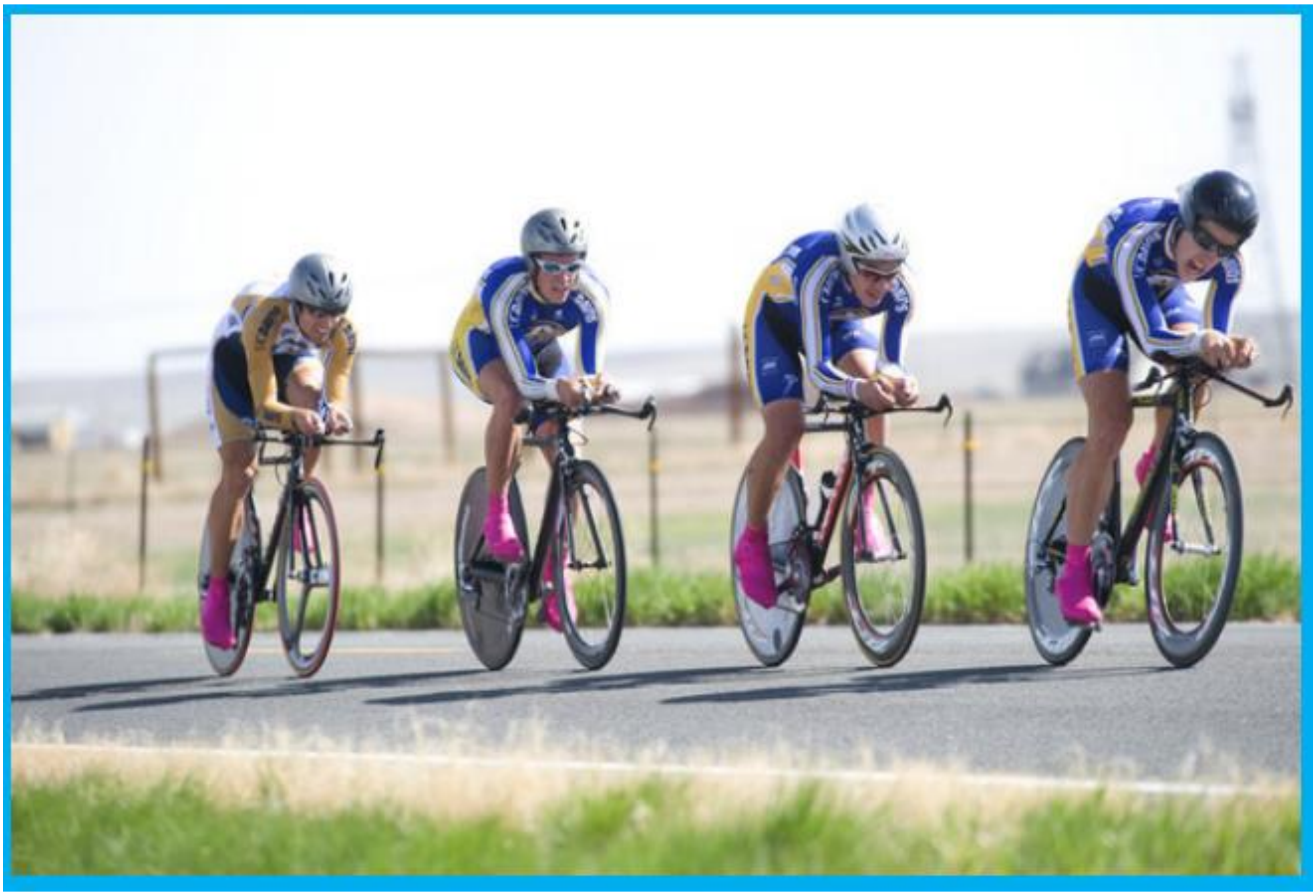
ពីជគណិតលីនេអ៊ែរ២



អ្នកនិពន្ធដោយៈ លោក យុត តា

គាំទ្រថវិកាលើការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អដោយៈ

“មូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍”

២០២២

គណៈកម្មការនិពន្ធ៖ លោក យុត នា គ្រូឧទ្ទេសឧត្តមសិក្សា

គណៈកម្មការរចនាទំព័រ ៖ លោកស្រី សំបាត់ អ៊ាត លោកស្រី ឈុំ ពៅ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យ៖

១. លោក ហ៊ុន វ៉ាវី
២. លោក ឈាង ហាង
៣. លោក ខាន់ ដារ៉ា

បុព្វកថា

ដំណើរអភិវឌ្ឍនៃព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជានៅក្នុងយុគសម័យទំនើបនេះ ជាមេរៀនដ៏ជោគជ័យបំផុតមួយដែលចាប់ឫសគល់ចេញពីការបញ្ចប់របបប្រល័យពូជសាសន៍ ការបញ្ចប់សង្គ្រាម ការផ្សះផ្សារជាតិ ការកសាងមូលដ្ឋានរឹងមាំនៃសន្តិភាពនិងស្ថេរភាព និងការអភិវឌ្ឍសេដ្ឋកិច្ច។ នៅក្រោយពេលដែលសន្តិភាពត្រូវបានកើតឡើងដោយបរិបូរណ៍នៅឆ្នាំ១៩៩៨ កម្ពុជាទទួលកំណើនសេដ្ឋកិច្ចខ្ពស់ គឺប្រមាណ៨%ក្នុងមួយឆ្នាំ។ លើសពីនេះទៀតអត្រានៃភាពក្រីក្រត្រូវបានកាត់បន្ថយពីប្រមាណ៥៣% នៅឆ្នាំ២០០៤មកនៅទាបជាង១០% នៅឆ្នាំ២០១៩។ ដំណើរនៃការអភិវឌ្ឍជាតិជាសកម្មភាពដែលបន្តទៅមុខជាប់ជានិច្ច ហើយគោលនយោបាយថ្មីៗដែលមានលក្ខណៈអន្តរវិស័យគ្របដណ្តប់ ក៏កំពុងលេចរូបរាងឡើងដើម្បីតម្រង់ទិសកម្ពុជាឆ្ពោះទៅកាន់ប្រទេសមានប្រាក់ចំណូលមធ្យមកម្រិតខ្ពស់នៅឆ្នាំ២០៣០ និងឈានឡើងជាប្រទេសមានប្រាក់ចំណូលខ្ពស់ នៅឆ្នាំ២០៥០។ ការប្រែប្រួលឆាប់រហ័សនៃនិម្មាបនកម្មពិភពលោក និងតំបន់រួមទាំងទំនាក់ទំនងភូមិសាស្ត្រនយោបាយ បានផ្តល់កាលានុវត្តភាពសម្រាប់ការអភិវឌ្ឍឧស្សាហកម្មនៅកម្ពុជា ដែលត្រូវបានរាជរដ្ឋាភិបាលចាត់ទុកជាមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃកំណើនសេដ្ឋកិច្ចកម្ពុជា។ រាជរដ្ឋាភិបាលកម្ពុជាបានកំពុងបន្តពង្រឹង និងអភិវឌ្ឍវិស័យអប់រំឆ្ពោះទៅរកការស្រាវជ្រាវ និងនវានុវត្តន៍ដើម្បីពង្រឹងសមត្ថភាពនិងជំនាញរបស់ធនធានមនុស្សនៅកម្ពុជាឱ្យស្របទៅនឹងបរិបទថ្មីនៃការអភិវឌ្ឍ ជាពិសេសការពង្រឹងសហគ្រិនភាពក្នុងការរៀបចំម៉ូដែលធុរកិច្ចថ្មីៗ។ ដើម្បីចាប់យកកាលានុវត្តភាពពីបដិវត្តន៍ឧស្សាហកម្មទី៤ និងសេដ្ឋកិច្ចឌីជីថលដែលកំពុងផុសផុលឡើង ប្រព័ន្ធអេកូឡូហ្ស៊ីដែលបង្កលក្ខណៈអំណោយផលដល់ការបង្កើតថ្មី នវានុវត្តន៍ ការស្រាវជ្រាវ និងអភិវឌ្ឍន៍ ត្រូវតែមានការកែលម្អ។

បណ្តាប្រទេសនៅទ្វីបអាស៊ីកំពុងនាំមុខក្នុងការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍ ដោយមានភាគហ៊ុនប្រមាណ៤៤% នៃការវិនិយោគទាំងមូលរបស់ពិភពលោក។ ប្រទេសចិនកំពុងបន្តកសាងហេដ្ឋារចនាសម្ព័ន្ធនៃការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍ ក៏ដូចជាសមត្ថភាពមនុស្ស។ ផ្ទុយទៅវិញ ប្រទេសនៅទ្វីបអាមេរិកខាងត្បូង និងអាហ្វ្រិក កំពុងស្ថិតនៅឆ្ងាយពីការវិនិយោគនេះ ហើយជាលទ្ធផល ប្រទេសទាំងនោះក៏ពុំមានកំណើនសេដ្ឋកិច្ចគួរឱ្យកត់សម្គាល់ដែរ។ ទុនវិនិយោគសរុបលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍរបស់ប្រទេសនៅទ្វីបអាមេរិកខាងត្បូវនិងអាហ្វ្រិក មានប្រមាណ៥%នៃការវិនិយោគទាំងមូលរបស់ពិភពលោក ក្នុងពេលដែលតំបន់ទាំង២នេះមានប្រជាជនប្រមាណ២០%នៃប្រជាជនពិភពលោក។ ប្រទេសចំនួន៦ដែលមានលំដាប់ខ្ពស់ជាងគេនៅក្នុងការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍ រួមមានសហរដ្ឋអាមេរិក ចិន ជប៉ុន អាល្លឺម៉ង់ ឥណ្ឌា និងកូរ៉េខាងត្បូង ដែលស្មើនឹងប្រមាណ៧០%នៃទុនវិនិយោគសរុបរបស់ពិភពលោក។

តើចំណេះដឹង ផលិតផល និងសេវាកម្មថ្មីទាំងនេះកើតឡើងពីអ្វី? ហើយកើតឡើងដោយរបៀបណា? ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជាកំពុងតែកសាងមូលដ្ឋានសម្រាប់ការត្រៀមខ្លួនទទួល និងប្រកួតប្រជែងក្នុងយុគសម័យបដិវត្តឧស្សាហកម្មទី៤ នៅក្នុងសេដ្ឋកិច្ចដែលផ្អែកលើពុទ្ធិ ហើយដែលប្រការនេះ

ចាំបាច់តម្រូវឱ្យពលរដ្ឋកម្ពុជា ត្រូវក្លាយខ្លួនជាពលរដ្ឋឌីជីថល ពលរដ្ឋសកល និងពលរដ្ឋដែលប្រកបដោយការទទួលខុសត្រូវ ដែលមានសមត្ថភាពក្នុងការផលិត ចែកចាយ និងប្រើប្រាស់ពុទ្ធិដើម្បីទទួលមនុញ្ញផល និងរួមចំណែកក្នុងកំណើន។ ធនាគារពិភពលោកបានធ្វើការកត់សម្គាល់តាំងពីឆ្នាំ២០០២នូវបម្លាស់ប្តូរនៃមូលដ្ឋានសេដ្ឋកិច្ច ពីសេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើកម្លាំងពលកម្ម និងធនធានអតិកម្ម (Labour and Resource Based Economy) ទៅកាន់សេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើពុទ្ធិ (Knowledge Based-Economy) ដែលក្នុងន័យនេះ ពុទ្ធិគឺជាគន្លឹះនៃការអភិវឌ្ឍ។ អាស្រ័យហេតុនេះ នៅលើគន្លងដែលកម្ពុជាកំពុងធ្វើដំណើរឆ្ពោះទៅកាន់សេដ្ឋកិច្ចឌីជីថល សង្គមកម្ពុជាត្រូវតែមានសមត្ថភាពក្នុងការផលិត ជ្រើសរើស បន្សាំ បង្កើតមុខរបរ និងប្រើប្រាស់ពុទ្ធិ ដើម្បីរក្សានិរន្តរភាពនៃកំណើន និងកែលម្អជីវភាពរស់នៅ។ សមត្ថភាពទាំងនេះ អាចកើតឡើងនៅពេលពលរដ្ឋកម្ពុជាមានឱកាសក្នុងការទទួលបានបទពិសោធន៍ពីការស្រាវជ្រាវ ការបណ្តុះគំនិតច្នៃប្រឌិត និងការស្វែងរកនវានុវត្តន៍។

កំណែទម្រង់វិស័យអប់រំ គឺជាការត្រួសត្រាយមាគ៌ាសម្រាប់ដំណើរឆ្ពោះទៅកាន់សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិ និងប្រជាពលរដ្ឋប្រកបដោយភាពរស់រវើក។ តាមរយៈមូលដ្ឋានអប់រំ សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិនឹងប្រមូលផ្តុំ បង្កើត និងចែករំលែក ទៅកាន់សមាជិកក្នុងសង្គមនូវសម្បទាអប់រំ ពិសេសគឺពុទ្ធិសម្បទាក្នុងបុព្វហេតុនៃមនុស្សជាតិនិងឧត្តមប្រយោជន៍នៃប្រទេស។ សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិ គឺពុំគ្រាន់តែជាសង្គមដែលសម្បូរព័ត៌មានប៉ុណ្ណោះទេ តែជាសង្គមដែលប្រជាពលរដ្ឋអាចធ្វើបរិវត្តកម្មពីព័ត៌មានទៅជាមូលធនប្រកបដោយប្រសិទ្ធភាព។ ការរីកចម្រើនទៅមុខជាលំដាប់នៃបច្ចេកវិទ្យានិងតំណភ្ជាប់ បានពង្រីកព្រំដែននៃការចូលទៅកាន់ និងការទទួលបានព័ត៌មានជាសកល ហើយដែលក្នុងន័យនេះ ការអប់រំនឹងបន្តវិវត្តទៅមុខនិងមានការផ្លាស់ប្តូរ។ សង្គមមួយដែលមានអំណាន និងរបាប់ជាបុរេលក្ខខណ្ឌនៃជីវភាពប្រចាំថ្ងៃនៃប្រជាពលរដ្ឋ ពេលនោះបំណិននៃអំណាន និពន្ធ និងការគណនាលេខនព្វន្ត គឺជាចលករនៃការរៀនរបស់សិស្ស។ ជាតុដ៏ចម្បងមួយដែលស្ថិតនៅក្នុងការកសាងសង្គមដែលប្រកបដោយពុទ្ធិគឺសៀវភៅសិក្សា ហើយការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សាជាប្រចាំ គឺជានវានុវត្តន៍នៃវិស័យអប់រំដែលនាំទៅរកការសិក្សាពេញមួយជីវិត ការអភិវឌ្ឍសម្បទាអប់រំ និងការចែករំលែកចំណេះដឹង។ មូលដ្ឋានអប់រំ ជាពិសេសគឺគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សាត្រូវមានតួនាទីដែលប្រកបដោយការឆ្លើយតបចំពោះតម្រូវការខាងលើនេះ។ សាស្ត្រាចារ្យ អ្នកស្រាវជ្រាវ និងបុគ្គលិកអប់រំត្រូវបន្តសិក្សាជាប់ជានិច្ចតាមរយៈការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ហើយដែលសៀវភៅសិក្សាទាំងនេះនឹងក្លាយជាស្ពាននៃទំនាក់ទំនងរវាងនវានុវត្តន៍នៃបច្ចេកវិទ្យា និងការរៀននិងបង្រៀននៅក្នុងថ្នាក់រៀន។

សង្គមដែលប្រកបពុទ្ធិ ក៏ជាសង្គមដែលបណ្តុះឱ្យមានរចនាសម្ព័ន្ធទន់នៃសេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើពុទ្ធិដែរ។ ឧទាហរណ៍ជាក់ស្តែងនៃបែបផែននេះរួមមាន Silicon Valley នៃសហរដ្ឋអាមេរិក សួនឧស្សាហកម្មវិស្វកម្មអាកាសយានយន្តនិងយានយន្តនៅទីក្រុង Munich ប្រទេសអាល្លឺម៉ង់ តំបន់ជីវបច្ចេកវិទ្យានៅក្រុង Hyderabad ប្រទេសឥណ្ឌា តំបន់ផលិតគ្រឿងអេឡិចត្រូនិក និងសារគមនាគមន៍ ឌីជីថលនៅទីក្រុង Seoul ប្រទេសកូរេខាងត្បូង ក៏ដូចជាសួនឧស្សាហកម្មថាមពល និងឥន្ធនគីមីសាស្ត្រនៃប្រទេសប្រេស៊ីល ហើយក៏នៅមានទីក្រុងនៃប្រទេសជាច្រើនទៀតនៅលើពិភពលោក

លក្ខណៈសម្បត្តិនៃទីក្រុងទាំងនេះគឺការប្រើប្រាស់និន្នាការនៃការអភិវឌ្ឍដែលជំរុញ និងតម្រង់ទិសដោយចំណេះដឹង ហើយដែលចំណេះដឹងទាំងនោះកើតចេញជាដំបូងពីការវិនិយោគទៅលើគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា ស្ថាប័នស្រាវជ្រាវ មជ្ឈមណ្ឌលឧត្តមភាពនៃជំនាញជាន់ខ្ពស់ ការប្រកួតប្រជែងដោយគុណាធិបតេយ្យ និង ជាពិសេសគឺការបណ្ដុះវប្បធម៌អំណាននិងនិពន្ធសៀវភៅ។ ល្បឿននៃការរីកចម្រើនផ្នែកពុទ្ធិ និងបច្ចេកវិទ្យាកំពុងមានសន្ទុះលឿនជាងអ្វីដែលសិស្ស និងនិស្សិតអាចទទួលបានពីគ្រូនៅគ្រឹះស្ថានសិក្សា ដែលធ្វើឱ្យគោលដៅនៃការអប់រំនៅពេលបច្ចុប្បន្ននេះ មានការប្រឈមខ្លាំងជាងពេលណាទាំងអស់។ ឧទាហរណ៍ ក្នុងមួយឆ្នាំ មានសៀវភៅជាង២,២លានចំណងជើង ត្រូវបានសរសេរ និងបោះពុម្ព ដែលក្នុងនោះប្រទេសចិនមាន៤៤០ពាន់ ចំណែកឯសហរដ្ឋអាមេរិកមាន ៣០៥ពាន់ និងប្រទេសរុស្ស៊ីមាន ១២០ពាន់ចំណងជើង។

ខណៈពេលដែលបច្ចេកវិទ្យាកំពុងរីកចម្រើនជារៀងរាល់ថ្ងៃ មធ្យោបាយសម្រាប់អំណានក៏មានច្រើនជម្រើសសម្រាប់សិស្ស និស្សិត និងសាធារណៈជនរួមមានការអានសៀវភៅ ការអានលើឧបករណ៍អេឡិចត្រូនិក ការអានដោយប្រើទូរសព្ទឆ្លាត និងការអានលើកុំព្យូទ័រ ដែលសុទ្ធសឹងជាមធ្យោបាយសំខាន់ៗដែលនាំអ្នកអានទាំងឡាយឱ្យសម្រេចគោលបំណងអានរបស់ខ្លួន។ម្យ៉ាងវិញទៀត អំណានដោយប្រើមធ្យោបាយបច្ចេកវិទ្យាទំនើប ចំណាយពេលតិច ងាយស្រួលអាន និងជួយដល់បរិស្ថានមួយកម្រិតទៀត។ នាពេលបច្ចុប្បន្ន សិស្ស និស្សិត និងសាធារណៈជនកម្ពុជាដែលស្រឡាញ់អំណានកំពុងតែប្រើប្រាស់មធ្យោបាយអំណានទាំងនេះ។ បើយើងក្រឡេកមើលទៅប្រទេសជឿនលឿន ទោះបីជាបច្ចេកវិទ្យារីកចម្រើនខ្លាំងយ៉ាងណា អំណានតាមរយៈសៀវភៅនៅតែមានសន្ទុះដដែល។ ម្យ៉ាងវិញទៀត បច្ចេកវិទ្យាអានបែបទំនើបតាមរយៈឧបករណ៍ទំនើប អាស្រ័យលើលទ្ធភាពនៃធនធានអប់រំឌីជីថល និងមាតិកាឌីជីថលគ្រប់គ្រាន់ដែលបានផលិត និងបង្ហោះចែកចាយសម្រាប់អំណាន។

ក្នុងបរិបទកម្ពុជា ជាពិសេសក្នុងបរិការណ៍នៃការផ្ទុះរីករាលដាលនៃជំងឺកូវីដ-១៩ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានជំរុញឱ្យមានបរិវត្តកម្មឌីជីថលនៅក្នុងអេកូស៊ីស្តែមនៃការអប់រំ ជាពិសេសការអប់រំតាមប្រព័ន្ធអេឡិចត្រូនិកនិងការអប់រំពីចម្ងាយដើម្បីលើកកម្ពស់អំណានតាមរយៈការផលិតមាតិកាឌីជីថលដែលមានភាពចំរុះ ការកសាងសមត្ថភាពផ្នែកតំណភ្ជាប់និងវេទិកាឌីជីថល ការពង្រីកវិសាលភាពនៃមជ្ឈមណ្ឌលទិន្នន័យ និងការលើកកម្ពស់គុណភាពនៃការផលិតធនធានអប់រំឌីជីថល គួបផ្សំជាមួយការចែកសន្លឹកកិច្ចការឱ្យសិស្សយកទៅរៀននៅផ្ទះ និងការចុះទៅជួបជាមួយសិស្សជាបណ្ដុំនៅតាមសហគមន៍។ ក្នុងន័យលើកកម្ពស់អំណាន និងភាពសម្បូរបែបនៃធនធានសៀវភៅសិក្សាឱ្យកាន់តែមានប្រសិទ្ធភាពនិងភាពសក្តិសិទ្ធិ និងផ្តល់ឱកាសអំណានកាន់តែច្រើនថែមទៀតដល់សិស្សានុសិស្ស និស្សិត និងសាធារណៈជន ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាលើកទឹកចិត្តនូវចំណុចមួយចំនួនដូចខាងក្រោម៖

1. សាស្ត្រាចារ្យ អ្នកស្រាវជ្រាវ និងបុគ្គលិកអប់រំ សូមបន្តនិងបង្កើនការបោះពុម្ពស្នាដៃបន្ថែមទៀត ដើម្បីធ្វើឱ្យធនធានសម្រាប់អំណានកាន់តែសម្បូរបែប ជាពិសេសធនធានអំណានជាខេមរភាសា

2. គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា សូមផ្តល់លទ្ធភាពគ្រប់បែបយ៉ាង ដើម្បីឱ្យបុគ្គលិកអប់រំគ្រប់លំដាប់ថ្នាក់ និង និស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សាអាចចូលរួមអាន និងសិក្សាស្រាវជ្រាវតាមគ្រប់លទ្ធភាពជាមួយធនធានអំណាន ជាពិសេសការរៀបចំឱ្យមានពេលវេលាសម្រាប់សហសិក្សា និងអំណានក្នុងបណ្ណាល័យ
3. សាស្ត្រាចារ្យតាមមុខវិជ្ជា និងអ្នកស្រាវជ្រាវតាមជំនាញឬវិស័យ ត្រូវរៀបចំដំណើរការរៀនបង្រៀន និងស្រាវជ្រាវដែលមានដាក់បញ្ចូលកិច្ចការស្វ័យសិក្សា សហសិក្សា ឬការស្រាវជ្រាវបណ្ណាល័យដែលតម្រូវឱ្យនិស្សិត ត្រូវអាននិងស្រាវជ្រាវជាមួយធនធានអំណាន
4. គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងមជ្ឈមណ្ឌលស្រាវជ្រាវ ត្រូវខិតខំឱ្យអស់លទ្ធភាពក្នុងការបង្កើតបណ្ណាល័យ មជ្ឈមណ្ឌលរក្សាឯកសារ ឬមជ្ឈមណ្ឌលអប់រំឌីជីថល ជាដើម ដើម្បីឱ្យបុគ្គលិកអប់រំគ្រប់លំដាប់ថ្នាក់និងនិស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សា អាចទទួលបាន និងស្វែងរកប្រភពសម្រាប់អំណាន កាន់តែសម្បូរបែប និងមានភាពបត់បែន ឆ្លើយតបតាមតម្រូវការអ្នកអាន
5. និស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សា ត្រូវខិតខំនិងចំណាយពេលអាន និងចាត់ទុកវប្បធម៌ និងអកប្បកិរិយាអំណានជាផ្នែកមួយ នៃពេលវេលានិងភាពស៊ីវិល័យនៃជីវិតប្រចាំថ្ងៃ
6. បងប្អូនជនរួមជាតិ ដែលជាមាតាបិតា ឬអ្នកអាណាព្យាបាល សូមជួយជំរុញនិងបង្កលក្ខណៈកាន់តែ ច្រើនថែមទៀត ជាពិសេសការលៃលកចំណាយនៅក្នុងគ្រួសារសម្រាប់ការទិញសម្ភារៈសិក្សា សៀវភៅអាន និងឧបករណ៍សម្រាប់អំណានដល់កូនៗ ដែលចាត់ទុកជាការវិនិយោគមួយដ៏សំខាន់ សម្រាប់ បង្កើនចំណេះដឹង និងអនាគតរបស់ពួកគេ។

