^2+z+1}{(z^2-1)(z+3)}dz$ ។

54.បង្ហាញថា $\oint_{|z|=3}\frac{e^{zt}}{z^2+1}dz=2\pi i\sin t$ ចំពោះ $t>0$ ។

55.ដោយប្រើរូបមន្តអាំងតេក្រាល Cauchy ចូរគណនាតម្លៃអាំងតេក្រាល៖

ក. $I=\oint_z\frac{e^z dz}{z-2}$ ខ. $J=\oint_C\frac{e^z dz}{2z-1}$ ដែល C ជារង្វង់ត្រីកោណមាត្រ ។

56.គណនា $I=\int_C \frac{dz}{\left(z^2+1\right)\left(z+4\right)}$ ដែល C ជាបរិមាត្រចតុកោណកែងកំណត់ដោយ

$x=-2,\ x=2,\ y=0,\ y=2$ ។

57. ដោយប្រើរូបមន្តអាំងតេក្រាល Cauchy ចូរគណនា៖

ក. $\int\limits_{|z|=4} \frac{ze^{iz}}{\left(z-\pi\right)^2}dz$ ខ. $\int\limits_{|z|=1} \frac{e^{z^2}}{\left(z-2i\right)^2}dz$ គ. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\sin^6 z}{\left(z-\frac{\pi}{6}\right)^3}dz$

ឃ. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^{iz}}{z^3}dz$ ង. $\int_{|z+i|=1} \frac{10}{\left(z+i\right)^4}dz$

58.ដោយប្រើរូបមន្តអាំងតេក្រាល Cauchy ចូរគណនា៖

ក. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{z^3+2iz^2}dz$ ខ. $\oint\limits_{|z|=2} \left(z+\frac{1}{z^2}\right)dz$ គ. $\int_{|z-1|=2} \frac{ze^z}{\left(z-1\right)^3}dz$

ឃ. $\int_{|z|=1} \frac{1}{z^3\left(z-4\right)}dz$ ង. $\int_{|z|=4} \frac{e^z}{z^2\left(z^2+\pi^2\right)}dz$

59.ដោយប្រើរូបមន្តអាំងតេក្រាល Cauchy ចូរគណនា៖

ក. $\oint\limits_C \frac{\cos z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}dz$ ដែល C ជារង្វង់មានសមីការ $x^2+y^2-2x=0$

ខ. $\int_{|z|=3} \frac{z^2+4}{z^3+2z^2+2z}dz$

គ. $\oint\limits_{|z-1|=3} \frac{e^z}{\left(z+1\right)^2}dz$

ឃ. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\tan z}{z^2}dz$

ង. $\oint\limits_C \frac{z+1}{z^3-2z^2}dz$ ដែលគន្លង C ជា៖

(a). រង្វង់ $|z|=1$ (b). រង្វង់ $|z-2-i|=2$ (c). រង្វង់ $|z-1-2i|=2$

60.ដោយប្រើរូបមន្តអាំងតេក្រាល Cauchy ចូរគណនា៖

ក.គណនា $\int_{|z-3|=2} \frac{\ln z}{\left(z-2\right)^2}dz$

ខ. $\oint\limits_C \frac{z^2-1}{\left(z-2\right)^2}dz$ ដែលគន្លង C ជា៖ (a).រង្វង់ $|z|=1$ (b).រង្វង់ $|z|=3$

គ.គណនា $\int_{|z|=10} \frac{z^2-2z}{\left(z+1\right)^2\left(z^2+4\right)}dz$

ឃ. $\int_{|z+i|=1} \frac{e^{iz}}{\left(z^2+1\right)^2} dz$

ង. $\int_{|z|=3} \frac{e^{z}}{\left(z-1\right)^2\left(z^2-2z\right)} dz$

61.ដោយប្រើរូបមន្តអាំងតេក្រាល Cauchy ចូរគណនា៖

ក. $\int_{|z|=3} \frac{e^{-z}}{\left(z+2\right)^5} dz$ ខ. $\int_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{\left(z+1\right)^4} dz$ គ. $\int_{|z|=2} \frac{e^{z}}{z^2\left(z+1\right)^3} dz$

ឃ. $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z\left(z-1\right)^3}$ ង. $\int_{|z|=1} \frac{\sin \pi z}{\left(z^2-1\right)^2} dz$

62.ដោយប្រើរូបមន្តអាំងតេក្រាល Cauchy ចូរគណនា៖

ក. $\int\limits_{C^+} \frac{ze^z}{z^2-1} dz$ ដែល C ជារង្វង់ $|z|=2$

ខ. $\int\limits_{C^+} \frac{e^z}{\left(z-1\right)^3} dz$ ដែល C កំណត់ដោយ: $\bar{z}\cdot z-\left(z+\bar{z}\right)=0$

គ. C គឺជាបរិមាត្រនៃការេដែលកំណត់ដោយ: $x=2,\ x=-2,\ y=2,\ y=-2$ ។

ចូរគណនា $\int\limits_{C^+} \frac{\tan\frac{z}{2}}{\left(z-a\right)^2} dz$, $\left(|a|<2\right)$

ឃ.គណនា $\int\limits_{C^+} \frac{e^z dz}{z\left(z-1\right)^2\left(z-3\right)}$ ដែល C ជារង្វង់ $|z|=2$ ។

មេរៀនទី៤៖ ស៊េរីនៃអនុគមន៍វិភាគ និងឯកធាតុ

Series function analytic and singularity

៤.១. ស្វ៊ីត និងស៊េរីអនុគមន៍វិភាគ

៤.១.១. ស្វ៊ីតចំនួនកុំផ្លិច

និយមន័យ៖ គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $(z)_{n\in\mathbb{N}}=\{z_0,z_1,\ldots\}$ កំណត់ដោយ $\forall n\in\mathbb{N}, Z_n=x_n+iy_n$ $,(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\,\&\,(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតចំនួនកុំផ្លិច។

(i) គេថា $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតរួម ហើយមានលីមីតស្មើ $Z=x+iy$ ដែលគេសរសេរ

$\lim\limits_{x\to\infty} z_n=z$ កាលណា $\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N}_1,\forall n\ge n_0,|Z_n-Z|<\varepsilon$ តែ

$|Z_n-Z|=|x_n+iy_n-x-iy|=|(x_n-xx)+i(y_n-y)|$ គេបានវិសមភាព

$$\begin{cases}|x_n-x|,|y_n-y|\le|Z_n-Z|\\|Z_n-Z|\le|x_n-x|+|y_n-y|\end{cases}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}Z_n=Z=x+iy\Leftrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x\\\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=y\end{cases}$ ។

ឧទាហរណ៍១៖ $(1).z_n=\dfrac{1}{n^2+1}+i,n\in\mathbb{N}$

គេបាន $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2+1}=0\\y_n=1\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}Z_n=i$

$(2).z_n=\dfrac{n}{n+1}+\dfrac{\sin n}{n+1}i,n\in\mathbb{N}$

គេបាន $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}=1\\\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin n}{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin n}{n\left(n+\frac{1}{n}\right)}=0\end{cases}$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}Z_n=1$

$(3).Z_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n+in\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right),n\in\mathbb{N}^*$

គេបាន $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e\\\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\ln 2\end{cases}$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}z_n=e+i\ln 2$

$(4).z_n=e^n+\dfrac{i}{n+1}$

គេបាន $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = +\infty$ រីក

$(5).z_n = \dfrac{\pi}{n} + i\sin n\ ,n \ge 1$

គេបាន $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi}{n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sin n = +\infty \end{cases}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = +\infty$ រីក

$(6).z_n = z^n\ ,n \in \mathbb{N}$

មានបីករណី៖

$(+).|z| > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |z|^n = +\infty$

$(+).\ |z| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |z|^n = 0$

$(+).|z| = 1 \Rightarrow z = e^{i\theta} \Rightarrow z^n = e^{in\theta}, \theta = 2k\pi, (k \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |z|^n = \lim\limits_{n\to+\infty} |e|^{in\theta} = 1$

បើ $\theta \ne 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ នោះ $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

គេបាន $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \cos\theta \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sin\theta \end{cases}$ មិនកំណត់

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n$ រីក។

$(7).z_n = \dfrac{n^2 - 2n + 3}{3n^2 - 4} + \dfrac{2n-1}{2n+1} i$

គេបាន $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2 - 2n + 3}{3n^2 - 4} = \dfrac{1}{3} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n-1}{2n+1} = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \dfrac{1}{3} + i$

$(8).z_n = \dfrac{3}{n} - \left(\dfrac{n^2 - 3}{n}\right) i$

គេបាន $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n^2-3}{n}\right) = +\infty \end{cases}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = -\infty$ រីក

$(9).z_n=\sinh\left(\frac{n\pi}{4}i\right)=\frac{e^{\frac{n\pi}{4}}-e^{-\frac{n\pi}{4}}}{2i}=\frac{e^{-\frac{n\pi}{4}}-e^{\frac{n\pi}{4}}}{2}i$

គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^{-\frac{n\pi}{4}}-e^{\frac{n\pi}{4}}}{2}=-\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} z_n=-\infty$ រីក

(ii). គេថា $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស៊ីតកូស៊ីកាលណា៖ $\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N},\forall m>n>n_0,|z_m-z_n|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\geq n_0,\forall p\in\mathbb{N},|z_{n+p}-z_n|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ និង $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស៊ីតកូស៊ីនៃ $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ និង $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស៊ីតរួម

$\Leftrightarrow (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស៊ីតរួម

៤.១.២. ស៊ីតនៃអនុគមន៍កុំផ្លិច

គេឱ្យស៊ីតនៃអនុគមន៍ $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ កំណត់លើ $S\subset\mathbb{C}$

$i.e,\forall n\in\mathbb{N},\ f_n:S\to\mathbb{C}$

$z\mapsto f_n(z)$

ចំពោះ $z_0\in S$ នីមួយៗគេបាន $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស៊ីតចំនួនកុំផ្លិច។

$(+)$ គេយកសម្មតិកម្មខាងលើនិង $f:S\to\mathbb{C}$

(i). គេថា $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ រួមងាយ(ឬរួម)បើ $f(z)$ លើ S ។កាលណា $\forall z_0\in S,\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(z_0)=f(z_0)$

(ii). គេថា $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ រួមស្មើរក $f(z)$ លើ S កាលណា៖

$\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\geq n_0,|f_n(z_0)-f(z_0)|<\varepsilon,\forall z_0\in S$

ដូចនេះ ភាពរួមស្មើនោះគេបានភាពរួមងាយ

គេបាន $\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N},\forall m\geq n\geq n_0,|f_m(z_0)-f_n(z_0)|<\varepsilon,\forall z\in S$

គេថា $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស៊ីតកូស៊ីស្មើលើ S

ឧទាហរណ៍២៖ $f(z)=n^{-z}=e^{-z\ln n},\ n>1,S=\{z\,|\,\mathrm{Re}(z)>0\}$

ដោយ $\forall z=x+iy$

$\Rightarrow|f_n(z)|=\left|e^{-(x+iy)\ln n}\right|=e^{-x\ln n}=n^{-x}$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}|f_n(z)|=\lim\limits_{n\to+\infty}n^{-x}=0$

ដូចនេះ $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ រួមរក $f(z)=0$ លើ S ។

៤.២. ស៊េរីស្វ័យគុណ (Power Series)

៤.១.១.និយមន័យ ៖ ស៊េរីស្វ័យគុណគឺជាស៊េរីដែលមានរាង៖

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\dots\qquad(1)$$

ដែល z ជាអថេរកុំផ្លិច និង $a_n\left(n=0,1,2,\ldots\right)$ ជាចំនួនកុំផ្លិចថេរឬចំនួនពិតហៅថាមេគុណនៃស៊េរីហើយ z_0 ជាផ្ចិតនៃស៊េរី ។

សម្គាល់៖ ពហុធាគឺជាករណីពិសេសមួយនៃស៊េរីស្វ័យគុណ ។

$$P(x)=5+3x-4x^3+7x^4$$

បើ $z_0=0$ នោះស៊េរី (1) ទៅជា $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots$ (2) ។

ក្នុង (2) បើមេគុណនៃស៊េរីស្មើមួយទាំងអស់នោះគេបានស៊េរី៖

$$\sum_{n=0}^{+\infty}z^n=1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots \quad (3)$$

ស៊េរី (3) ហៅថា ស៊េរីធរណីមាត្រ ។

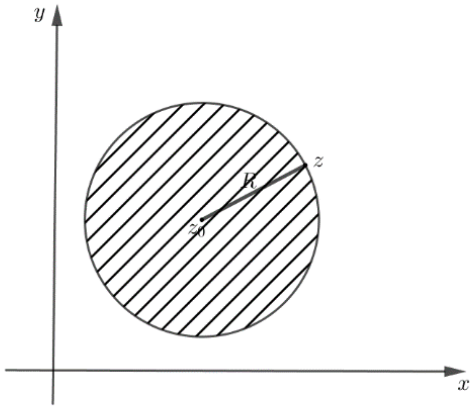
៤.១.២. ភាពរួមនៃស៊េរីស្វ័យគុណ (Convergence of Power Series)

$|z-z_0|=R, z$ រត់នៅលើរង្វង់

$|z-z_0|<R, z$ រត់នៅក្នុងរង្វង់ឬ z នៅក្នុងរង្វង់

$|z-z_0|>R, z$ នៅខាងក្រៅរង្វង់

ស៊េរីស្វ័យគុណ $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\left(z-z_0\right)^n$ រួមចំពោះគ្រប់តម្លៃអថេរកុំផ្លិច z ស្ថិតនៅខាងក្នុងរង្វង់ដែលមានផ្ចិត z_0 និងកាំ R មានន័យថាវារួមក្នុងដែន $|z-z_0|<R$ និងរីកចំពោះគ្រប់អថេរកុំផ្លិច z ស្ថិតនៅខាងក្រៅរង្វង់ដែលមានផ្ចិត z_0 និងកាំ R មានន័យថាវារីកក្នុងដែន $|z-z_0|>R$ ហើយវាអាចរួមឬរីកចំពោះតម្លៃ z នៅលើរង្វង់ដែលមានផ្ចិត z_0 និងកាំ R $\left(|z-z_0|=R\right)$ ។



រូបទី៤.១

រង្វង់ខាងលើ ហៅថារង្វង់នៃភាពរួមរបស់ស៊េរីស្វ័យគុណ ហើយ R ហៅថាកាំបង្រួមនៃស៊េរី ។

បើស៊េរីស្វ័យគុណ $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\left(z-z_0\right)^n$ មានកាំបង្រួម $R\neq 0(R>0)$ នោះផលបូករបស់វាអាចតាងដោយអនុគមន៍មួយមានអថេរកុំផ្លិច z គេបាន៖

$$f\left(z\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\left(z-z_0\right)^n=a_0+a_1\left(z-z_0\right)+a_2\left(z-z_0\right)^2+\ldots,|z-z_0|<R$$

ឧទាហរណ៍៣៖ ស៊េរីធរណីមាត្រ $\sum_{n-0}^{+\infty} z^n$ ដែល $|z|<1$ អាចតាងដោយអនុគមន៍ $f(z)=\frac{1}{1-z}$, $|z|<1$ ព្រោះថា $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1+z+z^2+\ldots=\frac{1}{1-z}$ ដែល $|z|<1$ ។

- ដើម្បីសិក្សាភាពរួមនៃស៊េរីស្វ័យគុណ $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ គេត្រូវរកកាំបង្រួម R នៃស៊េរីជាមុនសិន។
- រូបមន្តសម្រាប់រកកាំបង្រួម R ៖

(i) រូបមន្តទី១៖(Alembert)

$$R=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

(ii) រូបមន្តទី២៖(Cauchy)

$$R=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

☞**កំណត់សម្គាល់៖**

(i) បើ $R=0$ នោះស៊េរីរួមតែត្រង់ចំណុច $z=z_0$ (ផ្ចិតរង្វង់) ។

(ii) បើ $R=L>0$ នោះស៊េរីរួមនៅខាងក្នុងរង្វង់ $|z-z_0|=R$ មានន័យថា វារួមក្នុងដែន $|z-z_0|<R$ ។

(iii) បើ $R=+\infty$ នោះស៊េរីរួមត្រង់គ្រប់តម្លៃនៃអថេរ z នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច ។

ឧទាហរណ៍៤៖សិក្សាភាពរួមនៃស៊េរីស្វ័យគុណខាងក្រោម៖

ក. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n^2}$ ខ. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$ គ. $\sum_{n=1}^{+\infty} n!(z-i)^n$

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាភាពរួមនៃស៊េរីស្វ័យគុណខាងក្រោមៈ

ក. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}(z-0)^n, a_n=\frac{1}{n^2}, z_0=0$

យើងមាន៖

$$a_n=\frac{1}{n^2}$$

$$a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2}$$

យើងបាន៖

$$R=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=1$$ នោះស៊េរីរួមក្នុងដែន $|z|<1$ ។

ចំពោះ $|z|=1$ នោះ $\left|\frac{z^n}{n^2}\right|=\frac{1}{n^2}$ ហើយ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ ជាស៊េរីរួម ។

ដូចនេះ ស៊េរី $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n^2}$ រួមក្នុងដែន $|z|\le 1$ ។

ចំណាំ៖ ចំពោះស៊េរី $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ (p-Series) រួមបើ $p>1$ និងរីកបើ $0<p\le 1$ ។

ខ. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}, z_0=0$

យើងមាន៖

$$a_n=\frac{1}{n!}$$

$$a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{n!(n+1)}$$

យើងបាន៖

$$R=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{n!(n+1)}{n!}=\lim_{n\to+\infty}(n+1)=+\infty$$

ដូចនេះស៊េរីរួមចំពោះគ្រប់ $z\in\mathbb{C}$ ។

គ. $\sum_{n=1}^{+\infty}n!(z-i)^n, z_0=i$

យើងមាន៖

$$a_n=n!$$

$$a_{n+1}=(n+1)!=n!(n+1)$$

យើងបាន៖

$$R=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{n!(n+1)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

ដូចនេះ ស៊េរីរួមត្រង់ចំណុច $z=i$ ដែលជាផ្ចិតរង្វង់ ។

អនុវត្តន៍៖ ១. សិក្សាភាពរួមនៃស៊េរីស្វ័យគុណខាងក្រោម៖

ក. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}(z-1-i)^n$ ខ. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}(z-3i)^n$ គ. $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{6n+1}{2n+5}\right)^n(z-2i)^n$

២. រកកាំបង្រួមនៃស៊េរីខាងក្រោម៖

ក. $\sum_{n=0}^{+\infty}n^3z^n$ ខ. $\sum_{n=0}^{+\infty}3^n(z-1)^n$ គ. $\sum_{n=0}^{+\infty}n!z^n$

ឃ. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n}z^n$ ង. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(3-i)^n}{n^2}(z+2i)^n$

☞កំណត់សម្គាល់៖

(i).គេអាចធ្វើដេរីវេ ឬអាំងតេក្រាលទៅលើតួនីមួយៗនៃស៊េរីស្វ័យគុណ $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ ។

(ii).បើស៊េរីស្វ័យគុណ $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ មានកាំបង្រួម R នោះគេបាន ស៊េរីដេរីវេរបស់វាក៏មានកាំបង្រួម R ដែរ (មានន័យថាស៊េរី $f'(z)$ ក៏មានកាំបង្រួមស្មើ R ដែរ) ។

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n(z-z_0)^{n-1}$$

យក $b_n=a_n n, b_{n+1}=a_{n+1}(n+1)$ និង R' ជាកាំបង្រួមនៃស៊េរី $f'(z)$

យើងបាន៖ $R'=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n n}{a_{n+1}(n+1)}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=R$

ដូចនេះ កាំបង្រួមនៃស៊េរី $f'(z)$ ក៏ស្មើនឹងR ដែរ។

ឧទាហរណ៍៥៖ ចូរសិក្សាស៊េរីគត់

❖ **ចំណាំ៖** ចំពោះ $\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=R \Rightarrow R=\frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}}$ ជាស៊េរីរួមដាច់ខាត

(1). $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{n!}, a_n=\frac{1}{n!}\in\mathbb{R}_+^*$

គេបាន $R=\frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}}$, $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty$

$\Rightarrow R=+\infty$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{n!}$ ជាស៊េរីរីក

(2). $\sum_{n=0}^{+\infty} n^n z^n, a_n=n^n\in\mathbb{R}_+^*$

គេបាន $R=\frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^n}}=\frac{1}{\lim_{n\to+\infty} n}=0$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^n z^n$ ជាស៊េរីរួម

3. $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \alpha\geq 0, a_n=\frac{1}{n^\alpha}\in\mathbb{R}_+^*$

គេបាន $R=\frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}}}=1, \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{\alpha}{n}}=\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\alpha}{n}\ln n}=1$

- $|z|>1$ នោះវាជាស៊េរីរីក
- $|z|<1$ នោះវាជាស៊េរីរួម

- $|z|=1$ នោះ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ ជាស៊េរីរួមបើ $\alpha>1$ ហើយរីកបើ $\alpha\le 1$
- $|z|\neq 1, z=e^{ix}, x\neq 2k\pi$

គេបាន $\sum_{n=1}^{+\infty}z^{n}\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{inx}}{n^{\alpha}}$

- បើ $\alpha=0\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{inx}}{n^{0}}$ ជាស៊េរីរីក
- បើ $\alpha>0\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{inx}}{n^{\alpha}}$ ជាស៊េរីរួម

❖ **ទ្រឹស្តីបទ៖** គេតាង $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n}(z-z_{0})^{n}$ បើ C ជាខ្សែកោងបិទជិតហើយរួមនោះគេបាន៖

$$\oint_{C}f(z)dz=\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n}=\oint_{C}(z-z_{0})^{n}dz$$

ឧទាហរណ៍៦៖ តាង C ជាខ្សែកោងដែលកំណត់ពី $\frac{1}{2}i\rightarrow-\frac{1}{2}$ នៅផ្នែកខាងក្នុងរង្វង់ $|z|=1$ ហើយ $f(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^{n}}{2n+1}$ ។

ដំណោះស្រាយ

$$\oint_{C}f(z)dz=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{\frac{i}{2}}^{-\frac{1}{2}}\frac{z^{n}}{2n+1}dz$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{(2n+1)(n+1)}\right]z^{n+1}\Big|_{\frac{i}{2}}^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{(2n+1)(n+1)}\right]\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{i}{2}\right)^{n+1}\right]$$

៤.៣. ស៊េរីតេល័រ (Taylor's Series)

បើ $f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគនៅខាងក្នុងរង្វង់ C ដែលមានផ្ចិត $z=a$ នោះចំពោះ z នីមួយៗនៅក្នុងរង្វង់ C ហើយគេអាចពន្លាត $f(z)$ ជាស៊េរីស្វ័យគុណនៃ $z=a$ ដូចខាងក្រោម៖

$$f(z)=f(a)+(z-a)f'(a)+\frac{(z-a)^{2}}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(z-a)^{n}}{n!}f^{(n)}(a)+\ldots$$

សម្រាយបញ្ជាក់

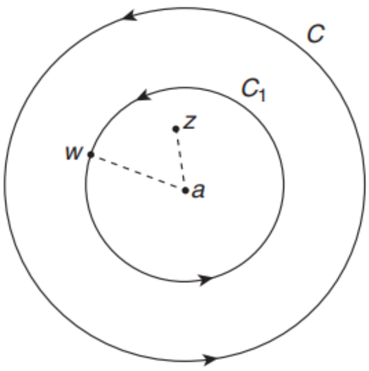
តាង z ជាចំណុចផ្សេងៗនៅក្នុងរង្វង់ C ។ គូសរង្វង់ C_{1} នៅក្នុង C ដែលមានផ្ចិត $z=a$ ហើយបិទជិតជុំវិញចំណុច z ដូចរូប៤.២។

តាង w ជាចំណុចផ្សេងៗនៅលើរង្វង់ C_{1} គេបាន៖

$$|z-a|<|w-a|$$

$$\frac{|z-a|}{|w-a|}<1$$

$$\left|\frac{z-a}{w-a}\right|<1$$



រូបទី៤.២

ដោយប្រើរូបមន្តអាំងតេក្រាលកូស៊ី

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(w)}{w-z}dw \qquad (1)$$

យើងពិនិត្យ $\frac{1}{w-z}=\frac{1}{(w-a)-(z-a)}$

$$=\frac{1}{(w-a)\left(1-\frac{z-a}{w-a}\right)}$$

$$=\frac{1}{w-a}\left(1-\frac{z-a}{w-a}\right)^{-1}$$

$$=\frac{1}{w-a}\left[1+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^2+\ldots+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n+\ldots\right]$$