ដោយមានការគាំទ្រពីក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ នៅឆ្នាំ២០២០ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានបង្កើតមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ដែលហៅកាត់ថា"មូលនិធិ ស.គ.ន" និងហៅជាភាសាអង់គ្លេសថា The Research Creativity and Innovation Fund ដែលហៅកាត់ជាភាសាអង់គ្លេសថា "RCI Fund"។ គោលដៅចម្បងនៃមូលនិធិនេះ គឺរួមចំណែកលើកកម្ពស់វប្បធម៌នៃការស្រាវជ្រាវ បំផុសគំនិតច្នៃប្រឌិត និងជំរុញការធ្វើនវានុវត្ត ដើម្បីជាប្រយោជន៍ដល់វិស័យអប់រំ យុវជន និងកីឡា ដែលឆ្លើយតបទៅនឹងទីផ្សារពលកម្ម និងសាកលភាវូបនីយកម្ម។ មូលនិធិ ស.គ.ន បានសម្រេចកំណត់ប្រធានបទ ជាអាទិភាពសម្រាប់ការគាំទ្រដោយមូលនិធិចំនួន៣ រួមមាន ឌីជីថលនីយកម្មសម្រាប់បដិវត្តឧស្សាហកម្ម៤.០ (Digitalization for IR.4.0) ការស្រាវជ្រាវអនុវត្តលើវិស័យកសិកម្ម (Applied Agricultural Research) និងការស្រាវជ្រាវគរុកោសល្យសតវត្សទី២១ (21st Century Pedagogy Research)។

ដោយមានការធ្វើអាទិភាពូបនីយកម្មទៅលើទិសដៅនៃការប្រើប្រាស់ថវិកាមូលនិធិសម្រាប់ឆ្នាំ២០២០ ក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ និងក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានផ្តល់ការគាំទ្រដល់ការ**រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អ សៀវភៅសិក្សា(Text book) ដែលនឹងត្រូវប្រើប្រាស់នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា**។ គោលបំណងនៃការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អ សៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សាគឺដើម្បីបង្កើនបរិមាណ លើកកម្ពស់គុណភាព និងពង្រីកសមធម៌នៃធនធានសិក្សាជាខេមរភាសា ជូន

ដល់និស្សិតដែលកំពុងបន្តការសិក្សា និងត្រៀមខ្លួនធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។ លើសពីនេះទៀតការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា មានគោលដៅដូចខាងក្រោម ៖

- ឆ្លើយតបជាបន្ទាន់ចំពោះការខ្វះខាតធនធានសិក្សា ដែលជាតម្រូវការសិក្សារបស់និស្សិតនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា
- លើកកម្ពស់ទំនើបភាវូបនីយកម្ម និងឧត្តមានុវត្តន៍នៃការរៀននិងបង្រៀន និងការស្រាវជ្រាវនៅលើមុខវិជ្ជា កម្មវិធីសិក្សា ឬមុខជំនាញជាក់លាក់
- បង្កើនភាពស៊ីជម្រៅក្នុងការកសាងវិជ្ជាជីវៈនិងបទពិសោធន៍សម្រាប់ឋានៈសាស្ត្រាចារ្យ និងអ្នកស្រាវជ្រាវ
- រួមចំណែកដល់ការកសាងភាពជាសហគមន៍វិជ្ជាជីវៈ ការចែករំលែកបទពិសោធន៍ និងវប្បធម៌នៃការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានវាយតម្លៃខ្ពស់ចំពោះការបោះជំហានប្រកបដោយមនសិការវិជ្ជាជីវៈនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងបុគ្គលិកអប់រំទាំងអស់ ក្នុងការរៀបចំ រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ដើម្បីបង្កើនបរិមាណ លើកកម្ពស់គុណភាព និងពង្រឹងសមធម៌នៃធនធានសិក្សាជាខេមរភាសា ជូននិស្សិតដែលកំពុងបន្តការសិក្សា និងត្រៀមខ្លួនធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។ សៀវភៅសិក្សាជាផ្នែកមួយនៃការទទួលស្គាល់គុណភាពអប់រំនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងជាធនធានសិក្សាដែលជាមូលដ្ឋានមួយដ៏សំខាន់ ក្នុងការគាំទ្រដល់ការបង្រៀន និងរៀន ហើយត្រូវមានបរិមាណគ្រប់គ្រាន់ ឆ្លើយតបទៅនឹងកម្មវិធីអប់រំ និងតម្រូវការសិក្សាស្រាវជ្រាវ។ ជាគោលការណ៍ គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សាទាំងអស់ ត្រូវមានសៀវភៅសិក្សាដែលប្រើជាគោលសម្រាប់មុខវិជ្ជានីមួយៗ។ ចំនួនសៀវភៅសិក្សាដែលគ្រប់គ្រាន់សម្រាប់ការស្រាវជ្រាវ និងការសិក្សារបស់និស្សិត ត្រូវមានយ៉ាងតិចមួយចំណងជើងក្នុងមួយមុខវិជ្ជា ហើយត្រូវតម្កល់យ៉ាងតិច២ច្បាប់ នៅក្នុងបណ្ណាល័យ ឬអាចរកបានតាមប្រព័ន្ធអេឡិចត្រូនិក។ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា លើកទឹកចិត្តបន្ថែមទៀតជូនដល់គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សារដ្ឋ និងឯកជនដែលបានស្នើសុំថវិកាមូលនិធិរួច សូមចូលរួមបន្ថែមទៀតដើម្បីបង្កើនចំនួនចំណងជើងសៀវភៅ។ ចំណែកគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សារដ្ឋនិងឯកជនដែលពុំទាន់បានដាក់ពាក្យស្នើសុំ សូមចូលរួមដើម្បីជាគុណប្រយោជន៍ដល់តម្រូវការដ៏ទទូច និងថ្លៃថ្លានៃនិស្សិតកម្ពុជាក្នុងការសិក្សា និងស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។

សេចក្ដីបញ្ជាក់
នៃមូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍

សៀវភៅសិក្សានេះជាលទ្ធផលនៃការស្នើសុំអនុវត្តថវិកាមូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ក្នុងគម្រោង**រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ដែលនឹងត្រូវប្រើប្រាស់នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។** សៀវភៅសិក្សានេះ ត្រូវបានរៀបរៀង និពន្ធ ឬកែលម្អដោយមានការធានាអះអាងថាជាស្នាដៃរបស់អ្នកនិពន្ធផ្ទាល់ និងបានឆ្លងកាត់ត្រួតពិនិត្យ ផ្ដល់យោបល់ និងវាយតម្លៃដោយក្រុមប្រឹក្សាអប់រំ ក្រុមប្រឹក្សាស្រាវជ្រាវ ឬក្រុមប្រឹក្សាដែលមានតម្លៃស្មើនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងតាមរយៈកិច្ចសន្យាដែលបានធ្វើឡើង និងដែលបានតម្កល់ទុកនៅមូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍។ រាល់ខ្លឹមសារ ការបកស្រាយ និងរូបភាព គឺជាជំហរនិងទស្សនៈផ្ទាល់របស់អ្នកនិពន្ធ ហើយ ពុំឆ្លុះបញ្ចាំង ឬជាតំណាងដល់មូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ នៃក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ឡើយ។

មាតិកា

បុព្វកថា i

សេចក្តីបញ្ជាក់ vi

អារម្ភកថា xi

សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ xii

ការបរិយាយលើមុខវិជ្ជា xiii

មូលន័យសង្ខេប xiv

សេចក្តីផ្តើម ម៉ាទ្រីស 1

១. សញ្ញាណម៉ាទ្រីស 1

២. ផលបូកម៉ាទ្រីសនិងផលគុណស្កាលែ 2

៣. ផលគុណម៉ាទ្រីស 3

៥. ម៉ាទ្រីសត្រង់ស្ប៉ូ 5

៥. ម៉ាទ្រីសការេ 5

៦. អង្កត់ទ្រូង និងផលបូកអង្កត់ទ្រូង 6

៧.ម៉ាទ្រីសឯកតានិងម៉ាទ្រីសស្កាលែ 7

៨ តម្លៃនៃម៉ាទ្រីស ពហុធាក្នុងម៉ាទ្រីស 8

៩. ម៉ាទ្រីសច្រាស 8

១០. លក្ខណៈពិសេសនៃម៉ាទ្រីសការេ 12

១១. លក្ខណៈពិសេសនៃម៉ាទ្រីសការេៈ ស៊ីមេទ្រី កែង ណរម៉ាល់ 14

១២. ម៉ាទ្រីសកុំផ្លិច 15

១៣. ប្លុកម៉ាទ្រីស 15

ជំពូកទី១ វ៉ិចទ័រក្នុង $\mathbb{R}^n$ និង $\mathbb{C}^n$, ទំហំវ៉ិចទ័រ 18

១.១. សេចក្តីផ្តើម 18

១.១.១. ជាតុនៃចំនួន 18

១.១.២. វ៉ិចទ័រក្នុងរូបវិទ្យា 18

១.២. វ៉ិចទ័រក្នុង $\mathbb{R}^n$ 19
១.២.១ វ៉ិចទ័រជួរឈរ 19
១.៣.ផលបូកវ៉ិចទ័រ និងផលគុណស្កាលែ 20
១.៤. ផលគុណចំណុច(ស្កាលែ) 21
១.៤.១. ណមនៃវ៉ិចទ័រ 22
១.៤.២. ចម្ងាយ មុំ និងចំណោល 24
១.៥. វ៉ិចទ័រទីតាំង ប្លង់ បន្ទាត់ និង ខ្សែកោងក្នុង Rn 26
១.៥.១.វ៉ិចទ័រទីតាំង 26
១.៥.២. សមីការប្លង់ 27
១.៥.៣. បន្ទាត់ក្នុង R^n 29
១.៦. វ៉ុចទ័រក្នុងR3 29
១.៦.១.ផលគុណវ៉ិចទ័រ 30
១.៧. ចំនួនកុំផ្លិច 31
១.៧.១. កុំផ្លិចឆ្លាស់ តម្លៃដាច់ខាត 32
១.៨. វ៉ិចទ័រនៅក្នុង C^n 33
១.៨.១. ផលគុណស្កាលែរ (ផលគុណក្នុង) នៅក្នុង C^n 33
ជំពូកទី២ ផលគុណស្កាលែរ 34
២.០. រំលឹកនិងបន្ថែមៈ **អនុវត្តលីនេអ៊ែរ** 34
២.១. ផលគុណស្កាលែរ និង ណមផ្គុំ 34
និយមន័យ2.2 [ណមផ្គុំនឹងផលគុណស្កាលែរ] 36
២.២. ភាពអរតូកូណាល់ និង គោលអរតូណរម៉ាល់ 37
ជំពូកទី៣ ដេរីទេមីណង់ 44
៣.១ សេចក្ដីផ្ដើមនៃដេរីទេមីណង់ 44
៣.១.១.ដេរីទេមីណង់លំដាប់1 និង2 44
៣.១.២. ដេទែមីណង់លំដាប់ ៣ 45
៣.១.៣. ទម្រង់បំលាស់ប្ដូរសម្រាប់ដេទែមីណង់លំដាប់3 45
លំហាត់ 46

លំហាត់ 52
៣.២ លក្ខណៈទូទៅនៃដេទែមីណង់ 55
លំហាត់ 62
៣.៣.ប្រមាណវិធីជួរឈរ 64
៣.៤. ផលគុណនៃដេទែមីណង់ និងផលគុណនៃម៉ាទ្រីស 64
៣.៥. លក្ខណៈលីនេអ៊ែរអនុគមន៍នៃដេទែមីណង់ 65
លំហាត់ 67
៣.៦. ច្បាប់ Cramer មាឌ និងបម្លែងលីនេអ៊ែរ 70
៣.៦.១.វិធានរបស់ Cramer 70
៣.៦.២ រូបមន្តសម្រាប់រក A^{-1} 71
៣.៦.៣. ដេទែមីណង់រកផ្ទៃក្រឡា ឬមាឌ 73
៣.៦.៤. បង្ហាញធរណីមាត្រ 74
៣.៧. បម្លែងលីនេអ៊ែរ 76
លំហាត់ 79
៣.៨.មីន័រ កូហ្វាក់ទ័រ និងអែដជយ(Minors, Cofactors, Ad joint) 81
៣.៩. ថ្នាក់នៃអែដជយ(Classical Adjoint) 82
៣.១០. អនុវត្តន៍សមីការលីនេអ៊ែរ ច្បាប់របស់ Cramer 85
៣.១១. ប្លុកម៉ាទ្រីសនិងកត្តាកំណត់ 86
៣.១២. មាឌ 88
ដេទែមីណង់នៃប្រមាណវិធីលីនេអ៊ែរ 90
ជំពូកទី៤ អង្កត់ទ្រូងកម្ម 92
៤.១. តម្លៃផ្ទាល់ និង វ៉ិចទ័រផ្ទាល់ 92
៤.២. ការរកវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ និង គោលនៃលំហផ្ទាល់ 95
៤.៣. ស្វ័យគុណនៃម៉ាទ្រីស 100
លំហាត់ 101
៤.២. អង្កត់ទ្រូងកម្ម 104
៤.២.១.ភាពសមមូល 106

៤.២.២. ប្រព័ន្ធសមីការមិនអូម៉ូសែន និងទំនាក់ទំនងអូម៉ូសែន 108
ជំពូកទី៥ អនុគមន៍លីនេអ៊ែរ លំហឌុល.. 109
៥.១. សេក្តីផ្តើម 109
៥.២.អនុគមន៍លីនេអ៊ែរ និង លំហឌុល 109
៥.២.១.អនុគមន៍លីនេអ៊ែរ 109
៥.២.២. លំហឌុល.. 110
៥.៥. ប្រមាណវិធីធ្វើឲ្យសូន្យ.. 110
៥.៣. គោលលំហឌុល...111
៥.៤. លំហឌុលទី២ (Second Dual Space).. 114
៥.៦. រូបភាពបម្លែងលីនេអែរ.. 115

អារម្ភកថា

ដោយហេតុថា តម្រូវការរបស់មនុស្ស ពីមួយថ្ងៃទៅមួយថ្ងៃ កាន់តែកើន ឡើងឥតឈប់ឈរនោះ មនុស្សតែងតែខិតខំប្រឹងប្រែងរិះរកគ្រប់វិធីទាំងអស់ ដើម្បី ធ្វើយ៉ាងណាបំពេញអោយខានតែបាននូវតម្រូវការទាំងអស់នោះ ។ ជាក់ស្តែង មនុស្សបានបង្កើតឡើងនូវមធ្យោបាយ ឧបករណ៏ សម្ភារៈប្រើប្រាស់ផ្សេងៗជា ច្រើនយ៉ាងទំនើបកម្ម សម្បូរបែប តាមលក្ខណៈវិទ្យាសាស្ត្រ។ ទាំងអស់នេះគឺវាកើតចេញមកពីការគិត ការពិចារណា ការគណនាយ៉ាងល្អិតល្អន់របស់មនុស្សពោលគឺ ការសិក្សាស្រាវជ្រាវនេះឯង។ កត្តាមួយក្នុងចំណោមកត្តាជាច្រើន ដែលធ្វើអោយ វិទ្យាសាស្ត្រលើពិភពលោក មានការប្រែប្រួលរីកចំរើនឡើងយ៉ាងលឿនបែបនេះគឺ គណិតវិទ្យា ព្រោះថា គណិតវិទ្យាជួយដោះស្រាយបញ្ហាជាច្រើន លើគ្រប់ផ្នែកទាំង អស់ដែលទាក់ទងនឹងការគណនាដូចជា ផ្នែកវិស្វករ ព័ត៌មានវិទ្យា សេដ្ឋកិច្ចឧស្សាហកម្ម និង គ្រប់គ្រង។ល។ យើងសង្កេតឃើញថា បញ្ហាជាច្រើនក្នុងរូបវិទ្យា គីមីវិទ្យា និង បច្ចេកវិទ្យាជាច្រើន ជាប់ទាក់ទងយ៉ាងជិតស្និតនឹងការប្រើប្រាស់ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលសាមញ្ញលំដាប់មួយលំដាប់ពីរ។ ក្នុងករណីនីមួយៗ មានការកំណត់នូវ ខ្សែកោងកែងនឹងខ្សែកោងដែលអោយ ការកើនឡើង និង ការថយចុះ ការកើតមាន នូវកាបូន ការរលាយសារជាតិគីមី និង ការព្យាករណ៏ចំនួនប្រជាជនជាដើម។ ទាំងអស់នេះបង្ហាញអោយឃើញថា សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដើរតួ យ៉ាងសំខាន់នៅក្នុងដំណោះស្រាយបញ្ហាទាំអស់នេះ។

ឆ្លងតាមបុព្វហេតុហេតុនៃការសិក្សាស្រាវជ្រាវខាងលើ យើងឃើញយ៉ាងច្បាស់នូវភាពចាំបាច់នៃការប្រើប្រាស់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលសាមញ្ញ។ ហេតុនេះ ក្នុងនាមខ្ញុំជាអ្នកសិក្សាស្រាវជ្រាវម្នាក់ ក៏បានចូលរួមចំណែកក្នុង បញ្ហានេះផងដែរ ដោយបានលើកឡើងនូវប្រធានបទមួយ ដែលទាក់ទងនិងសមីការឌីផរ៉ង់ស្យែលសាមញ្ញលំដាប់មួយ មកធ្វើការសិក្សាស្រាវជ្រាវ ក្នុងពេល នេះ។ តើសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានដំណោះស្រាយយ៉ាងដូចម្តេចសម្រាប់ប្រភេទនីមួយៗ? ហើយបញ្ហាទាំងឡាយ ដែលទាក់ទងនឹងសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលសាមញ្ញលំដាប់មួយ ឬលំដាប់ខ្ពស់ ត្រូវបានដោះស្រាយយ៉ាងដូចម្តេចដែរ?

សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ

ជាការពិតសៀវភៅ «ពីជគណិតលីនេអ៊ែរ២» ដែលលេចចេញជារូបរាងនៅពេលនេះគឺបានកើតឡើងពីការខិតខំ និងយកចិត្តទុកដាក់ចូលរួមពីភាគី និងស្ថាប័នពាក់ព័ន្ធជាច្រើន។

ខ្ញុំបាទ សូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅបំផុតដល់ភាគី និងស្ថាប័នពាក់ព័ន្ធទាំងអស់ដូចជា ៖

- ក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ ដែលបានគាំទ្រយ៉ាងពេញទំហឹងដល់ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាឱ្យបង្កើតមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ហៅកាត់ថា «មូលនិធិ ស.គ.ន»។

- ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាដែលបានបង្កើតមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ដែលហៅកាត់ថា «មូលនិធិ ស.គ.ន» ដើម្បីរួមចំណែកលើកកម្ពស់វប្បធម៌នៃការស្រាវជ្រាវ បំផុសគំនិតច្នៃប្រឌិត និងជំរុញការធ្វើនវានុវត្ត ដើម្បីជាប្រយោជន៍ដល់វិស័យអប់រំ យុវជន និងកីឡា ដែលឆ្លើយតបទៅនឹងទីផ្សារពលកម្ម និងសាកលភាវូបនីយកម្ម។

- មូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ដែលបានគាំទ្រដល់ការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា (Text book) ដែលនឹងត្រូវប្រើប្រាស់នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា ដើម្បីបង្កើនបរិមាណ លើកកម្ពស់គុណភាព និងពង្រីកសមធម៌នៃធនធានសិក្សាជាខេមរភាសាជូនដល់និស្សិតដែលកំពុងបន្តការសិក្សា និងត្រៀមខ្លួនធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។

-ឯកឧត្តមវិទ្យាស្ថានគរុកោសល្យបាត់ដំបងដែលបានចាត់តាំងជាគណៈកម្មការនិពន្ធចូលរួមការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សានេះ។

- នាយកដ្ឋានបណ្តុះបណ្តាលដែលបានចាត់តាំងជាគណៈកម្មការនិពន្ធ និងគណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យ លើស្នាដៃនៃការចូលរួមការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សានេះ។

- លោកប្រធាន នាយកដ្ឋានបណ្តុះបណ្តាលដែលព្រមព្រៀងទទួលសិទ្ធិជាតំណាងអ្នករៀបរៀងក្នុងការចាត់ចែង និងសម្របសម្រួលជាមួយក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ចុះហត្ថលេខាលើកិច្ចព្រមព្រៀង និងកិច្ចដំណើការទូទាត់ថវិកាតាមរយៈការស្នើសុំ និងទទួលថវិកា បោះពុម្ព និងផ្សព្វផ្សាយបន្តនូវស្នាដៃរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អរបស់អ្នករៀបរៀងក្នុងការរៀន និងបង្រៀនក្នុងគ្រឹះស្ថានសិក្សា និងប្រគល់សិទ្ធិស្របតាមការកំណត់នៃកិច្ចព្រមព្រៀង ស្តីពីការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា ក្រោមការគាំទ្រនៃមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍។

- គ្រូឧទ្ទេសមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យានៃវិទ្យាស្ថានគរុកោសល្យបាត់ដំបង ដែលបានផ្តល់មតិកែលម្អលើខ្លឹមសារ នៃមេរៀននីមួយៗឱ្យកាន់តែមានភាពសុក្រឹត និងមានលក្ខណៈវិទ្យាសាស្ត្រ។

ខ្ញុំបាទសង្ឃឹមថា សៀវភៅនេះនឹងឆ្លើយតបជាបន្ទាន់ចំពោះការខ្វះខាតធនធានសិក្សា ដែលជាតម្រូវការសិក្សារបស់សិស្ស និស្សិត នៅកម្រិតវិទ្យាល័យ និងឧត្តមសិក្សា។

ការបរិយាយលើមុខវិជ្ជា

ខ្លឹមសារមេរៀនដែលបានលើកឡើងក្នុងសៀវភៅនេះអាចជួយដោះស្រាយបញ្ហាក្នុងការបង្រៀន និងរៀនណិតវិទ្យាដែលបង្កលក្ខណៈងាយស្រួលដល់គ្រូឧទ្ទេស គ្រូបង្រៀន គរុនិស្សិត គរុសិស្ស សិស្សានុសិស្សអាចអនុវត្តន៍ និងស្រាវជ្រាវសម្រាប់សាធារណៈជនទូទៅ។ ជាមូលដ្ឋានគ្រឹះសម្រាប់ហ្វឹកហាត់គរុនិស្សិត សិស្សសិក្សានូវរាល់ខ្លឹមសារស្របតាមកម្មវិធីដែលធ្វើឱ្យមេរៀននីមួយៗមានទំនាក់ទំនងគ្នាពីមួយចំណុចទៅមួយចំណុច។

មុខវិជ្ជា ពីជគណិតលីនេអ៊ែរ២ រៀបចំឡើងដើម្បីផ្តល់ឱ្យនិស្សិតនូវការសិក្សាមុខវិជ្ជាពីជគណិតលីនេអ៊ែរនិងការអនុវត្តន៍របស់វា។ ប្រធានបទសំខាន់ៗរួមមាន៖

ផ្នែកទី១ ម៉ាទ្រីស

ផ្នែកទី២ វ៉ិចទ័រក្នុង R^n និង C^n

ផ្នែកទី៣ ផលគុណស្កាលែរ

ផ្នែកទី៤ ដេទែមីណង់

ផ្នែកទី៥ អង្កត់ទ្រូងកម្ម

ផ្នែកទី៦ អនុគមន៍លិនេអ៊ែរ និងលំហឌុល

ហើយសៀវភៅនេះសរសេរឡើង នៅមានកម្រិតមិនទាន់អស់សេចក្តីនៅឡើយ ជាចុងក្រោយនេះក្នុងនាមយើងខ្ញុំជាអ្នកនិពន្ធ យើងខ្ញុំរីករាយក្នុងការរិះគន់ក្នុងន័យស្ថាបនាដោយក្តីរីករាយជានិច្ច។

មូលន័យសង្ខេប

សៀវភៅ ពីជគណិតលីនេអ៊ែរII ជាស្នាដៃរៀបរៀងឡើងដើម្បីផ្តល់ឱ្យនិស្សិតនូវការសិក្សាមុខវិជ្ជាពីជគណិតលីនេអ៊ែរក្នុងចំណោមមុខវិជ្ជាជាច្រើនក្នុងកម្រិតថ្នាក់បរិញ្ញាបត្រគណិតវិទ្យា ហើយសៀវភៅលើកជាឧទាហរណ៍ និងលំហាត់អនុវត្តន៍ជាច្រើនដោយផ្តោតសំខាន់ទៅការគណនាដែលមានការប្រទាក់គ្នារៀងមេរៀនសង្ខេប និយមន័យ ទ្រឹស្តីបទ ឧទាហរណ៍ លំហាត់អនុវត្តន៍ជាច្រើនព្រមទាំងមានទំនាក់ទំនងនៃមេរៀននីមួយៗ។ ហើយត្រូវបានរៀបចំច្រើនផ្នែកដូចជាផ្នែកទី១ ម៉ាទ្រីស ផ្នែកទី២ វ៉ិចទ័រក្នុង R^n និង C^n ផ្នែកទី៣ ផលគុណស្កាលែរ ផ្នែកទី៤ ដេទែមីណង់ ផ្នែកទី៥ អង្កត់ទ្រូងកម្ម ផ្នែកទី៦ អនុគមន៍លិនេអ៊ែរ និងលំហឌុល។

សៀវភៅនេះសរសេរឡើងដោយមានឯកសារជំនួយជាច្រើនទាំងឯកសារជាតិ និងអន្តរជាតិ ប៉ុន្តែការសរសេរនេះ ខ្ញុំជឿជាក់ថាពិតជានៅមានកម្រិតមិនទាន់អស់សេចក្តីនៅឡើយ ជាចុងក្រោយនេះក្នុងនាមយើងខ្ញុំជាអ្នកនិពន្ធ យើងខ្ញុំរីករាយក្នុងការរិះគន់ក្នុងន័យស្ថាបនាដោយក្តីរីករាយជានិច្ច។

សេចក្ដីផ្ដើម ម៉ាទ្រីស

១. សញ្ញាណម៉ាទ្រីស

ម៉ាទ្រីស A នៅលើផ្នែក K ជាធម្មតា ម៉ាទ្រីស A (នៅពេលដែល K ជាអាំភ្លីស៊ីត) គឺជាការប្រើចតុកោណកែងនៃស្កាលែ ជាធម្មតាដែលបង្ហាញតាមទម្រង់ដូចខាងក្រោម ៖

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ជួរដេកនៃម៉ាទ្រីស Aគឺជាបញ្ជីផ្ដេកនៃស្កាលែ m ទាំងអស់ ៖