$\left[\because\left|\frac{z-a}{w-a}\right|<1\right.$ ដោយប្រើកន្សោមទ្វេធា $\left.\right]$

$$=\frac{1}{(w-a)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}$$

ជំនួស $\frac{1}{w-z}$ នៅក្នុង(1)គេបាន៖

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}f(w)\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}\right]dw$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\left[\int_{C_1}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\left[2\pi i\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right]$$ (ប្រើរូបមន្តអាំងតេក្រាលកូស៊ីចំពោះដេរីវេ)

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

$$= f(a)+(z-a)f'(a)+\frac{(z-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(z-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\ldots$$

ឧទាហរណ៍៧៖ ចូរពន្លាត $f(z)=e^z$ នៅក្នុងស៊េរីតៃល័រត្រង់ $z=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $f(z)=e^z,\ a=0$

តាមស៊េរីតៃល័រគេបាន៖

$$f(z)=f(a)+f'(a)(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(z-a)^3+\cdots$$

យក $a=0$ គេបាន៖

$$f(z)=f(0)+f'(0)z+\frac{f''(0)}{2!}z^2+\frac{f'''(0)}{3!}z^3+\cdots \qquad (1)$$

$f(z)=e^z \qquad f(0)=e^0=1$

$f'(z)=e^z \qquad f'(0)=e^0=1$

$f''(z)=e^z \qquad f''(0)=e^0=1$

$f'''(z)=e^z \qquad f'''(0)=e^0=1$

យកទៅជំនួសក្នុងសមីការ(1)គេបាន៖

$$f(z)=1+z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\ldots$$

ដូចនេះ $e^z=1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+\ldots$ ។

ឧទាហរណ៍៨៖ ចូរពន្លាត $\frac{z-1}{z+1}$ ជាស៊េរីតៃល័រនៅត្រង់ចំណុច $z=1$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $f(z)=\frac{z-1}{z+1},\ a=1$

តាមស៊េរីតៃល័រគេបាន៖

$$f(z)=f(a)+f'(a)(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(z-a)^3+\cdots$$

យក $a=1$ គេបាន៖

$$f(z)=f(1)+f'(1)(z-1)+\frac{f''(1)}{2!}(z-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(z-1)^3+\cdots$$

$f(z)=\frac{z-1}{z+1} \qquad f(1)=0$

$f'(z)=\frac{(z+1)(1)-(z-1)(1)}{(z+1)^2} \qquad f'(1)=\frac{1}{2}$

$$=\frac{2}{(z+1)^2}$$

$$f''(z)=\frac{0-2\{2(z+1)\}}{(z+1)^4} \qquad f''(1)=-\frac{4}{2^3}=-\frac{1}{2}$$

$$=-\frac{4}{(z+1)^3}$$

យកទៅជំនួសក្នុងសមីការ (1) គេបាន៖

$$f(z)=0+\frac{1}{2}(z-1)-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}(z-1)^2+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}(z-1)-\frac{1}{4}(z-1)^2+\cdots$$

ដូចនេះ $\frac{z-1}{z+1}=\frac{1}{2}(z-1)-\frac{1}{4}(z-1)^2+\cdots$ ។

ឧទាហរណ៍៩៖ ចូរសរសេរពហុធា $f(z)=z^3-5z^2+4z+2$ ជាពហុធានៃ $(z-1)$ ។

ដំណោះស្រាយ

សរសេរ $f(z)$ ជារាង $f(z)=a_0+a_1(z-1)+a_2(z-1)^2+a_3(z-1)^3$

យើងមាន៖

$$f(z)=z^3-5z^2+4z+2$$

$$f'(z)=3z^2-10z+4$$

$$f''(z)=6z-10$$

$$f'''(z)=6$$

យើងបាន៖

$$a_0=f(1)=2$$

$$a_1=\frac{f'(1)}{1!}=\frac{-3}{1}=-3$$

$$a_2=\frac{f''(1)}{2!}=\frac{-4}{2}=-2$$

$$a_3=\frac{f'''(1)}{3!}=\frac{6}{6}=1$$

ដូចនេះ $f(z)=2-3(z-1)-2(z-1)^2+(z-1)^3$ ។

ឧទាហរណ៍១០៖ ក. ចូរពន្លាត $f(z)=\sin z$ នៅក្នុងស៊េរីតៃល័រចំពោះ $z=\frac{\pi}{4}$ ។

ខ. ចូរកំណត់ដែននៃភាពរួមចំពោះស៊េរីនេះ។

ដំណោះស្រាយ

ក. យើងមាន $f(z)=\sin z$ នោះគេបាន៖

$$f'(z)=\cos z,\ f''(z)=-\sin z, f'''(z)=-\cos z, f^{(4)}(z)=\sin z,...$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}, f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}, f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}, f'''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}, f^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ដោយ $a=\frac{\pi}{4}$ នោះគេបាន៖

$$f(z)=f(a)+f'(a)(z-a)+\frac{f''(a)(z-a)^2}{2!}+\frac{f'''(a)(z-a)^3}{3!}+...$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2\cdot 2!}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{\sqrt{2}}{2\cdot 3!}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3+...$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1+\left(z-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!}-\frac{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}+...\right\}$$

ទ្រឹស្តីបទផ្សេងទៀតតាង $u=z-\frac{\pi}{4}$ ឬ $z=u+\frac{\pi}{4}$ នោះយើងមាន៖

$$\sin z=\sin\left(u+\frac{\pi}{4}\right)=\sin u\cos\frac{\pi}{4}+\cos u\sin\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin u+\cos u)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\left(u-\frac{u^3}{3!}+\frac{u^5}{5!}-\cdots\right)+\left(1-\frac{u^2}{2!}+\frac{u^4}{4!}-\cdots\right)\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1+u-\frac{u^2}{2!}-\frac{u^3}{3!}+\frac{u^4}{4!}+\cdots\right\}$$

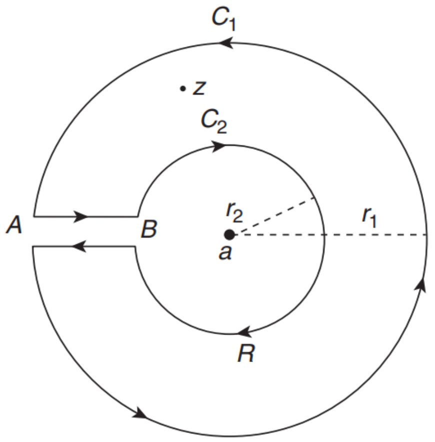
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1+\left(z-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!}-\frac{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}+...\right\}$$

ខ. ចូរកំណត់ដែននៃភាពរួមចំពោះស៊េរីនេះ។

ដោយចំណុចទោលនៃ $\sin z$ ខិតទៅជិត $\frac{\pi}{4}$ មិនអាចរាប់បានស៊េរីនេះរួមចំពោះគ្រប់តម្លៃរាប់បាននៃ z មានន័យថា $|z|<\infty$ ។

៤.៤. ស៊េរីឡូរ៉ាំង (Laurent's Series)

បើ $f(z)$ គឺជាអនុគមន៍វិភាគនៅលើរង្វង់ពីរដែលមានផ្ចិតរួម C_1 និង C_2 ត្រង់ផ្ចិត $z=a$ ហើយមានកាំ $r_1, r_2\,(r_2<r_1)$ និងនៅក្នុងដែន R រង្វង់ពីរមានផ្ចិតរួមតែមួយរវាង C_1 និង C_2 នោះគ្រប់ z នៅក្នុង R ។



រូបទី៤.៣

$$f(z)=a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\cdots+\frac{b_1}{z-a}+\frac{b_2}{(z-a)^2}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-a)^n}$$

ដែល $a_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_1}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw$

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(w)}{(w-a)^{-n+1}}dw$$

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង C_1,C_2 ជារង្វង់ពីរដែលមានផ្ចិតរួមត្រង់ $z=a$ និងកាំ $r_1,r_2\,(r_2<r_1)$ ដូចរូបខាងលើ។ នៅក្នុងដែន R រង្វង់ពីរមានផ្ចិតរួមតែមួយរវាង C_1 និង C_2 ជាទំនាក់ទំនងពហុនៃដែន។ ទំនាក់ទំនងនៃពហុដែននេះគឺត្រូវបានប្តូរទៅជាទំនាក់ទំនងដែនងាយដោយកាត់តាម AB ។

$f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគនៅក្នុងទំនាក់ទំនងដែនងាយ ដោយប្រើរូបមន្តអាំងតេក្រាលកូស៊ីៈ

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(w)}{w-z}dw+\frac{1}{2\pi i}\int_{AB}\frac{f(w)}{w-z}dw-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(w)}{w-z}dw+\frac{1}{2\pi i}\int_{BA}\frac{f(w)}{w-z}dw$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(w)}{w-z}dw-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(w)}{w-z}dw$$ (សម្រួលអាំងតេក្រាលជុំវិញ AB និង BA)

$$=f_1(z)-f_2(z)$$

(i) $\quad f_1(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_1}\frac{f(w)}{w-z}dw \qquad (1)$

z ជាចំណុចផ្សេងៗនៅក្នុង R និងចំពោះអាំងតេក្រាលនេះ w នៅលើ C_1

$$\therefore |z-a|<|w-a|$$

$$\left|\frac{z-a}{w-a}<1\right|$$

ពិនិត្យ $\frac{1}{w-z}=\frac{1}{(w-a)-(z-a)}$

$$=\frac{1}{(w-a)\left(1-\frac{z-a}{w-a}\right)^{-1}}$$

$$=\frac{1}{w-a}\left(1-\frac{z-a}{w-a}\right)^{-1}$$

$$=\frac{1}{w-a}\left[1+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{2}+\ldots+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{n}+\ldots\right]$$

$$=\frac{1}{(w-a)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^{n}}{(w-a)^{n+1}}$$

ជំនួស $\frac{1}{w-z}$ នៅក្នុង(1)គេបាន៖

$$f_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} f(w)\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^{n}}{(w-a)^{n+1}}\right]dw$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(z-a)^{n}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw\right\}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^{n}a_n \qquad (2)$$

ដែល $a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw$

(ii) $\quad f_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(w)}{w-z}dw \qquad (3)$

z ជាចំណុចផ្សេងៗនៅក្នុង R និងចំពោះអាំងតេក្រាលនេះ w នៅលើ C_2

$$\therefore |z-a|<|w-a|$$

$$1>\left|\frac{w-a}{z-a}\right|$$

$$\left|\frac{w-a}{z-a}\right|<1$$

ពិនិត្យ $\frac{1}{w-z}=\frac{1}{(w-a)-(z-a)}$

$$=\frac{1}{(z-a)\left(\frac{w-a}{z-a}-1\right)}$$

$$=-\frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{\left(\frac{w-a}{z-a}-1\right)}$$

$$=-\frac{1}{z-a}\left(1-\frac{w-a}{z-a}\right)^{-1}$$

$$=-\frac{1}{(z-a)}\left[1+\left(\frac{w-a}{z-a}\right)+\left(\frac{w-a}{z-a}\right)^{2}+\ldots+\left(\frac{w-a}{z-a}\right)^{n-1}+\ldots\right]$$

$$=-\frac{1}{(z-a)}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{w-a}{z-a}\right)^{n-1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{(w-a)^{n-1}}{(z-a)^{n}}$$

ជំនួស $\frac{1}{w-z}$ នៅក្នុង(3)គេបាន៖

$$f_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} f(w)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(w-a)^{n-1}}{(z-a)^{n}}\right]dw$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{-1}{(z-a)^{n}}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(w)}{(w-a)^{-n+1}}dw\right\}\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{(z-a)^{n}}b_n$$

ដែល $b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(w)}{(w-a)^{-n+1}}dw$

$$\therefore f(z)=f_1(z)-f_2(z)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-a)^{n}}$$

ដែល $a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw$

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(w)}{(w-a)^{-n+1}}dw$$

ដូចនេះតួទី២ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-a)^{n}}$ ជាផ្នែកសំខាន់ស៊េរីឡូរ៉ាំង។

ឧទាហរណ៍១១៖ ចូររកស៊េរីឡូរ៉ាំងនៃ $f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}$ ត្រង់ $z=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}$

$f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគចំពោះ $|z|>0$

$$f(z)=z^2\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{6z^3}+\cdots\right)$$

$$=z^2+z+\frac{1}{2}+\frac{1}{6z}+\cdots$$

ឧទាហរណ៍១២៖ ចូររកស៊េរីឡូរ៉ាំងនៃ $f(z)=\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$ នៅត្រង់ $z=1$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $f(z)=\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$

$f(z)$ មិនមែនជាអនុគមន៍វិភាគនៅត្រង់ $z=1$ ប៉ុន្តែវាជាអនុគមន៍វិភាគនៅក្នុងដែន $|z-1|>0$ នៅត្រង់ $z=1$ ។

តាង $z-1=t \Rightarrow z=1+t$ យើងបាន៖

$$f(z)=\frac{e^{2(t+1)}}{t^3}$$

$$=\frac{e^2}{t^3}e^{2t}$$

$$=\frac{e^2}{t^3}\left[1+2t+\frac{(2t)^2}{2!}+\frac{(2t)^3}{3!}+\cdots\right]$$

$$=e^2\left[\frac{1}{t^3}+\frac{2}{t^2}+\frac{2}{t}+\frac{4}{3}+\ldots\right]$$

$$=e^2\left[\frac{1}{(z-1)^3}+\frac{2}{(z-1)^2}+\frac{2}{(z-1)}+\frac{4}{3}+\cdots\right]$$

ឧទាហរណ៍១៣៖ ចូរពន្លាតស៊េរីឡូរ៉ាំងនៅក្នុងស៊េរីស្វ័គុណនៃ z ដែលកំណត់ដោយ $f(z)=\frac{1}{z^2(1-z)}$

ហើយមានដែន (i) $|z|<1$ (ii) $|z|>1$ ។

ដំណោះស្រាយ

$$f(z)=\frac{1}{z^2(1-z)}$$

$$=\frac{A}{z}+\frac{B}{z^2}+\frac{C}{1-z}$$

$$1=Az(1-z)+B(1-z)+Cz^2$$

យក $z=0$ គេបាន $B=1$

យក $z=1$ គេបាន $C=1$

យក $z=-1$ គេបាន $1=-2A+2B+C$

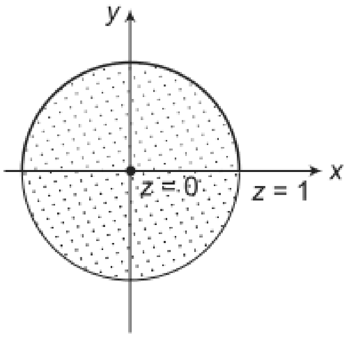
$$=-2A+2+1$$

$$A=1$$

នោះគេបាន $f(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{1-z}$

(i) $|z|<1$

$f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគនៅក្នុងដែន $|z|<1$ ត្រង់ $z=0$ ដូចរូប



រូបទី៤.៤

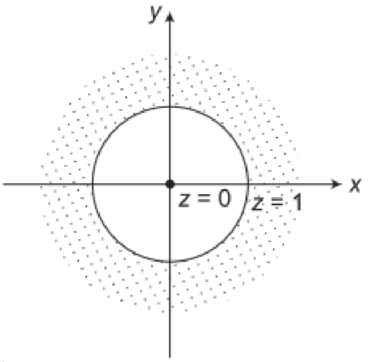
$$f(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+(1-z)^{-1}$$

$$=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\left(1+z+z^2+\cdots\right)$$

(ii) $|z|>1$

$f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគនៅក្នុងដែន $|z|>1$ ត្រង់ $z=0$ ដូចរូប

$$\because\ |z|>1,\ \left|\frac{1}{z}\right|<1$$



រូបទី៤.៥

$$f(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{-z\left(-\frac{1}{z}+1\right)}$$

$$=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-2-\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-1}$$

$$=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^5}-\cdots$$

$$=-\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^5}-\cdots$$

ទ្រឹស្តីបទ៖ តាង $f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគនៅក្នុងរង្វង់ $r_1<|z-z_0|<r_0$ ចំពោះ z នៅក្នុងដែននេះ យើងបាន $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ ដែល $a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw$, $n=0,\pm1,\pm2,.....$

ឧទាហរណ៍១៤៖ ចូររកសេរីឡូរ៉ាំងខាងក្រោម៖

$(a).\ \dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3},\ z=1$ $(b).\ \dfrac{z-\sin z}{z^3},\ z=0$

$(c).\ \dfrac{1}{z^2(z-3)^2},\ z=3$ $(d).\ (z-3)\sin\dfrac{1}{z+2},\ z=-2$

$(e).\ \dfrac{z}{(z+2)(z+1)},\ z=-2$

ដំណោះស្រាយ

$(a).\ \dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3},\ z=1$

តាង $z-1=u$ នោះ $z=1+u$ គេបាន៖

$$\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}=\frac{e^{2+2z}}{u^3}=\frac{e^2}{u^3}\cdot e^{2u}=\frac{e^2}{u^3}\left\{1+2u+\frac{(2u)^2}{2!}+\frac{(2u)^3}{3!}+\cdots\right\}$$

$$=\frac{e^2}{(z-1)^3}+\frac{2e^2}{(z-1)^2}+\frac{2e^2}{z-1}+\frac{4e^2}{3}+\frac{2e^2}{3}(z-1)+\cdots$$

ត្រង់ $z=1$ ជាប៉ូលលំដាប់បី ឬទ្រីបប៉ូល

ដូចនេះ ស៊េរីនេះរួមចំពោះគ្រប់តម្លៃនៃ $z\neq 1$ ។

$(b).\ \dfrac{z-\sin z}{z^3},\ z=0$

តាង $z+2=u\Rightarrow z=u-2$ នោះគេបាន៖

$$(z-3)\sin\frac{1}{z+2}=(u-5)\sin\frac{1}{u}=(u-5)\left\{\frac{1}{u}-\frac{1}{3!u^3}+\frac{1}{5!u^5}-\cdots\right\}$$

$$=1-\frac{5}{u}-\frac{1}{3!u^2}+\frac{5}{3!u^3}+\frac{1}{5!u^4}-\cdots$$

$$=1-\frac{5}{z+2}-\frac{1}{6(z+2)^2}+\frac{5}{6(z+2)^3}+\frac{1}{120(z+2)^4}-\cdots$$

នៅត្រង់ $z=-2$ ជាឯកជាតុសំខាន់

ដូចនេះ ស៊េរីនេះរួមចំពោះគ្រប់តម្លៃនៃ $z\neq -2$ ។

$(c).\ \dfrac{1}{z^2(z-3)^2},\ z=3$

$$\frac{z-\sin z}{z^3}=\frac{1}{z^3}\left\{z-\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{z^3}\left\{\frac{z^3}{3!}-\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}-\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+\frac{z^4}{7!}-\cdots$$

នៅត្រង់ $z=0$ ជាឯកជាតុអាចចោលបាន(Removable singularity)

ដូចនេះ ស៊េរីនេះរួមចំពោះគ្រប់តម្លៃនៃ z ។

$(d).\ (z-3)\sin\dfrac{1}{z+2},\ z=-2$

តាង $z+2=u\Rightarrow z=u-2$ គេបាន៖

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)}=\frac{u-2}{(u-1)u}=\frac{2-u}{u}\cdot\frac{1}{1-u}=\frac{2-u}{u}\left(1+u+u^2+u^3+\cdots\right)$$

$$=\frac{2}{u}+1+u+u^2+\cdots$$

$$=\frac{2}{z+2}+1+(z+2)+(z+2)^2+\cdots$$

នៅត្រង់ $z=-2$ ជាប៉ូលលំដាប់មួយ ឬជាប៉ូលសាមញ្ញ

ដូចនេះ ស៊េរីនេះរួមចំពោះគ្រប់តម្លៃនៃ z ដែល $0<|z+2|<1$ ។

$(e).\ \dfrac{z}{(z+2)(z+1)},\ z=-2$

តាង $z-3=u$ តាមទ្រឹស្តីបទពហុធាគេបាន៖

$$\frac{1}{z^2(z-3)^2}=\frac{1}{u^2(3+u)^2}=\frac{1}{9u^2\left(1+\frac{u}{3}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{9u^2}\left\{1+(-2)\left(\frac{u}{3}\right)+\frac{(-2)(-3)}{2!}\left(\frac{u}{3}\right)^2+\frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}\left(\frac{u}{3}\right)^3+\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{9u^2}-\frac{2}{27u}+\frac{1}{27}-\frac{4}{243u}+\cdots$$

$$=\frac{1}{9(z-3)^2}-\frac{2}{27(z-3)}+\frac{1}{27}-\frac{4(z-3)}{243}+\cdots$$

នៅត្រង់ $z=3$ ជាប៉ូលលំដាប់ពីរ ឬជាទ្វេប៉ូល

ដូចនេះ ស៊េរីនេះរួមចំពោះគ្រប់តម្លៃនៃ z ដែល $0<|z-3|<3$ ។

ឧទាហរណ៍១៥៖ ចូរពន្លាត $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$ នៅក្នុងស៊េរីឡូរ៉ាំងចំពោះតម្លៃខាងក្រោម៖

$(a)\ 1<|z|<3$ $(b)\ |z|>3$ $(c)\ 0<|z+1|<2$ $(d)\ |z|<1$

ដំណោះស្រាយ

(a) ដោយ $\dfrac{1}{(z+1)(z+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{z+1}\right)-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{z+3}\right)$

- បើ$|z|>1$ នោះយើងបាន៖

$$\frac{1}{2(z+1)}=\frac{1}{2z\left(1+\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{2z}\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{2z}-\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{2z^3}-\frac{1}{2z^4}+\cdots$$

- បើ$|z|<3$ នោះយើងបាន៖

$$\frac{1}{2(z+3)}=\frac{1}{6\left(1+\frac{z}{3}\right)}=\frac{1}{6}\left(1-\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}-\frac{z^3}{27}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{6}-\frac{z}{18}+\frac{z^2}{54}-\frac{z^3}{162}+\cdots$$

នោះកន្សោមឡូរ៉ាំងដែលយកជាការបានចំពោះអង្គទាំងពីរ$|z|>1$ និង$|z|<3$ឬ$1<|z|<3$គឺ

$$-\frac{1}{2z^4}+\frac{1}{2z^3}-\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{2z}-\frac{1}{6}+\frac{z}{18}-\frac{z^2}{54}+\frac{z^3}{162}-\cdots$$

(b) បើ$|z|>1$ យើងមាននៅក្នុងផ្នែក(a)គឺ $\frac{1}{2(z+1)}=\frac{1}{2z}-\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{2z^3}-\frac{1}{2z^4}+\cdots$

បើ$|z|>3$នោះយើងបាន៖

$$\frac{1}{2(z+3)}=\frac{1}{2z\left(1+\frac{3}{z}\right)}=\frac{1}{2z}\left(1-\frac{3}{z}+\frac{9}{z^2}-\frac{27}{z^3}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{2z}-\frac{3}{2z^2}+\frac{9}{2z^3}-\frac{27}{2z^4}+\cdots$$

នោះកន្សោមឡូរ៉ាំងដែលយកជាការបានចំពោះអង្គទាំងពីរ$|z|>1$ និង$|z|>3$ឬ$|z|>3$ដោយធ្វើប្រមាណវិធីដកគេបាន៖

$$\frac{1}{z^2}-\frac{4}{z^3}+\frac{13}{z^4}-\frac{40}{z^5}+\cdots$$

(c) តាង $z+1=u$ នោះគេយើងបាន៖

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)}=\frac{1}{u(u+2)}=\frac{1}{2u\left(1+\frac{u}{2}\right)}=\frac{1}{2u}\left(1-\frac{u}{2}+\frac{u^2}{4}-\frac{u^3}{8}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{2(z+1)}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}(z+1)-\frac{1}{16}(z+1)^2+\cdots$$

យកជាការបានចំពោះ$|u|<2, u\neq 0$ ឬ$0<|z+1|<2$

(d)បើ$|z|<1$ នោះយើងបាន៖

$$\frac{1}{z(z+1)}=\frac{1}{2(1+z)}=\frac{1}{2}\left(1-z+z^2-z^3+\cdots\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{2}z^3+\cdots$$

បើ $|z|<3$ យើងមាននៅផ្នែក (a) គឺ

$$\frac{1}{2(z+3)}=\frac{1}{6}-\frac{z}{18}+\frac{z^2}{54}-\frac{z^3}{162}+\cdots$$

នោះកន្សោមឡូរ៉ាំងដែលយកជាការបានចំពោះអង្គទាំងពីរ $|z|<1$ និង $|z|<3$ ឬ $|z|<1$ ដោយធ្វើប្រមាណវិធីដកគេបាន៖

$$\frac{1}{3}-\frac{4}{9}z+\frac{13}{27}z^2-\frac{40}{81}z^3+\cdots$$

ដូចនេះ វាជាស៊េរីតៃល័រ។

៤.៥. សូន្យ និងឯកធាតុ (Zero and Singularity)

និយមន័យ៖ ចំណុច z_0 ហៅថាសូន្យលំដាប់ m ចំពោះអនុគមន៍ f បើ f ជាអនុគមន៍វិភាគត្រង់ z_0 និង f ហើយដេរីវេទី $m-1$ ខិតជិត z_0 ប៉ុន្តែ $f^{(m)}(z_0)\neq 0$។

ទ្រឹស្តីបទ៖ តាងអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍វិភាគនៅត្រង់ចំណុច z_0។ មានសូន្យលំដាប់ m ត្រង់ z_0 លុះត្រាតែមានអនុគមន៍ g ដែលជាអនុគមន៍វិភាគ និងមិនសូន្យនៅត្រង់ z_0 នោះគេបាន

$$f(z)=(z-z_0)^m g(z) \qquad (1)$$

បើអនុគមន៍មួយជាអនុគមន៍វិភាគនៅត្រង់ចំណុច z_0 នោះវាត្រូវតែបង្ហាញជាស៊េរីតៃល័រក្នុងទម្រង់ស្វ័យគុណ $z-z_0$ ដែលមានតម្លៃទាំងអស់ក្បែរ $|z-z_0|<\varepsilon$ នៃ z_0។ យើងចាប់ផ្តើមផ្នែកដំបូងនៃសម្រាយបញ្ជាក់ដោយសន្មតថាកន្សោម (1) នៅរក្សាហើយយើងឃើញថាអនុគមន៍ $g(z)$ ជាអនុគន៍វិភាគនៅត្រង់ z_0 ហើយវាបង្ហាញជាស៊េរីតៃល័រដូចខាងក្រោម៖

$$g(z)=g(z_0)+\frac{g'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\frac{g''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\ldots$$

នៅវ៉ស៊ីណា $|z-z_0|<\varepsilon$ នៃ z_0 តាមកន្សោម(1)យើងបាន

$$f(z)=g(z_0)(z-z_0)^m+\frac{g'(z_0)}{1!}(z-z_0)^{m+1}+\frac{g''(z_0)}{2!}(z-z_0)^{m+2}+\ldots,|z-z_0|<\varepsilon$$

ដោយការពន្លាតកន្សោមនៃស៊េរីតៃល័រចំពោះ $f(z)$ គេបាន

$$f(z_0)=f'(z_0)=f''(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0 \qquad (2)$$

និង $f^{(m)}(z_0)=m!g(z_0)\neq 0 \qquad (3)$

គេបាន z_0 ជាសូន្យលំដាប់ m នៃ f ។

ផ្ទុយទៅវិញបើយើងសន្មត់ថា f មានសូន្យលំដាប់ m ត្រង់ z_0 នោះអនុគមន៍វិភាគនៃ f ត្រង់ z_0 វាពិតចំពោះលក្ខខណ្ឌ (2) ហើយបញ្ជាក់ថានៅក្នុងវ៉ស៊ីណា $|z-z_0|<\varepsilon$ មានស៊េរីតៃល័រ

$$f(z)=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

$$=\left(z-z_0\right)^m\left[\frac{f^{(m)}\left(z_0\right)}{m!}+\frac{f^{(m+1)}\left(z_0\right)}{(m+1)!}\left(z-z_0\right)+\frac{f^{(m+2)}\left(z_0\right)}{(m+2)!}\left(z-z_0\right)^2+\ldots\right]$$

ដូច្នេះ $f(z)$ មានទម្រង់(1)ដែល

$$g(z)=\frac{f^{(m)}\left(z_0\right)}{m!}+\frac{f^{(m+1)}\left(z_0\right)}{(m+1)!}\left(z-z_0\right)+\frac{f^{(m+2)}\left(z_0\right)}{(m+2)!}\left(z-z_0\right)^2+\ldots \text{ ចំពោះ} \left|z-z_0\right|<\varepsilon$$

ភាពរួមនៃស៊េរីចុងក្រោយនេះនៅពេលដែល $\left|z-z_0\right|<\varepsilon$ បញ្ជាក់ថា g គឺជាអនុគមន៍វិភាគដែលមានរ៉េស៊ីណានៅត្រង់ចំណុច z_0 លើសពីនេះទៀត

$$g\left(z_0\right)=\frac{f^{(m)}\left(z_0\right)}{m!}\neq 0$$

ដូចនេះ ការស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទត្រូវបានបំពេញ។

ឧទាហរណ៍១៦៖ ពហុធា $f(z)=z^3-8$មានលំដាប់សូន្យ $m=1$ត្រង់ $z_0=2$ ។

យើងមាន $f(z)=z^3-8=(z-2)\left(z^2+2z+4\right)$

ដោយ $f(z)=(z-2)g(z)$ ដែល $g(z)=z^2+2z+4$ ពីព្រោះ f និង g ទាំងអស់តែ $g(2)=12\neq 0$ ។

ចំពោះ $z_0=2$ ជាលំដាប់សូន្យ $m=1$នៃ f តាមការសង្កេតយើងឃើញថា $f(2)=0, f'(2)=12\neq 0$ ។

ឧទាហរណ៍១៧៖ អនុគមន៍ $f(z)=z\left(e^z-1\right)$ មានសូន្យលំដាប់$m=2$ ត្រង់ចំណុច $z_0=0$ ។

ដោយ $f(0)=f'(0)=0$ និង $f''(0)=2\neq 0$

នៅក្នុងករណីនេះកន្សោម $f(z)=\left(z-z_0\right)^2 g(z)$ ទៅជា $f(z)=(z-0)^2 g(z)$

ដែល g ជាអនុគមន៍ជាប់កំណត់ដោយមធ្យមនៃសមីការ $g(z)=\begin{cases}\dfrac{e^z-1}{z} & \text{បើ } z\neq 0\\ 1 & \text{បើ } z=0\end{cases}$

៤.៦.ទ្រឹស្តីបទ Schwarz

ទ្រឹស្តីបទ៖ បើ $f(z)$ជាអនុគមនវិភាគនៅក្នុងដែន D កំណត់ដោយ$|z|<R$ និងបំពេញលក្ខខណ្ឌ $f(z)\leq M,\forall z\in D$ និង $f(0)=0$ នោះគេបាន$\left|f(z)\right|\leq\frac{M}{R}|z|$ ។ ដូចគ្នាបើសមភាពកើតឡើងចំពោះគ្រប់ z នោះគេបាន $f(z)=\frac{M}{R}ze^{i\alpha}$ ដែល α ជាចំនួនពិតថេរ។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង C ជារង្វង់ $|z|=r, r<R$

ដោយ $f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគនៅលើ និងក្នុងរង្វង់ C នោះការពន្លាត $f(z)$ នៅក្នុងស៊េរីតៃល័រត្រង់ចំណុច z ខាងក្នុងរង្វង់ C យើងបាន

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n=a_0+a_1z+a_2z^2+\dots \qquad (1)$$

តាមសម្មតិកម្ម $f(0)=0$ នៅត្រង់ $z=0$, $f(z)=0$ នោះគេបានទម្រង់(1)យើងបាន $a_0=0$ ។

ជំនួស $a_0=0$ នៅក្នុង(1)យើងបាន $f(z)=a_1z+a_2z^2+\dots$

យើងពិនិត្យមើលអនុគមន៍ $F(z)$ កំណត់ដោយ $F(z)=\dfrac{f(z)}{z}=a_1+a_2z+a_3z^2+\dots$

អនុគមន៍ $F(z)$ មានឯកជាតុត្រង់ $z=0$ ដែលអាចចោលបានបើយើងកំណត់

$F(z)=a_1$ ចំពោះ $z=0$

មានន័យថា $F(0)=a_1$

អនុគមន៍ $F(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគនៅក្នុង និងក្រៅរង្វង់ C ដោយម៉ូឌុលធំបំផុត $|F(z)|$ តម្លៃធំបំផុតនៅត្រង់ចំណុច $z=a$ នៅលើ C និងមិននៅក្នុងរង្វង់ C ។

មានន័យថា $|F(a)|=\left|\dfrac{f(a)}{a}\right|=\max$ តម្លៃនៃ $|F(z)|$

$$=\max \text{ តម្លៃនៃ } \left|\frac{f(z)}{z}\right|\le\frac{M}{r} \qquad (2)$$

បើ z នៅខាងក្នុងរង្វង់ C យើងបាន

$$|F(z)|<\max \text{ តម្លៃនៃ } |F(z)|\le\frac{M}{r}$$

នោះគេបាន $\left|\dfrac{f(z)}{z}\right|<\dfrac{M}{r}\Rightarrow|f(z)|<\dfrac{M}{r}|z| \qquad (3)$

នៅក្នុងវិសមភាព(3)ចំពោះគ្រប់ $r<R$ ពេល $r\to R$ យើងមានទម្រង់(3)

$$|f(z)|<\frac{M}{R}|z|,\ \forall z \text{ ដែល } |z|<R$$

ចំពោះ(2)យើងមាន $|f(a)|=\dfrac{M}{r}|a|$ ពេល $r\to R$ យើងបាន

$$|f(a)|=\frac{M}{R}|a|\Rightarrow|f(a)|=\frac{M}{R}ae^{i\lambda}$$

នោះគេបាន $f(z)=\dfrac{M}{R}ze^{i\alpha}$ ដែល z នៅលើរង្វង់ C និង α ជាចំនួនពិតថេរ។

លំហាត់ស៊េរីនៃអនុគមន៍វិភាគ និងឯកធាតុ

១.ចូរពន្លាតអនុគមន៍ខាងក្រោមជាស៊េរីម៉ាកឡូរ៉ាំងក្នុងដែនដែលគេឱ្យ៖

ក. $f(z)=\frac{\sin z}{z},\ 0<|z|<+\infty$ ខ. $f(z)=e^{\frac{3}{z}},\ 0<|z|<+\infty$

គ. $f(z)=\frac{\sin z}{z^3},\ 0<|z|<+\infty$ ឃ. $f(z)=\frac{e^z}{z-1},\ 0<|z-1|$

ង. $f(z)=\frac{z-\sin z}{z^5},\ 0<|z|$ ច. $f(z)=z\cos\frac{1}{z},\ 0<|z|$

២.ចូរពន្លាតអនុគមន៍ $f(z)=\frac{1}{z(1-z)}$ ជាស៊េរីម៉ាកឡូរ៉ាំងក្នុងដែនដូចខាងក្រោម៖

ក.$0<|z|<1$ ខ.$1<|z|$ គ.$0<|z-1|<1$ ឃ.$1<|z-1|$

៣.ចូរពន្លាតអនុគមន៍ $f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}$ ជាស៊េរីម៉ាកឡូរ៉ាំងក្នុងដែនខាងក្រោម៖

ក.$|z|<1$ ខ.$|z|>2$

៤.ចូរពន្លាតអនុគមន៍ $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+3)}$ ជាស៊េរីម៉ាកឡូរ៉ាំងក្នុងដែនខាងក្រោម៖

ក.$1<|z|<3$ ខ.$|z|>3$

គ.$0<|z+1|<2$ ឃ.$|z|<1$

៥.ចូរពន្លាតអនុគមន៍ $f(z)=\frac{1}{z(z-3)}$ ជាស៊េរីម៉ាកឡូរ៉ាំងក្នុងដែនខាងក្រោម៖

ក.$0<|z|<3$ ខ.$|z|>3$ គ.$0<|z-3|<3$

ឃ.$|z-3|>3$ ង.$1<|z-4|<4$ ច.$1<|z+1|<4$

៦.ចូរពន្លាតអនុគមន៍ $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ ជាស៊េរីម៉ាកឡូរ៉ាំងក្នុងដែនខាងក្រោម៖

ក.$1<|z|<2$ ខ.$|z|>2$ គ.$0<|z-1|<1$ ឃ.$0<|z-2|<1$

៧.ចូរពន្លាតអនុគមន៍ $f(z)=\frac{z}{(z+1)(z-2)}$ ជាស៊េរីម៉ាកឡូរ៉ាំងក្នុងដែនខាងក្រោម៖

ក.$0<|z+1|<3$ ខ.$|z+1|>2$ គ.$1<|z|<2$ ឃ.$0<|z-2|<3$

៨.ចូរពន្លាតជាស៊េរីម៉ាកឡូរ៉ាំងនៃអនុគមន៍ $f(z)=\frac{1}{z(z-1)}$ ក្នុងដែនខាងក្រោម៖

ក.$0<|z|<1$ ខ.$1<|z|<+\infty$ គ.$0<|z-1|<1$ ឃ.$1<|z-1|<+\infty$

៩.ចូរពន្លាតជាស៊េរីម៉ាកឡូរ៉ាំងនៃអនុគមន៍ $f(z)=\frac{7z-2}{z^3-z^2-2z}$ ក្នុងដែនខាងក្រោម៖

ក.$0<|z+1|<1$ ខ.$1<|z+1|<3$ គ.$|z+1|>3$

១០.ចូរពន្លាតជាស៊េរីម៉ាកឡូរ៉ាំងនៃអនុគមន៍ $f(z)=\frac{1}{(z-1)^2(z-3)}$ ក្នុងដែនខាងក្រោម៖

ក. $0<|z-1|<2$ ខ. $0<|z-3|<2$

១១. ចូរពន្លាតជាស៊េរីម៉ាកឡូរ៉ាំងនៃអនុគមន៍ $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)^2}$ ក្នុងដែនខាងក្រោម៖

ក. $0<|z|<1$ ខ. $|z|>1$

១២. ចូរពន្លាតជាស៊េរីម៉ាកឡូរ៉ាំងនៃអនុគមន៍ $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-1)^3}$ ក្នុងដែនខាងក្រោម៖

ក. $0<|z-2|<1$ ខ. $0<|z-1|<1$

១៣. ចូរពន្លាតជាស៊េរីម៉ាកឡូរ៉ាំងនៃអនុគមន៍ $f(z)=\dfrac{z}{z^2-1}$ ក្នុងដែន $1<|z-2|<3$ ។

១៤. ចូររកស៊េរីតេល័រចំពោះអនុគមន៍ដែលបង្ហាញពីចំណុចដូចខាងក្រោម៖

(1). $f(z)=\cos z,\ z=\dfrac{\pi}{4}$ (2). $f(z)=\cos z,\ z=0$

(3). $f(z)=e^{2z},\ z=2i$ (4). $f(z)=\tanh z,\ z=0$

(5). $f(z)=\dfrac{z-1}{z+1}$ នៅក្នុងដែន $|z|<1$ (6). $f(z)=\dfrac{1}{z^2+4},\ z=-i$

(7). $f(z)=\dfrac{z-1}{z^2},\ z=1$ (8). $f(z)=\dfrac{1}{z^2-4z+3},\ z=4$

១៥. ចូរពន្លាតអនុគមន៍ខាងក្រោមជាស៊េរីឡូរ៉ាំង៖

(1). $f(z)=\dfrac{z-1}{(z+2)(z+3)},\ 2<|z|<3$

(2). $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ ចំពោះ $0<|z|<1$ និង $0<|z-1|<1$

(3). $f(z)=\dfrac{z+3}{z(z^2-z-2)}$ នៅក្នុង $1<|z|<2$

(4). $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)^2}$ នៅក្នុងដែន $0<|z|<1$ និង $0<|z-1|<1$

(5). $f(z)=\dfrac{z-1}{z^2}$ នៅក្នុង $|z-1|>1$

(6). $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)^2}$ នៅក្នុងដែន $|z|>1$

(7). $f(z)=\dfrac{1}{z^3-3z^2+2z}$ ត្រង់ $z=0$ ចំពោះ $(i)\ 1<|z|<2$ $(ii)\ |z|>2$

(8). $f(z)=\dfrac{z-1}{z^2-2z-3}$ ចំពោះ $(i)\ 1<|z|<3$ $(ii)\ |z|>3$

(9). $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z-2)},\ 0<|z|<2$ (10). $f(z)=\dfrac{1+2z}{z+z^2},\ 0<|z|<1$

មេរៀនទី៥៖ ទ្រឹស្តីបទរេស៊ីឌុយ

(RESIDUE THEOREM)

៥.១. ទ្រឹស្តីបទរេស៊ីឌុយកូស៊ី (Residue Cauchy Theorem)

៥.១.១.វិធីសាស្ត្ររករេស៊ីឌុយ **(Method of Finding Residues)**

ក.រេស៊ីឌុយត្រង់ប៉ូលងាយ **(Residues at simple pole)**

(*i*). បើអនុគមន៍ $f(z)$ មានប៉ូលងាយត្រង់ z_0 នោះគេបាន៖

$$\mathrm{Res}\left[f,z_0\right]=\lim_{z\to z_0}\left[\left(z-z_0\right)f\left(z\right)\right]$$

សម្រាយបញ្ជាក់

អនុគមន៍ $f(z)$ មានប៉ូលងាយត្រង់ z_0 យើងអាចពន្លាតជាស៊េរីម៉ាកឡូរ៉ាំង៖

$$f\left(z\right)=a_0+a_1\left(z-z_0\right)+a_2\left(z-z_0\right)^2+\ldots+\frac{b_1}{z-z_0}\qquad(*)$$

គុណអង្គទាំងពីរនៃ(*) នឹង $(z-z_0)$ រួចគណនាលីមីតកាលណា $z\to z_0$ ៖

$$\lim_{z\to z_0}\left[\left(z-z_0\right)f\left(z\right)\right]=\lim_{z\to z_0}\left[a_0\left(z-z_0\right)+a_1\left(z-z_0\right)^2+a_2\left(z-z_0\right)^3+\ldots+b_1\right]$$

$$\Rightarrow\lim_{z\to z_0}\left[\left(z-z_0\right)f\left(z\right)\right]=b_1$$

តែ $b_1=\mathrm{Res}\left[f,z_0\right]$ (តាមនិយមន័យ)

ដូចនេះ $\mathrm{Res}\left[f,z_0\right]=\lim_{z\to z_0}\left[\left(z-z_0\right)f\left(z\right)\right]$ (រូបមន្តត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់)

ឧទាហរណ៍១៖ គេឱ្យ $f\left(z\right)=\dfrac{2z+5}{z+1}$ ។ រក $\mathrm{Res}\left[f,-1\right]$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $f\left(z\right)=\dfrac{2z+5}{z+1}=2+\dfrac{3}{z+1}$

មានប៉ូលឯកតា $z=-1$

$$\mathrm{Res}\left[f,-1\right]=\lim_{z\to-1}\left[\left(z+1\right)f\left(z\right)\right]$$

$$\mathrm{Res}\left[f,-1\right]=\lim_{z\to-1}\left[\left(z+1\right)\cdot\frac{2z+5}{z+1}\right]$$

$$=\lim_{z\to-1}\left(2z+5\right)$$

$$=-2+5=3$$

$$\mathrm{Res}\left[f,-1\right]=3$$

ដូចនេះ $\mathrm{Res}\left[f,2\right]=3$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ គណនា $\mathrm{Res}\left(f,2\right)$ បើ $f\left(z\right)=\dfrac{z^2-2z+3}{z-2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $f(z)=\dfrac{(z^2-4z+4+2z-4+3)}{z-2}=z+\dfrac{3}{(z-2)}$

$$\text{Res}[f,2]=\lim_{z\to 2}\left[(z-2)\times\frac{z^2-2z+3}{z-2}\right]=\lim_{z\to 2}(z^2-2z+3)=3$$

ដូចនេះ $\text{Res}[f,2]=3$ ។

ឧទាហរណ៍៣៖ គេឱ្យ $f(z)=\dfrac{4-3z}{z(z-1)(z-2)}$ ។ រករេស៊ីឌុយនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ប៉ូលរបស់វា។

ដំណោះស្រាយ

ប៉ូលនៃអនុគមន៍គឺ $z=0, z=1, z=2$ (ប៉ូលងាយ)

$$\text{Res}[f,0]=\lim_{z\to 0}[zf(z)]=\lim_{z\to 0}\frac{4-3z}{(z-1)(z-2)}=2$$

$$\text{Res}[f,1]=\lim_{z\to 1}[(z-1)f(z)]=\lim_{z\to 1}\frac{4-3z}{z(z-2)}=-1$$

$$\text{Res}[f,2]=\lim_{z\to 2}[(z-2)f(z)]=\lim_{z\to 2}\frac{4-3z}{z(z-1)}=-1$$

ដូចនេះ $\text{Res}[f,0]=2, \text{Res}[f,1]=-1, \text{Res}[f,2]=-1$ ។

ឧទាហរណ៍៤៖ គេឱ្យ $f(z)=\dfrac{5z^2-4z+3}{(z+1)(z+2)(z+3)}$ ។ រករេស៊ីឌុយនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ប៉ូលរបស់វា។

ដំណោះស្រាយ

ប៉ូលនៃអនុគមន៍គឺ $z=-1,\ z=-2,\ z=-3$ (ប៉ូលងាយ)

$$\text{Res}[f,-1]=\lim_{z\to -1}[(z+1)f(z)]=\lim_{z\to -1}\frac{5z^2-4z+3}{(z+2)(z+3)}=6$$

$$\text{Res}[f,-2]=\lim_{z\to -2}[(z+2)f(z)]=\lim_{z\to -2}\frac{5z^2-4z+3}{(z+1)(z+3)}=-31$$

$$\text{Res}[f,-3]=\lim_{z\to -3}[(z+3)f(z)]=\lim_{z\to -3}\frac{5z^2-4z+3}{(z+1)(z+2)}=30$$

ដូចនេះ $\text{Res}[f,-1]=6, \text{Res}[f,-2]=-31, \text{Res}[f,-3]=30$ ។

ឧទាហរណ៍៥៖ គេឱ្យ $f(z)=\dfrac{z}{z^2+16}$ ។ រករេស៊ីឌុយនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ប៉ូលរបស់វា។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $f(z)=\dfrac{z}{z^2+16}=\dfrac{z}{(z-4i)(z+4i)}$ នោះគេបាន

ប៉ូលនៃអនុគមន៍គឺ $z=4i, z=-4i$ (ប៉ូលងាយ)

$$\operatorname{Res}[f,4i]=\lim_{z\to 4i}\left[(z-4i)f(z)\right]=\lim_{z\to 4i}\frac{(z-4i)z}{(z-4i)(z+4i)}=\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Res}[f,-4i]=\lim_{z\to -4i}\left[(z+4i)f(z)\right]=\lim_{z\to -4i}\frac{(z+4i)z}{(z+4i)(z-4i)}=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\operatorname{Res}[f,4i]=\frac{1}{2},\operatorname{Res}[f,-4i]=\frac{1}{2}$ ។

(*ii*). បើអនុគមន៍ $f(z)$ **មានរាង** $f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$ **ដែល** $g(z_0)\neq 0$ **និង** $h(z_0)=0$

នោះគេបាន៖ $\operatorname{Res}[f,z_0]=\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងមាន៖ $\operatorname{Res}[f,z_0]=\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)f(z)\right]$ (តាម (i))

តែ $f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$

យើងបាន៖ $\operatorname{Res}[f,z_0]=\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)g(z)}{h(z)}$ (រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$$\operatorname{Res}[f,z_0]=\lim_{z\to z_0}\frac{g(z)}{\dfrac{h(z)}{z-z_0}}$$

$$\operatorname{Res}[f,z_0]=\frac{\lim\limits_{z\to z_0}g(z)}{\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}}\quad,\ h(z_0)=0$$

$$\operatorname{Res}[f,z_0]=\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$ (រូបមន្តត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់)