$(a_{11},a_{12},...,a_{1n}),(a_{21},a_{22},...,a_{2n}),...,(a_{m1},a_{m2},...,a_{mn})$

និង ជួរឈរនៃម៉ាទ្រីស Aគឺគ្រប់បញ្ជីបញ្ឈរនៃស្កាលែ n៖

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \dots \\ a_{1n} \end{bmatrix},\begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{2n} \end{bmatrix},....,\begin{bmatrix} a_{m1} \\ a_{m2} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

ចំណាំ ធាតុ a_{ij} ហៅថាការបញ្ចូល ij ឬ ធាតុij ដែលបង្ហាញនៅក្នុងជួរដេក i និងជួរឈរ j ។ យើងសន្មតតាងម៉ាទ្រីសមួយដោយសរសេរថា $A=[a_{ij}]$។

ម៉ាទ្រីសជួរដេក m និងជួរឈរ n គឺត្រូវបានហៅថាម៉ាទ្រីសmដោយn ដែលសរសេរ $m\times n$ ។ ចំនួនទាំងពីរនៃ m និង n គឺត្រូវបានហៅថាទំហំនៃម៉ាទ្រីស ។ ម៉ាទ្រីសពីរ A និង B គឺស្មើគ្នា ដែលសរសេរថា $A=B$ បើវាមានទំហំដូចគ្នា ហើយបើធាតុត្រូវគ្នាគឺស្មើគ្នា ។ ដូច្នេះ ភាពស្មើគ្នានៃម៉ាទ្រីស $m\times n$ ពីរ គឺជាភាពសមមូលទៅនឹងប្រព័ន្ធមួយនៃភាពសមមូល mn ដែលមួយក្នុងចំណោមភាពត្រូវគ្នាពីរនីមួយៗនៃធាតុ ។

ម៉ាទ្រីសមានតែជួរដេកមួយប៉ុណ្ណោះ គឺត្រូវបានហៅថា ម៉ាទ្រីសជួរដេកមួយឬវ៉ិចទ័រជួរដេក និងម៉ាទ្រីសមានតែជួរឈរមួយប៉ុណ្ណោះ គឺត្រូវបានហៅថា ម៉ាទ្រីសជួរឈរមួយឬវ៉ិចទ័រជួរឈរ ។ ម៉ាទ្រីសដែលមានធាតុសូន្យទាំងអស់ គឺត្រូវបានហៅថា ម៉ាទ្រីសសូន្យ និង ជាធម្មតាតាងត្រូវបានតាងដោយ 0។

ម៉ាទ្រីសដែលមានចំនួនជាចំនួនប្រាកដឬពិតទាំងអស់ គឺត្រូវបានហៅថា ម៉ាទ្រីសចំនួនប្រាកដឬពិត និងជាម៉ាទ្រីសនៅលើសំណុំ R ។ ដោយប្រៀបធៀបម៉ាទ្រីសដែលមានចំនួនជាចំនួនកុំផ្លិចទាំងអស់ គឺត្រូវបានហៅថា ម៉ាទ្រីសចំនួនកុំផ្លិច និងជាម៉ាទ្រីសនៅលើ C។ ឯកសារនេះនឹងបញ្ហាចំបងនៃម៉ាទ្រីសចំនួនពិតនិងម៉ាទ្រីសចំនួនកុំផ្លិច ។

ឧទាហរណ៍១

ការតាងធាតុក្នុងជង្រៀបដោយរាងចតុកោណកែង $A=\begin{bmatrix}1 & -4 & 5\\ 0 & 3 & -2\end{bmatrix}$ គឺជាម៉ាទ្រីស 2×3 ។ ជួរដេករបស់វាមាន $(1,-4,5)$ និង $(0,3,-2)$ ហើយជួរឈររបស់វាមាន $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\-2\end{bmatrix}$

ឧទាហរណ៍២ ម៉ាទ្រីសសូន្យ 2×4 គឺជាម៉ាទ្រីស $0=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

ឧទាហរណ៍៣ ចូររក x,y,z,t ដែល

$$\begin{bmatrix}x+y & 2z+t\\ x-y & z-t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 7\\ 1 & 5\end{bmatrix}$$

តាមនិយមន័យនៃភាពស្មើគ្នានៃម៉ាទ្រីស ការបញ្ចូលភាពត្រូវគ្នាបួនត្រូវតែស្មើគ្នា ។ ដូច្នេះ

$x+y=3, x-y=1, 2z+t=7, z-t=5$

ដំណោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងលើ មានចម្លើយ $x=2, y=1, z=4, t=-1$

២. ផលបូកម៉ាទ្រីសនិងផលគុណស្កាលែ

គេឱ្យ A និង B ជាម៉ាទ្រីសពីរដែលមានទំហំដូចគ្នា គឺជាម៉ាទ្រីស $n\times n$។ ផលបូកនៃ A និង B កំណត់សរសេរថា $A+B$ ជាម៉ាទ្រីសបានមកដោយការបូកធាតុត្រូវគ្នាពី A និង B ។ នោះគឺ

$$A+B=\begin{bmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & .... & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & .... & a_{2n}+b_{2n}\\ .... & .... & .... & ....\\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & .... & a_{mn}+b_{mn}\end{bmatrix}$$

ផលគុណនៃម៉ាទ្រីស A ដោយស្កាលែk កំណត់សរសេរ $k.A$ ឬជាធម្មតា kA ជាម៉ាទ្រីសបានមកដោយការគុណធាតុនីមួយៗនៃ A ដោយ k ។ នោះគឺ

$$kA=\begin{bmatrix}ka_{11} & ka_{12} & ... & ka_{1n}\\ ka_{21} & ka_{22} & ... & ka_{2n}\\ ... & ... & ... & ...\\ ka_{m1} & ka_{m2} & ... & ka_{mn}\end{bmatrix}$$

សង្កេតមើល $A+B$ និង kA គឺជាម៉ាទ្រីស $m\times n$ ។ យើងក៏កំណត់ថា $-A=(-1)A$ និង $A-B=A+(-B)$ ម៉ាទ្រីស $-A$ ត្រូវបានហៅថាម៉ាទ្រីសអវិជ្ជមាននៃ A និងម៉ាទ្រីស $A-B$ ត្រូវបានហៅថាផលដកនៃ A និង B ។ផលបូកនៃម៉ាទ្រីសជាមួយនឹងទំហំផ្សេងគ្នាគឺមិនអាចកំណត់បានទេ ។

ឧទាហរណ៍១ គេឱ្យ $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 4 & 5\end{bmatrix}$ និង $B=\begin{bmatrix}4 & 6 & 8\\ 1 & -3 & -7\end{bmatrix}$ ។ គណនា $A+B,3A,2A-3B$

$$A+B=\begin{bmatrix}1+4 & -2+6 & 3+8\\ 0+1 & 4+(-3) & 5+(-7)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 4 & 11\\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

$$3A=\begin{bmatrix}3(1) & 3(-2) & 3(3)\\ 3(0) & 3(4) & 3(5)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -6 & 9\\ 0 & 12 & 15\end{bmatrix}$$

$$2A-3B=\begin{bmatrix}2 & -4 & 6\\ 0 & 8 & 10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-12 & -18 & -24\\ -3 & 9 & -21\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10 & -22 & -18\\ -3 & 17 & 31\end{bmatrix}$$

ម៉ាទ្រីស $2A-3B$ គឺត្រូវបានហៅថាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃ A និង B។

ទ្រឹស្តីបទ ២.១ គិតពិចារណាពីម៉ាស A,B,C មួយចំនួន (ជាមួយនឹងទំហំដូចគ្នា)និងស្កាលែ k និង k' មួយចំនួន ។ នោះ:

$(i)\ (A+B)+C=A+(B+C)$	$(v)\ k(A+B)=kA+kB$
$(ii)\ A+0=0+A=A$	$(vi)\ (k+k')A=kA+k'A$
$(iii)\ A+(-A)=(-A)+A=0$	$(vii)\ (kk')A=k(k'A)$
$(iv)\ Á+B=B+A$	$(viii)\ 1.A=A$

ចំណាំ ដំបូង 0 នៅក្នុង (ii) និង (iii) សំដៅទៅលើម៉ាទ្រីសសូន្យ ដោយ(i) និង(iv)ដែរ ដែលផលបូកម៉ាទ្រីសមួយចំនួន $A_1+A_2+...+A_n$ មិនតម្រូវឱ្យមានវង់ក្រចក និងផលបូកមិនអាស្រ័យទៅលើម៉ាទ្រីស ។ លើសពីនេះ ការប្រើប្រាស់(vi) និង $(viii)$ ដែលមាន

$A+A=2A, A+A+A=3A,.......$

៣. ផលគុណម៉ាទ្រីស

ផលគុណនៃម៉ាទ្រីស A និង B កំណត់សរសេរ AB គឺមានភាពស្មុគស្មាញបន្តិច ។ សម្រាប់មូលហេតុនេះ ដំបូងយើងចាប់ផ្តើមជាមួយករណីពិសេស ។

ផលគុណ AB នៃម៉ាទ្រីសជួរដេក $A=[a_i]$ និងម៉ាទ្រីសជួរឈរ $B=[b_i]$ ជាមួយនឹងចំនួនធាតុដូចគ្នា គឺត្រូវបានកំណត់ជាស្កាលែ (ឬ ម៉ាទ្រីស 1×1) បានមកពីការគុណបញ្ចូលនៃភាពត្រូវគ្នា និង ការបន្ថែម i នោះគឺ

$$AB=[a_1,a_2,...,a_n]\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \dots\\ b_n\end{bmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$$

យើងបញ្ជាក់ថា AB គឺជាស្កាលែមួយ (ឬ ម៉ាទ្រីស 1×1) ។ ផលគុណ AB គឺមិនកំណត់នៅពេលដែលA និង B មានចំនួនធាតុខុសគ្នា ។

ឧទាហរណ៍១

$$(a)\ [\ 7,-4,5]\begin{bmatrix}3\\2\\-1\end{bmatrix}=7(3)+(-4)(2)+5(-1)=21-8-5=8$$

$$(b)\ [6,-1,8,3]\begin{bmatrix}4\\-9\\-2\\5\end{bmatrix}=24+9-16+15=32$$

និយមន័យ៖ឧបមា $A=[a_{ik}]$ and $B=[b_{kj}]$ ជាម៉ាទ្រីសដែលចំនួនជួរឈរនៃ A គឺស្មើនឹងចំនួនជួរដេកនៃ B។គេថា A ជាម៉ាទ្រីស $m\times p$ មួយនិងBជាម៉ាទ្រីស $p\times n$មួយ។នោះលទ្ធផល AB គឺជាម៉ាទ្រីស $m\times n$ ដែលធាតុ(ij)គឺត្រូវបានកំណត់ ដោយការគុណជួរដេក(ith)របស់ A ដោយជួរឈរ (jth)របស់ B។គេបាន:

$$\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1p}\\ . & \cdots & .\\ a_{i1} & \cdots & a_{ip}\\ . & \cdots & .\\ a_{m1} & \cdots & a_{mp}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n}\\ . & \dots & . & \dots & .\\ . & \dots & . & \dots & .\\ . & \dots & . & \dots & .\\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11} & \cdots & c_{1n}\\ . & \cdots & .\\ . & c_{ij} & .\\ . & \cdots & .\\ c_{m1} & \cdots & c_{mn}\end{bmatrix}$$

នាំឲ្យ $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$

លទ្ធផល AB គឺមិនត្រូវបានកំណត់បើAជាម៉ាទ្រីស$m\times p$មួយនិង B ជាម៉ាទ្រីស $q\times n$ មួយ $(p\neq q)$។

ឧទាហរណ៍១

(a) រក AB ដែល$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & -1\end{bmatrix}$ និង $B=\begin{bmatrix}2 & 0 & -4\\5 & -2 & 6\end{bmatrix}$។

$$AB=\begin{bmatrix}17 & -6 & 14\\4-5 & 0+2 & -8-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17 & -6 & 14\\-1 & 2 & -14\end{bmatrix}$$

(b) ឧបមាថា$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$ និង $B=\begin{bmatrix}5 & 6\\0 & -2\end{bmatrix}$។ រក AB និង BA។

$$AB=\begin{bmatrix}5+0 & 6-4\\15+0 & 18-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 2\\15 & 10\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}5+18 & 10+24\\0-6 & 0-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}23 & 34\\-6 & -8\end{bmatrix}$$

ទ្រឹស្តីបទ២ តាងA , B, Cជាម៉ាទ្រីស។នោះពេលណាដែលលទ្ធផលនិងផលបូកគឺត្រូវបានកំណត់។

$(i)\ (AB)C = A(BC)$ (លក្ខណៈផ្តុំ)

$(ii)\ A(B + C) = AB + AC$ (លក្ខណៈពន្លាតពីឆ្វេង)

$(\text{iii})\ (B + C)A = BA + CA$ (លក្ខណៈពន្លាតពីស្តាំ)

$(iv)\ k(AB) = (kA)B = A(kB)$ (kជាស្កាលែមួយ)។

យើងសម្គាល់បានថា $OA = 0$និង $\text{BO} = 0$ដែល0គឺជាម៉ាទ្រីសសូន្យ។

៥. ម៉ាទ្រីសត្រង់ស្ប៉ូ

ម៉ាទ្រីសត្រង់ស្ប៉ូ Aត្រូវបានសរសេរដោយ A^Tជាម៉ាទ្រីសដែលទទួលបានដោយ ការសរសេរជួរឈរនៃ A ក្នុងលំដាប់ជាជួរដេក។

ឧទាហរណ៍១

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}1 & 4\\2 & 5\\3 & 6\end{bmatrix} \text{ និង } [1, -3,\ -5]^T = \begin{bmatrix}1\\-3\\-5\end{bmatrix}$$

ម៉្យាងវិញទៀតបើ $A = [a_{ij}]$គឺជាម៉ាទ្រីស$m \times n$ មួយនោះ$A^T = [b_{ij}]$ជាម៉ាទ្រីស $n \times m$ ($b_{ij} = a_{ji}$)។

សង្កេតឃើញថាបំលែងនៃវ៉ិចទ័រជួរដេកមួយ គឺជាវ៉ិចទ័រជួរឈរមួយ។សរុបបានថាបំលែងនៃវ៉ិចទ័រជួរឈរមួយ ជាវ៉ិចទ័រជួរដេកមួយ។

ទ្រឹស្តីបទ២.៣ តាង A និង Bជាម៉ាទ្រីសនិងតាង Kជាស្កាលែមួយ នោះពេលណាដែល ផលបូកនិងលទ្ធផលគឺត្រូវបានកំណត់។

$(i)\ (A + B)^T = A^T + B^T$ $(ii)\ (A^T)^T = A$

$(iii)\ (kA)^T = kA^T$ $(iv)\ (AB)^T = B^T A^T$

យើងបញ្ជាក់ថាតាម(iv), បំលែងនៃលទ្ធផលមួយ ជាលទ្ធផលនៃបំលែង ប៉ុន្តែនៅក្នុងលំដាប់ច្រាស។

៥. ម៉ាទ្រីសការ៉េ

ម៉ាទ្រីសការ៉េ គឺជាម៉ាទ្រីសមួយដែលចំនួនដូចគ្នានៃជួរដេកនិងជួរឈរ ។ ម៉ាទ្រីសការ៉េ $n \times n$ មួយជាលំដាប់ n ហើយជួនកាលពេលខ្លះត្រូវបានហៅថា ម៉ាទ្រីស n ការ៉េមួយ។

រំលឹកឡើងវិញថា មិនមែនគ្រប់ពីរម៉ាទ្រីសអាចបន្ថែមវិគុណនោះទេ ។ ទោះបីជាយ៉ាងណាក៏ដោយ បើយើងត្រឹមតែចាត់ទុកម៉ាទ្រីសការ៉េនៃការផ្តល់លំដាប់ n មួយចំនួននាំឲ្យបាត់ចេញនូវភាពមិនប្រក្រតី។

ជាពិសេសប្រមាណវិធីនៃការបន្ថែម ផលគុណ ផលគុណស្កាលែនិងបំលែងអាចត្រូវបានអនុវត្តន៍នៅលើម៉ាទ្រីស$n \times n$និងលទ្ធផលគឺម៉ាទ្រីស$n \times n$ម្តងទៀត។

ឧទាហរណ៍១ ខាងក្រោមនេះជាម៉ាទ្រីសការ៉េនៃលំដាប់ 3។

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -4 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \text{និង } B = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

ខាងក្រោមនេះក៏ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ប3៖

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ -4 & -1 & -6 \\ 6 & 8 & 3 \end{bmatrix} \quad 2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -8 & -8 & -8 \\ 10 & 12 & 14 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -4 & 7 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -15 \\ -12 & 0 & 20 \\ 17 & 7 & -35 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 27 & 30 & 33 \\ -22 & -24 & -26 \\ -27 & -30 & -33 \end{bmatrix}$$

ឧទាហរណ៍២ តាង AនិងB ជាម៉ាទ្រីសដែលA និងB មានក្នុងឧទាហរណ៍១។

គេបាន អង្កត់ទ្រូងនៃ $A = \{1, -4, 7\}$និង $tr(A) = 1 - 4 + 7 = 4$

អង្កត់ទ្រូងនៃ $B = \{2, 3, -4\}$និង $tr(B) = 2 + 3 - 4 = 1$។

លើសពីនេះទៅទៀត៖

$$tr(A + B) = 3 - 1 + 3 = 5$$
$$tr(AB) = 5 + 0 - 35 = -30$$
$$tr(2A) = 2 - 8 + 14 = 8$$
$$tr(A^T) = 1 - 4 + 7 = 4$$

$tr(BA) = 27 - 24 - 33 = -30$ ដែលទទួលបានពីទ្រឹស្តីបទ2.4។

គេបាន $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$, $tr(A^T) = tr(A)$,

$$tr(2A) = 2tr(A)$$

លើសពីនេះទៅទៀត ទោះបី $AB \neq BA$ តែផលបូកអង្កត់ទ្រូងគឺមានភាពស្មើគ្នា។

៦. អង្កត់ទ្រូង និងផលបូកអង្កត់ទ្រូង

តាង $A = [a_{ij}]$ជាម៉ាទ្រីសnការ៉េមួយ។អង្កត់ទ្រូងឬអង្កត់ទ្រូងចម្បងនៃ A មាន ជាតុដែលមានអក្សរតូចក្រោមដូចគ្នានោះគឺ $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$។

គន្លងនៃ A ត្រូវបានសរសេរដោយ $tr(A)$ ជាផលបូកនៃជាតុអង្កត់ទ្រូង ។ គេអាច សរសេរបាន $tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}$។

ខាងក្រោមជាទ្រឹស្តីបទអនុវត្តន៍៖

ទ្រឹស្តីបទ២.៤ ឧបមាថា$A=[a_{ij}]$និង $B=[b_{ij}]$ជាម៉ាទ្រីសnការ៉េហើយkជាស្កាលែមួយ ។ គេបាន

(i) $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$

(ii) $tr(kA)=ktr(A)$

(iii) $tr(A^T)=tr(A)$

(iv) $tr(AB)=tr(BA)$។

៧.ម៉ាទ្រីសឯកតានិងម៉ាទ្រីសស្កាលែ

ម៉ាទ្រីសដើមnការ៉េឬម៉ាទ្រីសឯកតាកំណត់ដោយ I_nឬជាធម្មតាតាងដោយ I ជាម៉ាទ្រីសnការ៉េដែលមានលេខ1ស្ថិតនៅលើអង្កត់ទ្រូងនិង0 របស់ផ្សេងទៀត។

ម៉ាទ្រីសឯកតាIគឺស្រដៀងនឹងស្កាលែ1សម្រាប់ម៉ាទ្រីសnការ៉េA គឺ$AI=IA=A$។

ជាទូទៅ៖ បើ Bជាម៉ាទ្រីស $m\times n$ មួយ នោះ $BI_n=I_mB=B$។ចំពោះស្កាលែ K ម៉ាទ្រីស kI ដែលមាន k នៅលើអង្កត់ទ្រូងនិង 0 នៅលើចំណុចផ្សេងទៀត ត្រូវ បានគេហៅថាម៉ាទ្រីសស្កាលែទាក់ទងនឹងស្កាលែ k ។យើងសង្កេតឃើញថា$(kI)A=k(IA)$

kA នោះនាំឲ្យផលគុណម៉ាទ្រីសAមួយរវាងម៉ាទ្រីសស្កាលែ kIគឺសមមូលទៅនឹងផលគុណនៃAរវាងស្កាលែk។

ឧទាហរណ៍១៖ខាងក្រោមនេះជាម៉ាទ្រីសឯកតានៃលំដាប់ដាប់ 3និង4ហើយទាក់ទងនឹងម៉ាទ្រីសស្កាលែចំពោះ$k=5$៖

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad\Rightarrow 5A=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\qquad\Rightarrow 5B=\begin{bmatrix}5&0&0&0\\0&5&0&0\\0&0&5&0\\0&0&0&5\end{bmatrix}$$

សម្គាល់ទី1៖ ជាធម្មតាក្នុងការអនុវត្តន៍ដើម្បីលុបលំនាំនៃ0ពេលមិនមានភាពមិនច្បាស់លាស់ដូចនៅក្នុងម៉ាទ្រីសទី2និងទី4ខាងលើ។

សម្គាល់ទី2៖ អនុគមន៍ $kronecker\ delta\ \delta_{ij}$គឺត្រូវបានកំណត់ដោយ:

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0, & i\neq j\\1, & i=j\end{cases}$$

ដូច្នេះម៉ាទ្រីសឯកកតាអាចកំណត់ដោយ $I = [\delta_{ij}]$។

៨ តម្លៃនៃម៉ាទ្រីស ពហុធាក្នុងម៉ាទ្រីស

តាងA ជាម៉ាទ្រីសnការ៉េលើk។តម្លៃនៃAគឺត្រូវបានកំណត់ដូចខាងក្រោម:

$$A^2 = AA \ , \qquad A^3 = A^2A \ , \dots , A^{n+1} = A^nA \, , \dots . , \text{និង} A^0 = I$$

ពហុធាក្នុងម៉ាទ្រីសAក៏ត្រូវបានកំណត់ជាពិសេសសម្រាប់ពហុធាមួយចំនួន

$$f(x) = \ a_0I + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_nA^n (\, a_i \text{ជាស្កាលែក្នុង} k)។$$

ដែលត្រូវអនុគមន៍$f(A)$ត្រូវបានកំណត់ដូចម៉ាទ្រីសខាងក្រោម:

$$f(A) = \ a_0I + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_nA^n$$

ចំណាំ $f(A)$គឺទទួលបានពី$f(x)$ដោយជំនួសម៉ាទ្រីស A សម្រាប់អថេរ x និង ជំនួសម៉ាទ្រីសស្កាលែ a_0I ទៅជា a_0 ។ បើ $f(A)$ជាម៉ាទ្រីសសូន្យនោះ Aហៅថាសូន្យឬ ឬសនៃ $f(x)$មួយ។

ឧទាហរណ៍១ បើ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

គេបាន $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix}$ និង

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 38 \\ 57 & -106 \end{bmatrix}$$

ឧបមា $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ និង $g(x) = x^2 + 3x - 10$ ។

គេបាន $f(A) = 2\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -18 \\ -27 & 61 \end{bmatrix}$

$$g(A) = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} - 10\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ដូច្នេះ A ជាសូន្យមួយនៃពហុធា $g(x)$។

៩. ម៉ាទ្រីសច្រាស

ម៉ាទ្រីសការ៉េA មួយត្រូវបានគេនិយាយហៅថា មានភាពច្រាសបើកាលណាមានម៉ាទ្រីស B មួយមានលក្ខណៈគឺ$AB = BA = I$ ដែល I ជាម៉ាទ្រីសឯកតានិងម៉ាទ្រីសBមានតែមួយ។ នោះនាំឲ្យ

បើ $AB_1 = B_1A = I$ និង$AB_2 = B_2A = I$ ។

គេបាន $B_1 = B_1I = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = IB_2 = B_2$

យើងហៅថាម៉ាទ្រីស B មួយច្រាស់ទៅនឹងAហើយកំណត់ដោយ A^{-1}។

ឃើញថាទំនាក់ទំនងខាងលើគឺសីមេទ្រីគ្នា បើBជាចម្រាស់នៃA នោះAជាចម្រាស់នៃBផងដែរ។

ឧទាហរណ៍១ បើ $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

គេបាន $AB = \begin{bmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$BA = \begin{bmatrix} 6-5 & 15-15 \\ -2+2 & -5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ដូច្នេះ A និង B គឺជាម៉ាទ្រីសប្រាសគ្នា។

ម៉ាទ្រីសប្រាសលំដាប់ 2×2

តាង A ជាម៉ាទ្រីស 2×2 ,ដែល $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ យើងចង់បាន A^{-1} ជាម៉ាទ្រីសប្រាសនៃ A ។ពិសេសយើងរកស្គាល់ $2^2=4$ ។នោះ x_1, y_1, x_2, y_2 ដូចជា៖

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ឬ } \begin{bmatrix} ax_1+by_1 & ax_2+by_2 \\ cx_1+dy_1 & cx_2+dy_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

កំណត់បួនធាតុដែលត្រូវជាមួយនិងធាតុនៅក្នុងម៉ាទ្រីសកំណត់បួនសមីការ ដែលអាចភ្ជាប់ទំនាក់ទំនងទៅនិងប្រពន្ធ័សមីការម៉ាទ្រីស 2×2 ដូចតទៅ៖

$ax_1+by_1=1 \qquad ax_2+by_2=0$

$cx_1+dy=0 \qquad cx_2+dy_2=1$

នោះយើងតាង $|A|=ac-bc$ (ហៅថាដេទែមីណង់នៃ A)។ សន្មត់ $|A|\neq 0$ យើងអាចដោះស្រាយរកអញ្ញាត្តិដោយមិនស្គាល់ x_1, y_1, x_2, y_2 ដោយ៖

$$x_1=\frac{d}{|A|} \qquad y_1=\frac{-c}{|A|} \qquad x_2=\frac{-b}{|A|} \qquad y_2=\frac{a}{|A|}$$

គេបាន៖

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} d/|A| & -b/|A| \\ -c/|A| & a/|A| \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

នៅក្នុងពាក្យផ្សេងទៀត $|A|\neq 0$, A ជាម៉ាទ្រីសប្រាស់លំដាប់ 2×2 ហើយទទួលបាន A ក្នុងលក្ខណៈដូចតទៅ៖

១. ផ្លាស់ប្តូរពីរធាតុនៅលើអង្កត់ទ្រូង

២. យកចំនួនអវិជ្ជមាននៃធាតុពីរផ្សេងទៀត

៣. គុណលទ្ធផលនិងម៉ាទ្រីសដោយ $1/|A|$ រឺក៏ចែកអោយទៅធាតុផ្សេងទៀតដោយ $|A|$ ។

ក្នុងករណី $|A|=0$ នោះ A មិនមែនជាម៉ាទ្រីសប្រាស់។

ឧទាហរណ៍១៖ រកម៉ាទ្រីសប្រាសនៃ $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ និង $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ ។

ជំហានដំបូង $|A|=2(5)-3(4)=10-12=-2$ ។ព្រោះ $|A|\neq 0$ នោះ A ជាម៉ាទ្រីសច្រាស់

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}5 & -3\\ -4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5/2 & -3/2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

ចំពោះ $|B|=1(6)-2(3)=0$ ។ព្រោះ $|B|=0$ នោះ B មិនមែនជាម៉ាទ្រីសច្រាស់។

ការគណនាម៉ាទ្រីសច្រាសៈ សរសេរក្នុងទម្រង់ $[A \mid I]$ ដោយបម្លែង ទៅជា $[I \mid A^{-1}]$

ជំហានទី១៖ ការបង្កើតការបន្ថែមម៉ាទ្រីស $[A|I]$ ពេល A ជាម៉ាទ្រីសច្រាស់ $n\times n$ និង I ជាម៉ាទ្រីសកំណត់ $n\times n$ ។

ជំហានទី២៖ ប្រើធាតុនៅក្នុងជួរដេកទៅគណនាម៉ាទ្រីស $[A|I]$ ហើយប្តូរ A ចេញទៅជាផលគុណជួរដេក ដែលបង្កើតបានជាម៉ាទ្រីសបំពេញបន្ថែម។

ជំហានទី៣៖ ប្រសិនបើការយកចេញផលគុណម៉ាទ្រីសជួរដេកនោះមានធាតុគឺ 0 ទៅលើអង្កត់ទ្រូងរបស់វា(A មិនមានម៉ាទ្រីសច្រាស ។)

ជំហានទី៤៖ ប្រើធាតុនៅក្នុងជួរដេកទៅគណនាជាផលគុណជួរដេកសម្រាប់បង្កើតម៉ាទ្រីសឲ្យទៅជាម៉ាទ្រីសកំណត់ $n\times n$ ។

ជំហានទី៥៖ ជម្រើសត្រឹមត្រូវនៅការបំណពេញចុងក្រោយ ជាម៉ាទ្រីសច្រាសនៃ A ។

ឧទាហរណ៍២៖ រកម៉ាទ្រីសច្រាសនៃ $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$.