ឧទាហរណ៍៦៖ រក $\operatorname{Res}[f,2]$ បើ $f(z)=\frac{z^2-2z+3}{z-2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $f(z)=\frac{z^2-2z+3}{z-2}$ ដែល $g(z)=z^2-2z+3,\ h(z)=z-2$

ដោយ $g(z)=z^2-2z+3\Rightarrow g(2)=(2)^2-2\cdot 2+3=3$

$h(z)=z-2$

$h'(z)=1\Rightarrow h'(2)=1$

ដូចនេះ $\operatorname{Res}[f,2]=\frac{g(2)}{h'(2)}=\frac{3}{1}=3$ ។

ឧទាហរណ៍៧៖ រក $\operatorname{Res}[f,2]$ បើ $f(z)=\frac{4-3z}{z(z-1)(z-2)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $f(z)=\dfrac{4-3z}{z(z-1)(z-2)}=\dfrac{\dfrac{4-3z}{z(z-1)}}{z-2}$

យក $g(z)=\dfrac{4-3z}{z(z-1)}\Rightarrow g(2)=\dfrac{4-3\cdot 2}{2(2-1)}=-1$

$h(z)=z-2$

$h'(z)=1\Rightarrow h'(2)=1$

យើងបាន $\text{Res}[f,2]=\dfrac{g(2)}{h'(2)}=\dfrac{-1}{1}=-1$ ។

ឧទាហរណ៍៨៖ គេឱ្យ $f(z)=\dfrac{1}{z^4+1}$ ។ រករេស៊ីឌុយត្រង់ប៉ូលរបស់វា ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $f(z)=\dfrac{1}{z^4+1}$

ប៉ូលនៃអនុគមន៍គឺ $z_0=e^{i\frac{\pi}{4}},z_1=e^{i\frac{3\pi}{4}},z_2=e^{i\frac{5\pi}{4}},z_3=e^{i\frac{7\pi}{4}}$ ដែលជាសុទ្ធជាប៉ូលងាយ។

យក $g(z)=1,h(z)=z^4+1,h'(z)=4z^3$

$$\text{Res}[f,z_0]=\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}=\frac{1}{4(z_0)^3}=\frac{z_0}{4(z_0)^3}=-\frac{1}{4}z_0=-\frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$=-\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{8}-i\frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$\text{Res}[f,z_1]=\frac{g(z_1)}{h'(z_1)}=\frac{1}{4(z_1)^3}=\frac{z_1}{4(z_1)^3}=-\frac{1}{4}z_1=-\frac{1}{4}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$=-\frac{1}{4}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}-i\frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$\text{Res}[f,z_2]=\frac{g(z_2)}{h'(z_2)}=\frac{1}{4(z_2)^3}=\frac{z_2}{4(z_2)^3}=-\frac{1}{4}z_2=-\frac{1}{4}e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$=-\frac{1}{4}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}+i\frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$\mathrm{Res}[f,z_3]=\frac{g(z_3)}{h'(z_3)}=\frac{1}{4(z_3)^3}=\frac{z_3}{4(z_3)^3}=-\frac{1}{4}z_3=-\frac{1}{4}e^{i\frac{7\pi}{4}}$$
$$=-\frac{1}{4}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{8}+i\frac{\sqrt{2}}{8}$$

ដូចនេះ $\mathrm{Res}[f,z_0]=-\frac{\sqrt{2}}{8}-i\frac{\sqrt{2}}{8},\mathrm{Res}[f,z_1]=\frac{\sqrt{2}}{8}-i\frac{\sqrt{2}}{8}$

$\mathrm{Res}[f,z_2]=\frac{\sqrt{2}}{8}+i\frac{\sqrt{2}}{8},\mathrm{Res}[f,z_3]=-\frac{\sqrt{2}}{8}+i\frac{\sqrt{2}}{8}$ ។

ឧទាហរណ៍៩៖ រក $\mathrm{Res}[f,1]$ បើ $f(z)=\frac{(2z+1)^2}{z(z-1)(z+2)}$ ។ (ចម្លើយ៖ $\mathrm{Res}[f,1]=3$)

ខ.រេស៊ីឌុយត្រង់ប៉ូលលំដាប់ $m,m\geq 1$ (Residues at a pole of Order m, m≥1)

បើអនុគមន៍ f មានប៉ូលលំដាប់ m ត្រង់ $z=z_0$ នោះគេបានរេស៊ីឌុយនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ z_0 កំណត់ដោយ $\mathrm{Res}[f,z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]^{(m-1)}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

អនុគមន៍ f មានប៉ូលលំដាប់ m ត្រង់ $z=z_0$ យើងបានស៊េរីម៉ាកឡូរ៉ាំងនៃ f ក្នុងដែន $0<|z-z_0|<R$ គឺ៖

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+\ldots+\frac{b_1}{z-z_0}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\ldots+\frac{b_m}{(z-z_0)^m}\text{ ដែល } b_m\neq 0 \quad (1)$$

គុណអង្គទាំងពីរនៃ (1) នឹង $(z-z_0)^m$ ៖ $(z-z_0)^m f(z)=a_0(z-z_0)^m+a_1(z-z_0)^{m+1}+\ldots$

$$\ldots+b_1(z-z_0)^{m-1}+b_2(z-z_0)^{m-2}+\ldots+b_m \quad (2)$$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃ (2) ចំនួន $(m-1)$ ដងធៀបនឹងអថេរ z រួចគណនាលីមីតពេល $z\to z_0$ ៖

$$\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]^{(m-1)}=\lim_{z\to z_0}\left[m!a_0(z-z_0)+(m-1)!b_1+\ldots\right]$$

$$\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]^{(m-1)}=(m-1)!b_1$$

$$\Rightarrow b_1=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]^{(m-1)}$$

តែ $b_1=\mathrm{Res}[f,z_0]$

ដូចនេះ $\mathrm{Res}[f,z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]^{(m-1)}$ (រូបមន្តត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់)

ឧទាហរណ៍១០៖ រក $\mathrm{Res}[f,1]$ បើ $f(z)=\frac{z^3+z+4}{(z-1)^2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

អនុគមន៍ f មាន $z=1$ ជាប៉ូលលំដាប់ពីរ(ប៉ូលឌុប)

យើងបាន $\text{Res}[f,1]=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to1}\left[(z-1)^2 f(z)\right]'$

$$\text{Res}[f,1]=\lim_{z\to1}\left[(z-1)^2\cdot\frac{z^3+z+4}{(z-1)^2}\right]'$$

$$\text{Res}[f,1]=\lim_{z\to1}\left(3z^2+1\right)=4$$

ដូចនេះ $\text{Res}[f,1]=4$ ។

ឧទាហរណ៍១១៖ គេឱ្យ $f(z)=\frac{1}{(z-1)^2(z-3)}$ ។រក $\text{Res}[f,1]$ និង $\text{Res}[f,3]$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងឃើញថា $z=1$ ជាប៉ូលលំដាប់២ និង $z=3$ ជាប៉ូលងាយ យើងបាន៖

$$\text{Res}[f,1]=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to1}\left[(z-1)^2 f(z)\right]'=\lim_{z\to1}\left(\frac{1}{z-3}\right)'$$

$$=\lim_{z\to1}\left[-\frac{1}{(z-3)^2}\right]=-\frac{1}{4}$$

$$\text{Res}[f,3]=\lim_{z\to3}\left[(z-3)f(z)\right]=\lim_{z\to3}\frac{1}{(z-1)^2}=\frac{1}{4}$$

ដូចនេះ $\text{Res}[f,1]=-\frac{1}{4},\text{Res}[f,3]=\frac{1}{4}$ ។

ឧទាហរណ៍១២៖ គេឱ្យ $f(z)=\frac{z+1}{z^2(z-2i)}$ ។ រក $\text{Res}[f,0]$ និង $\text{Res}[f,2i]$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងឃើញថា $z=0$ ជាប៉ូលលំដាប់២ និង $z=2i$ ជាប៉ូលងាយនៃអនុគមន៍ f ។

$$\text{Res}[f,0]=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to0}\left[z^2 f(z)\right]'=\lim_{z\to0}\left(\frac{z+1}{z-2i}\right)'$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{z-2i-(z+1)}{(z-2i)^2}$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{-2i-1}{(z-2i)^2}=\frac{-2i-1}{-4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}i$$

$$\text{Res}[f,2i]=\lim_{z\to2i}\left[(z-2i)f(z)\right]=\lim_{z\to2i}\frac{z+1}{z^2}=\frac{2i+1}{-4}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}i$$

ដូចនេះ $\text{Res}[f,0]=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}i,\ \text{Res}[f,2i]=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}i$ ។

ឧទាហរណ៍១៣៖ គណនា $\text{Res}[f,1]$ និង $\text{Res}[f,-3]$ បើ $f(z)=\dfrac{2z-1}{(z-1)^4(z+3)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងឃើញ $z=1$ ជាប៉ូលលំដាប់៤ និង $z=-3$ ជាប៉ូលងាយនៃអនុគមន៍ f ។

$$\text{Res}[f,1]=\frac{1}{(4-1)!}\lim_{z\to1}\left[(z-1)^4 f(z)\right]'''=\frac{1}{3!}\lim_{z\to1}\left(\frac{2z-1}{z+3}\right)'''$$

យក $p(z)=\dfrac{2z-1}{z+3},\ p'(z)=\dfrac{7}{(z+3)^2},\ p''(z)=-\dfrac{14}{(z+3)^3},\ p'''(z)=\dfrac{42}{(z+3)^4}$

យើងបាន $\text{Res}[f,1]=\dfrac{1}{6}\lim\limits_{z\to1}\dfrac{42}{(z+3)^4}=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{42}{256}=\dfrac{7}{256}$

$$\text{Res}[f,-3]=\lim_{z\to-3}\left[(z+3)f(z)\right]=\lim_{z\to-3}\frac{2z-1}{(z-1)^4}=-\frac{7}{256}$$

ដូចនេះ $\text{Res}[f,1]=\dfrac{7}{256},\ \text{Res}[f,-3]=-\dfrac{7}{256}$ ។

អនុវត្តន៍៖ រករេស៊ីឌុយនៃលំហាត់ខាងក្រោម៖

ក. រក $\text{Res}[f,a]$ បើ $f(z)=\dfrac{ze^z}{(z-a)^3}$ ។

ខ. រករេស៊ីឌុយនៃអនុគមន៍ $f(z)=\dfrac{e^z}{z^4+5z^3}$ ។

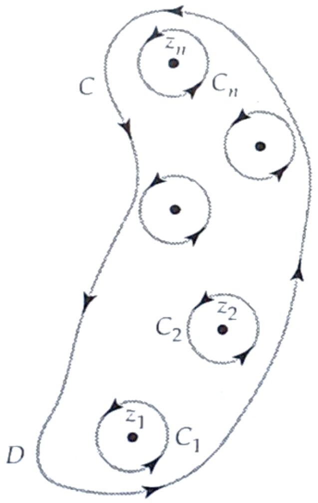
គ. គណនា $\text{Res}\left[f,\dfrac{\pi}{6}\right]$ បើ $f(z)=\dfrac{\sin z}{\left(z-\dfrac{\pi}{6}\right)^3}$ ។

៥.១.២.ទ្រឹស្តីបទរេស៊ីឌុយរបស់កូស៊ី (Cauchy's Residues Theorem)

បើ $f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគនៅលើឬខាងក្នុងខ្សែកោងបិទ C ហើយ $z_1,z_2,\dots,z_n$ ជាប៉ូលនៃអនុគមន៍ $f(z)$ ឋិតនៅខាងក្នុងខ្សែកោង C ទាំងអស់ នោះគេបាន៖

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i\left(\text{Res}[f,z_1]+\text{Res}[f,z_2]+\dots+\text{Res}[f,z_n]\right)$$

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\text{Res}[f,z_k]$$



រូបទី៥.១

សម្រាយបញ្ជាក់

- **រំលឹក៖** បើ z_0 ជាប៉ូលនៃអនុគមន៍ f នោះគេបាន $\oint_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}[f, z_0]$ ដែល z_0 នៅក្នុងគន្លង C ។

ក្នុងខ្សែកោងបិទ C យើងសង់រង្វង់ $C_1, C_2, ..., C_n$ មានផ្ចិត $z_1, z_2, ..., z_n$ រៀងគ្នា (នៅដាច់ៗពីគ្នា)

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ី គេបាន៖ $\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz + ... + \oint_{C_n} f(z)dz$

តែ $\oint_{C_1} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}[f, z_1]$, $\oint_{C_2} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}[f, z_2]$,...,

$\oint_{C_n} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}[f, z_n]$

ដូចនេះ គេបាន៖ $\oint_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}[f, z_1] + 2\pi i \operatorname{Res}[f, z_2] + ... + 2\pi i \operatorname{Res}[f, z_n]$ ។

$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}[f, z_1] + \operatorname{Res}[f, z_2] + ... + \operatorname{Res}[f, z_n] \right) = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f, z_k]$ ។

ឧទាហរណ៍១៤៖ គណនា $\oint_C \frac{5z-2}{z(z-1)} dz$ ដែល C ជារង្វង់ $|z| = 2$ មានទិសដៅប្រាស នឹងទ្រនិចនាឡិកា។

ដំណោះស្រាយ

តាង $f(z) = \frac{5z-2}{z(z-1)}$

ប៉ូលនៃអនុគមន៍ f គឺ $z = 0$, $z = 1$ (ឋិតនៅក្នុងដែនទាំងអស់)

តាមទ្រឹស្តីបទរេស៊ីឌុយកូស៊ី៖

$$\oint_C \frac{5z-2}{z(z-1)} dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}[f, 0] + \operatorname{Res}[f, 1] \right)$$

តែ $\operatorname{Res}[f, 0] = \lim_{z \to 0} [z f(z)] = \lim_{z \to 0} \frac{5z-2}{z-1} = 2$,

$\operatorname{Res}[f, 1] = \lim_{z \to 1} [(z-1) f(z)] = \lim_{z \to 1} \frac{5z-2}{z} = 3$

ដូចនេះ $\oint_C \frac{5z-2}{z(z-1)}dz = 2\pi i(2+3) = 10\pi i$ ។

ឧទាហរណ៍១៥៖ គណនា $\oint_{|z|=1} \frac{1+z}{z(2-z)}dz$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $f(z) = \frac{1+z}{z(2-z)}$

ប៉ូលនៃអនុគមន៍ f គឺ $z=0$, $z=2$

ចំពោះប៉ូល $z=2$ ឋិតនៅខាងក្រៅដែន នោះតាមទ្រឹស្តីបទរេស៊ីឌុយកូស៊ី យើងបាន៖

$$\oint_{|z|=1} \frac{1+z}{z(2-z)}dz = 2\pi i \operatorname{Res}[f,0]$$

តែ $\operatorname{Res}[f,0] = \lim_{z\to 0}[zf(z)] = \lim_{z\to 0}\frac{1+z}{2-z} = \frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\oint_{|z|=1} \frac{1+z}{z(2-z)}dz = 2\pi i \times \frac{1}{2} = \pi i$ ។

ឧទាហរណ៍១៦៖ គណនា $\oint_C \frac{dz}{z^3(z+4)}$ តាមទិសដៅប្រាសនឹងទ្រនិចនាឡិកាជុំវិញរង្វង់ខាងក្រោម៖

ក. $|z|=2$ ខ. $|z+2|=3$

ដំណោះស្រាយ

ក.អនុគមន៍មានប៉ូលលំដាប់៣ ត្រង់ $z=0$ និង ប៉ូលងាយត្រង់ $z=-4$ ។

ចំពោះប៉ូល $z=-4$ ឋិតនៅខាងក្រៅដែន យើងបានតាមទ្រឹស្តីបទរេស៊ីឌុយ៖

$$\oint_C \frac{dz}{z^3(z+4)} = 2\pi i \operatorname{Res}[f,0]$$

$$\operatorname{Res}[f,0] = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left[z^3 f(z)\right]'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{z+4}\right)'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left[-\frac{1}{(z+4)^2}\right]'$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{2}{(z+4)^3} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{64} = \frac{1}{64}$$

ដូចនេះ $\oint_C \frac{dz}{z^3(z+4)} = 2\pi i \times \frac{1}{64} = \frac{\pi}{32} i$ ។

ខ. យើងឃើញថាប៉ូលទាំងពីរសុទ្ធតែឋិតនៅខាងក្នុងដែន $|z+2|=3$ តាមទ្រឹស្តីបទរេស៊ីឌុយ៖

$$\oint_C \frac{dz}{z^3(z+4)} = 2\pi i\left(\operatorname{Res}[f,0] + \operatorname{Res}[f,-4]\right)$$

តែ $\operatorname{Res}[f,0] = \frac{1}{64}, \operatorname{Res}[f,-4] = \lim_{z\to -4}\left[(z+4)f(z)\right] = \lim_{z\to -4}\frac{1}{z^3} = -\frac{1}{64}$

ដូចនេះ $\oint_C \frac{dz}{z^3(z+4)} = 2\pi i\left(\frac{1}{64}-\frac{1}{64}\right) = 0$ ។

ឧទាហរណ៍១៧៖ គណនា $\oint_C \frac{2z+6}{z^2+4}dz$ ដែលគន្លង C ជារង្វង់ $|z-i|=2$ ។

ដំណោះស្រាយ

យក $f(z) = \frac{2z+6}{z^2+4} = \frac{2z+6}{(z+2i)(z-2i)}$

ប៉ូលនៃអនុគមន៍ f គឺ $z=-2i$ និង $z=2i$ ដែលសុទ្ធជាប៉ូលងាយ។

ប៉ូល $z=-2i$ ឋិតនៅខាងក្រៅដែន $|z-i|=2$ តាមទ្រឹស្តីបទរេស៊ីឌុយ៖

$$\oint_C \frac{2z+6}{z^2+4}dz = 2\pi i \operatorname{Res}[f,2i]$$

$$\operatorname{Res}[f,2i] = \lim_{z\to 2i}\left[(z-2i)f(z)\right] = \lim_{z\to 2i}\frac{2z+6}{z+2i} = \frac{4i+6}{4i} = 1+\frac{3}{2}i$$

ដូចនេះ $\oint_C \frac{2z+6}{z^2+4}dz = 2\pi i \times \frac{3+2i}{2i} = \pi(3+2i)$ ។

ឧទាហរណ៍១៨៖ គណនា $\oint_C \frac{1}{z^2+4z+13}dz$ ដែលគន្លង C ជារង្វង់ $|z-3i|=3$ ។

ដំណោះស្រាយ

យក $f(z) = \frac{1}{z^2+4z+13} = \frac{1}{\left[z-(-2+3i)\right]\left[z-(-2-3i)\right]}$

ប៉ូលនៃអនុគមន៍ f គឺ $z_1=-2+3i$ និង $z_2=-2-3i$ ដែលសុទ្ធជាប៉ូលងាយ។

ប៉ូល $z_2=-2-3i$ ឋិតនៅខាងក្រៅដែន $|z-3i|=3$ តាមទ្រឹស្តីបទរេស៊ីឌុយ៖

$$\oint_C \frac{1}{z^2+4z+13}dz = 2\pi i \operatorname{Res}[f,z_1]$$

$$\operatorname{Res}[f,z_1] = \lim_{z\to -2-3i}\left[(z+2+3i)f(z)\right] = \lim_{z\to -2-3i}\frac{1}{z-(-2+3i)} = \frac{1}{6i}$$

ដូចនេះ $\oint_C \frac{1}{z^2+4z+13}dz = 2\pi i \times \frac{1}{6i} = \frac{\pi}{3}$ ។

ឧទាហរណ៍១៩៖ គណនា $\oint_C \frac{z}{z^4-1}dz$ ដែល C ជារង្វង់ $|z|=2$ ។

ដំណោះស្រាយ

យក $f(z) = \frac{z}{z^4-1} = \frac{z}{(z^2-1)(z^2+1)} = \frac{z}{(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)}$

ប៉ូលនៃអនុគមន៍គឺ $z=1, z=-1, z=i, z=-i$ សុទ្ធតែឋិតនៅខាងក្នុងដែន $|z|=2$ ។

$$\operatorname{Res}[f,1]=\lim_{z\to 1}\left[(z-1)f(z)\right]=\lim_{z\to 1}\frac{z}{(z+1)(z-i)(z+i)}=\frac{1}{2(1-i)(1+i)}=\frac{1}{4}$$

$$\operatorname{Res}[f,-1]=\lim_{z\to -1}\left[(z+1)f(z)\right]=\lim_{z\to -1}\frac{z}{(z-1)(z-i)(z+i)}=\frac{-1}{-2(-1-i)(-1+i)}=\frac{1}{4}$$

$$\operatorname{Res}[f,i]=\lim_{z\to i}\left[(z-i)f(z)\right]=\lim_{z\to i}\frac{z}{(z-1)(z+1)(z+i)}=\frac{1}{2i(i-1)(1+i)}=-\frac{1}{4}$$

$$\operatorname{Res}[f,-i]=\lim_{z\to -i}\left[(z+i)f(z)\right]=\lim_{z\to -i}\frac{z}{(z-1)(z+1)(z-i)}=\frac{-1}{-2i(-1-i)(1-i)}=-\frac{1}{4}$$

តាមទ្រឹស្តីបទរេស៊ីឌុយ យើងបាន៖

ដូចនេះ $\oint_C \frac{z}{z^4-1}dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}[f,1]+\operatorname{Res}[f,-1]+\operatorname{Res}[f,i]+\operatorname{Res}[f,-i]\right)$

$$=2\pi i\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)=0$$ ។

៥.២. អាំងតេក្រាលកំណត់អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

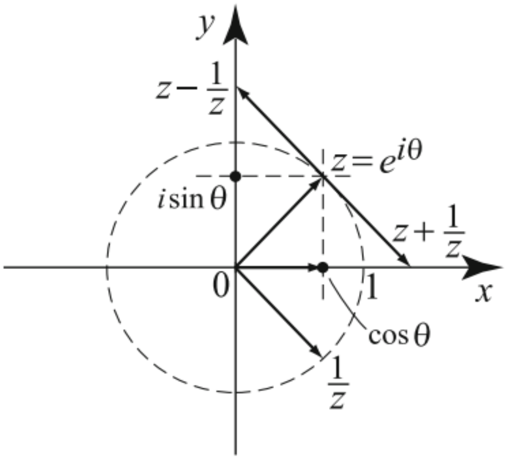
យើងពិនិត្យមើលអាំងតេក្រាលដែលមានទម្រង់

$\int_0^{2\pi} f(\sin\theta,\cos\theta)d\theta \quad (1)$ នៅពេល

$f(\cos\theta,\sin\theta)$ គឺជាអនុគមន៍សនិទាននៃ $\cos\theta$ និង $\sin\theta$ ជាមួយនឹងមេគុណចំនួនពិតមួយ និង ភាគបែងមិនសូន្យ នៅលើចន្លោះ $[0,2\pi]$ ។ ជាឧទាហរណ៍៖

អាំងតេក្រាល $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}$ និង

$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2(2\theta)}{4+2\sin\theta\cos\theta}d\theta$ គឺជាទម្រង់នៃ (1) ។



រូបទី៥.២សំណង់រូប $\cos\theta$ និង $\sin\theta$

គោលដៅរបស់យើងគឺបំលែងទម្រង់អាំងតេក្រាលកំណត់ (1) ទៅក្នុងគន្លងអាំងតេក្រាលមួយដែលត្រូវបានគណនាដោយប្រើប្រាស់ទ្រឹស្តីបទសំណល់។

តាង $I=\int_0^{2\pi} f(\sin\theta,\cos\theta)d\theta$ ដែល $f(\sin\theta,\cos\theta)$ ជាអនុគមន៍សនិទាននៃ $\sin\theta$ និង $\cos\theta$ ។ ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាលយើងយក $z=e^{i\theta}$ នោះ $dz = ie^{i\theta}d\theta = iz\,d\theta$

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=\frac{z^2+1}{2z}$$

$$\sin\theta=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)=\frac{z^2-1}{2iz}$$

$$|z|=\left|e^{i\theta}\right|=1$$

ដោយជំនួសតម្លៃទៅក្នុងអាំងតេក្រាលគេបាន $I=\oint_C f(z)dz$ ដែល C ជារង្វង់ឯកតា $|z|=1$

ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទរេស៊ីឌុយរបស់កូស៊ីគេបាន

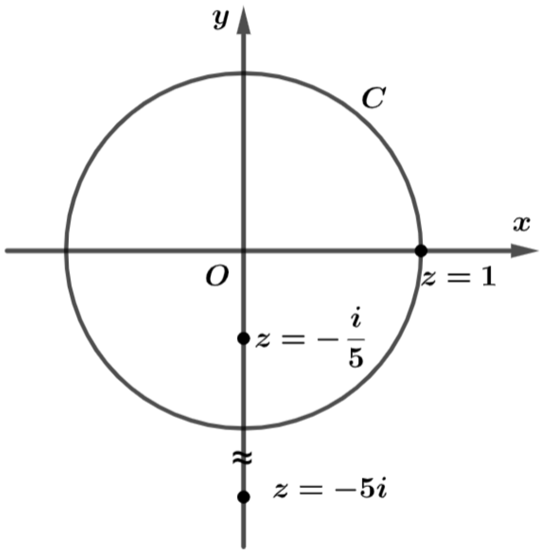
$I=\int_0^{2\pi} f(\sin\theta,\cos\theta)d\theta=2\pi i\times$ (ផលបូកនៃរេស៊ីឌុយទាំងអស់ត្រង់ប៉ូលនៅក្នុងរង្វង់ឯកតា $|z|=1$) ឬ $\int_0^{2\pi} f(\sin\theta,\cos\theta)d\theta=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\text{Res}[f,z_k]$

ឧទាហរណ៍២០៖ គណនា $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{13+5\sin\theta}$ ដោយប្រើអាំងតេក្រាលខ្សែកោង។

ដំណោះស្រាយ

(១). តាង $I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{13+5\sin\theta}$

ពិនិត្យលើគន្លង C ដែលមានរង្វង់ឯកតា $|z|=1$ ដូចរូប។



រូបទី៥.៣

ដោយ $z=e^{i\theta}, d\theta=\frac{dz}{iz}, \sin\theta=\frac{z^2-1}{2iz}$

(២). គេបាន $I=\int_C\frac{\frac{dz}{iz}}{13+5\left(\frac{z^2-1}{2iz}\right)}$

$$=2\int_C\frac{dz}{5z^2+26iz-5} \qquad (1)$$

(៣). តាង $f(z)=\frac{1}{5z^2+26iz-5}$

មានប៉ូល $z=\frac{-26i\pm\sqrt{(26i)^2-4(5)(-5)}}{10}$

$$=\frac{-26i\pm\sqrt{-576}}{10}=\frac{-26i\pm 24i}{10}=-\frac{i}{5},-5i$$

មានន័យថា $f(z)=\frac{1}{5\left(z+\frac{i}{5}\right)(z+5i)}$ $\quad\left[\because ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)\right]$

(៤). ចំពោះ $z=-\frac{i}{5}, |z|=\left|-\frac{i}{5}\right|=\frac{1}{5}<1$

គេបាន $z=-\frac{i}{5}$ នៅខាងក្នុងរង្វង់ C

ចំពោះ $z=-5i, |z|=|-5i|=5>1$

គេបាន $z=-5i$ នៅខាងក្រៅរង្វង់ C

(៥). $\text{Res}\left[f(z); z=-\frac{i}{5}\right]=\lim_{z\to-\frac{i}{5}}\left[\left(z+\frac{i}{5}\right)f(z)\right]$

$$=\lim_{z\to-\frac{i}{5}}\frac{1}{5(z+5i)}=\frac{1}{5\left(-\frac{i}{5}+5i\right)}=\frac{1}{24i}$$

(៦). ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទរេស៊ីឌុយកូស៊ី $\int_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\text{Res}[f,z_k]$

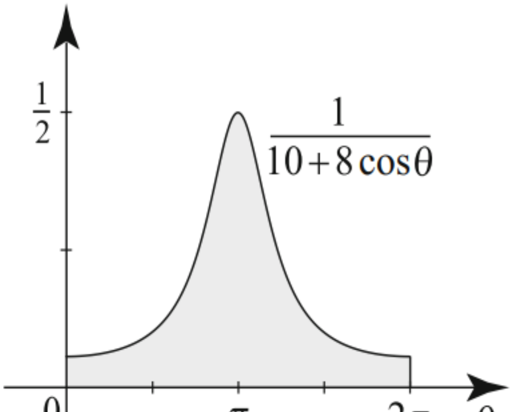
គេបាន $\int_C f(z)dz=2\pi i\,\text{Res}\left[f(z), z=-\frac{i}{5}\right]$

$$\int_C\frac{dz}{5z^2+26iz-5}=2\pi i\left(\frac{1}{24i}\right)=\frac{\pi}{12}$$

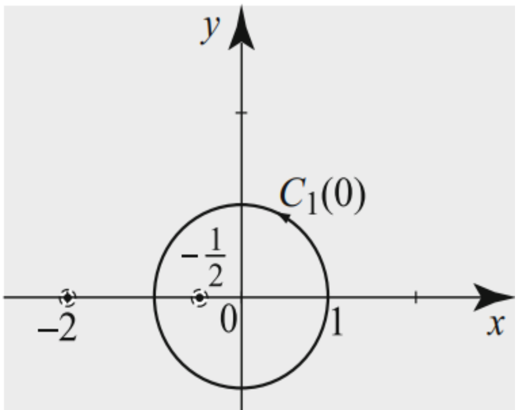
ជំនួសក្នុងសមីការ(1)គេបាន $I=2\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\pi}{6}$

ដូចនេះ $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{13+5\sin\theta}=\frac{\pi}{6}$ ។

ឧទាហរណ៍២១៖ គណនា $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{10+8\cos\theta}$ ។



រូបទី៥.៤អាំងតេក្រាលកំណត់



រូបទី៥.៥គន្លង និងប៉ូលចំពោះគន្លងអាំងតេក្រាល

ដំណោះស្រាយ

តាង $z=e^{i\theta}$ ដែល θ កំណត់ពី 0 ទៅ 2π ហើយ z ជាស្នាមនៅលើរង្វង់ឯកតា $C_1(0)$ នៅក្នុងទិសដៅវិជ្ជមាន។ ប្រើការជំនួសយើងនឹងបម្លែងពីអាំងតេក្រាលដែលឱ្យទៅក្នុងគន្លងអាំងតេក្រាលដូចតទៅ៖

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{10+8\cos\theta}=\int_{C_1(0)}\frac{-i\frac{dz}{z}}{10+\frac{8}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}=-i\int_{C_1(0)}\frac{dz}{4z^2+10z+4}$$

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាលចុងក្រោយយើងប្រើរេស៊ីឌុយយើងដោះស្រាយសមីការ

$$4z^2+10z+4=4(z+2)\left(z+\frac{1}{2}\right)=0$$

យើងបាន $z=-2$ និង $z=-\dfrac{1}{2}$ (មើលរូបទី៥.៥) ។ ដូច្នេះមានចំណុចទោលតែមួយនៅក្នុងថាសឯកតាគឺជាប៉ូលងាយត្រង់ $-\dfrac{1}{2}$ នៅក្នុងរង្វង់។ យើងអាចកំណត់

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{4z^2+10z+4},-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\frac{d}{dz}\left(4z^2+10z+4\right)\Big|_{z=-\frac{1}{2}}}=\frac{1}{8\left(-\frac{1}{2}\right)+10}=\frac{1}{6}$$

តាមទ្រឹស្តីបទរេស៊ីឌុយដោយសន្និដ្ឋានថា

$$\int_{C_1(0)}\frac{dz}{4z^2+10z+4}=\frac{2\pi i}{6}=\frac{\pi i}{3}$$

និង $$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{10+8\cos\theta}=-i\int_{C_1(0)}\frac{dz}{4z^2+10z+4}=\frac{\pi}{3}$$

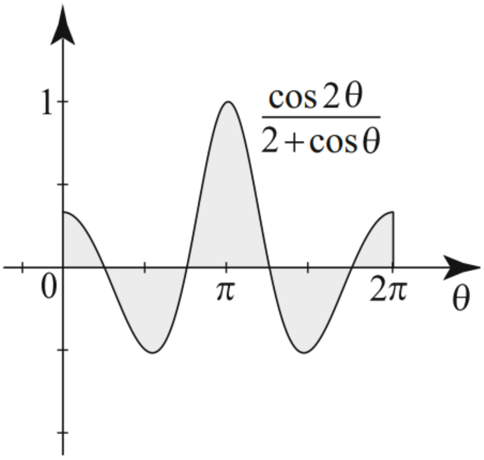
តាង n ជាចំនួនគត់វ៉ឺឡាទីប និង $z=e^{i\theta}$ ។ តាមឯកលក្ខណៈភាព De Moivre គេបាន៖

$$z^n=e^{in\theta}=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

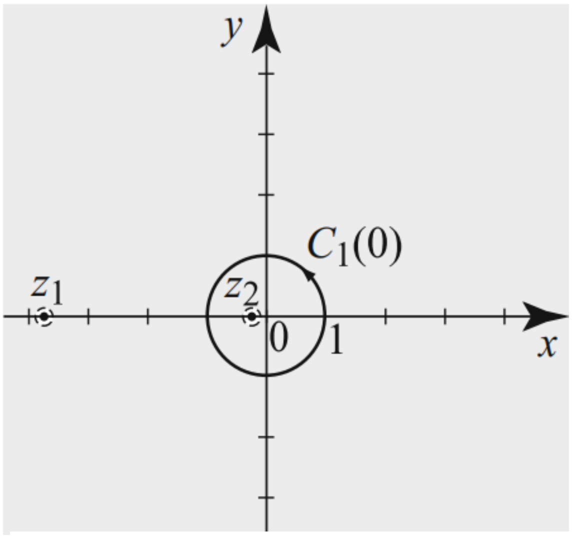
និង $$\frac{1}{z^n}=e^{-in\theta}=\cos n\theta-i\sin n\theta$$

ធ្វើការបូក និងដកសមភាពខាងលើគេបាន $\cos\theta=\dfrac{1}{2}\left(z^n+\dfrac{1}{z^n}\right)$ និង $\sin\theta=\dfrac{1}{2i}\left(z^n-\dfrac{1}{z^n}\right)$

ឧទាហរណ៍២២៖ គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ (មើលរូបភាព៥.៦) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{2+\cos\theta}d\theta$ ។



រូបទី៥.៦អាំងតេក្រាលកំណត់



រូបទី៥.៧គន្លង និងប៉ូលចំពោះគន្លងអាំងតេក្រាល

ដំណោះស្រាយ

ដោយប្រើ $\cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=\frac{z^2+1}{2z}$ និង $\sin\theta=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)=\frac{z^2-1}{2iz}$

ចំពោះ $n=2$ គេបាន៖

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{2+\cos\theta}=-i\int_{C_1(0)}\frac{\frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)}{2+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\cdot\frac{dz}{z}=-i\int_{C_1(0)}\frac{z^4+1}{z^2\left(z^2+4z+1\right)}dz$$

គណនាអាំងតេក្រាលចុងក្រោយដោយប្រើរេស៊ីឌុយ។ ដោយ $\frac{1}{z^2}$ មានប៉ូលលំដាប់ 2 ត្រង់ $z_0=0$

តាមទ្រឹស្តីបទចំពោះ $m=2$ យើងបាន៖

$$\operatorname{Re}s\left[\frac{z^4+1}{z^2\left(z^2+4z+1\right)}\right]=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\frac{z^4+1}{z^2+4z+1}=\lim_{z\to 0}\frac{4z^3\left(z^2+4z+1\right)-\left(z^4+1\right)(2z+4)}{\left(z^2+4z+1\right)^2}=-4$$

ឫសនៃសមីការ $z^2+4z+1=0$ គឺ $z_1=-2-\sqrt{3}\approx-3.7$ និង $z_2=-2+\sqrt{3}\approx-0.27$ (រូបទី៥.៧)

ចំពោះ z_2 គឺខាងក្នុងថាសឯកតាហើយ z_2 ជាប៉ូលងាយ យើងគណនារេស៊ីឌុយនៅត្រង់ z_2 គេបាន៖

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^4+1}{z^2}\cdot\frac{1}{\left(z^2+4z+1\right)},-2+\sqrt{3}\right)=\frac{\left(-2+\sqrt{3}\right)^4+1}{\left(-2+\sqrt{3}\right)^2}\cdot\frac{1}{\frac{d}{dz}\left(z^2+4z+1\right)\Big|_{-2+\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{\left(-2+\sqrt{3}\right)^4+1}{\left(-2+\sqrt{3}\right)^2\left(2\sqrt{3}\right)}=\frac{7}{\sqrt{3}}$$

តាមទ្រឹស្តីបទរេស៊ីឌុយសន្មតថា

$$\int_{C_1(0)}\frac{z^4+1}{z^2\left(z^2+4z+1\right)}dz=2\pi i\left(-4+\frac{7}{\sqrt{3}}\right)$$

និង $\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{2+\cos\theta}d\theta=-i\int_{C_1(0)}\frac{z^4+1}{z^2\left(z^2+4z+1\right)}dz=2\pi\left(-4+\frac{7}{\sqrt{3}}\right)\approx 0.26$

ឧទាហរណ៍ខាងលើជាអាំងតេក្រាលដែលត្រូវបានដោះស្រាយនៅចន្លោះ $[0,2\pi]$។

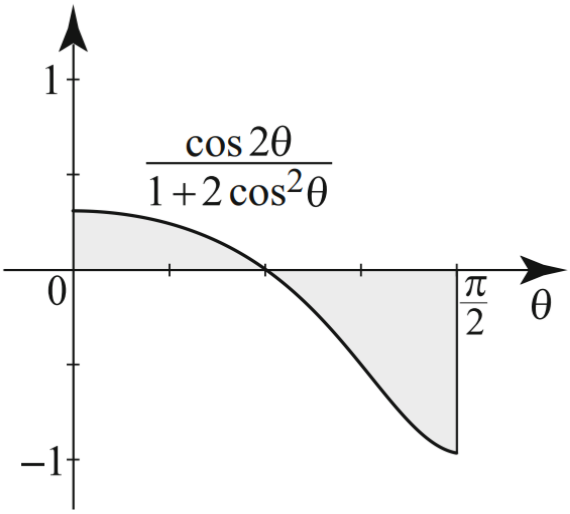
អាំងតេក្រាលនៅចន្លោះ $[0,\pi]$ អាចត្រូវបានដោះស្រាយ(handle) បើអនុគមន៍គូ និងខួប 2π ។ ក្នុងករណីនេះគឺ

$$\int_0^{\pi}f(\theta)d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}f(\theta)d\theta$$

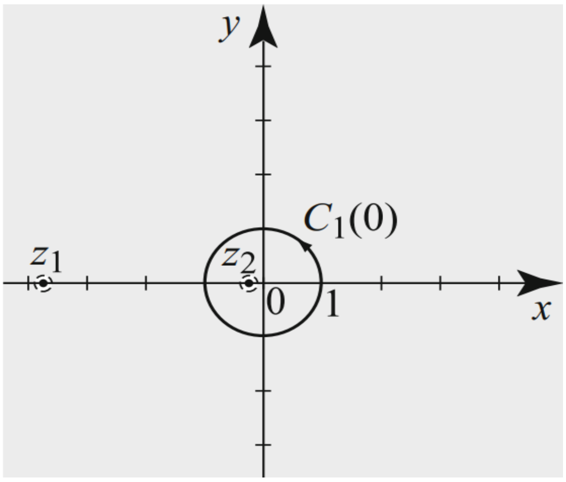
សមភាពទី១កើតឡើងដោយសារអនុគមន៍គូ និងសមភាពទី២ជាវិបាកមួយនៃចំនួនពិតដែលអនុគមន៍មានខួប 2π និងអាំងតេក្រាលដូចគ្នាគ្រប់ចន្លោះនៃប្រវែង 2π ។

ឧទាហរណ៍២៣៖ គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ (មើលរូបភាព៥.៨ និង៥.៩)។

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2\theta}{1+2\cos^2\theta}d\theta$$



រូបទី៥.៨អាំងតេក្រាលកំណត់



រូបទី៥.៩គន្លង និងប៉ូលចំពោះគន្លងអាំងតេក្រាល

ដំណោះស្រាយ

ដំបូងយើងប្រើមុំឌុប $2\cos^2\theta=1+\cos 2\theta$ និងបន្ទាប់មកប្តូរអថេរ $\theta'=2\theta$ នោះគេបាន

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2\theta}{2+\cos 2\theta}d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\cos\theta'}{2+\cos\theta'}d\theta'$$

អាំងតេក្រាលនៅចន្លោះ$[0,\pi]$មានអនុគមន៍គូមួយ នោះយើងមាន

$$I=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{2+\cos 2\theta}d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{2+\cos\theta-2}{2+\cos\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\theta+\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{-2}{2+\cos\theta}d\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}$$

ពេលនេះយើងគណនាអាំងតេក្រាលចុងក្រោយនេះដោយវិធីសាស្ត្ររេស៊ីឌុយ។

តាង $z=e^{i\theta}$, $\cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, $d\theta=\frac{dz}{iz}$, នោះយើងទទួលបាន

$$I=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{i}\int_{C_1(0)}\frac{dz}{z^2+4z+1}$$

អនុគមន៍ $\frac{1}{z^2+4z+1}=\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}$ មានប៉ូលងាយនៅត្រង់ $z_1=-2-\sqrt{3}$ និង $z_2=-2+\sqrt{3}$ ហើយ z_2 ជាប៉ូលនៅក្នុងរង្វង់ $C_1(0)$; មើលរូបភាព៥.៩។

នោះគេបានរេស៊ីឌុយនៅ z_2 គឺ

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)},z_2\right)=\lim_{z\to z_2}(z-z_2)\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}=\frac{1}{z_2-z_1}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

ដូចនេះ $I=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{i}2\pi i\frac{1}{2\sqrt{3}}=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$។

ទោះបីជាអាំងតេក្រាលនៅផ្នែកនេះគឺពិសេសវាមានការអនុវត្តដ៏ចាំបាច់រួមបញ្ចូលទាំងការគណនានៃស៊េរីហ្វួរីយេពិតប្រាកដ។

ឧទាហរណ៍២៤៖ កំណត់អាំងតេក្រាល $I=\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{5+4\cos\theta}d\theta$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $I=\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{5+4\cos\theta}d\theta$

ដោយ $\cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, $\sin\theta=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$

នោះ $I=\int_C\frac{\left[\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]^2}{5+4\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]}\frac{dz}{iz}$

$$I=-\frac{1}{4i}\int_C\frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2\left(2z^2+5z+2\right)}dz$$

បញ្ជាក់អាំងតេក្រាល $g(z):=\frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2\left(2z^2+5z+2\right)}=\frac{\left(z^2-1\right)^2}{2z^2\left(z+\frac{1}{2}\right)(z+2)}$

តម្លៃប៉ូលងាយ $z=-\frac{1}{2}, z=-2$ ហើយមានប៉ូលលំដាប់២ត្រង់ 0 នៃអនុគមន៍ g ។

មិនតែប៉ុណ្ណោះ ចំពោះ $-\frac{1}{2}$ ហើយ 0 ស្ថិតនៅខាងក្នុងរង្វង់ C ។

$$I=-\frac{1}{4i}\cdot 2\pi i\left[\operatorname{Res}\left(g;-\frac{1}{2}\right)+\operatorname{Res}(g;0)\right]$$

យើងប្រើប្រាស់រូបមន្តផ្នែកមុន យើងបាន៖

$$\operatorname{Res}\left(g,-\frac{1}{2}\right)=\lim_{z\to-\frac{1}{2}}\left(z+\frac{1}{2}\right)g(z)=\lim_{z\to-\frac{1}{2}}\frac{\left(z^2-1\right)^2}{2z^2(z+2)}=\frac{3}{4}$$

និង

$$\operatorname{Res}(g,0)=\lim_{z\to0}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left[z^2g(z)\right]=\lim_{z\to0}\frac{d}{dz}\left[\frac{\left(z^2-1\right)^2}{2z^2+5z+2}\right]$$

$$=\left.\frac{\left(2z^2+5z+2\right)\cdot2\left(z^2-1\right)2z-\left(z^2-1\right)^2(4z+5)}{\left(2z^2+5z+2\right)^2}\right|_{z=0}=\frac{5}{4}$$

ដូចនេះ $I=-\frac{1}{4i}2\pi i\left[\frac{3}{4}-\frac{5}{4}\right]=\frac{\pi}{4}$ ។

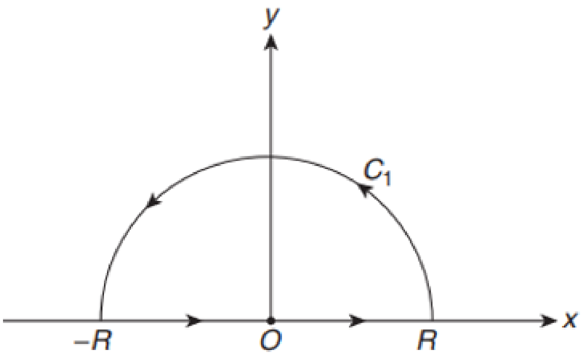
យើងពិនិត្យនៅក្នុងការគណនានេះ យើងសង្កេតឃើញថា អាំងតេក្រាលនៃឧទាហរណ៍ខាងលើគឺ ជាចំនួនពិតនិងមិនវិជ្ជមាន ដូចច្នេះវាជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដែលស្របនិងដំណោះស្រាយរបស់

យើងនៃ $\frac{\pi}{4}$។

៥.៣. អាំងតេក្រាលអ៊ីមប្រូពើអនុគមន៍ សនិទាន និងអ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

៥.៤.១. អាំងតេក្រាលអ៊ីមប្រូពើអនុគមន៍សនិទាន

តាង $I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ ដែល $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ ហើយដឺក្រេ $Q(x)$ ធំជាងដឺក្រេរបស់ $P(x)$ យ៉ាងហោចណាស់ក៏ 2 ដែរ និង $Q(x)$ មិនមានឫសពិតទេ។ ដើម្បីគណនា $\int_C f(z)dz$ ដែល C ជាគន្លងពាក់កណ្ដាលរង្វង់ខាងលើ C_1 ដែលមានកាំ R និងផ្ចិតនៅចន្លោះផ្នែកអ័ក្សអាប់ស៊ីសពី $-R$ ទៅ R ដូចរូប។



រូបទី៥.១០

$$\int_C f(z)dz=\int_{C_1} f(z)dz+\int_{-R}^{R} f(x)dx$$

តាមទ្រឹស្ដីបទរេស៊ីឌុយកូស៊ី

$\int_C f(z)dz=2\pi i$ (ផលបូកនៃរេស៊ីឌុយត្រង់ប៉ូលនៅពាក់កណ្ដាលខាងលើប្លង់ z)

គេបាន $\int_{C_1} f(z)dz+\int_{-R}^{R} f(x)dx=2\pi i$ (ផលបូករេស៊ីឌុយ)

យកលីមីត $R\to\infty, \lim_{R\to\infty}\int_{C_1} f(z)dz+\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx=2\pi i$ (ផលបូករេស៊ីឌុយ)

តាមកូស៊ីគេបាន $\lim_{R\to\infty}\int_{C_1} f(z)dz=0$

ដូចនេះ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=2\pi i$។

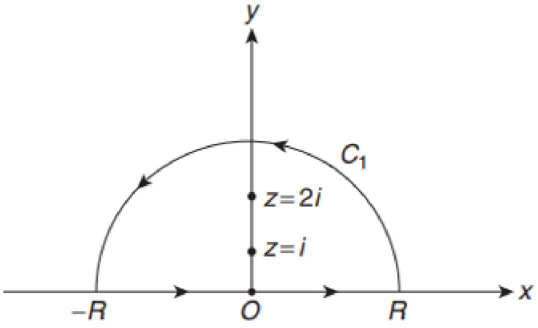
ឧទាហរណ៍២៥៖ គណនា $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$ ដោយប្រើអាំងតេក្រាលខ្សែកោង ឬគន្លងអាំងតេក្រាល(Contour integration)។

ដំណោះស្រាយ

រំឭក៖ Contour integralគឺជាអាំងតេក្រាល $\int_C f(z)dz$ នៃអនុគមន៍ f នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិចលើខ្សែកោង C ជាទូទៅខ្សែកោងបិទនៅក្នុងប្លង់។