ដំណោះស្រាយ៖

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 1\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -3 & 1\end{array}\right]\rightarrow R_2=R_2-3R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2\end{array}\right]\rightarrow R_2=-\frac{1}{2}R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2\end{array}\right]\rightarrow R_1=R_1-2R_2$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{bmatrix}$$

ឧទាហរណ៍៣៖ រកម៉ាទ្រីសច្រាសនៃ $A=\begin{bmatrix}5 & 8 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 4 & 3 & -1\end{bmatrix}$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកម៉ាទ្រីសច្រាស $[A:I]\sim[I:A^{-1}]$

យើងបាន $\left[\begin{array}{ccc|ccc}5 & 8 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 4 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1.6 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow R_1 = 0.2R_1$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1.6 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3.4 & -1.8 & -0.8 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow R_3 = R_3 - 4R_1$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1.6 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & -3.4 & -1.8 & -0.8 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow R_2 = 0.5R_2$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1.6 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 & -0.8 & 1.7 & 1 \end{array}\right] \rightarrow R_3 = R_3 + 3.4R_2$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1.6 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -17 & -10 \end{array}\right] \rightarrow R_3 = -10R_3$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1.6 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -17 & -10 \end{array}\right] \rightarrow R_2 = R_2 - 0.5R_3$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1.6 & 0 & 0.2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -17 & -10 \end{array}\right] \rightarrow R_1 = R_1 - 0.0.2R_3$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -11 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -17 & -10 \end{array}\right] \rightarrow R_1 = R_1 - 1.6R_2$$

ដូចនេះ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -11 & -6 \\ -4 & 9 & 5 \\ 8 & -17 & -10 \end{bmatrix}$

ឧទាហរណ៍៤៖ រកម៉ាទ្រីសច្រាស់នៃ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

ដំណោះស្រាយ

រកម៉ាទ្រីសច្រាស $[A:I] \sim [I:A^{-1}]$

យើងបាន $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&0&1&0&-1/2&1/2\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&0&1&0\\0&1&0&1&1/2&-1/2\\0&0&1&0&-1/2&1/2\end{array}\right]\to R_2=R_2-1R_3$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&3/2&-1/2\\0&1&0&1&1/2&-1/2\\0&0&1&0&-1/2&1/2\end{array}\right]\to R_1=R_1-1R_3$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&1&0\\0&1&0&1&1/2&-1/2\\0&0&1&0&-1/2&1/2\end{array}\right]\to R_1=R_1-1R_2$$

ដូចនេះ $A^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&1/2&-1/2\\0&-1/2&1/2\end{bmatrix}$

ទ្រឹស្តីបទ៣ ប្រសិនបើ A និង B ជាម៉ាទ្រីសចម្រាស់ នោះគេបាន៖

(a) $(A^{-1})^{-1}=A$

(b) $(Ab)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

(c) $(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$

(d) $(\lambda A)^{-1}=(I/\lambda)A^{-1}$(ប្រសិនបើ λ ស្កាលែមិនសូន្យ) ។

១០. លក្ខណៈពិសេសនៃម៉ាទ្រីសការេ អង្កត់ទ្រូងនិងម៉ាទ្រីសត្រីកោណ

A ជាម៉ាទ្រីសការេ $D=\left[d_{ij}\right]$ ជាអង្កត់ទ្រូងប្រសិនបើ វាមិនមានអង្កត់ទ្រូងដែលជាតុទាំងអស់គឺសូន្យ។

$D=diago\left[d_{11},d_{22},......,d_{nn}\right]$

ឧទាហរណ៍១៖ $\begin{bmatrix}3&0&0\\0&-7&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}4&0\\0&-5\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}6&&&\\&0&&\\&&-9&\\&&&8\end{bmatrix}$

គេបានអង្កត់ទ្រូងនៃម៉ាទ្រីសដូចជា៖

$diago(3,-7,2)$ $diago(4,-5)$ $diago(6,0,-9,8)$

ទម្រង់ម៉ាទ្រីសត្រីកោណ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ & b_{22} & b_{23} \\ & & b_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{11} & c_{14} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ & & c_{33} & c_{34} \\ & & & c_{44} \end{bmatrix}$$

ម៉ាទ្រីសត្រីកោណលើជាម៉ាទ្រីសការេ ដែលធាតុនៅខាងក្រោមអង្គត់ទ្រូងគឺស្មើសូន្យ ។
រីឯម៉ាទ្រីសត្រីកោណក្រោមជាម៉ាទ្រីសការេ ដែលធាតុនៅខាងលើអង្គត់ទ្រូងគឺស្មើសូន្យ ។

ទ្រឹស្តីបទទី៥ អោយ $A=\left[a_{ij}\right]$ និង $B=\left[b_{ij}\right]$ ជាម៉ាទ្រីសត្រីកោណលើ $n\times n$ នោះគេបាន៖

(i) $A+B,\ kA$, AB ជាត្រីកោណជាមួយនិងអង្គត់ទ្រូងរៀងគ្នា៖

$$(\mathrm{a}_{11}+b_{11},\ldots\ldots,\mathrm{a}_{nm}+b_{nm}) \qquad (\mathrm{ka}_{11},\ldots\ldots,\mathrm{ka}_{nn}) \qquad (\mathrm{a}_{11}\,b_{11},\ldots\ldots.,\mathrm{a}_{nn}\,b_{nn})$$

(ii). សម្រាប់ពហុធា $f_{(x)}$; $f_{(\mathrm{A})}$ ជាម៉ាទ្រីសត្រីកោណ ជាមួយអង្គត់ទ្រូង

$$(\ f(a_{11})\ ,f(a_{22}),\ldots\ldots\ f(a_{nn}))$$

(iii) A ជាចម្រាស់ប្រសិនបើធាតុនៅក្នុងអង្គត់ទ្រូង $a_{ii}\neq 0$ ហើយ A^{-1} ជាម៉ាទ្រីសត្រីកោណ ។

ឧទាហរណ៍ ១ ខាងក្រោមនេះជាម៉ាទ្រីសត្រីកោណលើ

$A=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសត្រីកោណលើ ទំហំ 2×2

$A=\begin{bmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសត្រីកោណលើ ទំហំ 3×3

$C=\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសត្រីកោណលើ ទំហំ 4×4

ឧទាហរណ៍ ២ ខាងក្រោមនេះជាម៉ាទ្រីសត្រីកោណក្រោម

$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសត្រីកោណក្រោម ទំហំ 2×2

$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសត្រីកោណក្រោម ទំហំ 3×3

$$C=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&3&0&0\\1&0&1&0\\5&0&0&2\end{bmatrix}$$ ជាម៉ាទ្រីសត្រីកោណក្រោម ទំហំ 4×4

$$C^T=\begin{bmatrix}4&0&1&5\\0&3&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&5\end{bmatrix}$$ ក្លាយជាម៉ាទ្រីសត្រីកោណលើ ទំហំ 4×4

១១. លក្ខណៈពិសេសនៃម៉ាទ្រីសការេះ ស៊ីមេទ្រី កែង ណរម៉ាល់

ម៉ាទ្រីសស៊ីមេទ្រី

ម៉ាទ្រីស A ស៊ីមេទ្រី ប្រសិនបើ $A^T=A$ ។សមមូល; $A=\left[a_{ij}\right]$ គឺស៊ីមេទ្រីប្រសិនបើជាតុទាំងអស់ស៊ីមេទ្រី(ប្រសិនបើជាតុឆ្លុះយកទៅតាមអង្កត់ទ្រូង)វាគឺស្មើគ្នា ប្រសិនបើ $a_{ij}=a_{ji}$ ។

ម៉ាទ្រីស A **ស៊ីមេទ្រីទៀងទាត់** ប្រសិនបើ $A^T=-A$ ឬសមមូលប្រសិនបើ $A=-a_{ij}$ អ្វីដែលជាក់លាក់គឺជាតុនៃអង្កត់ទ្រូងនៅក្នុងម៉ាទ្រីសគឺសូន្យ ព្រោះ $a_{ij}=-a_{ji}$ នោះ $a_{ij}=0$ ។

ចំណាំ A ជាម៉ាទ្រីសការេប្រសិនបើ $A^T=A$ ឬ $A^T=-A$

ឧទាហរណ៍១ គេអោយ $A=\begin{bmatrix}2&-3&5\\-3&6&7\\5&7&-3\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}0&3&-4\\-3&0&5\\4&-5&0\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

(a) ដោយការរែកញែកជាតុស៊ីមេទ្រីនៅក្នុង A គឺស្មើប្រសិនបើ $A^T=A$ នោះ A ស៊ីមេទ្រី។

(b) ជាតុនៅក្នុងអង្កត់ទ្រូងនៃ B គឺ 0 ហើយជាតុស៊ីមេទ្រីគឺ អវិជ្ជមានទៅវិញទៅមក ឬ $B^T=-B$ នោះ B ជាស៊ីមេទ្រីទៀងទាត់។

(c) ព្រោះ C មិនមែនជាម៉ាទ្រីសការេ នោះ C មិនមែនជាស៊ីមេទ្រី និង ស៊ីមេទ្រីទៀងទាត់

ម៉ាទ្រីសកែង

ម៉ាទ្រីស A កែងប្រសិនបើ $A^T=A^{-1}$ ។ ប្រសិនបើ $A^TA=AA^T=I$ នោះ A ត្រូវតែជាម៉ាទ្រីសការេ និងម៉ាទ្រីសប្រាស់។

ឧទាហរណ៍១៣ គេអោយ $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{4}{9}\\ \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{7}{9}\\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & +\frac{4}{9}\end{bmatrix}$ គុណ A ដោយ A^T លទ្ធផលគឺ I នេះមានន័យ

ថា $A^TA=I$ ដូចនេះ $A^T=A^{-1}$ នោះ A គឺកែង។

ទ្រឹស្តីបទ២.៦ តាង A ជាម៉ាទ្រីស 2 x 2 ។ បន្ទាប់មកចំពោះចំនួនពិត 0

$A=\begin{bmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{bmatrix}$ ឬ $A=\begin{bmatrix}\cos x & \sin x\\ \sin x & -\cos x\end{bmatrix}$

ម៉ាទ្រីសកែង ឬ ម៉ាទ្រីសណរម៉ាល់

គេមានម៉ាទ្រីស A ជាម៉ាទ្រីសណរម៉ាល់បើ A^T នោះ $AA^T=A^TA$ ។

ឧទាហរណ៍២ តាង $A=\begin{bmatrix}6 & -3\\ 3 & 6\end{bmatrix}$

ដោយ $AA^T=\begin{bmatrix}6 & -3\\ 3 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 3\\ -3 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}45 & 0\\ 0 & 45\end{bmatrix}$

និង $A^TA=\begin{bmatrix}6 & 3\\ -3 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & -3\\ 3 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}45 & 0\\ 0 & 45\end{bmatrix}$

ពីព្រោះ $A^TA=AA^T$ នោះ A ជាម៉ាទ្រីសណរម៉ាល់។

១២. ម៉ាទ្រីសកុំផ្លិច

តាំង A ជាម៉ាទ្រីសកុំផ្លិច នោះមានធាតុមួយយ៉ាងតិចជាធាតុកុំផ្លិច។ បើ $Z=a+bi$ គឺជាចំនួនកុំផ្លិចនោះ $\overline{Z}=a-bi$ ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់។ $A=\left[a_{ij}\right]$ ជាម៉ាទ្រីសកុំផ្លិច $\overline{A}=\left[b_{ij}\right]$ ជាម៉ាទ្រីសកុំផ្លិចឆ្លាស់ ដែល $b_{ij}=\overline{a_{ij}}$ ។ ចំណាំ $A^H=\left(\overline{A}\right)^T=\overline{A^T}$

ឧទាហរណ៍១៥ មាន $A=\begin{bmatrix}2-8i & -6\\ 5+3i & 1+4i\\ 4+7i & 3-2i\end{bmatrix}$ $\Rightarrow A^H=\begin{bmatrix}2+8i & 5-3i & 4-7i\\ 6i & 1-4i & 3+2i\end{bmatrix}$

១៣. ប្លុកម៉ាទ្រីស

ឧទាហរណ៍១ គេមានម៉ាទ្រីស

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & -1 & 5 & 9 & -2\\ -5 & 2 & 4 & 0 & -3 & 1\\ -8 & -6 & 3 & 1 & 7 & -4\end{bmatrix}$$

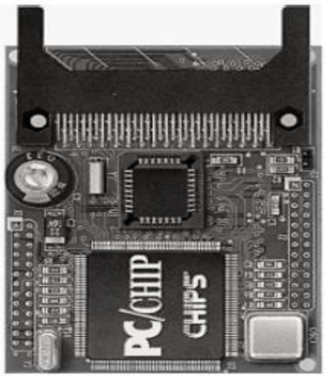
$$A=\left[\begin{array}{ccc|cc|c} 3 & 0 & -1 & 5 & 9 & -2 \\ -5 & 2 & 4 & 0 & -3 & 1 \\ \hline -8 & -6 & 3 & 1 & 7 & -4 \end{array}\right] \text{ គេបាន } A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}$$

$$A_{11}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -5 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_{12}=\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_{13}=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{21}=\begin{bmatrix} -8 & -6 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_{22}=\begin{bmatrix} 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad A_{23}=\begin{bmatrix} -4 \end{bmatrix}$$

ម៉ាទ្រីសខាងលើនេះត្រូវបានគេហៅថា ប្លុកម៉ាទ្រីស

ឧទាហរណ៍២ ឧទាហរណ៍ប្រសិនបើបន្ទះសៀគ្វីកុំព្យូទ័រខ្នាតតូចមានមីក្រូឈីប VLSI(រួមបញ្ចូលគ្នាក្នុងទ្រង់ទ្រាយធំ) បន្ទាប់មកម៉ាទ្រីសសម្រាប់បន្ទះសៀគ្វីអាចមានទម្រង់ទូទៅ



$$A=\left[\begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ \hline A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{array}\right]$$

ផលគុណនៃម៉ាទ្រីសប្លុក

ឧបមាថា $U=U_{ik}$ និង $V=V_{kj}$ គឺជាប្លុកម៉ាទ្រីសដែលចំនួនជួរឈរនៃប្លុក U_{ik} នីមួយៗស្មើនឹងចំនួនជួរដេកនៃប្លុក V_{kj} នីមួយៗ ។ (ដូច្នេះផលិតផលនីមួយៗ $U_{ik}V_{kj}$ ត្រូវបានកំណត់)។

$$UV=\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12}\dots\dots\dots W_{1n} \\ W_{21} & W_{22}\dots\dots\dots W_{2n} \\ \dots & \dots\dots \quad \dots\dots \\ W_{m1} & W_{m2}\dots\dots\dots W_{mn} \end{bmatrix}$$

$$W_{ij}=U_{i1}V_{1j}+U_{i2}V_{2j}+\dots+U_{ip}V_{pj}$$

ឧទាហរណ៍៣ គេមានប្លុកម៉ាទ្រីស

$$A=\left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 5 & -2 & 3 & -1 \\ \hline 0 & -4 & -2 & 7 & -1 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \text{ និង } B=\left[\begin{array}{cc} 6 & 4 \\ -2 & 1 \\ -3 & 7 \\ \hline -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

ផលគុណ $AB=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}B_1+A_{12}B_2\\ A_{21}B_1+A_{22}B_2\end{bmatrix}$

ដោយ $A_{11}B_1=\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 5 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 4\\ -2 & 1\\ -3 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15 & 12\\ 2 & -5\end{bmatrix}$

$$A_{12}B_2=\begin{bmatrix}0 & -4\\ 3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 5 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-20 & -8\\ -8 & 7\end{bmatrix}$$

$$A_{11}B_1+A_{12}B_2=\begin{bmatrix}15 & 12\\ 2 & -5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-20 & -8\\ -8 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 4\\ -6 & 2\end{bmatrix}$$

ហើយ $A_{21}B_1=\begin{bmatrix}0 & -4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 4\\ -2 & 1\\ -3 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & -18\end{bmatrix}$

$$A_{22}B_2=\begin{bmatrix}7 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 5 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-12 & 19\end{bmatrix}$$

$$A_{21}B_1+A_{22}B_2=\begin{bmatrix}14 & -18\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-12 & 19\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\end{bmatrix}$$

ដូចនេះ $AB=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}B_1+A_{12}B_2\\ A_{21}B_1+A_{22}B_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 4\\ -6 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$

ជំពូកទី១ វ៉ិចទ័រក្នុង $\mathbb{R}^n$ និង $\mathbb{C}^n$, ទំហំវ៉ិចទ័រ

១.១. សេចក្តីផ្តើម

មានវិធីពីរយ៉ាងក្នុងការកំណត់សញ្ញាណនៃវ៉ិចទ័រ ដែលទី១គឺជាតុនៃចំនួននិងតាងអក្សរតូច ហើយទី២ នោះគឺតាងដោយតម្លៃដាក់លាក់នៅក្នុងរូបវិទ្យា។ យើងនឹងពិភាក្សាវិធីទាំងពីរនេះដូចខាងក្រោម។

១.១.១. ធាតុនៃចំនួន

ឧបមាថាទម្ងន់របស់សិស្សប្រាំបីនាក់បានចុះបញ្ជីដូចខាងក្រោម(គិតជាផោន)៖

156, 125, 145, 134, 178, 145, 162, 193

ជាដំបូងយើងតាងបញ្ជីនៃតម្លៃទាំងអស់ខាងលើដោយនិមិត្តសញ្ញា w និងតម្លៃជាតុនីមួយៗដោយនិមិត្តសញ្ញា $w_1, w_2, w_3.........w_8$ ដែលមានជាតុនីមួយៗមានតម្លៃត្រូវគ្នានឹងជាតុ

$$w_1 = 156, w_2 = 125, w_3 = 145.........w_8 = 193$$

ដូចនេះ ជាតុរបស់តម្លៃទាំងអស់យើងកំណត់សរសេរ៖

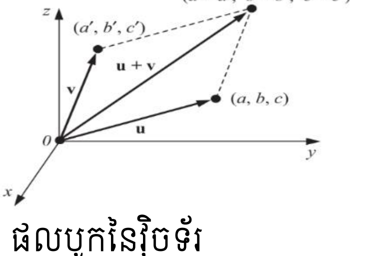
$w = (w_1, w_2, w_3, ..., w_n)$ ហៅថា ជួរពីជគណិត ឬវ៉ិចទ័រ *(linear array or vector)* ។

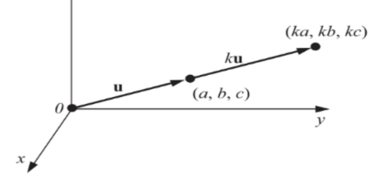
១.១.២. វ៉ិចទ័រក្នុងរូបវិទ្យា

មានបរិមាណរូបវន្តជាច្រើនដូចជាសីតុណ្ហភាពនិងល្បឿនរបស់វាមានត្រឹមតែ *"អាំងតង់ស៊ីតេ"* ប៉ុណ្ណោះ ហើយអាចត្រូវបានតំណាងដោយចំនួនពិត ហើយត្រូវបានគេហៅថា ទំហំស្កាលែ។ម្យ៉ាងវិញទៀត ក៏មានបរិមាណដូចជាកម្លាំង និងល្បឿន ដែលមានទាំងពីរគឺ *"អាំងតង់ស៊ីតេ"* និង *"ទិសដៅ"* ។ បរិមាណទាំងនេះ ដែលអាចត្រូវបានតំណាងដោយព្រួញដែលមានប្រវែង និងទិសដៅសមស្រប ហើយចេញមកពីមួយចំនួនដែលបានផ្តល់ឱ្យចំណុចគល់ O ត្រូវបានគេហៅថា *វ៉ិចទ័រ។*

ឥឡូវនេះយើងសន្មត់ថាអ្នកអានស្គាល់ចន្លោះ $\mathbb{R}^3$ ដែលចំណុចទាំងអស់នៅក្នុងលំហត្រូវបានតំណាងដោយគូលំដាប់ចំនួនបីនៃចំនួនពិត។ ឧបមាថាប្រភពដើមនៃអ័ក្សក្នុង $\mathbb{R}^3$ ត្រូវបានជ្រើសរើសជាចំណុចគល់ O សម្រាប់វ៉ិចទ័រដែលបានពិភាក្សាខាងលើ បន្ទាប់មកវ៉ិចទ័រនីមួយៗត្រូវបានកំណត់ដោយឯកឯងដោយកូអរដោនេរបស់វាចំណុចចុង និងច្រាសមកវិញ។

មានប្រមាណវិធីសំខាន់ពីរគឺ ការបូកពីរវ៉ិចទ័រ និងទំហំស្កាលែ ដែលភ្ជាប់ជាមួយវ៉ិចទ័រនៅក្នុងរូបវិទ្យា។





(ក) ផលបូកនៃវ៉ិចទ័រ រូបភាព ១.១ (ខ) ផលគុណស្កាលែ

១.២. វ៉ិចទ័រក្នុង $\mathbb{R}^n$

សំណុំនៃ n វិមាត្រ ទាំងអស់របស់ចំនួនពិតត្រូវបានកំណត់ដោយ R^n ហើយត្រូវបានហៅថា n-លំហរ (n-space)។ n វិមាត្រពិសេសមួយនៅក្នុង R^n ដែលកំណត់ដោយ ៖

$u=(a_1,a_2,...,a_n)$ ដែលត្រូវបានហៅថា *ចំណុច ឬវ៉ិចទ័រ* (*point or vector*)។

ដែល a_i គឺជា កូអរដោនេ សមាសភាគ(កំប៉ូសង់) ឬជាធាតុរបស់ $\mathbb{R}^n$។ ហើយលើសពីនេះទៅទៀត នៅពេលដែលយើងពិភាក្សាពីលំហរ $\mathbb{R}^n$ ។

វ៉ិចទ័រពីរ u និង v គឺស្មើគ្នា សរសេរ $u=v$ ប្រសិនបើពួកវាមានចំនួនសមាសធាតុដូចគ្នា ហើយធាតុដែលត្រូវគ្នាគឺស្មើគ្នា។

ឧទាហរណ៍វ៉ិចទ័រ $(1,2,3)$ និង $(3,2,1)$ មានចំនួនសមាសធាតុដូចបីដូចគ្នា។ប៉ុន្តែ វ៉ិចទ័រទាំងនេះមិនស្មើគ្នាទេ ព្រោះធាតុដែលត្រូវគ្នាមិនស្មើគ្នា។

វ៉ិចទ័រ $(0,0,.....0)$ ដែលជាធាតុទាំងអស់គឺ 0 ត្រូវបានគេហៅថាវ៉ិចទ័រសូន្យ ហើយជាធម្មតាត្រូវបានតំណាងដោយ O ។