(១). តាង $\int_C f(z)dz = \int_C \frac{z^2dx}{(z^2+1)(z^2+4)}$

ពិនិត្យគន្លងពាក់កណ្ដាលរង្វង់ខាងលើ C_1 ដែលមានកាំ R និងផ្ចិតនៅចន្លោះផ្នែកអ័ក្សអាប់ស៊ីសពី $-R$ ទៅ R ដូចរូប។



រូបទី៥.១១

(២). តាង $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}$

ប៉ូលដែលកំណត់ដោយ $(z^2+1)(z^2+4)=0$ គឺ

$z = \pm i, \pm 2i$

នោះគេបាន $f(z) = \frac{z^2}{(z+i)(z-i)(z+2i)(z-2i)}$

(៣). ចំពោះប៉ូល $z=i$ និង $z=2i$ នៅផ្នែកខាងក្នុងរង្វង់ C

(៤). $\text{Res}[f(z); z=i] = \lim_{z\to i}[(z-i)f(z)]$

$$= \lim_{z\to i}\frac{z^2}{(z+i)(z+2i)(z-2i)}$$

$$= \frac{i^2}{(2i)(3i)(-i)}$$

$$= -\frac{1}{6i} = \frac{1}{6}i$$

$$\text{Res}[f(z); z=2i] = \lim_{z\to 2i}[(z-2i)f(z)]$$

$$= \lim_{z\to 2i}\frac{z^2}{(z+i)(z-i)(z+2i)}$$

$$= \frac{4i^2}{(3i)(2i)(4i)}$$

$$= \frac{-4}{-12i} = -\frac{1}{3}i$$

(៥). $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i$ (ផលបូករេស៊ីឌុយ)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = 2\pi i\left(\frac{1}{6}i - \frac{1}{3}i\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{3}$$

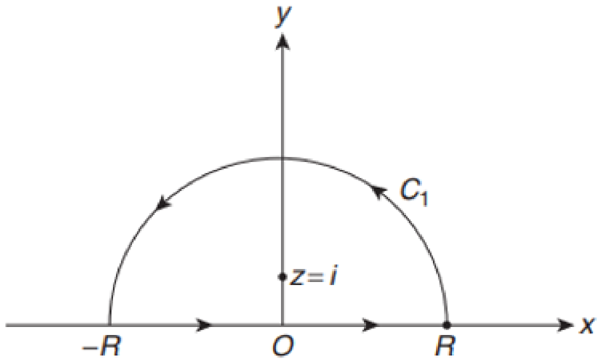
ដូចនេះ $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{\pi}{3}$ ។

ឧទាហរណ៍២៦៖ គណនា $\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}$ ដោយប្រើអាំងតេក្រាលខ្សែកោង ឬគន្លងអាំងតេក្រាល។

ដំណោះស្រាយ

(១). តាង $\int_C f(z)dz=\int_C\frac{dx}{x^2+1}$

ពិនិត្យគន្លងពាក់កណ្ដាលរង្វង់ខាងលើ C_1 ដែលមានកាំ R និងផ្ចិតនៅចន្លោះផ្នែកអ័ក្សអាប់ស៊ីសពី $-R$ ទៅ R ដូចរូប។



រូបទី៥.១២

(២). តាង $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$

ប៉ូលដែលកំណត់ដោយ $z^2+1=0$

គឺ $z=\pm i$ នោះគេបាន $f(z)=\frac{1}{(z+i)(z-i)}$

(៣). ចំពោះប៉ូល $z=i$ នៅផ្នែកខាងក្នុងរង្វង់ C

(៤). $\text{Res}\left[f(z);z=i\right]=\lim_{z\to i}(z-i)f(z)$

$$=\lim_{z\to i}\frac{1}{(z+i)}=\frac{1}{2i}$$

(៥). $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=2\pi i\times$(ផលបូករេស៊ីឌុយ)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}=2\pi i\left(\frac{1}{2i}\right)=\pi$$

ហើយ $2\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\pi$ $\left[\because\int_0^{\infty}f(x)dx=2\int_0^{a}f(x)dx \text{ បើ } f(-x)=f(x)\right]$

នោះគេបាន $\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\frac{\pi}{2}$

ដូចនេះ $\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\frac{\pi}{2}$ ។

៥.៤.២. អាំងតេក្រាលអ៊ីមប្រូពើអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយអាំងតេក្រាលឱ្យបានត្រឹមត្រូវអាស្រ័យទៅលើជម្រើសនៃគន្លង។ នៅក្នុងឧទាហរណ៍មុន យើងបានប្រើប្រាស់ការពន្លាតកន្លះរង្វង់នៃគន្លង់។ ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាលអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល យើងត្រូវបានសង់វាជាចតុកោណកែង។ យើងពិចារណា

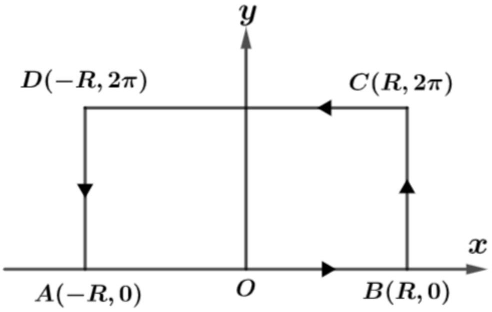
អាំងតេក្រាលដែលមានទម្រង់ $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{e^{bx}+c}dx,\ \ 0<a<b, c>0$ ដោយ $c>0$ និង $e^{bx}>0$ ដែលភាគបែងមិនបាត់ទេ។ លក្ខខណ្ឌ $a<b$ កំណត់ថាអាំងតេក្រាលគឺរួមខិតជិត $+\infty$ ខណៈពេលដែលអាំងតេក្រាលត្រូវចងដោយ $\frac{e}{c}$ ដូច្នេះហើយវាក៏រួម ខិតជិត $-\infty$ ដូចគ្នា។

ឧទាហរណ៍២៧៖ បង្ហាញថា $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{e^{x}+1}dx=\frac{\pi}{\sin a\pi}, 0<a<1$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេបាន $\frac{e^{az}}{e^{z}+1}$ មានប៉ូលងាយត្រង់ $z=(2n+1)\pi i$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n នៅផ្នែកខាងក្នុងគន្លង C ។

យើងពិនិត្យ $\oint_C\frac{e^{az}}{e^{z}+1}dz$ ដែល C ជាចតុកោណ $ABCD$ ដែលមានកំពូល $A(-R,0)$, $B(R,0), C(R,2\pi), D(-R,2\pi)$ ដែល R គឺធំ។



រូបទី៥.១៣

មានន័យថា

$$\oint_C\frac{e^{az}}{e^{z}+1}dz=\int_{-R}^{R}\frac{e^{ax}}{e^{x}+1}dx+\int_{0}^{2\pi}\frac{e^{a(R+iy)}}{e^{R+iy}+1}idy+\int_{R}^{-R}\frac{e^{a(x+2\pi i)}}{e^{x+2\pi i}+1}dx+\int_{2\pi}^{0}\frac{e^{a(-R+iy)}}{e^{-R+iy}+1}idy \quad (1)$$

ចំពោះ $f(z)=\frac{e^{az}}{e^{z}+1}$ មានប៉ូលងាយត្រង់ $z=(2n+1)\pi i, n\in I$ ដែលមានតែ $z=\pi i$ ទេ នៅខាងក្នុងរង្វង់ C ។

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(\pi i)&=\lim_{z\to\pi i}\frac{(z-\pi i)}{e^{z}+1}e^{az}\\&=e^{a\pi i}\lim_{z\to\pi i}\frac{z-\pi i}{e^{z}+1}\\&=e^{a\pi i}\lim_{z\to\pi i}\frac{1}{e^{z}}\quad\text{(តាមក្បួនឡូបពីតាល់)}\\&=-e^{a\pi i}\end{aligned}$$

តាមទ្រឹស្តីបទរេស៊ីឌុយកូស៊ីគេបាន

$$\oint_C \frac{e^{az}}{e^z+1}dz = -2\pi i e^{a\pi i} \qquad (2)$$

ឥឡូវពិនិត្យ $\left|\int_0^{2\pi} \frac{e^{a(R+iy)}}{e^{R+iy}} i dy\right| \le \int_0^{2\pi} \frac{\left|e^{a(R+iy)}\right|}{\left|e^{R+iy}\right|-1}dy = \int_0^{2\pi} \frac{e^{aR}}{e^R-1}dy$

$$= \frac{2\pi e^{aR}}{e^R-1}$$

ម្យ៉ាងទៀត $\lim_{R\to\infty} \frac{e^{aR}}{e^R-1} = \lim_{R\to\infty} \frac{ae^{aR}}{e^R} = \lim_{R\to\infty} e^{(a-1)R}$ (តាមក្បួនឡូបពីតាល់)

$$= 0 \quad ,(0<a<1)$$

ដូច្នេះពេល $R\to\infty$, $\int_0^{2\pi} \frac{e^{a(R+iy)}}{e^{R+iy}+1} i dy \to 0 \qquad (3)$

និង $\left|\int_{2\pi}^0 \frac{e^{a(R+iy)}}{e^{R+iy}+1} i dy\right| \le \int_0^{2\pi} \frac{e^{-aR}}{1-e^{-R}}dy = \frac{2\pi e^{-aR}}{1-e^{-R}} \to 0$ បើ $R\to\infty \quad (\because a>0) \quad (4)$

ពេល $R\to\infty$ ពី (1) ទៅ (4) គេបាន

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{e^x+1}dx + \int_{\infty}^{-\infty} \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{e^x+1}dx = -2\pi i e^{a\pi i}$$

$$\Rightarrow \left(1-e^{2\pi i a}\right)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{e^x+1}dx = -2\pi i e^{a\pi i}$$

ដូចនេះ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{e^x+1}dx = -\frac{2\pi i e^{a\pi i}}{1-e^{2\pi i a}} = \frac{2\pi i}{e^{a\pi i}-e^{-a\pi i}} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$ ។

ឧទាហរណ៍២៧ ៖ (អាំងតេក្រាលអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល) តាង $\alpha>1$។

កំណត់លក្ខណ: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{\alpha x}+1}dx = \frac{\pi}{\alpha\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

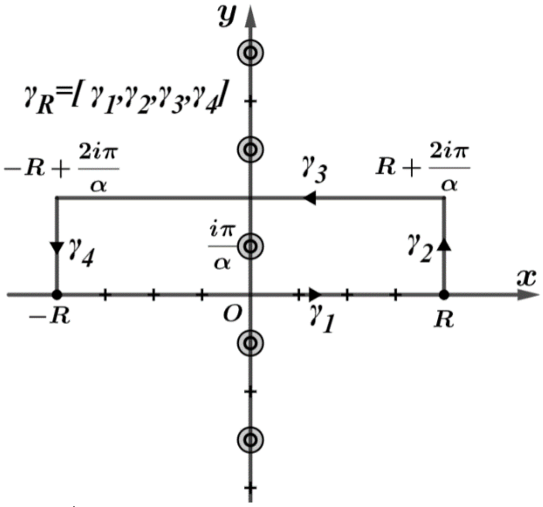
ជំហានទី១៖ ដូចដែលបានកំណត់សម្គាល់ពីមុន នៅពេល $\alpha>1$, អាំងតេក្រាលរួម។ អាំងតេក្រាលនាំឱ្យយើងកំណត់បាននូវអនុគមន៍វិភាគ $f(z)=\frac{e^z}{e^{\alpha z}+1}$ ដែលប៉ូលគឺជាឫសនៃ

$$e^{\alpha x} = -1 = e^{i\pi} \Leftrightarrow \alpha z = i\pi + 2k\pi i \Leftrightarrow z_k = (2k+1)\frac{\pi}{\alpha}i, k = 0, \pm1, \pm2, ...$$

ដូច្នេះ $f(z)=\frac{e^z}{e^{\alpha z}+1}$ មានប៉ូលជាច្រើនឥតកំណត់នៅលើ z_k ទាំងអស់នៅលើអ័ក្សចំនួននិមិត្ត (រូបភាព៥.១៤)

ជំហានទី២៖ ជ្រើសរើសគន្លងនៃអាំងតេក្រាល។ គន្លងអាំងតេក្រាលគួរតែពង្រីកនៅក្នុងទិស x ដើម្បីគ្របដណ្តប់ទៅលើអ័ក្ស x។ ដើម្បីជៀសវាងការរួមបញ្ចូនប៉ូលជាច្រើនឥតកំណត់នៅលើ

អ័ក្ស y យើងមិនពង្រីកគន្លងនៅពាក់កណ្តាលប្លង់ខាងលើ ដូចដែលយើងបានធ្វើជាមួយពាក់កណ្តាលរង្វង់ក្នុងឧទាហរណ៍មុន។ ជំនួសមកវិញ យើងប្រើគន្លងចតុកោណ γ_R ដែលមានគន្លង $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ និង γ_4, ដូចរូបភាព៥.១៤ និងតាង I_j អាំងតេក្រាលគន្លងនៃ f ទៅលើ $\gamma_J\left(j=1,....,4\right)$ ។ $R \to \infty$ γ_R នឹងពង្រីកក្នុងទិសដៅផ្តេក ប៉ុន្តែប្រវែងនៃជ្រុងបញ្ឈរនៅតែថេរនៅ $\frac{2\pi}{\alpha}$ ។



រូបភាពទី ៥.១៤ គន្លង និងប៉ូលសម្រាប់គន្លងអាំងតេក្រាល

ដើម្បីយល់អំពីហេតុផលសម្រាប់ជម្រើសនៃប្រវែងបញ្ឈរ យើងតាង I_1 និង I_3 ។ នៅលើ γ_1 យើងមាន $z = x,\ dz = dx$,

$$I_1 = \int_{-R}^{R} \frac{e^x}{e^{\alpha x}+1} dx,$$

ដូច្នេះហើយ I_1 ជាអាំងតេក្រាលរួម I ទៅជា $R \to \infty$ ។ នៅលើ γ_3 យើងមាន $z = x + i\frac{2\pi}{\alpha}$, $dz = dx$ និងការប្រើ $2\pi i$ ភាពទៀងទាត់ នៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល យើងបាន

$$I_3 = \int_{-R}^{R} \frac{e^{x+i\frac{2\pi}{\alpha}}}{e^{\alpha\left(x+i\frac{2\pi}{\alpha}\right)}+1} dx = -e^{\frac{2\pi}{\alpha}i} \int_{-R}^{R} \frac{e^x}{e^{\alpha x}+1} dx = -e^{\frac{2\pi}{\alpha}i}$$

វិសមភាពចុងក្រោយនេះ បង្ហាញពីជម្រើសនៃអ័ក្សឈរ៖ អ័ក្សឈរត្រូវបានជ្រើសរើស ដូចនេះអាំងតេក្រាលកើតឡើងលើអ័ក្សដេក γ_3 ស្មើនឹងចំនួនថេរមួយគុណនឹងអាំងតេក្រាលលើ γ_1 ។ ដោយចម្លើយនេះមិនមានភាពស្មុគស្មាញ។

ជំហានទី៣៖ អនុវត្តទ្រឹស្តីរេស៊ីឌុយ (Residue Theorem) តាមជំហានទី២ យើងមានប៉ូលតែមួយនៃ f នៅខាងក្នុង γ_R ត្រង់ $z_o = \frac{\pi}{\alpha}i$ ។ ដោយ $e^{\alpha z}+1$ មានឫសជម្មតា នេះជាប៉ូលងាយ។ ដោយប្រើសំណើខាងលើយើងកំណត់

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{e^{az}+1}, \frac{\pi}{\alpha}i\right) = \frac{e^{\frac{\pi}{\alpha}i}}{\alpha e^{\alpha\frac{\pi}{\alpha}i}} = \frac{e^{\frac{\pi}{\alpha}i}}{\alpha e^{i\pi}} = -\frac{e^{\frac{\pi}{\alpha}i}}{\alpha}$$

ហើយតាមទ្រឹស្តីសំណល់ គេបាន

$$I_1+I_2+I_3+I_4=\int_{\gamma R}\frac{e^z}{e^{\alpha z}+1}dz=2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{e^{\alpha z}+1},\frac{\pi}{\alpha}i\right)=-2\pi i\frac{e^{\frac{\pi}{\alpha}i}}{\alpha}.$$

ជំហានទី៤៖ បង្ហាញថាអាំងតេក្រាលលើអ័ក្រដេកខិតជិត 0 ដូចនឹង $R\to\infty$ ។ សម្រាប់ I_2,

$$z=R+iy\left(0\le y\le\frac{2\pi}{\alpha}\right)$$ នៅក្នុង γ_2 ដូចនេះ $\left|e^{\alpha z}\right|=\left|e^{\alpha R}e^{i\alpha y}\right|=e^{\alpha R}$,

$$\left|e^{\alpha z}+1\right|\ge\left|e^{\alpha z}\right|-1=e^{\alpha R}-1\qquad\Rightarrow\frac{1}{\left|e^{\alpha a}+1\right|}\le\frac{1}{e^{aR}-1}$$

សម្រាប់ z ក្នុង γ_2

$$\left|f(z)\right|=\left|\frac{e^z}{e^{\alpha z}+1}\right|\le\frac{\left|e^{R+iy}\right|}{e^{\alpha R-1}}=\frac{e^R}{e^{\alpha R}-1}=\frac{1}{e^{(\alpha-1)R}-e^{-R}}$$

ដូចនេះ តាមវិសមភាព MLសម្រាប់អាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

$$\left|I_2\right|=\left|\int_{\gamma_2}\frac{e^z}{e^{\alpha z}+1}dz\right|\le\frac{\ell(\gamma_2)}{e^{(\alpha-1)R}-e^{-R}}=\frac{\frac{2\pi}{\alpha}}{e^{(\alpha-1)R}-e^{-R}}\to 0,\text{ ដូច } R\to\infty$$

បញ្ជាក់ថា $I_4\to 0$ ដូច $R\to\infty$ ត្រូវបានបំពេញស្រដៀងគ្នា យើងបោះចោលទិន្នន័យ

ជំហានទី៥៖ គណនាអាំងតេក្រាលផ្ទាល់យើងកំណត់បាន $I_1\left(1-e^{\frac{2\pi}{\alpha}i}\right)+I_2+I_4=-2\pi i\frac{e^{\frac{\pi}{\alpha}i}}{\alpha}$

តាង និងប្រើដំណោះស្រាយនៅជំហាន៤ យើងទទួលបាន

$$\left(1-e^{\frac{2\pi}{\alpha}i}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^x}{e^{\alpha x}+1}dx=-2\pi i\frac{e^{\frac{\pi}{\alpha}i}}{\alpha},$$

ក្រោយសម្រួល $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^x}{e^{\alpha x}+1}dx=\frac{2\pi i}{\alpha\left(e^{\frac{\pi}{\alpha}i}-e^{-\frac{\pi}{\alpha}i}\right)}=\frac{\pi}{\alpha\sin\frac{\pi}{\alpha}}$

ការអនុវត្តអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទាន មិនគណនាតាមគន្លងពាក់កណ្ដាលរង្វង់។ អាំងតេក្រាលមួយគឺ $\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^3+1}$ ចំពោះអាំងតេក្រាលនេះអាចសម្រួលទៅជាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល តាមរយៈការជំនួស $x=e^t$ ។ យើងប្រើវិធីនេះ សម្រាប់ដោះស្រាយលំហាត់ឧទាហរណ៍ខាងក្រោម។

ឧទាហរណ៍២៨៖ (ការជំនួស $x=e^t$) ចំពោះ $\alpha<1$ បង្ហាញថា $\int_0^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}+1}dx=\frac{\pi}{\alpha\sin\frac{\pi}{\alpha}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

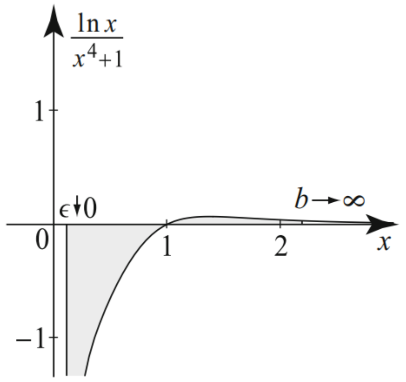
ជំហាន១៖ បង្ហាញថាជាអាំងតេក្រាលរួម។ អាំងតេក្រាលមិនកំណត់ នៅតែបន្ត ដូចនេះវាគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីបង្ហាញថាអាំងតេក្រាលរួមនៅចន្លោះ $[1,\infty)$ ។ យើងមាន $\frac{1}{x^{\alpha}+1}\le\frac{1}{x^{\alpha}}$ និងមានអាំងតេ

ក្រាលរួមព្រោះ $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx < \infty$ ។

ជំហាន២៖ អនុវត្តន៍ការជំនួស $x = e^t$ តាង $x = e^t, dt = e^t dt$ និងចំណាំថា x ស្ថិតនៅចន្លោះ 0 ទៅ ∞, t ស្ថិតនៅចន្លោះ $-\infty$ ទៅ ∞ នោះគេបាន

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}+1} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^t}{e^{\alpha t}+1} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^{\alpha x}+1} dx$$



រូបភាព៥.១៥ ការបំបែកអាំងតេក្រាលអ៊ីមប្រូពើ

ដែលនៅអាំងតេក្រាលចុងក្រោយ យើងតាង x ជាអថេរនៃអាំងតេក្រាលជំនួសដោយ t ។ យើងនឹងបញ្ជាក់ផ្នែកនេះជាមួយនឹងឧទាហរណ៍មួយទៀត។ ឧទាហរណ៍យើងគណនាអាំងតេក្រាល $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^4+1} dx$ អាំងតេក្រាល ជាអាំងតេក្រាលអ៊ីមប្រូពើ ដូចនឹងអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកដែលមិនកំណត់ និងមានអាំងតេក្រាលស្ថិតនៅចន្លោះពី $-\infty$ ដូច $x \downarrow 0$ ។ ដើម្បីកំណត់ភាពរួមនៃអាំងតេក្រាល យើងយកតាមលំនាំវិធីទូទៅដោយយកកំណត់ផ្នែកមួយ។ តាមរូបភាព៥.១៥ ដូចនេះ

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^4+1} dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{\ln x}{x^4+1} dx + \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{\ln x}{x^4+1} dx$$

វាមិនលំបាកទេដើម្បីបង្ហាញថាលីមីតទាំងពីរមាន និងដូចនេះ អាំងតេក្រាលរួម។ យើងក្រឡេកមើលអាំងតេក្រាលនេះនៅឧទាហរណ៍បន្ទាប់។

ឧទាហរណ៍២៩៖ (អាំងតេក្រាលដែលមាន $\ln x$) គេទាញបាន $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^4+1} dx = -\frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}$ (1)។

ដំណោះស្រាយ

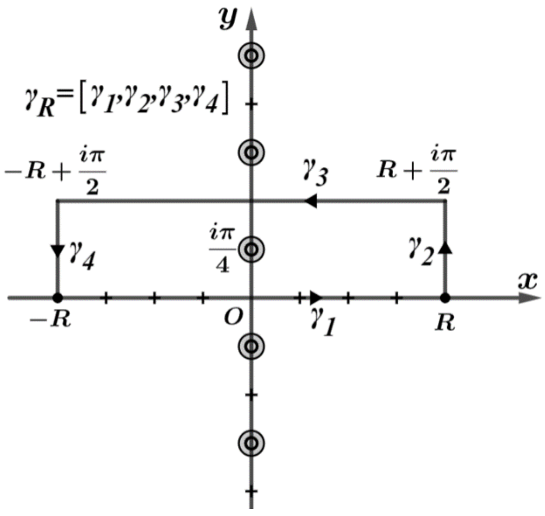
តាង $x = e^t$, $\ln x = t$, $dx = e^t dt$ ។ នោះគេបាន

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{e^{4t}+1} e^t dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^x}{e^{4x}+1} dx$$

ដើម្បីកំណត់អាំងតេក្រាលនេះបាន យើងត្រូវប្រើអនុគមន៍

$$f(z) = \frac{z e^z}{e^{4z}+1}$$

លើគន្លងរាង γ_R ចតុកោណដូចក្នុងរូប៥.១៦តាង I_j សម្គាល់អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍ f លើ γ_j ។ ជ្រើសយកជ្រុងបញ្ឈរនៃ γ_R នោះនឹងត្រឡប់ទៅកាន់ផ្នែក γ_3 ដែលបានភាគបែងស្មើ $e^{4x}+1$ ។ នោះវានឹងឱ្យយើងឃើញទំនាក់ទំនងពី I_3 ទៅ I_1 ។



រូបភាព៥.១៦ គន្លង និងប៉ូលអាំងតេក្រាល

គណនា

$$I_R = \int_{\gamma_r} f(z)\,dz$$

អនុគមន៍ f មានប៉ូលមួយ ដែល $z = i\frac{\pi}{4}$ នៅក្នុង γ_R តាមសំណើរ(ii) មានរេស៊ីឌុយ

$$\operatorname{Res}\left(\frac{ze^z}{e^{4z}+1}, i\frac{\pi}{4}\right) = \frac{i\frac{\pi}{4}e^{i\frac{\pi}{4}}}{4e^{i\pi}} = -\frac{i\pi(1+i)}{16\sqrt{2}}$$

តាមទ្រឹស្តីបទរេស៊ីឌុយ

$$I_{\gamma_R} = 2\pi i\left(-\frac{i\pi(1+i)}{16\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi^2(1+i)}{8\sqrt{2}} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \quad (2)$$

ពិនិត្យផ្នែក $I_j\,(j = 1, ..., 4)$ យើងមាន

$$I_1 = \int_{\gamma_1} \frac{ze^z}{e^{4z}+1}dz = \int_{-R}^{+R} \frac{xe^x}{e^{4x}+1}dx$$

លើ $\gamma_3 = z = x + i\frac{\pi}{2}, dz = dx$ ដោយ $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$ គេបាន

$$\begin{aligned} I_1 = \int_{\gamma_1} \frac{ze^z}{e^{4z}+1}dz &= \int_{-R}^{+R} \frac{\left(x + i\frac{\pi}{2}\right)e^x e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{4x}+1}dx \\ &= -i\int_{-R}^{+R} \frac{xe^x}{e^{4x}+1}dx + \frac{\pi}{2}\int_{-R}^{+R} \frac{e^x}{e^{4x}+1}dx \\ &= -iI_1 + \frac{\pi}{2}\int_{-R}^{+R} \frac{e^x}{e^{4x}+1}dx \end{aligned}$$

ដើម្បីបង្ហាញថា I_2 និង I_4 ខិតទៅរក 0 ដូច $R \to \infty$ យើងអនុវត្តដូចជំហានទី៥ នៅក្នុងឧទាហរណ៍ ២៧ខាងលើដែល $z = R + iy\left(0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right)$ លើ γ_2 យើងបាន $|z| \le R + y \le R + \frac{\pi}{2}$ ដែលដូចក្នុង ឧទាហរណ៍ ២៧គេបាន

$$|f(z)| = \left|\frac{ze^z}{e^{4z}+1}\right| = |z|\left|\frac{e^z}{e^{4z}+1}\right| \le \left(R + \frac{\pi}{2}\right)\frac{e^R}{e^{4R}-1} = \frac{R + \frac{\pi}{2}}{e^{3R} - e^{-R}}$$

ជាលទ្ធផល ដោយវិសមភាព ML (ML-inequality) សម្រាប់អាំងតេក្រាល

$$|I_2| = \left|\int_{\gamma_2} \frac{ze^z}{e^{4z}+1}dz\right| \le \frac{l(\gamma_2)\left(R + \frac{\pi}{2}\right)}{e^{3R} - e^{-R}} = \frac{\frac{\pi}{2}\left(R + \frac{\pi}{2}\right)}{e^{3R} - e^{-R}} \to 0 \qquad \text{ដូចទៅនឹង } R \to \infty$$

នោះ $I_4 \to 0$ ដូចនឹង $R \to \infty$ ដែលមានភាពស្រដៀងគ្នាត្រូវលុបចេញ ដោយជំនួសការរកឃើញរបស់យើងទៅក្នុង (2) ដោយកំណត់ដូចនឹង $R \to \infty$ គេបាន

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2(1+i)}{8\sqrt{2}} &= \lim_{R\to\infty}\left(I_1 + I_2 - iI_1 + \frac{\pi}{2}\int_{-R}^{+R} \frac{e^x}{e^{4x}+1}dx + I_4\right) \\ &= (1-i)\int_{-R}^{+R} \frac{xe^x}{e^{4x}+1}dx + \frac{\pi}{2}\int_{-R}^{+R} \frac{e^x}{e^{4x}+1}dx \end{aligned}$$

ដូចទៅនឹងការប៉ានស្មាននៃផ្នែកទាំងពីរ យើងទទួលបាន (1) ។ បើវាស្មើទៅនឹងការប៉ាន់ស្មាននៃផ្នែក ទាំងពីរ យើងទទួលបានតម្លៃនៃអាំងតេក្រាលក្នុងឧទាហរណ៍២៩ដែលត្រូវគ្នានឹង $\alpha = 4$ ។

ជំនួស $x = e^t$ ក៏មានប្រយោជន៍ផងដែរ ទោះបីជាយើងមិនប្រើវិធីសាស្ត្រកុំផ្លិចដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាលក្នុង t ក៏ដោយ។ ឧទាហរណ៍

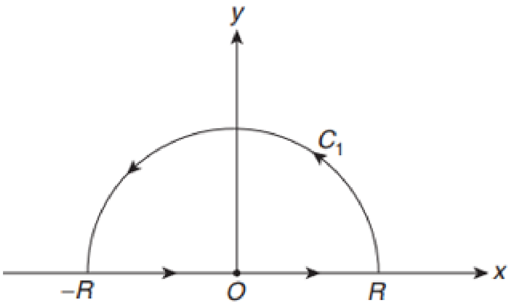
$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^t}{e^{2t}+1}dt = 0$$

ដោយសារអាំងតេក្រាលរួម និងអាំងតេក្រាល $\frac{te^t}{e^{2t}+1} = \frac{t}{e^t+e^{-t}}$ គឺជាអនុគមន៍សេស។

៥.៤.អាំងតេក្រាលអ៊ីមប្រូភើនៃអនុគមន៍សនិទានជាមួយអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

តាង $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{Q(x)}dx$ ឬ $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin mx}{Q(x)}dx$ ដែល $Q(x)$ ជាពហុធានៅក្នុង x ។

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាលយើង



រូបភាព៥.១៧

ពិនិត្យ $\int\limits_C f(z)dz = \int e^{imz}g(z)dz$

ដែល $g(z) = \frac{1}{Q(z)}$ និង C ជាគន្លងពាក់កណ្ដាលរង្វង់ខាងលើ C_1 ដែលមានកាំ R និងផ្ចិតនៅចន្លោះផ្នែកអ័ក្សអាប់ស៊ីសពី $-R$ ទៅ R ដូចរូប៥.១៧។

$$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_{-R}^{R} f(x)dx + \int\limits_{C_1} f(z)dz$$

តាមទ្រឹស្ដីបទរេស៊ីឌុយកូស៊ី

$$\int\limits_C f(z)dz = 2\pi i \times (\text{ផលបូកនៃរេស៊ីឌុយត្រង់ប៉ូលនៅពាក់កណ្ដាលខាងលើប្លង់ } z\ )$$

$$\int\limits_{-R}^{R} f(x)dx + \int\limits_{C_1} f(z)dz = 2\pi i \times (\text{ផលបូករេស៊ីឌុយ})$$

យក $R \to \infty$ គេបាន

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R} f(x)dx + \lim_{R\to\infty}\int\limits_{C_1} f(z)dz = 2\pi i \times (\text{ផលបូកនៃរេស៊ីឌុយ})$$

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R} f(x)dx + \lim_{R\to\infty}\int\limits_{C_1} e^{imz}g(z)dz = 2\pi i \times (\text{ផលបូកនៃរេស៊ីឌុយ})$$

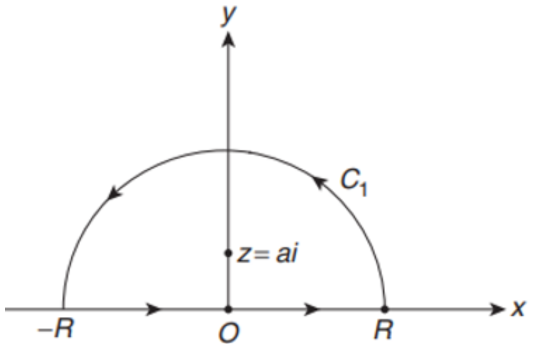
តាមឡេម៉ាJordanគេបាន $\lim\limits_{?\to\infty}\int\limits_{C_1} e^{imz}g(z)dz = 0$

នោះគេបាន $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i \times (\text{ផលបូកនៃរេស៊ីឌុយ})$។

ឧទាហរណ៍៣០៖ គណនា $\int_0^{\infty}\frac{\cos mx}{x^2+a^2}dx, a>0, m>0$ ដោយប្រើអាំងតេក្រាលខ្សែកោង ឬ គន្លងអាំងតេក្រាល(Contour integration)។

ដំណោះស្រាយ

រំឭក៖ Contour integralគឺជាអាំងតេក្រាល $\int_C f(z)dz$ នៃអនុគមន៍ f នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិចលើខ្សែកោង C ជាទូទៅខ្សែកោងបិទនៅក្នុងប្លង់។



រូបភាព៥.១៨

(១). តាង $\int_C f(z)dz = \int_C \frac{e^{imz}}{z^2+a^2}dz$

ពិនិត្យគន្លងពាក់កណ្ដាលរង្វង់ខាងលើ C_1 ដែលមានកាំ R និងផ្ចិតនៅចន្លោះផ្នែកអ័ក្សអាប់ស៊ីសពី $-R$ ទៅ R ដូចរូប៥.១៨។

(២). តាង $f(z)=\frac{e^{imz}}{z^2+a^2}$

ប៉ូលដែលកំណត់ដោយ $z^2+a^2=0$ គឺ $z=\pm ai$

នោះគេបាន $f(z)=\frac{e^{imz}}{(z+ai)(z-ai)}$

(៣). ចំពោះប៉ូល $z=ai$ នៅផ្នែកខាងក្នុងរង្វង់ C

(៤). $\text{Res}\left[f(z);z=ai\right]=\lim_{z\to ai}(z-ai)f(z)$

$$=\lim_{z\to ai}\frac{e^{imz}}{(z+ai)}$$

$$=\frac{e^{im(ai)}}{(ai+ai)}=\frac{e^{-ma}}{2ai}$$

(៥). $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i$ (ផលបូករេស៊ីឌុយ)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{imz}dx}{x^2+a^2}=2\pi i\left(\frac{e^{-ma}}{2ai}\right)$$

$$=\frac{\pi e^{-ma}}{a}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos mx + i\sin mx}{x^2+a^2}dx=\frac{\pi e^{-ma}}{a}$$

ដូចនេះ $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos mx + i\sin mx}{x^2+a^2}dx=\frac{\pi e^{-ma}}{a}$ ។

ដោយធ្វើការប្រៀបធៀបផ្នែកពិតគេបាន

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos mx}{x^2+a^2}dx=\frac{\pi e^{-ma}}{a}$$

នោះ $2\int_{0}^{\infty}\frac{\cos mx}{x^2+a^2}dx=\frac{\pi e^{-ma}}{a}$ $\left[\because\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx\right.$ បើ $\left.f(-x)=f(x)\right]$

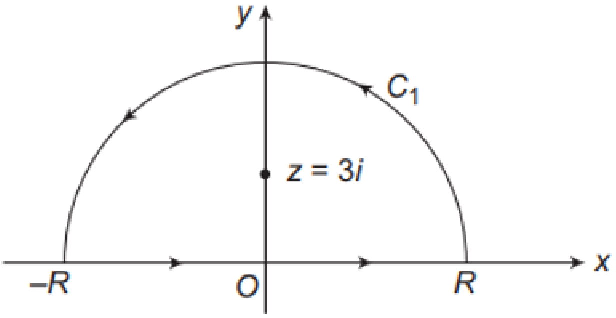
នោះគេបាន $\int_{0}^{\infty}\frac{\cos mx}{x^2+a^2}dx=\frac{\pi e^{-ma}}{2a}$ ។

ឧទាហរណ៍៣១៖ គណនាអាំងតេក្រាល $\int_{0}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+9^2}dx$ ដោយប្រើរេស៊ីឌុយ។

ដំណោះស្រាយ

(១). តាង $\int_{C}f(z)dz=\int_{C}\frac{ze^{iz}}{z^2+9^2}dz$

ពិនិត្យគន្លងពាក់កណ្ដាលរង្វង់ខាងលើ C_1 ដែលមានកាំ R និងស្ថិតនៅចន្លោះផ្នែកអ័ក្សអាប់ស៊ីសពី $-R$ ទៅ R ដូចរូប៥.១៩។



រូបភាព៥.១៩

(២). តាង $f(z)=\frac{ze^{iz}}{z^2+9^2}$

ប៉ូលដែលកំណត់ដោយ $z^2+9^2=0$

គឺ $z=\pm 3i$

នោះគេបាន $f(z)=\frac{ze^{iz}}{(z+3i)(z-3i)}$

(៣). ចំពោះប៉ូល $z=3i$ នៅផ្នែកខាងក្នុងរង្វង់ C

(៤). $\text{Res}\left[f(z);z=3i\right]=\lim_{z\to 3i}(z-3i)f(z)$

$$=\lim_{z\to 3i}\frac{ze^{iz}}{(z+3i)}$$

$$=\frac{3ie^{i^2}}{(3i+3i)}$$

$$=\frac{3ie^{-3}}{6i}=\frac{e^{-3}}{2}=\frac{1}{2e^3}$$

(៥). $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=2\pi i$ (ផលបូករេស៊ីឌុយ)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}dx}{x^2+9}=2\pi i\left(\frac{1}{2e^3}\right)$$

$$=\frac{\pi i}{ae^3}$$

ដូចនេះ $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\left(\cos x+i\sin x\right)}{x^2+9}dx=\frac{\pi i}{e^3}$ ។

ដោយធ្វើការប្រៀបធៀបផ្នែកពិតគេបាន

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+9}dx=\frac{\pi}{e^3}$$

នោះ $2\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x^2+9}dx=\frac{\pi}{e^3}$ $\left[\because \int_{-a}^{a}f\left(x\right)dx=2\int_{0}^{a}f\left(x\right)dx \text{ បើ } f\left(-x\right)=f\left(x\right)\right]$

នោះគេបាន $\int_{0}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+9}dx=\frac{\pi}{2e^3}$ ។

៥.៥. អាំងតេក្រាលផលគុណនៃអនុគមន៍សនិទាន និងអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

គោលបំណងរបស់យើងក្នុងផ្នែកនេះ គឺប្រើប្រាស់ទ្រឹស្តីរេស៊ីឌុយ(Residue) ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាលនៃទម្រង់ទូទៅ $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p\left(x\right)}{q\left(x\right)}\cos\left(ax\right)dx$ និង $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p\left(x\right)}{q\left(x\right)}\sin\left(bx\right)dx$

ដែល a និង b ជាចំនួនពិត និង $\frac{p\left(x\right)}{q\left(x\right)}$ ជាអនុគមន៍សនិទាន។

របៀបដោះស្រាយគឺស្រដៀងនឹងផ្នែកមុនដែរចំពោះ៖

$$\cos\left(ax\right)=\mathrm{Re}\left(e^{iax}\right) \quad \text{និង} \quad \sin\left(bx\right)=\mathrm{Im}\left(e^{ibx}\right),$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a,b និង x ។

ដូច្នេះ $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p\left(x\right)}{q\left(x\right)}\cos\left(ax\right)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p\left(x\right)}{q\left(x\right)}\mathrm{Re}\left(e^{iax}\right)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}\left(\frac{p\left(x\right)}{q\left(x\right)}\left(e^{iax}\right)\right)dx$

$$=\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p\left(x\right)}{q\left(x\right)}e^{iax}dx\right)$$

ហើយដូចគ្នានេះដែរ

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p\left(x\right)}{q\left(x\right)}\sin\left(bx\right)dx=\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p\left(x\right)}{q\left(x\right)}\left(e^{iax}\right)dx\right)$$

ឧទាហរណ៍៣២៖ គេមាន $a>0$ និង $s\geq 0$ ជាចំនួនពិត។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\left(sx\right)}{x^2+a^2}dx=\frac{\pi}{a}e^{-sa} \quad (1)$$

ដំណោះស្រាយ

ជំហានទី១៖ បង្ហាញថាអាំងតេក្រាលអ៊ីប្រូភើគីរួម។ យើងមាន

$$\left|\frac{\cos\left(sx\right)}{x^2+a^2}\right|\leq\frac{1}{x^2+a^2},$$

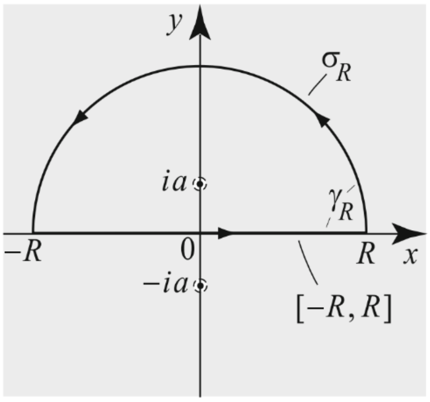
និងដោយសារតែ $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+a^2}$ គឺរួមអាំងតេក្រាល។

ជំហានទី២៖ រៀបចំគណនាគន្លងអាំងតេក្រាល

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(sx)}{x^2+a^2}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}\left(\frac{e^{isx}}{x^2+a^2}\right)dx=\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{isx}}{x^2+a^2}dx\right),$$

យើងនិងបានគណនាគន្លងអាំងតេក្រាល

$$I_{\gamma R}=\int_{\gamma R}\frac{e^{isz}}{z^2+a^2}dz=\int_{\gamma R}\frac{e^{isz}}{z^2+a^2}dz+\int_{-R}^{R}\frac{e^{isx}}{x^2+a^2}dx$$
$$=I_{\sigma R}+I_R$$



រូបភាព៥.២០ គន្លងនៃប្រជុំγ_R និងσ_R

ដែល γ_R និង នៅក្នុង σ_R ដូចគ្នាទៅនិងរូបភាព៥.២០។ សម្រាប់ $R>a,\frac{e^{isz}}{2ia}$ មានប៉ូលនៅខាងក្នុងសាមញ្ញមួយ γ_R ត្រង់ $z=ia$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទរេស៊ីឌុយគេបាន

$$\mathrm{Res}\left(\frac{e^{isz}}{z^2+a^2},ia\right)=\frac{e^{is(ia)}}{2ia}=\frac{e^{-sa}}{2ia}$$

តាមទ្រឹស្តីបទសំណល់ សម្រាប់$R>a$ យើងបាន

$$I_{\gamma R}=I_{\gamma R}+I_R=2\pi i\frac{e^{-sa}}{2ia}=\frac{\pi}{a}e^{-sa}.$$

ជំហាន៣៖ បង្ហាញថា $\lim_{R->\infty}I_{\sigma R}=0$ សម្រាប់ $s\geq 0$ និង $0\leq\theta\leq\pi$ យើងមាន $\sin\theta\geq 0$ ដូច្នេះ $-sR\sin\theta\leq 0$ និងដូចនេះ $e^{-sR\sin}\leq 1$ ។សរសេរ z ក្រោមទម្រង់σ_R ដូចគ្នា

$z=\mathrm{Re}^{i\theta}=R(\cos\theta+i\sin\theta)$ ដែល $0\leq\theta\leq\pi$

ដូចនេះ: $\left|e^{isz}\right|=\left|e^{isR(\cos\theta+ia\sin\theta)}\right|=\overbrace{\left|e^{isR\cos\theta}\right|}^{1}\left|e^{-sR\sin\theta}\right|=e^{-sR\sin\theta}\leq 1$

ដូចនេះ ចំពោះ $R>a$ហើយ នៅពាក់កណ្ដាលរង្វង់ យើងបាន

$$\left|\frac{e^{isz}}{z^2+a^2}\right|\leq\frac{1}{\left|z^2+a^2\right|}\leq\frac{1}{\left|z^2\right|-a^2}=\frac{1}{R^2-a^2}$$

ហើយដូចនេះ វិសមភាព បានដំណោះស្រាយអាំងតេក្រាល

$$\left|\int_{\sigma R}\frac{e^{isz}}{z^2+a^2}dz\right|\leq l(\sigma_R)\frac{1}{R^2-a^2}=\frac{\pi R}{R^2-a^2}\to 0,R\to\infty$$

នេះប្រហែលដំណើរការដោយសារតែកម្រិតនៃពហុធានៅក្នុងភាគបែងគឺធំជាងកម្រិតនៃពហុធានៅក្នុងភាគយកដោយ 2 ។

ជំហាន៤៖ គណនាការចង់បានអាំងតេក្រាល Improper។ តាង $R\to\infty$ ប្រើប្រាស់ជំហាន៣ គេបាន

$$\lim_{R\to\infty}I_{\sigma R}+\lim_{R\to\infty}I_R=0+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{isx}}{x^2+a^2}dx=\frac{\pi}{a}e^{-sa}$$

យកផ្នែកពិតទាំងសងខាង និងទទួលបានអាំងតេក្រាលដែលចង់បាន

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(sx)}{x^2+a^2}dx=\frac{\pi}{a}e^{-sa}$$

ដោយតាមការគណនានោះ $\sin\theta\geq 0$ ចំពោះ $0\leq\theta\leq\pi$ ។ ដើម្បីទទួលបានវិសមភាព $\left|e^{isz}\right|\leq 1$

ចំពោះទាំងអស់ $s \ge 0$ និង $z = \mathrm{Re}^{i\theta}, 0 \le \theta \le \pi$ ការវិភាគកាន់តែច្បាស់នៃ $\sin\theta$ ធ្វើឱ្យតម្លៃប្រហែល កាន់តែប្រសើរជាងមុន $\left|e^{isz}\right|$, ដែលនៅក្នុងនេះអាចធ្វើការគណនាអាំងតេក្រាលដែលដឺក្រេ $q \ge 1 + \deg ree\ \ p$ ។

ឡែម៉ា៥.៦.១ (Jordan′s Lemma) វិសមភាពខាងក្រោមមានតម្លៃសម្រាប់ $R > 0$

$$\int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta} d\theta \le \frac{\pi}{R}$$

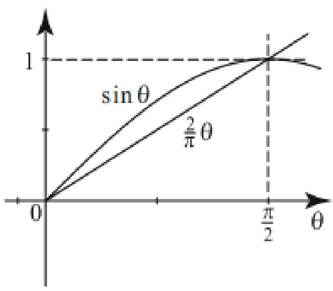
បង្ហាញថា យើងអាចចាប់ផ្ដើមសរសេរបានថា

$$\int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta} d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-R\sin\theta} d\theta$$

បន្ទាប់មកគេផ្លាស់ប្ដូរអថេរ $t = \pi - \theta$ នៅក្នុងអាំងតេក្រាលទីពីរខាងលើ នោះគេបាន $\sin(\theta) = \sin(\pi - \theta) = \sin t$ ហើយ $d\theta = -dt$

$$\int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta} d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} e^{-R\sin t} dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta} d\theta.$$

នៅត្រង់ចំណុចនេះ យើងត្រូវការប្រហែលតម្លៃ $\sin\theta$ ។ នៅចន្លោះក្រាបនៃ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ គឺផតចុះក្រោម ពីព្រោះដេរីវេទីពីរគឺអវិជ្ជមាន។ ដូចនេះក្រាប $\sin\theta$ ចំពោះ $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ នៅស្ថិតនៅលើបន្ទាត់នៃអង្កត់ទ្រូង ដែលបង្កើតឡើងដោយចំណុចពីរនៅលើក្រាប។ ចំណុចពិសេសនៅលើអង្កត់ទ្រូងដែលមានគល់ចំណុច $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ ដែលមានសមីការ $y = \frac{2}{\pi}\theta$ ។



រូបភាព៥.២១

ការពិតដោយបង្ហាញតាមវិសមភាព $\sin\theta \ge \frac{2}{\theta}$, មានលក្ខណៈត្រឹមត្រូវចំពោះតែ $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ ពីព្រោះធរណីមាត្រដែលបានបង្ហាញនៅក្នុងរូប៥.២១ តាមវិសមភាពត្រូវបានបញ្ជាក់ថា $-\sin\theta \le -\frac{2}{\pi}\theta$ ហើយ

$$\int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta} d\theta \le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}\sin\theta} d\theta$$