ឧទាហរណ៍១

(ក) ទាំងនេះគឺជាវ៉ិចទ័រ $v_1=(2,-5),\ \ v_2=(7,9),\ \ v_3=(0,0,0),\ \ v_4=(3,4,5)$

ដែលវ៉ិចទ័រ v_1,v_2 ជារបស់ R^2

វ៉ិចទ័រ v_3,v_4 ខាងក្រោយជារបស់ R^3 ។

v_3 គឺជាវ៉ិចទ័រសូន្យដែលនៅក្នុង R^3 ។

(ខ) រក x,y,z ដែល $(x-y,\ \ x+y,\ \ z-1)=(4,2,3)$។

ចម្លើយ

ដោយប្រើនិយមន័យរបស់សមភាពនៃវ៉ិចទ័រដែលធាតុទាំងអស់ត្រូវតែស្មើគ្នា។

$(x-y,\ \ x+y,\ \ z-1)=(4,2,3)$

$x-y=4$

$x+y=2$

$z-1=3$

ដោយឆ្លងកាត់ការដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងលើគេបានចម្លើយ

$x=3,\quad y=-1, z=4$

១.២.១ វ៉ិចទ័រជួរឈរ

ពេលខ្លះវ៉ិចទ័រនៅក្នុង R^n គឺភាគច្រើនត្រូវបានសរសេរជារាងបញ្ឈរ *(Vertically)* ជាជាងរាងផ្តេក *(Horizontally)* ។ វ៉ិចទ័រនោះត្រូវបានហៅថា វ៉ិចទ័រជួរឈរ *(Column Vector)* ។ ជាមួយគ្នានេះដែរ ក្នុងឧទាហរណ៍១.១ វ៉ិចទ័រដែលត្រូវបានសរសេរជារាងផ្តេកហៅថាវ៉ិចទ័រជួរដេក *(Row Vector)*។ ជាឧទាហរណ៍ខ្លះខាងក្រោមនេះជាវ៉ិចទ័រជួរឈរដែលមានជាតុរៀងគ្នាដូចខាងក្រោម៖

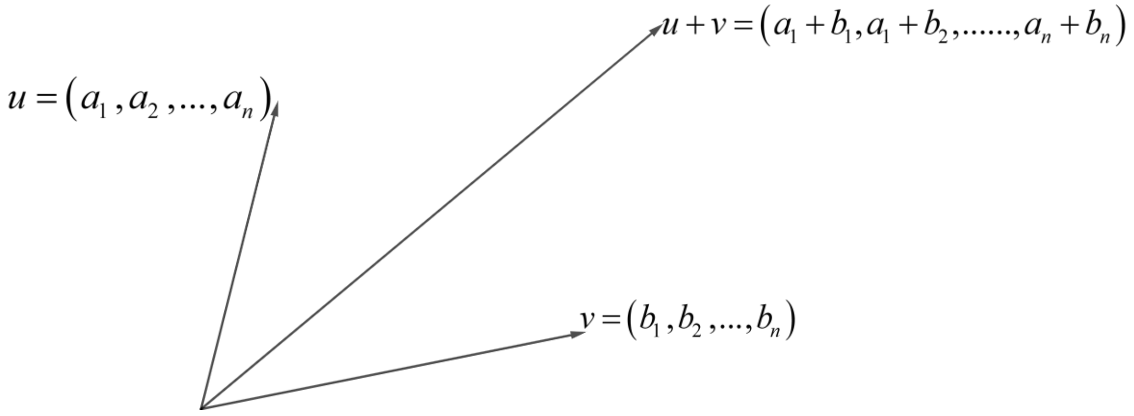
$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1\\5\\-6\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1.5\\ \frac{2}{3}\\-15\end{bmatrix}$$

យើងក៏អាចចំណាំបានថាចំពោះប្រមាណវិធីដែលកំណត់ចំពោះវ៉ិចទ័រជួរដេកគឺមានភាពស្រដៀងគ្នាទៅនឹងវ៉ិចទ័រជួរឈរផងដែរ។

១.៣.ផលបូកវ៉ិចទ័រ និងផលគុណស្កាលែ

គេមានវ៉ិចទ័រពីរ u និង v ក្នុង R^n ដែលកំណត់សរសេរដោយ $u=(a_1,a_2,...,a_n)$ និង $v=(b_1,b_2,...,b_n)$ ហើយផលបូកនៃវ៉ិចទ័រទាំងពីរត្រូវបានសរសេរជា $u+v$ មានន័យថាគឺជាការបូកគ្រប់ជាតុត្រូវគ្នាពី u ទៅ v គេបាន៖

$$u+v=(a_1+b_1,a_1+b_2,......,a_n+b_n)$$



ផលគុណស្កាលែរនៃវ៉ិចទ័រ $u=(a_1,a_2,...,a_n)$ ដោយចំនួនពិត k គេសរសេរ ku គឺមានន័យថាគុណគ្រប់ជាតុរបស់ u ដោយមេគុណ k គេបាន៖

$$ku=k(a_1,a_2,...,a_n)=(ka_1,ka_2,...,ka_n)$$

ឧទាហរណ៍១.២

(ក) តាង $u=(2,4,-5)$ និង $v=(1,-6,9)$ ។

គណនា $u+v,\ \ 7u,\ \ -v$ និង $3u-5v$

ចម្លើយ

គណនា $u+v,\ \ 7u,\quad -v$ និង $3u-5v$

$$u+v=(2+1,\ 4+(-6),\ -5+9)=(3,-2,4)$$
$$7u=(7(2),\ 7(4),\ 7(-5))=(14,\ 28,-35)$$
$$-v=(-1)(1,\ 6,\ -9)=(-1,6,-9)$$
$$3u-5v=(6,12,-15)+(-5,30,-45)=(1,42,-60)$$

(ខ) វ៉ិចទ័រសូន្យ $0=(0,0,\dots,0)$ នៅក្នុង $\mathbb{R}^n$ គឺដូចគ្នាទៅនឹងតម្លៃ 0 ហើយចំពោះវ៉ិចទ័រ $u=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ ណាមួយ។

$$u+0=(a_1+0,\ a_2+0,\dots,a_n+0)=(a_1,\ a_2,\dots,a_n)=u$$

(គ) តាង $u=\begin{bmatrix}2\\3\\-4\end{bmatrix}$ និង $v=\begin{bmatrix}3\\-1\\-2\end{bmatrix}$ ។ នោះគេបាន $2u-3v=\begin{bmatrix}4\\6\\8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-9\\3\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\9\\-2\end{bmatrix}$ ។

ទ្រឹស្តីបទ១.១ ចំពោះវ៉ិចទ័រ u,v,w ដែលនៅក្នុង R^n និងមេគុណស្កាលែ k,k' នៅក្នុង R គេបាន

$(i)\ \ (u+v)+w=u+(v+w),\qquad (v)\ \ k(u+v)=(ku+kv),$

$(ii)\ \ u+0=u,\qquad (vi)\ \ (k+k')u=ku+k'u,$

$(iii)\ \ u+(-u)=0,\qquad (vii)\ \ (kk')u=k(k'u),$

$(iv)\ \ u+v=v=u,\qquad (viii)\ 1u=u$

១.៤. ផលគុណចំណុច (ស្កាលែ)

ឧបមាថាវ៉ិចទ័រ u និង v ក្នុង R^n ដែលកំណត់សរសេរដោយ $u=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ និង $v=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ នោះគេបានផលគុណចំណុច ឬផលគុណខាងក្នុង ឬផលគុណស្កាលែនៃវ៉ិទ័រ u និង v គឺត្រូវបានសម្គាល់ និងកំណត់ដោយ

$$u\cdot v=(a_1\cdot b_1+\ a_2\cdot b_2+\ \dots+a_n\cdot b_n)$$

គឺមានន័យថាជាការគុណគ្រប់ធាតុដែលត្រូវគ្នារួចហើយធ្វើការបូកបញ្ចូលគ្នាដើម្បីបានចម្លើយជាចំនួនពិត។

វ៉ិចទ័រ u និង v អរត្តូកូណាល់លុះត្រាផលគុណចំណុច(ផលគុណស្កាលែ)ស្មើសូន្យ។ គេសរសេរៈ

$$u\cdot v=0\Leftrightarrow u\perp v$$

ឧទាហរណ៍១.៣

(ក) តាង $u=(1,-2,3),\ v=(4,5,-1),\ w=(2,7,4)$ ។

គេបាន $u\cdot v=1(4)-2(5)+3(-1)=4-10-3=9$

$u\cdot w=2-14+12=0$

$v\cdot w=8+35-4=39$

ដូចនេះ u និង w អរតូកូណាល់គ្នា។

(ខ) តាង $u=\begin{bmatrix}2\\3\\-4\end{bmatrix}$ និង $v=\begin{bmatrix}3\\-1\\-2\end{bmatrix}$ ។

គេបាន $u\cdot v=2(3)+3(-1)+(-4)(-2)=6-3+8=11$ ។

(គ) ឧបមា $u=(1,2,3,4),\ v=(6,k,-8,2)$ ។ កំណត់តម្លៃ k ដើម្បីអោយ u និង v អរតូកូណាល់គ្នា។

គេបាន $u\cdot v=6+2k-24+8=-10+2k$

u និង v អរតូកូណាល់គ្នាលុះត្រាតែ $u\cdot v=0$ គេបាន $-10+2k=0\Rightarrow k=5$ ។

ទ្រឹស្តីបទ១.២ ចំពោះវ៉ិចទ័រ u,v,w ដែលនៅក្នុង R^n និងមេគុណស្កាលែ k,k' នៅក្នុង R គេបាន

$(i)\quad (u+v)\cdot w=u\cdot w+v\cdot w,\qquad (iii)\quad u\cdot v=v\cdot u$

$(ii)\quad (ku)\cdot v=k(u\cdot v)\qquad (vi)\quad u\cdot u\geq 0,$ ហើយ $u\cdot u=0\Leftrightarrow u=0$

១.៤.១. ណមនៃវ៉ិចទ័រ

ណម ឬប្រវែងនៃវ៉ិចទ័រ $u=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ មួយត្រូវបានសម្គាល់ដោយ $\|u\|$ គឺមានន័យថាឬសការេនៃ $u\cdot u$ ។ ជាឧទាហរណ៍ប្រសិនបើ $u=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ គេបាន៖

$$\|u\|=\sqrt{u\cdot u}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}$$

$\|u\|$ គឺមានន័យថាឬសការេនៃផលបូកការេនៃធាតុរបស់ u ។

ដូចនេះ $\|u\|\geq 0$ ហើយ $\|u\|=0$ លុះត្រាតែ $u=0$ ។

វ៉ិចទ័រ v មួយជាវ៉ិចទ័រហៅថាវ៉ិចទ័រឯកតាលុះត្រាតែ $\|u\|=1$ ឬក៏ $u\cdot u=1$ ។ ចំពោះវ៉ិចទ័រមិនសូន្យ v នៅក្នុង R^n គេបាន $\hat{v}=\frac{1}{\|v\|}v=\frac{v}{\|v\|}$

គឺជាវ៉ិចទ័រឯកតា *(Unique Unit Vector)* ដែលមានទិសដៅដូចទៅនឹងវ៉ិចទ័រ v ។

ឧទាហរណ៍១.៣

(ក) ឧបមាថា $u=(1,-2,-4,5,3)$ រកតម្លៃ $\|u\|$

ចម្លើយ

ជាដំបូងយើងត្រូវរក $\|u\|^2=u\cdot u$ ដោយលើកការេធាតុនីមួយៗរបស់ u រួចបូកបញ្ចូលគ្នាដូចខាងក្រោម៖

$$\|u\|^2=1^2+(-2)^2+(-4)^2+5^2+3^2=1+4+16+25+9=55$$

គេបាន $\|u\| = \sqrt{55}$

(ខ) តាង $v=(1,-3,4,2)$ និង $w=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{6}\right)$ ។រកតម្លៃ $\|v\|$ និង $\|w\|$ រួចពិនិត្យមើលរកវ៉ិចទ័រឯកតា។

ចម្លើយ

គេបាន $\|v\| = \sqrt{1+9+16+4} = \sqrt{30}$, $\|w\| = \sqrt{\frac{9}{36}+\frac{1}{36}+\frac{25}{36}+\frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{36}{36}} = \sqrt{1} = 1$

ដូចនេះ w គឺជាវ៉ិចទ័រឯកតាប៉ុន្តែ v មិនមែនទេ។

យើងអាចធ្វើការរក $\hat{v}$ ដូចខាងក្រោម

$$\hat{v} = \frac{v}{\|v\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{30}},\frac{-3}{\sqrt{30}},\frac{4}{\sqrt{30}},\frac{2}{\sqrt{30}}\right)$$ គឺជាវ៉ិចទ័រឯកតាដឹលមានទិសដៅដូចទៅនឹង v ។

ទ្រឹស្តីបទ១.៣ (Schwarz) ៖ ចំពោះវ៉ិចទ័រ u,v ក្នុង $R^n, |u\cdot v| \le \|u\|\cdot\|v\|$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

គ្រប់ចំនួនពិត t ហើយនឹងទ្រឹស្តីបទ១.២ យើងបាន

$$0 \le (tu+v)\cdot(tu+v) = t^2(u\cdot u)+2t(u+v)+(v\cdot v) = \|u\|^2 t^2 + 2(u\cdot v)t + \|v\|^2$$

តាង $a=\|u\|^2$, $b=2(u\cdot v)$, $c=\|v\|^2$ នោះកន្សោមខាងលើក្លាយជា

$$at^2+bt+c \ge 0 \qquad \text{គ្រប់តម្លៃ } t \text{ ។}$$

មានន័យថា សមីការមិនអាចមានឫសពីរជាចំនួនពិតទេ ដែល

$$\Delta = b^2-4ac \le 0$$

$$b^2 \le 4ac$$

$$[2(u\cdot v)]^2 \le 4\|u\|^2\|v\|^2$$

$$\left[4(u\cdot v)^2\right] \le 4\|u\|^2\|v\|^2$$

$$(u\cdot v)^2 \le \|u\|^2\|v\|^2$$

$$u\cdot v \le \|u\|\cdot\|v\|$$

ទ្រឹស្តីបទ១.៤ (Minkoweski) ៖ចំពោះវ៉ិចទ័រ u,v $in R^n, \|u+v\| \le \|u\|+\|v\|$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាមវិសមភាព Schwarz និង លក្ខណៈផលគុណស្កាលែ

$$\|u+v\|^2=(u+v)\cdot(u+v)=(u\cdot u)+2(u\cdot v)+(v\cdot v)\leq\|u\|^2+2\|u\|\cdot\|v\|+\|v\|^2=(\|u\|+\|v\|)^2$$

$$\|u+v\|^2\leq(\|u\|+\|v\|)^2$$

$$\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|$$

១.៤.២. ចម្ងាយ មុំ និងចំណោល

- ចម្ងាយរវាងវ៉ិចទ័រ $u=(a_1)$ និង $v=(b_1)$ នៅក្នុង R គឺត្រូវបានសម្គាល់ និងកំណត់សរសេរដោយៈ

$$d(u,v)=\|u-v\|=\sqrt{(a_1-b_1)^2}=|a_1-b_1|$$

- ចម្ងាយរវាងវ៉ិចទ័រ $u=(a_1,a_2)$ និង $v=(b_1,b_2)$ នៅក្នុង R^2 គឺត្រូវបានសម្គាល់ និងកំណត់សរសេរដោយៈ

$$d(u,v)=\|u-v\|=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$$

- ចម្ងាយរវាងវ៉ិចទ័រ $u=(a_1,a_2,a_3)$ និង $v=(b_1,b_2,b_3)$ នៅក្នុង R^3 គឺត្រូវបានសម្គាល់ និងកំណត់សរសេរដោយៈ

$$d(u,v)=\|u-v\|=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2}$$

- ចម្ងាយរវាងវ៉ិចទ័រ $u=(a_1,a_2,...,a_n)$ និង $v=(b_1,b_2,...,b_n)$ នៅក្នុង R^n គឺត្រូវបានសម្គាល់ និងកំណត់សរសេរដោយៈ

$$d(u,v)=\|u-v\|=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+...+(a_n-b_n)^2}$$

- មុំ θ រវាងវ៉ិចទ័រមិនសូន្យ u,v នៅក្នុង R^n គឺត្រូវបានកំណត់ដោយ

$$\text{Cos}\,\theta=\frac{u\cdot v}{\|u\|\|v\|}$$ ។

ការកំណត់នេះគឺត្រឹមត្រូវដោយផ្អែកលើវិសមភាពSchwarz ទ្រឹស្តីបទ១.៣ គេបាន

$$-1\leq\frac{u\cdot v}{\|u\|\|v\|}\leq 1$$

- ចំណោលកែង *(Projection)* នៃវ៉ិចទ័រ u ទៅលើវ៉ិចទ័រមិនសូន្យ v ត្រូវបានសម្គាល់ និង កំណត់ដោយ៖ $proj(u,v)=u^*=\frac{u\cdot v}{\|v\|^2}v=\frac{u\cdot v}{v\cdot v}v$

ពិនិត្យវ៉ិចទ័រ u,v ក្នុងរូប 1-2a ដែលមាន u^* ជាចំណោលនៃវ៉ិចទ័រ u មកលើវ៉ិចទ័រ v ជាមួយទំហំ

$\|u^*\|=\|u\|\cdot\cos\theta$ រូបមន្ត $\cos\theta=\frac{OC}{OA}=\frac{\|u^*\|}{\|u\|}$

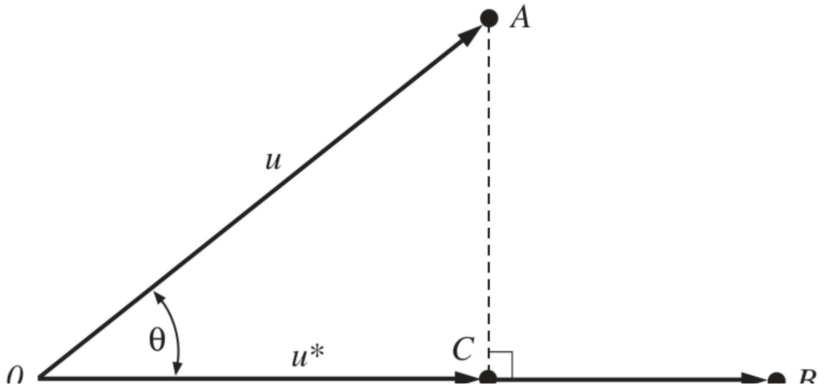
$$\|u^*\|=\|u\|\cdot\frac{u\cdot v}{\|u\|\cdot\|v\|}=\frac{u\cdot v}{\|v\|}$$

ដោយវ៉ិចទ័រ $u^*=\|u^*\|\cdot\hat{v}=\|u^*\|\cdot\frac{v}{\|v\|}$ តែ $\|u^*\|=\frac{u\cdot v}{\|v\|}$ យកជំនួសកន្សោមខាងលើយើងទទួលបាន

$$u^*=\frac{u\cdot v}{\|v\|}\cdot\frac{v}{\|v\|}=\frac{u\cdot v}{\|v\|^2}\cdot v$$

ដូចនេះ ទៅនិយមន័យខាងលើនៃចំណោលនៃវ៉ិចទ័រ u មកលើវ៉ិចទ័រ v គឺ u^* មានរូបមន្ត៖

$$u^*=\frac{u\cdot v}{\|v\|}\cdot\frac{v}{\|v\|}=\frac{u\cdot v}{\|v\|^2}\cdot v$$



រូបភាព 1-2a

ឧទាហរណ៍១

(ក) ឧបមាថា $u=(1,-2,3),\ v=(2,4,5)$ ។

១.គណនាចម្ងាយពីវ៉ិចទ័រ u មកវ៉ិចទ័រ v

២.រកតម្លៃ $\cos\theta=\cos(u,v)$

៣.រកចំណោលនៃវ៉ិចទ័រ u មកលើវ៉ិចទ័រ v

ចម្លើយ

១.គណនាចម្ងាយពីវ៉ិចទ័រ u មកវ៉ិចទ័រ v

គេបាន $d(u,v)=\|u-v\|=\sqrt{(1-2)^2+(-2-4)^2+(3-5)^2}=\sqrt{1+36+4}=\sqrt{41}$

២.រកតម្លៃ $\cos\theta=\cos(u,v)$

ដើម្បីរក $\cos\theta$ ដែលជាមុំផ្គុំឡើងរវាង u និង v ដំបូងយើងត្រូវរក

$$u\cdot v=2-8+15=9,\quad \|u\|^2=1+4=9=14,\quad \|v\|^2=4+16+25=45$$

គេបាន $\cos\theta=\dfrac{u\cdot v}{\|u\|\|v\|}=\dfrac{9}{\sqrt{14}\sqrt{45}}$

៣.រកចំណោលនៃវ៉ិចទ័រ u មកលើវ៉ិចទ័រ v

$$proj(u,v)=u^*=\frac{u\cdot v}{\|v\|^2}v=\frac{9}{45}(2,4,5)=\frac{1}{5}(2,4,5)=\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5},1\right)$$

ឧទាហរណ៍២ ឧបមាថា $u=(1,-3,4)$ និង $u=(3,4,7)$ ។

១.រកតម្លៃ $\cos\theta$ ដែលមុំ $\theta=(u,v)$

២. រកចំណោលនៃវ៉ិចទ័រ u មកលើវ៉ិចទ័រ v

៣.គណនាចម្ងាយពីវ៉ិចទ័រ u មកវ៉ិចទ័រ v

ចម្លើយ

ដំបូងយើងរកតម្លៃ

$u.v=3-12+28=19$

$\|u\|^2=1+9+16=26$

$\|v\|^2=9+16+49=74$

១.រកតម្លៃ $\cos\theta$ ដែលមុំ $\theta=(u,v)$

យើងបាន $\cos\theta=\dfrac{u.v}{\|u\|.\|v\|}=\dfrac{19}{\sqrt{26}.\sqrt{74}}$

២. រកចំណោលនៃវ៉ិចទ័រ u មកលើវ៉ិចទ័រ v

យើងបាន $proj(u.v)=u^*=\dfrac{u.v}{\|v\|^2}\cdot v=\dfrac{19}{74}\cdot(3,4,7)=\left(\dfrac{57}{74},\dfrac{76}{74},\dfrac{133}{74}\right)=\left(\dfrac{57}{74},\dfrac{38}{37},\dfrac{133}{74}\right)$

៣.គណនាចម្ងាយពីវ៉ិចទ័រ u មកវ៉ិចទ័រ v

យើងបាន $d(u,v)=\|u-v\|=\sqrt{(3-1)^2+(4+3)^2+(7-4)^2}=\sqrt{4+49+4}=\sqrt{62}$

១.៥. វ៉ិចទ័រទីតាំង ប្លង់ បន្ទាត់ និង ខ្សែកោងក្នុង R^n

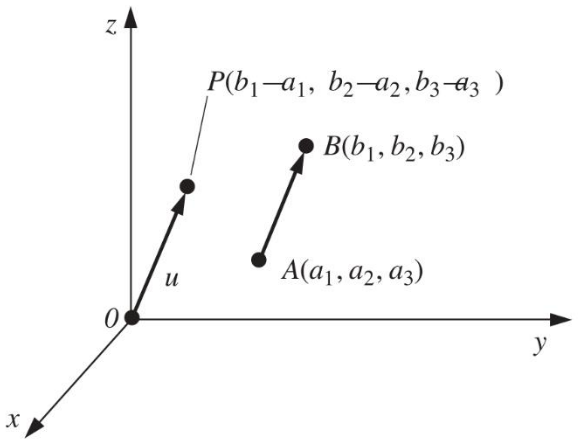
១.៥.១.វ៉ិចទ័រទីតាំង

គូរខ្លះនៃចំណុច $A(a_i)$ និង $B(b_i)$ ក្នុង R^n កំណត់វ៉ិចទ័រទីតាំង ឬអង្កត់មានទិសដៅកាត់ពី A ទៅ B យើងកំណត់សរសេរ $\overrightarrow{AB}$ ។មានរូបមន្តកំណត់ដោយវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ ៖

$$\overrightarrow{AB}=|B-A|=[b_1-a_1,b_2-a_2,....,b_n-a_n]$$

ព្រោះ $\overrightarrow{AB}$ និង u មានទំហំ និងទិសដៅដូចគ្នា ។ ក្នុងរូបភាព1-2b សម្រាប់ចំណុច $A=(a_1,a_2,a_3)$ និង $B=(b_1,b_2,b_3)$ ក្នុង R^n ហើយនឹងវ៉ិចទ័រ $u=\overrightarrow{AB}$ ដែលមានចំណុចចុង

$$P=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-b_3)$$



រូបភាព 1-2b

ឧទាហរណ៍១៖

ចូររកតម្លៃវ៉ិចទ័រ v ដែលបង្កើតដោយអង្កត់មានទិសដៅ $\overrightarrow{PQ}$ តាមចំណុចខាងក្រោម៖

a. $P(2,3,-6)$; $Q(1,-6,-5)$

b. $P(1,-8,-4,6)$; $Q(3,-5,2,-4)$

ចម្លើយ

រកតម្លៃវ៉ិចទ័រ v ដែលបង្កើតដោយអង្កត់មានទិសដៅ $\overrightarrow{PQ}$ តាមចំណុច

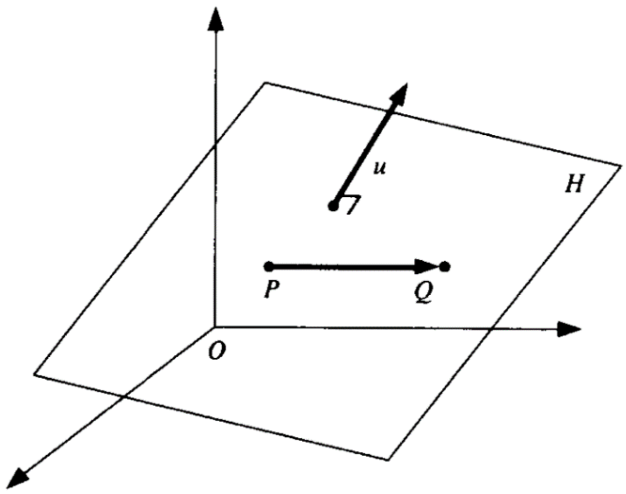
a. $P(2,3,-6)$; $Q(1,-6,-5)$

$$\Rightarrow \quad v=\overrightarrow{PQ}=(1-2,-6-3,-5-(-6))=(-1,-9,1)$$

b. $P(1,-8,-4,6)$; $Q(3,-5,2,-4)$

$$\Rightarrow \quad v=\overrightarrow{PQ}=(3-1,-8-(-8),2-(-4),-4-6)=(2,0,8,-10)$$