ដោយប្ដូរអថេរ $t = \frac{2}{\pi}R\theta$ យើងសរសេរ $2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}R\theta} d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t} dt \frac{\pi}{2R} = 2\left(1 - e^{-R}\right)\frac{\pi}{2R} \le \frac{\pi}{R}$ ។

ឡែម៉ា៥.៦.២(General Version of Jordan’s Lemma)តាង $R_o > 0$ និង $0 \le \theta_1 < \theta_2 \le \pi$ ចំពោះ $R \ge R_0$ គឺ σ_R ជារង្វង់ទាំងមូលនៃ $z = \mathrm{Re}^{i\theta}$ ជាមួយ $0 \le \theta_1 \le \theta \le \theta_2 \le \pi$ ដែលបានបង្ហាញនៅក្នុងរូប៥.២២។ តាង f គឺជា តម្លៃកុំផ្លិចនៃអនុគមន៍បានកំណត់នៅលើធ្នូ σ_R និង $M(R)$ សម្គាល់តម្លៃអតិបរមានៃ $|f|$ លើ σ_R ។ ប្រសិនបើ $\lim\limits_{R\to\infty} M(R) = 0$ និង $s > 0, \lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\sigma_R} e^{isz} f(z) dz = 0$

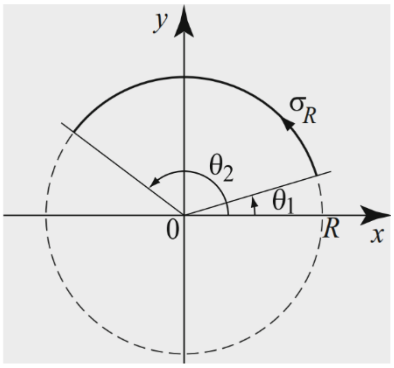
សម្រាយបញ្ជាក់

ចំពោះ $s > 0$ យើងមាន $\left|e^{isz}\right| = e^{-sRs\sin\theta}$

ដោយ $e^{-sR\sin\theta} > 0$ អាំងតេក្រាលរបស់វាកើនឡើងបើយើងបង្កើន

រង្វាស់ចន្លោះអាំងតេក្រាល។

នោះ $\int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-sr\sin\theta}d\theta \le \int_0^{\pi} e^{-sr\sin\theta}d\theta$ បើ $0\le\theta_1\le\theta_2\le\pi$ ។



រូបភាព៥.២២

ប៉ារ៉ាម៉ែត្រ σ_R ដោយ $\gamma(\theta)=\mathrm{Re}^{i\theta}$ ដែល $\theta_1\le\theta\le\theta_2$ នោះ $\gamma'(\theta)=Rie^{i\theta},\quad |\gamma'(\theta)|d\theta = Rd\theta$

ហើយគេបាន $\left|\int_{\sigma_R} e^{isz}f(z)dz\right| \le \int_{\theta_1}^{\theta_2}\left|e^{isz}f(z)\right|Rd\theta$

$$\le RM(R)\int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-sR\sin\theta}d\theta$$

$$\le RM(R)\int_0^{\pi} e^{-sR\sin\theta}d\theta \qquad (*)$$

តាមវិសមភាពនៃឡែម៉ា៥.៦.១យើងបានអាំងតេក្រាលក្នុង$(*)$ គឺទាល់ដោយ $\dfrac{\pi}{(sR)}$

ដូច្នេះ $\left|\int_{\sigma_R} e^{isz}f(z)dz\right| \le RM(R)\dfrac{\pi}{sR} = \dfrac{\pi}{s}M(R)\to 0$ ពេល $R\to\infty$ ។

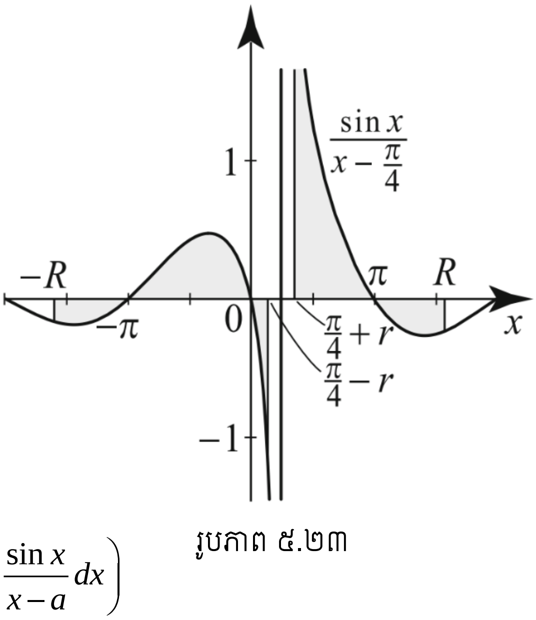
នេះជាការសន្និដ្ឋាននៃសម្រាយបញ្ជាក់របស់ឡែម៉ា។

ឧទាហរណ៍៣៣៖ (Cauchy principal value: ប្រើខ្សែកោងពិត)បង្ហាញអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$P.V.\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x-a}dx = \pi\cos a$$

$$P.V.\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x-a}dx = -\pi\sin a$$

គ្រប់ $-\infty<a<+\infty$ ។ ចំពោះតម្លៃពិសេស $a=0$ អាំងតេក្រាលដំបូងឱ្យដោយ $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\pi$ ។



រូបភាព ៥.២៣

ដំណោះស្រាយ

អាំងតេក្រាល Improper មានដែនមិនកំណត់ និងមានតម្លៃពិសេសត្រង់ $x=a$ ។

$$P.V.\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x-a}dx = \lim_{\substack{r\to0^+\\R\to\infty}}\left(\int_{-R}^{a-r}\frac{\sin x}{x-a}dx + \int_{a+r}^{R}\frac{\sin x}{x-a}dx\right)$$

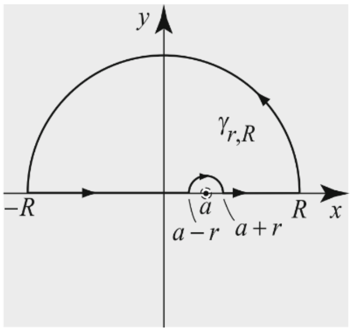
(តាមរូបខាងលើ ករណី $a>0$) ពិនិត្យអាំងតេក្រាលនៃ $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z-a}$ ក្រោមខ្សែកោងបិទជិត $\gamma_{r,R}$ ក្នុងរូបខាងក្រោម។ តាមទ្រឹស្តីបទ Cauchy

$$0=\int_{-R}^{a-r}\frac{e^{ix}}{x-a}dx+\int_{\sigma_r^*}\frac{e^{iz}}{z-a}dz+\int_{a+r}^{R}\frac{e^{ix}}{x-a}dz+\int_{\sigma_R}\frac{e^{iz}}{z-a}dz$$
$$=I_1+I_2+I_3+I_4$$

តាម Jordan’s lemma $I_4\to 0$ នោះ $R\to\infty$

$I_2\to -\pi e^{ia}$ នោះ $r\to 0$

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}}\left(\int_{-R}^{a-r}\frac{e^{ix}}{x-a}dx+\int\frac{e^{ix}}{x-a}dx\right)=i\pi e^{ia}=\pi\left(-\sin a+i\cos a\right)$$



រូបភាព ៥.២៤

៥.៦. ទ្រឹស្តីបទ Rouché

តាង $f(z)$ និង $g(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគនៅក្នុងដែន D និងមានចំនួនកំណត់សូន្យនៅក្នុង D ។ ឧបមាថា C ជាគន្លងបិទងាយនៅក្នុងដែន D ដែលមិនមានសូន្យ $f(z)$ និង $g(z)$ ស្ថិតនៅលើខ្សែកោង C និង $|g(z)|<|f(z)|$ នៅលើ C ។ បន្ទាប់មកចំនួនសរុបនៃសូន្យចំពោះ $f(z)+g(z)$ គឺស្មើចំនួនសរុបនៃសូន្យចំពោះ $f(z)$ នៅក្នុង C ។ មានន័យថា $N_{f+g}=N_f$

សម្រាយបញ្ជាក់

$$|f(z)+g(z)|\geq|f(z)|-|g(z)|>0\qquad\left[\therefore|f(z)|>|g(z)|\right]$$

នោះ $f(z)+g(z)$ និង $f(z)$ ខុសពីសូន្យនៅលើគន្លង C គេបាន៖

$$N_f=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

$$N_{f+g}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)+g'(z)}{f(z)+g(z)}dz$$

$$N_f-N_{f+g}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\left[\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{f'(z)+g'(z)}{f(z)+g(z)}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)\left[f(z)+g(z)\right]-f(z)\left[f'(z)+g'(z)\right]}{f(z)\left[f(z)+g(z)\right]}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\left[f'(z)g(z)-f(z)g'(z)\right]}{f(z)\left[f(z)+g(z)\right]}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\left[f'(z)g(z)-f(z)g'(z)\right]}{f^2(z)\left[\dfrac{f(z)+g(z)}{f(z)}\right]}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\dfrac{\left[f'(z)g(z)-f(z)g'(z)\right]}{\left\{f(z)\right\}^2}}{\left[1+\dfrac{g(z)}{f(z)}\right]}dz$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F'(z)}{F(z)}dz \qquad (1) \text{ ដែល } F(z)=1+\frac{g(z)}{f(z)}$$

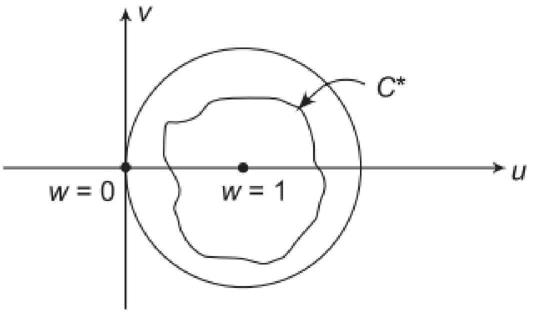
តាង $w=F(z)=1+\dfrac{g(z)}{f(z)}$

$$w-1=\frac{g(z)}{f(z)}$$

$$|w-1|=\frac{g(z)}{f(z)}<1 \qquad [\therefore g(z)<f(z)]$$

ដូច្នេះ អនុគមន៍ $F(z)$ ធ្វើអនុវត្តន៍ពី C ទៅក្នុង $|w-1|<1$។

នៅពេល z ឆ្លងកាត់ C ត្រង់ចំណុច $w=F(z)$ វាឆ្លងកាត់ក្នុងគន្លងបិទ C^* ដែលស្ថិតនៅខាងក្នុងដែន $|w-1|<1$ ដូច្នេះ $w=0$ ស្ថិតនៅផ្នែកខាងក្រៅ C^* ។



រូបភាព ៥.២៥

តាមរូបមន្តអាំងតេក្រាលកូស៊ី

$$\int_C \frac{F'(z)}{F(z)}dz=\int_{C^*}\frac{dw}{w}=0$$

ពីសមីការ (1) គេបាន $N_f-N_{f+g}=0$

$$N_{f+g}=N_f$$

ឧទាហរណ៍៣៨៖ ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទរ៉ូឆេ (Rouché) ដើម្បីកំណត់ចំនួនសូន្យនៃពហុធា $2z^5+8z-1$ ស្ថិតនៅក្នុងរង្វង់ដែលមាន $|z|=2$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $F(z)=2z^5+8z-1$

តាង $f(z)=2z^5, g(z)=8z-1, C:|z|=2$

នៅលើរង្វង់ $C:|z|=2$ គេបាន

$$|f(z)|=|2z^5|$$
$$=2|2^2|$$
$$=64$$

និង

$$|g(z)|=|8z-1|$$
$$\le|8z|+|1|$$
$$=8|2|+1$$
$$=17$$

$$\therefore |g(z)|\le 17$$

ហើយ $\quad |f(z)|=64>17\ge|g(z)|$

$\therefore \ |f(z)|>|g(z)|$

ដោយ $f(z)$ និង $g(z)$ គឺជាអនុគមន៍វិភាគក្នុង និងនៅលើ C ដូចគ្នាដែរ $f(z)$ និង $f(z)+g(z)$ គឺមិនមានសូន្យនៅលើ C តាមទ្រឹស្តីបទរបស់ (Rouché) $N_{f+g}=N_f$

$$f(z)=2z^5 \text{ មានសូន្យនៃលំដាប់}5\text{នៅក្នុងរង្វង់}C$$

$$N_f=5$$

$$\therefore N_{f+g}=5$$

ដូចនេះ $F(z)$ មានសូន្យ 5 នៅក្នុងរង្វង់ C ។

ឧទាហរណ៍៣៥៖ ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទរ៉ូឆេ (Rouché) ដើម្បីកំណត់ចំនួនសូន្យនៃពហុធា $z^6-5z^4+z^3-2z$ ស្ថិតនៅក្នុងរង្វង់ដែលមាន $|z|=1$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $F(z)=z^6-5z^4+z^3-2z$

តាង $f(z)=-5z^4,\ g(z)=z^6+z^3-2z,\ C:|z|=1$

នៅលើរង្វង់ $C:|z|=1$ គេបាន

$$|f(z)|=|-5z^4|$$

$$=5|1^4|=5$$

និង

$$|g(z)|=|z^6+z^3-2z|$$

$$\le|z^6|+|z^3|+2|z|$$

$$=1+1+2$$

$$=4$$

$$\therefore |g(z)|\le 4$$

ហើយ $|f(z)|=5>4\ge|g(z)|$

$$\therefore \ |f(z)|>|g(z)|$$

ដោយ $f(z)$ និង $g(z)$ គឺជាអនុគមន៍វិភាគក្នុង និងនៅលើ C ដូចគ្នាដែរ $f(z)$ និង $f(z)+g(z)$ គឺមិនមានសូន្យនៅលើ C តាមទ្រឹស្តីបទរបស់រ៉ូឆេ (Rouché) $N_{f+g}=N_f$

$$f(z)=-5z^4 \text{ មានសូន្យនៃលំដាប់}4\text{នៅក្នុងរង្វង់}C$$

$$N_f=4$$

$$\therefore N_{f+g}=4$$

ដូចនេះ $F(z)$ មានសូន្យ 4 នៅក្នុងរង្វង់ C ។

ឧទាហរណ៍៣៦៖ ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទរ៉ូឆេ (Rouché) ចូរបង្ហាញថាឫសទាំងអស់នៃ $z^7-5z^3+12=0$ ស្ថិតនៅចន្លោះរង្វង់ $|z|=1$ និង $|z|=2$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $F(z)=z^7-5z^3+12$

ក. តាង $f(z)=12,\ g(z)=z^7-5z^3,\ C:|z|=1$

នៅលើរង្វង់ $C:|z|=1$ គេបាន

$$|f(z)|=|12|$$
$$=12$$

និង $|g(z)|=|z^7-5z^3|\le|z^7|+5|z^3|=1+5=6$

$\therefore\ |g(z)|\le 6$

ហើយ $|f(z)|=12>6\ge|g(z)|$

$\therefore\ |f(z)|>|g(z)|$

ដោយ $f(z)$ និង $g(z)$ គឺជាអនុគមន៍វិភាគក្នុង និងនៅលើ C_1 ដូចគ្នាដែរ $f(z)$ និង $f(z)+g(z)$ គឺមិនមានសូន្យនៅលើ C_1 តាមទ្រឹស្តីបទរបស់ (Rouché) $N_{f+g}=N_f$

$f(z)=12$ មានសូន្យនៃលំដាប់ 0 នៅក្នុងរង្វង់ C_1

$$N_f=0$$
$$\therefore N_{f+g}=0$$

ដូចនេះ $F(z)$ មិនមានសូន្យ 0 នៅក្នុងរង្វង់ C_1 ។

ខ. តាង $f(z)=z^7,\ g(z)=12-5z^3,\ C:|z|=2$

នៅលើរង្វង់ $C:|z|=2$ គេបាន

$$|f(z)|=|z^7|=128$$

និង $|g(z)|=|12-5z^3|\le|12|+5|z^3|=12+40=52$

$\therefore\ |g(z)|\le 52$

ហើយ $|f(z)|=128>52\ge|g(z)|$

$\therefore\ |f(z)|>|g(z)|$

ដោយ $f(z)$ និង $g(z)$ គឺជាអនុគមន៍វិភាគក្នុង និងនៅលើ C_2 ដូចគ្នាដែរ $f(z)$ និង $f(z)+g(z)$ គឺមិនមានសូន្យនៅលើ C_2 តាមទ្រឹស្តីបទរបស់(Rouché) $N_{f+g}=N_f$

$f(z)=z^7$ មានសូន្យនៃលំដាប់ 7 នៅក្នុងរង្វង់ C_2

$$N_f=7$$
$$\therefore N_{f+g}=7$$

ដូចនេះ $F(z)$ មានសូន្យ 4 នៅក្នុងរង្វង់ C_2 ។

ចំនួនសរុបសូន្យនៃ $F(z)$ នៅក្នុងចន្លោះរង្វង់ $1<|z|<2=\left(N_{f+g}\right)_{C_2}-\left(N_{f+g}\right)_{C_1}$

$$=7-0$$
$$=7$$

គេបានឫសសរុបនៃ $F(z)=z^7-5z^3+12=0$ ស្ថិតនៅចន្លោះរង្វង់ $|z|=1$ និង $|z|=2$ ។

លំហាត់ទ្រឹស្តីបទសំណល់

១.ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទរេស៊ីឌុយ ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2-2x+2}dx$

ខ. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left(x^2+4\right)^2}$

គ. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^6+1}$

ឃ. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left(x^2+1\right)\left(x^4+9\right)}dx$

ង. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left(x^2+1\right)^3}dx$

២. ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

1. $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2-\cos\theta}$
2. $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+3\cos\theta}$
3. $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{10-8\sin\theta}$
4. $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sin^2\theta+2\sin^2\theta}$
5. $\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{5+4\cos\theta}d\theta$
6. $\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta-\sin^2\theta}{10+8\cos\theta}d\theta$
7. $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{9+16\sin^2\theta}$
8. $\int_0^{\pi}\frac{\cos\theta\sin^2\theta}{2+\cos\theta}d\theta$
9. $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{7+2\cos\theta+3\sin\theta}$

៣. គណនាអាំងតេក្រាលអ៊ីមប្រូភើខាងក្រោម៖

(1). $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

(2). $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+x^2+1}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

(3). $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^4+1\right)\left(x^4+1\right)}=\frac{\pi}{2}$

(2). $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x-i)(x+3i)}=\frac{\pi}{2}$

(5). $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{3\pi}{8}$

(6). $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^4+1\right)^2}=\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}$

(7). $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(4x^2+1\right)(x-i)}=\frac{\pi}{3}i$

(8). $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x+i)(x-3i)}=\frac{\pi}{2}$

៤.ចូរគណនាអាំងតេក្រាលដោយប្រើគន្លងអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

(1). $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+4\cos\theta}$

(2). $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+4\sin\theta}$

(3). $\int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta}{5+4\cos\theta}d\theta$

(4). $\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{5-4\cos\theta}d\theta$

(5). $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\sin\theta}$

(6). $\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{5-3\cos\theta}d\theta$

(7). $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}$

(8). $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5-3\cos\theta}$

(9). $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta},\ a>b>0$

$(10).\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+a\sin\theta},|a|<1$ $(11).\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(5-4\cos\theta)^2}$ $(12).\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^2},a>b>0$

៥.ចូរគណនាអាំងតេក្រាលដោយប្រើគន្លងអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$(1).\int_0^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+9)(x^2+4)}dx$ $(2).\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)},a>b>0$

$(3).\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^4+10x^2+9}$ $(4).\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}$

$(5).\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^2},\ a>0$ $(6).\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+x+3}{x^4+5x^2+4}dx$

$(7).\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos mx}{(x^2+a^2)^2}dx,\ a>0,m>0$ $(8).\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}dx$

$(9).\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+2x+2}dx$ $(10).\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x^2+4x+5}dx$

៦. ចូរគណនាអាំងតេក្រាលអ៊ីមប្រូភើ។ សរសេរដំណោះស្រាយលម្អិតដែល a,b ជាចំនួនពិត និង $c>0$ ។

$(1).\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(2x)}{x^2+1}dx=\pi e^{-4}$ $(2).\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin(3x)}{x^2+2}dx=e^{-3\sqrt{2}}\pi$

$(3).\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2+2x+4}dx=-\frac{\pi}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi}$ $(4).\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\pi x)}{x^2+2x+4}dx=0$

$(5).\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\cos(2x)}{(x^2+1)^2}dx=-\frac{\pi}{2}e^{-2}$ $(6).\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)^2}dx=\frac{\pi}{e}$

$(7).\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos[a(x-b)]}{x^2+c^2}dx=\frac{\pi}{c}e^{-|a|c}\cos(ab)$ $(8).\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(4\pi x)}{2x^2+x+1}dx=-2e^{-\sqrt{7}\pi}\frac{\pi}{\sqrt{7}}$

$(9).\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos(\pi x)}{x^2+x+9}dx=\pi e^{-\frac{\sqrt{35}}{2}\pi}$ $(10).\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\pi x)}{x^2+x+1}dx=-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi}$

៧.ក្នុងលំហាត់ខាងក្រោមដោយប្រើខ្សែកោងភាពដូចគ្នាដើម្បីគណនាតម្លៃគោលកូស៊ីនៃអាំងតេក្រាលអ៊ីមប្រូភើ។

$(1).\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x\cos x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$ $(2).\int_0^{2\pi}\frac{\sin x\cos(2x)}{x}dx=0$

$(3).\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}dx=\pi$ $(4).\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2x\sin x}{x^2-a^2}dx=2\pi\cos a$

(5). $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi$ (6). $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)} dx = \pi\left(1-\frac{1}{e}\right)$

(7). $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x-b} dx = \pi\cos(ab)$ និង $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x-b} dx = -\pi\sin(ab)$

៨. ប្រើទ្រឹស្តីបទរ៉ូឆេដើម្បីកំណត់ចំនួនសូន្យនៃ $F(z)$ ដែលនៅក្នុងដែនដូចខាងក្រោម៖

(1). $F(z) = z^7 - 5z^4 + z^2 - 2, |z| = 1$

(2). $F(z) = z^4 - 7z - 1, |z| = 1$

(3). $F(z) = 2z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 2z + 9, |z| = 1$

(4). $F(z) = z^4 - 5z + 1, |z| < 2$

(5). $F(z) = 2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8, |z| = 1$

(6). $F(z) = z^7 - 4z^3 + z - 1, |z| = 1$

(7). $F(z) = z^7 - z^3 - 12, \ 1 < |z| < 2$

(8). $F(z) = z^4 - 5z + 1, \ 1 < |z| < 2$

ឯកសារពិគ្រោះ

(Ravish R Singh, 2017)Asmar, N. H., & Grafakos, L. (2018). *Complex analysis with application*. Spinger.

DASS, H. K. (2014). *Advanced engineering mathematics by H.K. DASS*. S. Chand & Company.

P.Sivaramakrishna Das, C. V. (2016). *Engineering Mathematics-II* (Vol. II). Pearson Education.

Prasad, L. (2019). *Complex analysis*. Paramount Publications.

Ravish R Singh, M. B. (2017). *Complex variables and numerical method* (2 ed.). McGraw Hill Education.

Saff, E. B., & Snider, A. D. (2003). *Fundamentals of complex analysis with applications to engineering and science* (3rd ed.). Prentice Hall.

Soun, S. (2008). *វិភាគចំនួនពិត ភាគ ៣* (*Real analysis 3)*. Royal University of Phnom Penh.

Spiegel, M., Lipschutz, S., Schiller, J., & Spellman, D. (2009). *Schaum's outline of complex variables* (2nd ed.). McGraw-Hill. Krishna Prakashan Media.

Sren, P. (2023). *វិភាគកុំផ្លិច* (*Complex analysis)*

Vasishtha, A. R., Vasishtha, A. K., & Dangwal, R. (2013). *Krishna's textbook on analysis*.

សន្ទានុក្រម

[1] សន្ទានុក្រមគណិតវិទ្យាសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ

[2] សន្ទានុក្រមគណិតវិទ្យារាជបណ្ឌិតសភាកម្ពុជា

[3] សន្ទានុក្រមសម្ដេចសង្ឃរាជ ជួន ណាត