១.៥.២. សមីការប្លង់



ប្លង់ H មួយក្នុង R^3 គឺសំណុំចំណុច (x_1,x_2,x_3) ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌសមីការលីនេអ៊ែរ

$(H): a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=d$ ហៅថា **សមីការទូទៅរបស់ប្លង់**

$(H): a_1(x_1-p_1)+a_2(x_2-p_2)+a_3(x_3-p_3)=0$ **សមីការស្តង់ដារ**

ដែលមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់មិនសូន្យ $u=(a_1,a_2,a_3)$ ហើយមានចំណុចកាត់ $P(p_1,p_2,p_3)$ ដែលមានតម្លៃ $d=a_1p_1+a_2p_2+a_3p_3$ ដូចរូបខាងក្រោម៖

ហើយប្លង់ H មួយក្នុង R^n គឺសំណុំចំណុច $(x_1,x_2,.....x_n)$ ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌសមីការលីនេអ៊ែរ៖

$(H): a_1x_1+a_2x_2+.....+a_nx_n=d$ គឺជា **សមីការទូទៅរបស់ប្លង់ក្នុង** R^n

$(H): a_1(x_1-p_1)+a_2(x_2-p_2)+.....+a_n(x_n-p_n)=0$ គឺជា **សមីការស្តង់ដាររបស់ប្លង់**

ដែលមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់មិនសូន្យ $u=(a_1,a_2,a_3,......a_n)$ហើយមានចំណុចកាត់$P(p_1,p_2,p_3,....p_n)$ ។ ដូចគ្នានេះដែរប្លង់ H មួយក្នុង R^2 គឺសំណុំចំណុច (x,y)មានទម្រង់ជា **សមីការទូទៅរបស់បន្ទាត់។**

ឧទាហរណ៍១

$a.$ គេឲ្យ H ជាប្លង់ក្នុង R^3 ដែលត្រូវគ្នានឹងសមីការនីលីអ៊ែរ $2x-5y+7z=4$ និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $u=(2,-5,7)$ ។

ក. បង្ហាញថា $2x-5y+7z=4$

ខ. បង្ហាញ u កែង $\overrightarrow{PQ}$

ចម្លើយ

ក. បង្ហាញថា $P(1,1,1)$ និង $Q(5,4,2)$ ជាចំនុចស្ថិតក្នុងប្លង់

មានប្លង់ $2x-5y+7z=4$ បើ $P(1,1,1)$ និង $Q(5,4,2)$ ជាចំនុចស្ថិតក្នុងប្លង់ នោះផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព

ករណី $P(1,1,1)$ គេបាន $2\cdot1-5\cdot1+7\cdot1=4 \quad \Leftrightarrow 4=4$ ពិត

ករណី $Q(5,4,2)$ គេបាន $2\cdot5-5\cdot4+7\cdot2=4 \quad \Leftrightarrow 4=4$ ពិត

ខ. បង្ហាញ u កែង $\overrightarrow{PQ}$

មាន $u=(2,-5,7)$

យើងបាន $\overrightarrow{PQ}=Q-P=(5-1,4-1,2-1)=(4,3,1)$

នៅលើប្លង់H ។វ៉ិចទ័រ $u=[2,-5,7]$ គឺកែងនឹងH និងដូចរំពឹងទុក

$$u\cdot v=[2,-5,7]\cdot[4,3,1]=8-15+7=0$$

នោះវ៉ិចទ័រ u គឺ កែងទៅវ៉ិចទ័រ v ។

(b) រកសមីការនៃ hyperplane H ក្នុង $\mathbf{R}^4$ ដែលឆ្លងកាត់ចំណុច $P(1,3,-4,2)$ ហើយកែងវ៉ិចទ័រ $u=[4,-2,5,6]$ ។

មេគុណអញ្ញាត នៃសមីការ Hគឺសមាសភាគកាត់វ៉ិចទ័រu ដូចនេះសមីការនៃ H ត្រូវតែជាទម្រង់

$$4x_1-2x_2+5x_3+6x_4=k$$

ការជំនួស P ក្នុងសមីការនេះ យើងទទួលបាន

$$4(1) - 2(3) + 5(-4) + 6(2) = k \text{ ឬ } 4 - 6 - 20 + 12 = k \text{ ឬ } k = -10$$

ដូច្នេះ $4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = -10$ គឺសមីការនៃ H

១.៥.៣. បន្ទាត់ក្នុង R^n

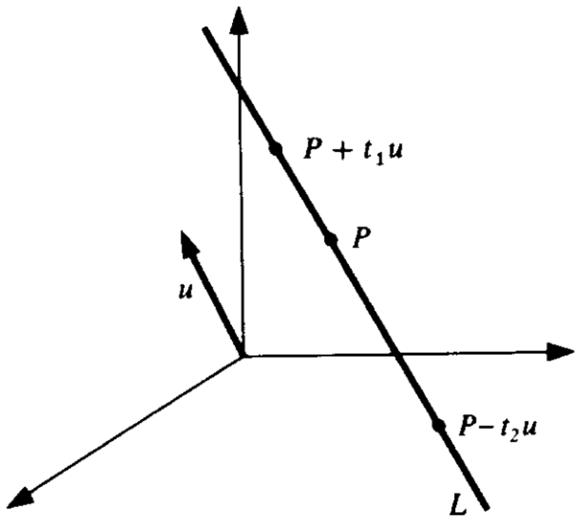
បន្ទាត់ L ក្នុង R^n ឆ្លងកាត់ចំណុច $P(b_1, b_2, \dots, b_n)$ និងក្នុងទិសដៅនៃវ៉ិចទ័រ nonzero

$$u = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

កើតមានឡើងនៃចំណុច$X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ

$$X = P + tu \text{ ឬ } \begin{cases} x_1 = a_1 t + b_1 \\ x_2 = a_2 t + b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ x_n = x_n t + b_n \end{cases} \text{ ឬ } L(t) = (a_1 t + b_1)$$

ដែលប៉ារ៉ាម៉ែត្រt យកតម្លៃពិតទាំងអស់ ដូចបន្ទាត់ Lក្នុងR^3 គឺរូបភាព ក្នុងរូប ។



(c) រកប៉ារ៉ាម៉ែត្រ តំណាងនៃបន្ទាត់ L ក្នុង $\mathbf{R^4}$ ឆ្លងកាត់ចំណុច $P(1, 2, 3, -4)$ ហើយក្នុងទិសដៅនៃ $u = [5, 6, -7, 8]$ ។ រកចំណុច Q លើ L ពេល $t = 1$

ការជំនួសក្នុងសមីការខាងលើសម្រាប់ទិន្ន័យ L តាមប៉ារ៉ាម៉ែត្រតំណាង :

$$x_1 = 5t + 1 \quad x_2 = 6t + 2 \quad x_3 = -7t + 3 \quad x_4 = 8t - 4$$

ឬ សមមូល ។

$$L(t) = (5t + 1, 6t + 2, -7t + 3, 8t - 4)$$

ចំណាំថា $t = 0$ ទិន្ន័យ ចំណុច P លើL ។ការជំនួសនៃ $t = 1$ ទិន្ន័យចំណុច $Q(6, 8, -4, 4)$លើ L ។

១.៦. វ៉ិចទ័រក្នុងR^3

វ៉ិចទ័រក្នុង $\mathbf{R^3}$ បានហៅចន្លោះវ៉ិចទ័រ កើតឡើងក្នុងការអនុវត្តន៍ជាច្រើន ជាពិសេសក្នុងរូបវិទ្យា ។ជាការពិតណាស់និមិត្តសញ្ញាសម្គាល់ពិសេសគឺជាញឹកញ៉ាប់បានប្រើសម្រាប់វ៉ិចទ័រដូចខាងក្រោម:

$i = [1, 0, 0]$ បោះបង់ចោលវ៉ិចទ័រឯកតាក្នុងទិសដៅ x

$j = [0, 1, 0]$ បោះបង់ចោលវ៉ិចទ័រឯកតាក្នុងទិសដៅ y

$k = [0, 0, 1]$ បោះបង់ចោលវ៉ិចទ័រឯកតាក្នុងទិសដៅ z

បន្ទាប់មក វ៉ិចទ័រ $u = [a, b, c]$ ក្នុង$\mathbf{R}^3$ មួយចំនួនអាចបានបញ្ជាក់តែមួយក្នុងទម្រង់

$u = [a, b, c] = ai + bj + ck$

ព្រោះវ៉ិចទ័រ i, j, k គឺវ៉ិចទ័រឯកតា ហើយគឺ orthogonal ទៅវិញទៅមក យើងទទួលបានផលគុណស្កាលែរ ដូចខាងក្រោម:

$$i \cdot i = 1, j \cdot j = 1, k \cdot k = 1 \text{ និង } i \cdot j = 0, i \cdot k = 0, j \cdot k = 0$$

លើសពីនេះទៅទៀត ប្រមាណវិធីវ៉ិចទ័របានពិភាក្សាខាងលើ ប្រហែលបានបញ្ជាក់ក្នុង និមិត្តសញ្ញា ijk ដូចខាងក្រោម ។

សន្មត់

$u = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ និង $v = b_1 i + b_2 j + b_3 k$

បន្ទាប់មក

$u \cdot v = (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j + (a_3 + b_3)k$ និង $cu = ca_1 i + ca_2 j + ca_3 k$

ដែលcគឺស្កាលែរមួយ ។

$u \cdot v = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ និង $\|u\| = \sqrt{u \cdot v} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

ឧទាហរណ៍ 1.8 ឧបមា$u = 3i + 5j - 2k$ និង $v = 4i - 8j + 7k$ ។

(a)រក$u + |v$ បន្ថែមសមាសធាតុដែលត្រូវគ្នា ទទួលបាន $u + v = 7i - 3j + 5k$

(b)រក$3u - 2v$ គុណលេខដំបូងដោយស្កាលែរ និងបន្ថែម

$$3u - 2v = (9i + 13j - 6k) + (-8i + 16j - 14k) = i + 29j - 20k$$

(c) រក$u \cdot v$ គុណលេខសមាសធាតុដែលត្រូវគ្នា ហើយបន្ទាប់មកបន្ថែម:

$$u \cdot v = 12 - 40 - 14 = -42$$

(d) រក$\|u\|$ ឬសការេនៃផលបូកនៃការេនៃសមាសធាតុ$\|u\| = \sqrt{9 + 25 + 4} = \sqrt{38}$

១.៦.១.ផលគុណវ៉ិចទ័រ

ផលគុណវ៉ិចទ័រនៃវ៉ិចទ័រគឺដូចខាងក្រោម:

សន្មត់ថា$u = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ និង$v = b_1 i + b_2 j + b_3 k$បន្ទាប់មក $i \times j, = k\, j \times k = i, k \times i = j$

$u \times v = (a_2 b_3 - a_3 b_2)(a_3 b_1 - a_1 b_3)(a_1 b_2 - a_2 b_1)$ $i \times j, = -k\, j \times k = -i, k \times i = -j$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & = a_2 & a_3 \\ b_1 & = b_2 & b_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_1 & = a_2 & a_3 \\ b_1 & = b_2 & b_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & = a_2 & a_3 \\ b_1 & = b_2 & b_3 \end{vmatrix} k$$

នេះគឺជា បីសមាសធាតុ នៃ$u \times v$ គឺបានទទួលពីលំដាប់ជួរ

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

(ដែលបញ្ចូលសមាសសធាតុនៃ u ខាងលើសមាសធាតុនៃ v) ដូចខាងក្រោម:

(1) គ្របគ្នាជួរឈរទីមួយ និងយកដេទែមីណង់

(2) គ្របគ្នាជួរឈរទីពីរ និងយកអវិជ្ជមាននៃដេទែម៉ណង់

(3) ត្រួតគ្នាជួរឈរទីបី និងយកដេទែមីណង់

ចំណាំថា $u \times v$ គឺវ៉ិចទ័រមួយ ដូចនេះ $u \times v$ គឺតែងតែបានហៅផលគុណវ៉ិចទ័រ ឬផលគុណខាងក្រៅនៃ u និងv ។

ឧទាហរណ៍1.9 រក $u \times v$ ដែល:(a)$u = 4i + 3j + 6k, v = 2i + 5j - 3k$, (b)$u = [2, -1, 5]$, $v = [3, 7, 6]$ ។

(a) ប្រើ$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ដើម្បីបាន $u \times v = (-9 - 30)i + (12 + 12)j + (20 - 6)k$
$= -39i + 24j + 14k$

(b) ប្រើ$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ដើម្បីបាន $u \times v = [-6 - 35, 15 - 12, 14 + 3] = [-41, 3, 17]$

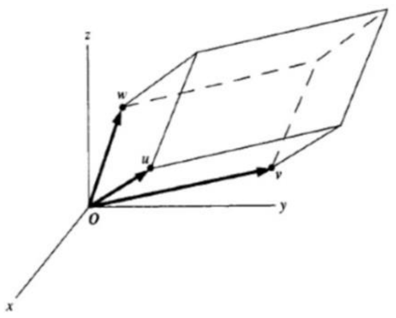
ទ្រឹស្តីបទ ឲ្យu, v, w ជាវ៉ិចទ័រក្នុង $\mathbf{R}^3$

(a) វ៉ិចទ័រ $u \times v$ គឺorthogonal ទៅទាំងពីរ uផង និងvផង

(b) តម្លៃដាច់ខាតនៃ" ត្រីគុណ"

$\|u \cdot (v \times w)\|$

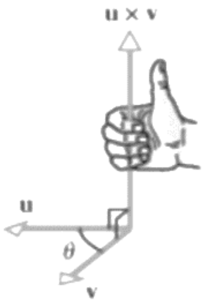
តំណាងឲ្យ មាឌនៃប្រលេពីប៉ែតដោយវ៉ិចទ័រ u, v, w



ចំណាំ៖

វ៉ិចទ័រ $u, v, u \times v$ ទម្រង់ប្រព័ន្ធដៃស្តាំមួយ ហើយរូបមន្តខាងក្រោមនោះផ្តល់ទំហំនៃ$u \times v$:

$\|u \times v\| = \|u\|.\|v\|.\sin\theta$ ដែលθ គឺមុំនៅចន្លោះ u និង v



១.៧. ចំនួនកុំផ្លិច

សំណុំនៃចំនួនកុំផ្លិចគឺបានចង្អុលប្រាប់ដោយ **C** ។ ជាផ្លូវការចំនួនកុំផ្លិចមួយគឺនៃលំដាប់គូរមួយ (a, b) នៃចំនួនពិតដែលសមភាព លេខបូក និងលេខគុណ គឺបានកំណត់ខាងក្រោម៖

$(a,b) = (c,d)$ បើសិនលក្ខខណ្ឌចាំបាច់ $a = c$ និង $b = d$
$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$
$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad - bc)$

យើងកំណត់អត្តសញ្ញាណចំនួនពិតមួយ ជាមួយចំនួនកុំផ្លិច$(a,0)$ នោះគឺ

$a \leftrightarrow (a,0)$

នេះគឺអាចកើតឡើង ព្រោះប្រមាណវិធីនៃ លេខបូក និងលេខគុណនៃចំនួនពិត បានបម្រុងទុកខាងក្រោម ភាពត្រូវគ្នាទាំងនេះ

$(a,0) + (b,0) = (a+b, 0)$ និង $(a,0) \cdot (b,0) = (ab, 0)$

ដូច្នេះយើងមើល **R** ដូចជាសំណុំរងនៃ**C** ហើយជំនួស $(a,0)$ដោយ a ទោះបីងាយស្រួល និងអាចទៅរួច ។

យើងចំណាំថាសំណុំ **C** នៃចំនួនកុំផ្លិចជាមួយប្រមាណវិធីខាងលើ ណៃលេខបូក និងលេខគុណ គឺដែលនៃចំនួន ដូចសំណុំ **R** នៃចំនួនពិត និងសំណុំ **Q** នៃចំនួនសនិទាន ។

ចំនួនកុំផ្លិច $(0,1)$ គឺត្រូវបានផ្តល់ដោយ i។ វាក៏មានលក្ខណៈពិសេសដែរ គឺ

$i^2 = ii = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$ រឺ $i = \sqrt{-1}$

លើសពីនេះទៀត ចំនួនកុំផ្លិចផ្សេងទៀតដែល $z = (a,b)$ អាចសរសេរនៅក្នុងទម្រង់

$$z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0).(0,1) = a + bi$$

ការកំណត់ខាងលើ $z = a + bi$ ដែល $a = \text{Re}\, z$ ត្រូវបានគេហៅថា ផ្នែកពិត និង $b = \text{Im}\, z$ ផ្នែកនិមិត្តនៃ Z គឺតាងដោយ (a,b)។ តាមពិត ផលបូកនិងផលគុណនៃចំនួនកុំផ្លិចច្រើន $z = a + bi$ និង $w = c + di$ អាចត្រូវបានទាញយកដោយច្បាប់វិធានបំបែកនិងលក្ខណៈត្រឡប់ដែលប្រើប្រាស់សាមញ្ញ ហើយនិង $i^2 = -1$ ។

$$z + w = (a+bi) + (c+di) = a + c + bi + di = (a+c) + (b+d)i$$
$$zw = (a+bi)(c+di) = ac + bci + adi + bdi^2 = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

យើងក៏បានកំណត់ភាពអវិជ្ជមាននៃ z និងផលដកនៅក្នុង C ដោយ

$-z = -1z$ និង $w - z = w + (-z)$

១.៧.១. កុំផ្លិចឆ្លាស់ តម្លៃដាច់ខាត

ចូរគិតពិចារណាពីចំនួនកុំផ្លិច $z = a + bi$ ។ ភាពឆ្លាស់នៃ z គឺតាងនិងកំណត់ដោយ $\bar{z} = \overline{a+bi} = a - bi$ នោះ $z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2$ ។ ចំណាំ z គឺពិតលុះត្រាតែ $\bar{z} = z$។

តម្លៃដាច់ខាតនៃ z តាងដោយ $|z|$ គឺកំណត់បានថាជាឫសការេមិនអវិជ្ជមាននៃ $\bar{z}z$ ។ គេសរសេរបានថា ។ $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

ចំណាំ $|z|$ គឺស្មើទៅនឹងណមនៃវ៉ិចទ័រ (a,b)នៅក្នុង R^3។

ឧបមាថា $z \neq 0$ ។ នោះភាពច្រាសនៃ z គឺ z^{-1} និងការចែកនៅក្នុង C នៃ w ដោយ z ត្រូវបានគេអោយដោយ $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$ និង $\frac{w}{z} - \frac{w\bar{z}}{z\bar{z}} = wz^{-1}$

ឧទាហរណ៍១ ឧបមាថា $z=2+3i$ និង $w=5-2i$។ នោះ

$z+w=(2+3i)+(5-2i)=2+5+3i-2i=7+i$

$zw=(2+3i)(5-2i)=10+15i-4i-6i^2=16+11i$

$\frac{w}{z}=\frac{5-2i}{2+3i}=\frac{(5-2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\frac{4-19i}{13}=\frac{4}{13}-\frac{19}{13}i$

$|z|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13},|w|=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$

១.៨. វ៉ិចទ័រនៅក្នុង C^n

គ្រប់សំណុំ n-tuple នៃចំនួនកុំផ្លិច ត្រូវបានតាងដោយ C^n គឺត្រូវបានគេហៅថាកុំផ្លិចលំហ n ។ គ្រាន់នៅក្នុងករណីផ្នែកពិត ដែលគ្រប់ធាតុនៃ C^n គឺត្រូវគេហៅថាជាចំណុចដ៏ច្រើនឬក៏ជាវ៉ិចទ័រ ដែលធាតុនៃ C ត្រូវបានគេហៅថាស្កាលែ ហើយការបូកវ៉ិចទ័រនិងការគុណស្កាលែនៅលើ C^n គេឱ្យដោយ

$[z_1,z_2,...,z_n]+[w_1,w_2,...,w_n]=[z_1+w_1,z_2+w_2,...,z_n+w_n]$

$z[z_1,z_2,...,z_n]=[zz_1,zz_2,...,zz_n]$

ដែល z_i,w_i និង z ជារបស់ C ។

ឧទាហរណ៍១ ចូរគណនាវ៉ិចទ័រ $u=(2+3i,4-i,3)$ និង $v=(3-2i,5i,4-6i)$ នៅក្នុង C^3 ។ នោះ

$v+u=(2+3i,4-i,3)+(3-2i,5i,4-6i)=(5+i,4+4i,7-6i)$

$(5-2i)u=[(5-2i)(2+3i),(5-2i)(4-i),(5-2i)(3)]=(16+11i,18-13i,15-6i)$

១.៨.១. ផលគុណស្កាលែរ (ផលគុណក្នុង) នៅក្នុង C^n

ចូរគណនាវ៉ិចទ័រ $u=[z_1,z_2,...,z_n]$ និង $w=[w_1,w_2,...,w_n]$ នៅក្នុង C^n ។ ផលគុណចំណុចឬក្នុងនៃ u និង v គឺត្រូវបានតាងនិងកំណត់ដោយ

$u.v=z_1\overline{w_1}+z_2\overline{w_2}+...+z_n\overline{w_n}$

និយមន័យនេះបានប្តូរទៅជាករណីផ្នែកពិតផ្សេងទៀតព្រោះ $\overline{w_i}=w_i$ នៅពេលដែល w_i ជាផ្នែកពិត។ ណមនៃ u កំណត់ដោយ $|u|=\sqrt{u.u}=\sqrt{z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+...+z_n\overline{z_n}}=\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2+...+|z_n|^2}$

យើងបញ្ជាក់ថា $u.u$ និងដូច្នេះ $|u|$ គឺវិជ្ជមាន ពេលដែល $u\neq 0$ ហើយ 0 ពេលដែល $u=0$ ។

ឧទាហរណ៍ ១ ចូរគណនាវ៉ិចទ័រ $u=(2+3i,4-i,3+5i)$ និង $v=(3-4i,5i,4-2i)$ នៅក្នុង C_3 ។ នោះ

$u.v=(2+3i)(\overline{3-4i})+(4-i)(\overline{5i})+(3+5i)(\overline{4-2i})=(2+3i)(3+4i)+(4-i)(-5i)+(3+5i)(4+2i)$

$=(-6+13i)+(-5-20i)+(2+26i)=-9+19i$

$u.u=|2+3i|^2+|4-i|^2+|3+5i|^2=4+9+16+1+9+25=64$

$|u|=\sqrt{64}=8$

ជំពូកទី២ ផលគុណស្កាលែរ

២.០. រំលឹកនិងបន្ថែម៖ អនុវត្តលីនេអ៊ែរ

គេមាន E និង E' ពីរលំហវ៉ិចទ័រលើកាយ $\mathbb{K}$ តែមួយ និង f ជាអនុវត្តមួយពី E ទៅ E' ។
គេថា f ជា**អនុវត្តលីនេអ៊ែរ**បើ៖
1) ចំពោះគ្រប់ $u, v \in E, f(u+v) = f(u) + f(v)$
2) ចំពោះគ្រប់ $u \in E$ និង គ្រប់ $\alpha \in \mathbb{K}, f(\alpha u) = \alpha f(u)$
គេមាន E លំហវ៉ិចទ័រលើកាយ $\mathbb{K}$ ។
គេហៅ **ទម្រង់លីនេអ៊ែរលើ** E គឺអនុវត្តលីនេអ៊ែរ $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ ។

២.១. ផលគុណស្កាលែរ និង ណមន្ទំ

និយមន័យ1,1
គេមាន E លំហវ៉ិចទ័រមួយលើកាយ $\mathbb{R}$ ។
គេហៅ **ផលគុណស្កាលែរ**លើ E គ្រប់អនុវត្ត $\langle .,. \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto \langle x,y \rangle$$

ដែលមានទម្រង់៖
1) បីលីនេអ៊ែរ៖ ចំពោះគ្រប់ $x \in E$ អនុវត្ត $\langle x,. \rangle$ និង $\langle .,x \rangle$ ជាអនុវត្តលីនេអ៊ែរ
2) ស៊ីមេទ្រិក៖ ចំពោះគ្រប់ $(x,y) \in E^2, \langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$
3) កំណត់-វិជ្ជមាន៖ ចំពោះគ្រប់ $x \in E,\ \langle x,x \rangle \geq 0$ និង ($\langle x,x \rangle = 0$ គេបាន $x = 0_E$)

កាលណាលំហវ៉ិចទ័រ E ប្រដាប់ដោយផលគុណស្កាលែរ $\langle .,. \rangle$ មួយ គេថា គូ $(E, \langle .,. \rangle)$ ជា **លំហប្រេអ៊ីលប៊ែរយ៉ាំងចំនួនពិត** ។ លើសពីនេះ បើលំហវ៉ិចទ័រ E មានវិមាត្រកំណត់ គេហៅថា **លំហអឺគ្លីត**។

ឧទាហរណ៍1,1 គេមានលំហវ៉ិចទ័រចំនួនពិត $\mathbb{R}^3$ និង អនុវត្ត $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ ដែលកំណត់ដោយ៖

$$\varphi(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1$$

បង្ហាញថា អនុវត្ត φ ជាផលគុណស្កាលែរមួយលើ $\mathbb{R}^3$ ។
ចម្លើយ
បង្ហាញថា អនុវត្ត φ ជាផលគុណស្កាលែរមួយលើ $\mathbb{R}^3$ គឺបង្ហាញថា φ មានទម្រង់
បីលីនេអ៊ែរ-ស៊ីមេទ្រិក កំណត់វិជ្ជមាន លើ $\mathbb{R}^3$។
ជាទូទៅ គេចាប់ផ្តើមបង្ហាញនូវទម្រង់ស៊ីមេទ្រិក បន្ទាប់មកទម្រង់បីលីនេអ៊ែរ និងបញ្ចប់ដោយទម្រង់កំណត់-វិជ្ជមាន។ ជម្រើសនៃការបង្ហាញនូវទម្រង់ស៊ីមេទ្រិកជាមុន គឺសម្រួលដល់ការបង្ហាញនូវទម្រង់

ប៊ីលីនេអ៊ែរ ដោយគ្រាន់តែបង្ហាញថាអនុវត្តដោយផ្នែកមួយជាអនុវត្តលីនេអ៊ែរ
ឧទាហរណ៍ φ_x ៖ ចំពោះអនុវត្ត φ_x គឺគេកំណត់អថេរ x នៅនឹង និង គេសង្កេតមើលទៅលើភាពលីនេអ៊ែរជាមួយនឹងអថេរ y។

គេមាន $\varphi(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1$

ដែល $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ និង $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ ។

1) អនុវត្ត φ មានទម្រង់ស៊ីមេទ្រិកលើ $\mathbb{R}^3$ គឺជាក់ស្តែង ពីព្រោះថា ផលគុណនិងផលបូកនៃពីរចំនួនពិតមានលក្ខណៈត្រលប់។

$$\varphi(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1$$
$$\varphi(x,y) = y_1x_1 + 2y_2x_2 + 3y_3x_3 + y_2x_1 + y_1x_2$$
$$\varphi(x,y) = y_1x_1 + 2y_2x_2 + 3y_3x_3 + y_1x_2 + y_2x_1$$
$$\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$$

2) បង្ហាញថាអនុវត្ត φ មានទម្រង់ប៊ីលីនេអ៊ែរលើ $\mathbb{R}^3$ គ្រាន់តែបង្ហាញថាអនុវត្តដោយផ្នែកជាឧទាហរណ៍ φ_x គឺជាអនុវត្តលីនេអ៊ែរ (មានន័យថា ចំពោះអនុវត្ត φ_x គេកំណត់អថេរ x នៅនឹង និង គេសង្កេតមើលទៅលើភាពលីនេអ៊ែរជាមួយនឹងអថេរ y)។

តាងអនុវត្តដោយផ្នែក φ_x ៖ $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$y \longmapsto \varphi_x(y) = \varphi(x,y)$$

គេនឹងបង្ហាញថាអនុវត្ត φ_x គឺជាអនុវត្តលីនេអ៊ែរ គឺគេនឹងបង្ហាញថា៖

ចំពោះ $y, z \in \mathbb{R}^3$ និង $\alpha \in \mathbb{R}$ គេបាន $\varphi_x(\alpha y + z) = \alpha\varphi_x(y) + \varphi_x(z)$

ចំពោះ $y, z \in \mathbb{R}^3$ និង $\alpha \in \mathbb{R}$ គេមាន $\varphi_x(\alpha y + z) = \varphi(x, \alpha y + z)$

$$\varphi_x(\alpha y + z) = x_1(\alpha y_1 + z_1) + 2x_2(\alpha y_2 + z_2) + 3x_3(\alpha y_3 + z_3) + x_1(\alpha y_2 + z_2) + x_2(\alpha y_1 + z_1)$$
$$\varphi_x(\alpha y + z) = \alpha(x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1) + (x_1z_1 + 2x_2z_2 + 3x_3z + x_1z_2 + x_2z_1)$$
$$\varphi_x(\alpha y + z) = \alpha\varphi(x,y) + \varphi(x,z)$$
$$\varphi_x(\alpha y + z) = \alpha\varphi_x(y) + \varphi_x(z)$$

3) បង្ហាញថាអនុវត្ត φ មានទម្រង់កំណត់-វិជ្ជមានលើ $\mathbb{R}^3$

ចំពោះ $x \in \mathbb{R}^3$ គេមាន $\varphi(x,x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_1$

$$\varphi(x,x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2$$
$$\varphi(x,x) = (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + x_2^2 + 3x_3^2$$
$$\varphi(x,x) = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 + 3x_3^2$$

គេបាន $\varphi(x,x) \geq 0$

និង បើ $\varphi(x,x) = 0$ នោះ $(x_1 + x_2)^2 + x_2^2 + 3x_3^2 = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

គេបាន $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

ដូច្នេះអនុវត្ត φ មានទម្រង់កំណត់-វិជ្ជមានលើ $\mathbb{R}^3$

ឧទាហរណ៍1.2 ក្នុង $\mathbb{R}^n$ អនុវត្ត $\langle .,. \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

គឺជាផលគុណស្កាលែរមួយលើ $\mathbb{R}^n$ (ហៅថា ផលគុណស្កាលែរកាណូនិកលើ $\mathbb{R}^n$) ។

ឧទាហរណ៍1.3 ក្នុង $C^0([a,b],\mathbb{R})$ លំហវ៉ិចទ័រចំនួនពិតនៃអនុវត្តជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ ដែលឱ្យតម្លៃក្នុង $\mathbb{R}$ អនុវត្ត $\langle .,. \rangle : C^0([a,b],\mathbb{R}) \times C^0([a,b],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(f, g) \longmapsto \int_a^b f(x)g(x)dx$$

គឺជាផលគុណស្កាលែរមួយលើ $C^0([a,b],\mathbb{R})$ ។

ឧទាហរណ៍1,4 ក្នុង $M_n(\mathbb{R})$ អនុវត្ត $\langle .,. \rangle : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(A, B) \longmapsto \mathrm{Tr}(A^T B)$$

គឺជាផលគុណស្កាលែរមួយលើ $M_n(\mathbb{R})$ (ហៅថា ផលគុណស្កាលែរកាណូនិកលើ $M_n(\mathbb{R})$) ។

និយមន័យ2.2 [**ណមផ្ដុំនឹងផលគុណស្កាលែរ**]

គេមានលំហអឺក្លីត $(E, \langle .,. \rangle)$ ។

គេហៅ**ណមផ្ដុំ**នឹងផលគុណស្កាលែរគឺ អនុវត្ត $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

គេតាងចំនួនពិត $N(x)$ ជាញឹកញាប់ដោយ $\|x\|$ (អានថា៖ ណមនៃវ៉ិចទ័រ x នៃ E)។

ដូច្នេះ គេបាន $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ ។

ឧទាហរណ៍1.5 ក្នុងលំហវ៉ិចទ័រចំនួនពិត $\mathbb{R}^n$ ប្រដាប់ដោយផលគុណស្កាលែរកាណូនិករបស់វា ចំពោះ $x = (x_1, \dots, x_n)$ គេបាន $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ ។

ទ្រឹស្ដីបទ2.3 [វិសមភាព Cauchy-Schwarz]

គេមានលំហអឺក្លីត $(E, \langle .,. \rangle)$ និង $\|.\|$ ណមផ្ដុំនឹងផលគុណស្កាលែរ $\langle .,. \rangle$ ។

នោះចំពោះគ្រប់ $(x, y) \in E^2, |\langle x, y \rangle| \le \|x\| \times \|y\|$ ។

លើសពីនេះ វិសមភាពនេះជា*សមភាព*លុះត្រាតែ (x, y) ជាគ្រួសារអាស្រ័យលីនេអ៊ែរមួយនៃ E ។

ឧទាហរណ៍1,6 វិសមភាព Cauchy-Schwarz លើ $\mathbb{R}^n$ ៖

ចំពោះ $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ គេបាន៖

$|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$ និង $(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$

ឧទាហរណ៍1,7 វិសមភាព Cauchy-Schwarz លើ $C^0([a,b],\mathbb{R})$ ៖

ចំពោះគ្រប់ $(f,g)\in\left(C^0([a,b],\mathbb{R})\right)^2, \left|\int_a^b fg\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2}\times\sqrt{\int_a^b g^2}$

និង $\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2\right)\times\left(\int_a^b g^2\right)$

លក្ខណៈ2.4

គេមានលំហអឺគ្លីត $(E,\langle .,.\rangle)$ និង $\|.\|$ ណមផ្ទុំនឹងផលគុណស្កាលែរ $\langle .,.\rangle$ ។

គេបានលក្ខណៈដូចខាងក្រោម៖

1) ចំពោះគ្រប់ $x\in E$ និង គ្រប់ $\lambda\in\mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda|\times\|x\|$

2) ចំពោះគ្រប់ $x\in E, \|x\|\geq 0$

3) ចំពោះគ្រប់ $x\in E, \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0_E$

4) ចំពោះគ្រប់ $(x,y)\in E^2, \|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

5) ចំពោះគ្រប់ $(x,y)\in E^2,\ \|x+y\| = \|x\|+\|y\|$ លុះត្រាតែ (x,y) ជាគ្រួសារអាស្រ័យលីនេអ៊ែរមួយនៃ E ។

លក្ខណៈ2.5

គេមានលំហអឺគ្លីត $(E,\langle .,.\rangle)$ និង $\|.\|$ ណមផ្ទុំនឹងផលគុណស្កាលែរ $\langle .,.\rangle$ ។

គេបានលក្ខណៈដូចខាងក្រោម៖

1) ចំពោះគ្រប់ $(x,y)\in E^2, \|x+y\|^2 = \|x\|^2+2\langle x,y\rangle+\|y\|^2$

2) ចំពោះគ្រប់ $(x,y)\in E^2, \|x-y\|^2 = \|x\|^2-2\langle x,y\rangle+\|y\|^2$

3) ចំពោះគ្រប់ $(x,y)\in E^2, \langle x-y,x+y\rangle = \|x\|^2-\|y\|^2$

4) ចំពោះគ្រប់ $(x,y)\in E^2, \|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2)$

5) ចំពោះគ្រប់ $(x,y)\in E^2, \langle x,y\rangle = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2)$

6) ចំពោះគ្រប់ $(x,y)\in E^2, \langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)$

ជាបន្តនេះ យើងនឹងសិក្សាក្នុងលំហអឺគ្លីត $(E,\langle .,.\rangle)$ ។

២.២. ភាពអរតូកូណាល់ និង គោលអរតូណរម៉ាល់

<u>និយមន័យ</u>2.6

គេមានលំហអឺគ្លីត $(E,\langle .,.\rangle)$ ។

1) គេថាពីរវ៉ិចទ័រ x និង y នៃ E **អរតូកូណាល់**គ្នា(ដែលតាងដោយ $x\perp y$)
   បើ $\langle x,y\rangle = 0$ ។

2) គេមាន $\mathcal{F} = (x_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ ជាគ្រួសារនៃវ៉ិចទ័រនៃ E ។ គេថា $\mathcal{F}$ ជា**គ្រួសារអរតូកូណាល់**
   បើគ្រប់គូ $(i,j)\in[\![1,p]\!]^2$ ដែល $i\neq j$ វ៉ិចទ័រ $x_i\perp x_j$ ។

ទ្រឹស្តីបទ2.7 [**ទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ**]

គេមានលំហអឺគ្លីត $(E,\langle .,.\rangle)$ និង $\|.\|$ ណមផ្ទុំនឹងផលគុណស្កាលែរ $\langle .,.\rangle$ ។

គេមាន $\mathcal{F}=(x_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ ជាគ្រួសារអរតូកូណាល់កំណត់មួយនៃ E នោះគេបាន៖ $\left\|\sum_{i=1}^{p} x_i\right\|^2=\sum_{i=1}^{p}\|x_i\|^2$ ។

ប្រយ័ត្ន៖ ប្រាសមកវិញគឺមិនពិត (លើកលែងតែករណី $p=2$)។ ជាឧទាហរណ៍ ក្នុង $\mathbb{R}^3$ យក $x_1=(1,0,0), x_2=(1,1,0), x_3=(-1,1,0)$ ។

លក្ខណៈ2.7

គ្រប់គ្រួសារអរតូកូណាល់នៃលំហអឺគ្លីតដែលមិនផ្ទុកវ៉ិចទ័រសូន្យជាគ្រួសារមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ។

និយមន័យ2.8

គេមានលំហអឺគ្លីត $(E,\langle .,.\rangle)$ និង F ជាលំហវ៉ិចទ័ររងនៃ E ។

គេហៅ**អរតូកូណាល់នៃ** F (ដែលតាងដោយ $F^\perp$) កំណត់ដោយ៖

$$F^\perp=\{x\in E \mid \text{គ្រប់ } y\in F, \langle x,y\rangle=0\} \text{ ។}$$

កំណត់សម្គាល់៖ 1) $\{0\}^\perp=E$ និង 2) $E^\perp=\{0\}$ ។

លក្ខណៈ2.9

គេមានលំហអឺគ្លីត $(E,\langle .,.\rangle)$ ។ បើ F និង G ជាលំហវ៉ិចទ័ររងនៃ E នោះគេបាន៖

1) $E=F\oplus F^\perp$ (មានន័យថា៖ $E=F+F^\perp$ និង $F\cap F^\perp=\{0\}$)

(F និង $F^\perp$ គឺជា**លំហវ៉ិចទ័ររងបន្ថែមគ្នា**ក្នុង E)

2) $F=(F^\perp)^\perp$

3) $(F+G)^\perp=F^\perp\cap G^\perp$ និង $(F\cap G)^\perp=F^\perp+G^\perp$

និយមន័យ2.10

គេមានលំហអឺគ្លីត $(E,\langle .,.\rangle)$ ។

គោល $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_p)$ មួយជា**គោលអរតូកូណាល់** បើ $\langle e_i,e_j\rangle=0$ ចំពោះគ្រប់ $(i,j)\in[\![1,p]\!]^2$ ដែល $i\neq j$ ។

គោល $\mathcal{B}$ ជា**គោលអរតូណរមេ** បើលើសពីនេះ វ៉ិចទ័រនីមួយៗមានណមស្មើនឹង 1 គឺមានន័យថា៖ $\langle e_i,e_j\rangle=\delta_{ij}$ ដែល δ_{ij} ជានិម្មិតសញ្ញាក្រូនិកគ័រ (*Kronecker*) កំណត់ដោយ

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{បើ } i=j\\ 0 & \text{បើ } i\neq j\end{cases} \text{ ។}$$

កំណត់សម្គាល់៖ បើ $\{\varepsilon_i\}$ ជាគោលអរតូកូណាល់មួយ នោះវ៉ិចទ័រ $e_i = \frac{\varepsilon_i}{\|\varepsilon_i\|}$ កំណត់នូវគោលអរតូណរមេមួយ។

ទ្រឹស្តីបទ2.11
ក្នុងលំហអឺគ្លីត មានជានិច្ចជាកាលនូវគោលអរតូណរមេ។

គេមាន $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ ជាគោលអរតូណរមេមួយ និង $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \, , y = \sum_{j=1}^{p} y_j e_j$ ជាពីរវ៉ិចទ័រនៃ E ។

គេបាន $\langle x, y\rangle = \langle \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \, , \sum_{j=1}^{p} y_j e_j\rangle = \sum_{i,j=1}^{p} x_i y_j \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i,j=1}^{p} x_i y_j \delta_{ij}$

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_p y_p$$

លក្ខណៈ2.12 [**វិធាន Gram-Schmidt**]
គេមាន $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ ជាគ្រួសារមួយមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរនៃលំហអឺគ្លីត E និង F ជាលំហរងបង្ក។ ដូច្នេះ គេអាចសង់ចេញពីគ្រួសារ $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ នូវគោលអរតូណរមេមួយនៃ F ។
ជាពិសេស គេអាចផ្គុំនឹងគ្រប់គោលនៃ E នូវគោលអរតូណរមេនៃ E ។

វិធាន Gram-Schmidt គឺសង់ជាបឋមតាមកំនើននូវគោលអរតូកូណាល់ $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p)$ នៃ F និងជាបន្ទាប់នូវគោលអរតូណរមេ $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ នៃ F ដែល $e_i = \frac{\varepsilon_i}{\|\varepsilon_i\|}$ ។

ដូចនេះ ចំពោះវិធាននេះ គេយក $\varepsilon_1 = v_1$

$\varepsilon_2 = v_2 + \lambda\varepsilon_1$ ជាមួយនឹងស្កាលែ λ ដែល $\varepsilon_2 \perp \varepsilon_1$ ។

ក្រោមលក្ខខ័ណ្ឌនេះ គេបាន៖ $0 = \langle \varepsilon_2, \varepsilon_1\rangle = \langle v_2 + \lambda\varepsilon_1, \varepsilon_1\rangle = \langle v_2, \varepsilon_1\rangle + \lambda\langle \varepsilon_1, \varepsilon_1\rangle$

$$0 = \langle v_2, \varepsilon_1\rangle + \lambda\|\varepsilon_1\|^2$$

ដោយ $\varepsilon_1 \neq 0$ គេបាន $\lambda = -\frac{\langle v_2, \varepsilon_1\rangle}{\|\varepsilon_1\|^2}$ ។

ពេលសង់បាន ε_2 រួចហើយ គេសង់ ε_3 ដោយយក $\varepsilon_3 = v_3 + \lambda\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2$ ជាមួយនឹងស្កាលែរ λ និង μ ដែល $\varepsilon_3 \perp \varepsilon_1$ និង $\varepsilon_3 \perp \varepsilon_2$ ។

គេបាន៖ $0 = \langle v_3 + \lambda\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2, \varepsilon_1\rangle = \langle v_3, \varepsilon_1\rangle + \lambda\|\varepsilon_1\|^2$ ពីព្រោះថា $\langle \varepsilon_2, \varepsilon_1\rangle = 0$

និង $0 = \langle v_3 + \lambda\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2, \varepsilon_2\rangle = \langle v_3, \varepsilon_2\rangle + \mu\|\varepsilon_2\|^2$ ពីព្រោះថា $\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2\rangle = 0$

នាំឱ្យ $\lambda = -\frac{\langle v_3, \varepsilon_1\rangle}{\|\varepsilon_1\|^2}$ និង $\mu = -\frac{\langle v_3, \varepsilon_2\rangle}{\|\varepsilon_2\|^2}$ ។

ពេលនេះ គេឃើញច្បាស់នូវវិធានតាមកំនើន។

គេឧបមាថាបានសង់ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{p-1}$ រួចហើយ

គេយក $\varepsilon_p = v_p + \lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \cdots + \lambda_{p-1}\varepsilon_{p-1}$ ជាមួយនឹងស្កាលែរ λ_i ដែល $\varepsilon_p \perp \varepsilon_i$ ចំពោះ $i \in [\![1, p-1]\!]$ ។

ក្រោមលក្ខខ័ណ្ឌនេះ គេរកបាន $\lambda_i = -\frac{\langle v_p, \varepsilon_i\rangle}{\|\varepsilon_i\|^2}$ ។

លំនាំនៃការសង់ខាងលើនេះ គឺបញ្ជាក់ច្បាស់ថា $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p\}$ ជាគ្រួសារអរតូកូណាល់មួយនៃ F និងគេបាន $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_p) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p)$ ។

ឧទាហរណ៍1,8 ក្នុង $\mathbb{R}^3$ គេមានបីវ៉ិចទ័រ $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ។

1) បង្ហាញថា $\{v_1, v_2, v_3\}$ ជាគ្រួសារមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរនៃ $\mathbb{R}^3$ ។

2) កំណត់រកតាមវិធាន Gram-Schmidt នូវគោលអរតូណរមេមួយនៃ $\mathbb{R}^3$ ។

ចម្លើយ

1) បង្ហាញថា $\{v_1, v_2, v_3\}$ ជាគ្រួសារមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរនៃ $\mathbb{R}^3$

បើ $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i v_i = 0$ ដែលចំពោះ $i \in [\![1,3]\!], \lambda_i \in \mathbb{R}$

គេបាន $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & L_1 \\ -\lambda_2 - \lambda_3 = 0 & L_2 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 = 0 & L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 & L_1 \leftrightarrow -L_3 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & L_2 \longleftarrow -L_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 & L_1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & L_2 \\ \lambda_3 = 0 & L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

តាម L_2 គេបាន $\lambda_2 = 0$ និង តាម L_1 គេបាន $\lambda_1 = 0$

នាំឱ្យ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

ដូច្នេះ $\{v_1, v_2, v_3\}$ ជាគ្រួសារមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរនៃ $\mathbb{R}^3$

2) កំណត់រកគោលអរតូណរមេមួយនៃ $\mathbb{R}^3$

តាម 1) គ្រួសារ $\{v_1, v_2, v_3\}$ ជាគ្រួសារមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរនៃ $\mathbb{R}^3$

តាមវិធាន Gram-Schmidt គេនឹងសង់តាមកំនើនចេញពីគ្រួសារ $\{v_1, v_2, v_3\}$ នូវគោលអរតូកូណាល់ $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ នៃ $\mathbb{R}^3$ និងជាបន្ទាប់នូវគោលអរតូណរមេ (e_1, e_2, e_3) នៃ $\mathbb{R}^3$ ដែល $e_i = \frac{\varepsilon_i}{\|\varepsilon_i\|}$ ។

គេយក $\varepsilon_1 = v_1$

$\varepsilon_2 = v_2 + \lambda\varepsilon_1$ ជាមួយនឹងស្កាលែរ $\lambda \in \mathbb{R}$ ដែល $\varepsilon_2 \perp \varepsilon_1$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌនេះ គេបាន $\lambda = -\frac{\langle v_2,\varepsilon_1\rangle}{\|\varepsilon_1\|^2} = -\frac{1\times1+(-1)\times0+(-1)\times(-1)}{1^2+0^2+(-1)^2} = -\frac{2}{2} = -1$

គេបាន $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-1\\-1-0\\-1+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$

គេយក $\varepsilon_3 = v_3 + \alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2$ ជាមួយនឹងស្កាលែរ $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ដែល $\varepsilon_3 \perp \varepsilon_1$ និង $\varepsilon_3 \perp \varepsilon_2$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌនេះ គេបាន $\alpha = -\frac{\langle v_3,\varepsilon_1\rangle}{\|\varepsilon_1\|^2} = -\frac{1\times1+(-1)\times0+0\times(-1)}{1^2+0^2+(-1)^2} = -\frac{1}{2}$

និង $\beta = -\frac{\langle v_3,\varepsilon_2\rangle}{\|\varepsilon_2\|^2} = -\frac{1\times0+(-1)\times(-1)+0\times0}{0^2+(-1)^2+0^2} = -1$

គេបាន $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$

$$\varepsilon_3 = \left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}-2+1+0\\2+0-2\\0-1+0\end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\varepsilon_3'$$

ដែល $\varepsilon_3' = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

(ε_3 និង ε_3' កូលីនេអ៊ែរគ្នា ហើយ $\varepsilon_3 \perp \varepsilon_1$ និង $\varepsilon_3 \perp \varepsilon_2$ ដូចនេះ $\varepsilon_3' \perp \varepsilon_1$ និង $\varepsilon_3' \perp \varepsilon_2$)

ដូច្នេះ $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3')$ ជាគោលអរត្តូកូណាល់មួយនៃ $\mathbb{R}^3$ ដែល

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad \varepsilon_3' = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

គេទាញបាន (e_1,e_2,e_3) ជាគោលអរត្តូណរមេមួយនៃ $\mathbb{R}^3$ ដែល

$$e_1 = \frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$e_2 = \frac{\varepsilon_2}{\|\varepsilon_2\|} = \frac{1}{\sqrt{0^2+(-1)^2+0^2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$e_3 = \frac{\varepsilon_3'}{\|\varepsilon_3'\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

<u>ឧទាហរណ៍1,9</u> កំណត់រកគោលអរត្តូណរមេមួយនៃលំហវ៉ិចទ័ររង F នៃ $\mathbb{R}^4$ ដែលបង្កដោយ

វ៉ិចទ័រ $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ ។

<u>ចម្លើយ</u>

ជាបឋម គេនឹងផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\{v_1,v_2,v_3\}$ ជាគ្រួសារមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរនៃ F

បើ $\sum_{i=1}^{3}\lambda_i v_i = 0$ ដែលចំពោះ $i \in [\![1,3]\!], \lambda_i \in \mathbb{R}$

គេបាន $\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}=0$

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2 = 0 & L_1\\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 & L_2\\ -\lambda_2+\lambda_3 = 0 & L_3\\ \lambda_2+\lambda_3=0 & L_4\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2 = 0 & L_1\\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & L_2\leftrightarrow L_4\\ -\lambda_2+\lambda_3 = 0 & L_3\\ \lambda_1+\lambda_3=0 & L_4\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2 = 0 & L_1\\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & L_2\\ -\lambda_2+\lambda_3 = 0 & L_3\\ -\lambda_2+\lambda_3=0 & L_4\leftarrow L_4-L_1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2 = 0 & L_1\\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & L_2\\ \lambda_3 = 0 & L_3\leftarrow 1/2\,(L_3+L_2)\end{cases}$$

តាម L_2 គេបាន $\lambda_2=0$ និង តាម L_1 គេបាន $\lambda_1=0$

នាំឱ្យ $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$

ដូច្នេះ $\{v_1,v_2,v_3\}$ ជាគ្រួសារមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរនៃ F

តាមវិធាន Gram-Schmidt គេនឹងសង់តាមកំនើនចេញពីគ្រួសារ $\{v_1,v_2,v_3\}$ នូវគោលអរតូកូណាល់ $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ នៃ F និងជាបន្ទាប់នូវគោលអរតូណរមេ (e_1,e_2,e_3) នៃ F ដែល $e_i=\frac{\varepsilon_i}{\|\varepsilon_i\|}$ ។

គេយក $\varepsilon_1=v_1$

$\varepsilon_2=v_2+\lambda\varepsilon_1$ ជាមួយនឹងស្កាលែរ $\lambda\in\mathbb{R}$ ដែល $\varepsilon_2\perp\varepsilon_1$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌនេះ គេបាន $\lambda=-\frac{\langle v_2,\varepsilon_1\rangle}{\|\varepsilon_1\|^2}=-\frac{1\times1+0\times1+(-1)\times0+1\times0}{1^2+1^2+0^2+0^2}=-\frac{1}{2}$

គេបាន $\varepsilon_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}+\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\frac{1}{2}\\0-\frac{1}{2}\\-1-0\\1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\varepsilon_2'$

ដែល $\varepsilon_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

(ε_2 និង ε_2' កូលីនេអ៊ែរគ្នា ហើយ $\varepsilon_2 \perp \varepsilon_1$ ដូចនេះ $\varepsilon_2' \perp \varepsilon_1$)

គេយក $\varepsilon_3 = v_3 + \alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2'$ ជាមួយនឹងស្កាលែរ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ដែល $\varepsilon_3 \perp \varepsilon_1$ និង $\varepsilon_3 \perp \varepsilon_2'$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌនេះ គេបាន $\alpha = -\frac{\langle v_3, \varepsilon_1 \rangle}{\|\varepsilon_1\|^2} = -\frac{0\times1+1\times1+1\times0+1\times0}{1^2+1^2+0^2+0^2} = -\frac{1}{2}$

និង $\beta = -\frac{\langle v_3, \varepsilon_2' \rangle}{\|\varepsilon_2'\|^2} = -\frac{0\times1+1\times(-1)+1\times(-2)+1\times2}{1^2+(-1)^2+(-2)^2+2^2} = \frac{1}{10}$

គេបាន $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0-5+1 \\ 10-5-1 \\ 10-0-2 \\ 10-0+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{4}{10}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{2}{5}\varepsilon_3'$$

ដែល $\varepsilon_3' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(ε_3 និង ε_3' កូលីនេអ៊ែរគ្នា ហើយ $\varepsilon_3 \perp \varepsilon_1$ និង $\varepsilon_3 \perp \varepsilon_2'$ ដូចនេះ $\varepsilon_3' \perp \varepsilon_1$ និង $\varepsilon_3' \perp \varepsilon_2'$)

ដូច្នេះ $(\varepsilon_1, \varepsilon_2', \varepsilon_3')$ ជាគោលអរតូកូណាល់មួយនៃ F ដែល

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_3' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

គេទាញបាន (e_1, e_2, e_3) ជាគោលអរតូណរមេមួយនៃ F ដែល

$$e_1 = \frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2+0^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \frac{\varepsilon_2'}{\|\varepsilon_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-2)^2+2^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$e_3 = \frac{\varepsilon_3'}{\|\varepsilon_3'\|} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2+3^2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ជំពូកទី៣ ដេទែមីណង់

៣.១ សេចក្តីផ្តើមនៃដេទែមីណង់

ម៉ាទ្រីសការេ $n\times n$, $A=\left[a_{ij}\right]$ ត្រូវបានកំណត់ដោយស្កាលែពិសេសមួយ ហៅថា ដេទែមីណង់នៃ A កំណត់សរសេរដោយ $\det(A)$ រឺ $|A|$ រឺ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

៣.១.១.ដេទែមីណង់លំដាប់1 និង2

ដេទែមីណង់លំដាប់1 និង2 ត្រូវបានកំណត់ដូចខាងក្រោម៖

$$|a_{11}| = a_{11} \text{ និង } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

ដូច្នេះ ដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីស1×1 $A=[a_{11}]$ គឺស្កាលែ a_{11} នោះគេបាន $\det(A)=|a_{11}|=a_{11}$ ។ ដេទែមីណង់លំដាប់2 ងាយស្រួលចំណាំដោយប្រើដ្យាក្រាមខាងក្រោម៖

$${}^{+}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}^{-}$$

គេបាន ដេទែមីណង់ស្មើនឹងផលគុណនៃធាតុវិជ្ជមានតាមតារាង និងផលគុណនៃធាតុអវិជ្ជមានតាមតារាង (មានដ្យាក្រាមស្រដៀងសម្រាប់ដេទែមីណង់លំដាប់3 ប៉ុន្តែមិនសម្រាប់ដេទែមីណង់លំដាប់ខ្ពស់ជាងនេះ) ។

ឧទាហរណ៍1

ដេទែមីណង់លំដាប់1 គឺស្កាលែខ្លួនវាផ្ទាល់។ យើងមាន

$$\det(27)=27,\quad \det(-7)=-7,\quad \det(t-3)=t-3$$

a) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 5(6)-3(4)=30-12=18,\quad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} = 3(7)-2(-5)=21+10=31$

ឧទាហរណ៍2

ដោះស្រាយដេទែមីណង់ សម្រាប់ប្រព័ន្ធ $\begin{cases} 4x-3y=15 \\ 2x+5y=1 \end{cases}$

ដំបូងរកដេទែមីណង់ D នៃម៉ាទ្រីសមេគុណ

$$D=\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4(5)-(-3)(2)=20+6=26$$

ដោយ $D\neq 0$ ប្រព័ន្ធមានចម្លើយតែមួយគត់។ កំណត់យកភាគយក N_x និង N_y ដែលជំនួសយ៉ាងសាមញ្ញនៅក្នុងម៉ាទ្រីសមេគុណ មេគុណនៃ x និង y ដោយតួចំនួនថេរនោះគេបានដេទែមីណង់រៀងៗខ្លួន

$$N_x=\begin{vmatrix}15 & -3\\ 1 & 5\end{vmatrix}=75+3=78 \qquad N_y=\begin{vmatrix}4 & 15\\ 2 & 1\end{vmatrix}=4-30=-26$$

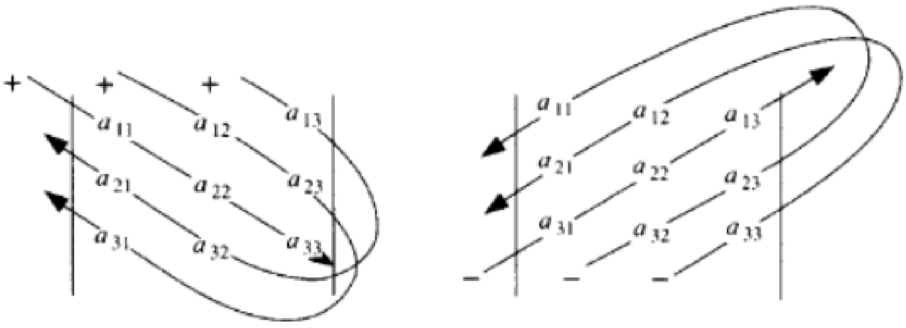
គេបាន ចម្លើយតែមួយគត់នៃប្រព័ន្ធគឺ

$$x=\frac{N_x}{D}=\frac{78}{26}=3, \quad y=\frac{N_y}{D}=\frac{-26}{26}=-1$$

៣.១.២. ដេទែមីណង់លំដាប់ ៣

ពិនិត្យលើម៉ាទ្រីស 3×3 $A=\left[a_{ij}\right]$ ។ ដេទែមីណង់នៃ A ត្រូវបានកំនត់ដូចខាងក្រោម៖

$$\det(A)=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{32}a_{21}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{12}a_{21}$$



ឧទាហរណ៍ 3 តាង $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 5 & -2\\ 1 & -3 & 4\end{bmatrix}$ និង $B=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ -4 & 5 & -1\\ 2 & -3 & 4\end{bmatrix}$ ។ រក $\det(A)$ និង $\det(B)$

ប្រើប្រាស់ដ្យាក្រាមក្នុងរូបខាងលើគេបាន៖

$$\det(A)=2(5)(4)+1(-2)(1)+1(-3)(0)-1(5)(1)-(-3)(-2)(2)-4(1)(0)$$
$$=40-2+0-5-12-0=21$$
$$\det(B)=60-4+12-10-9+32=81$$

៣.១.៣. ទម្រង់បំលាស់ប្តូរសម្រាប់ដេទែមីណង់លំដាប់3

ដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីស 3×3 $A=\left[a_{ij}\right]$ ត្រូវបានសរសេរឡើងវិញដូចខាងក្រោម៖

$$\det(A)=a_{11}\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right)-a_{12}\left(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}\right)+a_{13}\left(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}\right)$$
$$=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

ដែលវាគឺជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃដេទែមីណង់លំដាប់2ចំនួន3 ដែលទម្រង់មេគុណ(ប្តូរសញ្ញា)ជួរដេកទី1នៃម៉ាទ្រីស។ បន្សំលីនេអ៊ែរនេះអាចបង្ហាញក្នុងទម្រង់

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ចំណាំថា ម៉ាទ្រីស 2×2 ត្រូវបានយកដោយការលុប នៅក្នុងម៉ាទ្រីសដើម រក្សាទុកមេគុណនៃជួរដេកនិងជួរឈររបស់វា។

ឧទាហរណ៍4

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1(2-15) - 2(-4) + 3(20) = -13 + 8 + 60 = 55$$

លំហាត់

គណនាដេទែមីណង់ក្នុងលំហាត់1ដល់8ដោយប្រើកូហ្វាក់ទ័រឡើងឆ្លងកាត់ជួរដេកទី១ ។ លំហាត់1ដល់4 គណនាដេទែមីណង់ដោយប្រើកូហ្វាក់ទ័រចុះឆ្លងកាត់ជួរឈរទី២។

គណនាដេទែមីណង់ ដោយប្រើកូហ្វាក់ទ័រឡើងឆ្លងកាត់ជួរដេកទី១

1. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 3(-3-10) + 4(10) = 1$

2. $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -5(4) + 1(16+6) = 2$

3. $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -18 - 20 + 33 = -5$

4. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 - 3 + 25 = 20$

5. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 10 + 3 - 16 = -3$

6. $\begin{vmatrix}5 & -2 & 4\\ 0 & 3 & 5\\ 2 & -4 & 7\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}3 & 5\\ -4 & 7\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}0 & 5\\ 2 & 7\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}0 & 3\\ 2 & -4\end{vmatrix}=205+20-24=201$

7. $\begin{vmatrix}4 & 3 & 0\\ 6 & 5 & 2\\ 9 & 7 & 3\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}5 & 2\\ 7 & 3\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}6 & 2\\ 9 & 3\end{vmatrix}=4$

8. $\begin{vmatrix}8 & 1 & 6\\ 4 & 0 & 3\\ 3 & -2 & 5\end{vmatrix}=8\begin{vmatrix}0 & 3\\ -2 & 5\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}4 & 3\\ 3 & 5\end{vmatrix}+6\begin{vmatrix}4 & 0\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-48-29-48=-125$

គណនាដេទែមីណង់ដោយប្រើកូហ្វាក់ទ័រចុះឆ្លងកាត់ជួរឈរទី២

1. $\begin{vmatrix}3 & 0 & 4\\ 2 & 3 & 2\\ 0 & 5 & -1\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}3 & 4\\ 0 & -1\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-9+10=1$

2. $\begin{vmatrix}0 & 5 & 1\\ 4 & 3 & 0\\ 2 & 4 & 1\end{vmatrix}=-5\begin{vmatrix}4 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}0 & 1\\ 4 & 0\end{vmatrix}=-20+6+16=2$

3. $\begin{vmatrix}2 & -4 & 3\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & 4 & -1\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-20-5+20=-5$

$\begin{vmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 4 & 2\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 5\\ 3 & 2\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-3-13+36=20$

ម៉ាទ្រីស 2×2 គឺមានម៉ាទ្រីសច្រាសហើយប្រសិនបើមានដេទែមីណង់របស់វា គឺមិនសូន្យ។ ដើម្បីបង្កើនចំណេះដឹងផ្នែកម៉ាទ្រីសឱ្យបានទូលំទូលាយ យើងត្រូវការនិយមន័យមួយសម្រាប់ដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីស $n\times n$ ។ យើងអាចរកឃើញសម្រាប់និយមន័យករណី 3×3 អ្វីដែលបានកើតឡើងនៅពេលម៉ាទ្រីស A 3×3 បញ្ច្រាស គឺបានសម្រួលជួរ។

ពិចារណា $A=\left[a_{ij}\right]$ ដែល $a_{11}\neq 0$ ។ ប្រសិនបើយើងគុណជួរទី២ និង ជួរទី៣ នៃ A ដោយ a_{11} បន្ទាប់មកធ្វើផលដកមេគុណសមស្របនៃជួរដំបូងពី ២ជួរដទៃទៀតយើងឃើញថា A ជាជួរស្មើនឹងម៉ាទ្រីសពីរបន្តបន្ទាប់៖

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{11}a_{21} & a_{12}a_{22} & a_{13}a_{23}\\ a_{11}a_{31} & a_{11}a_{32} & a_{11}a_{33}\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21}\\ 0 & a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}\end{bmatrix}\qquad(1)$$

ដោយហេតុថា A មិនអាចបញ្ច្រាសទាំងម៉ាទ្រីសកំណត់ $(2,2)$ ឬ $(3,2)$ នៅខាងស្តាំក្នុង (1) គឺមិនសូន្យ។ (បើមិនដូច្នេះទេ យើងអាចធ្វើការផ្លាស់ប្តូរជួរដេកមុន និងគណនា)។ ដោយគុណជួរទី៣ ដោយ $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ បន្ទាប់មកជួរទី៣ បន្ថែមថ្មី $-(a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31})$ ដងនៃជួរទី២។ នេះនឹងបង្ហាញថា៖

$$A \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21} \\ 0 & 0 & a_{11}\Delta \end{bmatrix}$$

ដែល៖ $\Delta = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$ (2)

ដោយហេតុថា A អាចបញ្ច្រាស Δ ត្រូវតែមិនសូន្យ។ វាមានភាពផ្ទុយផងដែរ ដូចដែរយើងបានឃើញក្នុងផ្នែក 3.2 ។ យើងហៅថា Δ ក្នុងសមីការ (2) ថា វាជាដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីស A 3×3។ រំលឹកថាដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីស 2×2, $A=\left[a_{ij}\right]$ ជាចំនួន។

តាង $A=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

សម្រាប់ម៉ាទ្រីស 1×1 យើងឃើញថា $A=\left[a_{11}\right]$ យើងកំណត់ដេទែមីណង់ $A=a_{11}$ ។ ដើម្បីឱ្យនិយមន័យជាទូទៅនៃដេទែមីណង់មានម៉ាទ្រីសច្រើន យើងនឹងប្រើដេទែមីណង់ 2×2 ដើម្បីសរសេរឡើងវិញដេទែមីណង់ 3×3 Δ ដែលបានរៀបរាប់ខាងលើ។ ចាប់ពីតួច្រើនក្នុង Δ អាចធ្វើជាក្រុមដូចជា៖

$$(a_{11}\,a_{22}\,a_{33}-a_{11}\,a_{23}\,a_{32})-(a_{12}\,a_{21}\,a_{33}-a_{12}\,a_{23}\,a_{31})+(a_{13}\,a_{21}\,a_{32}-a_{13}\,a_{22}\,a_{31})$$

$$\Delta = a_{11}.\ \det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12}.\ \det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13}.\ \det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

ដោយសរសេរយ៉ាងងាយ៖

$$\Delta = a_{11}.\ \det A_{11} - a_{12}.\ \det A_{12} + a_{13}.\ \det A_{13} \qquad (3)$$

ដែល $A_{11}, A_{12} \,\&\, A_{13}$ គឺទទួលបានពី A ដែលលុបជួរទី1 និងជួរឈរទី1 ក្នុងចំណោមជួរទាំង ៣ ។ សម្រាប់ម៉ាទ្រីសការេ A តាង A_{ij} ជាសញ្ញានៃទម្រង់ម៉ាទ្រីសដោយលុបជួរទី $i \,\&\, j$ ចំពោះជួរឈរ A ។

សម្រាប់ឧទាហរណ៍ ប្រសិនបើ៖ $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

នោះ A_{32} គឺចង្អុលបង្ហាញដោយលុបជួរទី៣ និងជួរទី២

ហេតុនេះហើយគេបាន៖ $A_{32}=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

ដែលយើងអាចផ្តល់និយមន័យជំនួយនៃដេទែមីណង់ពេល $n=3$ ដែល ដេទែមីណង់ A ត្រូវបានកំណត់ ដោយប្រើប្រាស់ដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីសរង A_{ij} 2×2 ដូចក្នុងទី (3) ខាងលើ។ នៅពេល $n=4$ ដែលដេទែមីណង់ A ប្រើដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីសរង A_{ij} 3×3 ។

ជាទូទៅ ដេទែមីណង់ $n\times n$ គឺត្រូវបានកំណត់ដោយដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីសរង $(n-1)\times(n-1)$ ។

និយមន័យ៖

សម្រាប់ $n\geq 2$ ដេទែមីណង់ $n\times n$ គឺ $A=[a_{ij}]$ ដែលជាផលបូក n តួរនៃ $\pm a_{ij}$ ដេទែមីណង់ A_{ij} ដោយបូកនឹងដកសញ្ញាខុសគ្នាដែលកំណត់ $a_{11},a_{12},...,a_n$ គឺមកពីជួរដំបូងនៃ A ។ ជានិមិត្តសញ្ញា

$$\det A=a_{11}\det \mathrm{A}_{11}-a_{12}\det \mathrm{A}_{12}+...+(-1)^{1+n}a_n\det a_n \;=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det A_{1j}$$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១ គណនាដេទែមីណង់នៃ៖

$$A=\begin{bmatrix}1 & 5 & 0\\ 2 & 4 & -1\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាដែល $A=a_{11}\det A_{11}-a_{12}\det A_{12}+a_{13}\det A_{13}$

$$\det A=1\cdot\det\begin{bmatrix}4 & -1\\ -2 & 0\end{bmatrix}-5\cdot\det\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}+0\cdot\det\begin{bmatrix}2 & 4\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

$$=1(0-2)-5(0-0)+0(-4-0)=-2$$

ការកំណត់សម្គាល់រួមគ្នាដទៃទៀតសម្រាប់ដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីសប្រើជាគូរនៃបន្ទាត់ឈរនៃវង់ក្រចក។

ដូច្នេះ គណនាក្នុងឧទាហរណ៍អាចកំណត់សរសេរជា៖

$$\det A=1\begin{bmatrix}4 & -1\\ -2 & 0\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}2 & 4\\ 0 & -2\end{bmatrix}=...=-2$$

ដើម្បីចូលទ្រឹស្តីបន្ទាប់វា គឺស្រដៀងគ្នាដើម្បីសរសេរនិយមន័យនៃដេទែមីណង់ A ក្នុងទម្រង់ខុសគ្នាយ៉ាងច្បាស់។ គេឲ្យ $A=[a_{ij}],(i,j)$ ជាកត្តានៃស្វ័យគុណគឺជាចំនួន C_{ij} សរសេរដោយ៖

$$C_{ij}=(-1)^{i+j}\det A_{ij} \text{ នោះ } \det A=a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}+...+a_{1n}C_{1n} \qquad (4)$$

នោះ $\det A=a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}+......+a_{1n}C_{1n}$

រូបមន្តនេះ គឺត្រូវបានគេហៅថា ជាការពន្លាតជួរដំបូងនៃកត្តាស្វ័យគុណនៃ A ។ យើងមិនបញ្ចូលដំណោះស្រាយស្របតាមទ្រឹស្តីមូលដ្ឋាន ដើម្បីចៀសវាងការចាកប្រធានឆ្ងាយ។

ទ្រឹស្តីបទទី១ ៖

ដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីស $A: n\times n$ ត្រូវបានគណនាដោយ កូហ្វាក់ទ័រ ឬសញ្ញាមីណ័រពន្លាតជួរឈរជួរដេកណាមួយ។ ការពន្លាតឆ្លងកាត់ជួរទី i ដោយប្រើប្រាស់សញ្ញាមីណ័រក្នុង (4) គឺ៖

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$$

ការពន្លាតសញ្ញាមីណ័រជួរដេកទី j ជួរឈរគឺ៖

$$\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj}$$ ។

ការបូក ឬដកក្នុងសញ្ញាកូហ្វាក់ទ័រ (i, j) អាស្រ័យលើវិចទ័រទីតាំងនៃ a_{ij} នៅក្នុងម៉ាទ្រីសដោយមិនគិតពីសញ្ញានៃ a_{ij} ខ្លួនឯង កត្តា $(-1)^{i+j}$ កំណត់ដោយលំនាំផ្ទាំងនៃសញ្ញា៖

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \\ + & - & + & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}$$

ឧទាហរណ៍ទី២ ប្រើប្រាស់ការពន្លាតសញ្ញាមីណ័រនៅជួរទី៣ដើម្បីកំណត់សញ្ញាដេទែមីណង់ A ដែល៖

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

ដំណោះស្រាយ គណនា

$$\begin{aligned} \det A &= a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} \\ &= (-1)^{3+1} a_{31} \det A_{31} + (-1)^{3+2} a_{32} \det A_{32} + (-1)^{3+3} a_{33} \det A_{33} \\ &= 0\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 0 + 2(-1) + 0 = -2 \end{aligned}$$

ទ្រឹស្តីបទទី១ ការសម្រួលក្នុងការគណនាដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីសដែលមានសូន្យច្រើន។ ក្នុងឧទាហរណ៍ ប្រសិនបើជួរមួយស្មើសូន្យទាំងអស់ នោះការពន្លាតសញ្ញាមីណ័រនៅក្នុងជួរដែលមានតួរច្រើនជាលេខសូន្យ ហើយសញ្ញាមីណ័រក្នុងតួរទាំងនោះមិនចាំបាច់ក្នុងការគណនាទេ។ ការដោះស្រាយដូចគ្នាជាមួយនឹងជួរឈរដែលដែលមានលេខសូន្យច្រើន។

ឧទាហរណ៍ទី៣ គណនាដេទែមីណង់ A ដែល

$$A=\begin{bmatrix}3 & -7 & 8 & 9 & -6\\ 0 & 2 & -5 & 7 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

ដំណោះស្រាយ ការពន្លាតសញ្ញាមីណ័រជួរឈរទី១ នៃ A មានតួជាច្រើនដែលមានតម្លៃសូន្យច្រើន លើកលែងតួដំបូង។

ដូចនេះ $$\det A=3\cdot\begin{vmatrix}2 & -5 & 7 & 3\\ 0 & 1 & -5 & 0\\ 0 & 2 & 4 & -1\\ 0 & 0 & -2 & 0\end{vmatrix}-0\cdot C_{21}+0\cdot C_{31}+0\cdot C_{41}+0\cdot C_{51}$$

ចាប់ពីនេះទៅ យើងនឹងមិននិយាយពីតួលេខសូន្យច្រើន ក្នុងការពន្លាតសញ្ញាមីណ័រទៀតទេ បន្ទាប់ពន្លាតដេទែមីណង់ 4×4 នេះនៅជួរឈរទី១ ដើម្បីឱ្យចំណេញលេខសូន្យយើងមាន៖

$$\det A=3\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}1 & 5 & 0\\ 2 & 4 & -1\\ 0 & -2 & 0\end{vmatrix}$$

ដេទែមីណង់ 3×3 នេះត្រូវបានគណនាក្នុងឧទាហរណ៍១ នឹងរកឃើញចម្លើយស្មើនឹង -2 ហេតុនេះ ហើយដេទែមីណង់ $A=3\cdot 2\cdot(-2)=-12$ ។

ម៉ាទ្រីសនៅក្នុងឧទាហរណ៍៣ ស្មើតែមានរាងជាត្រីកោណ។ វិធីនៅក្នុងឧទាហរណ៍នេះគឺងាយស្រួលក្នុងការយកលំនាំដើម្បីស្រាយទៅតាមទ្រឹស្តី។

ទ្រឹស្តីបទទី២ ៖

ប្រសិនបើ A ជាម៉ាទ្រីសដែលមានរាងជាត្រីកោណ នោះដេទែមីណង់ A ជាផលគុណដែលកំណត់លើម៉ាទ្រីសទ្រូងនៃ A ។

វិធីសាស្ត្រនៅក្នុងឧទាហរណ៍ទី៣ ដែលមានលេខសូន្យច្រើនប្រព្រឹត្តទៅបានល្អនៅពេលជួរទាំងមូល ឬជួរឈរជាលេខសូន្យច្រើន ក្នុងករណីនេះការពន្លាតសសញ្ញាមីណ័រនៅតាមជួរឈរជាផលបូកនៃលេខសូន្យទាំងនោះ ដូចនេះហើយដេទែមីណង់ គឺមានតម្លៃសូន្យប៉ុន្តែការពន្លាតសញ្ញាមីណ័រភាគច្រើន គឺមិនអាចគណនាបានយ៉ាងងាយស្រួល។

កំណត់សំគាល់៖

យោងតាមស្តង់ដារសព្វថ្ងៃម៉ាទ្រីស 25×25 គឺតូច។ នៅតែមិនអាចធ្វើការគណនាដេទែមីណង់ 25×25 ដោយការពន្លាតសញ្ញាមីណ័រ។ ជាទូទៅ ការពន្លាតសញ្ញាមីណ័រមួយទាមទារមានផលគុណច្រើនជាង $n!$ ហើយ $25!$ គឺមានតម្លៃប្រហែល 1.5×10^{25} ។

ប្រសិនបើកុំព្យូទ័រនោះអាចដោះស្រាយផលគុណបានរាប់កោដិមួយរយៈពេលខ្លី វានឹងអាចទៅតូចជាង $500,000$ ឆ្នាំដើម្បីគណនាដេទែមីណង់ 25×25 ដោយវិធីនេះ។ បើសំណាងល្អ វានឹងមានវិធីលឿនជាងនេះដែលយើងនឹងរកឃើញឆាប់ៗ។

លំហាត់ពី $19-38$ បង្ហាញពីលក្ខណៈសម្បត្តិនៃដេទែមីណង់ ភាគច្រើនជាករណី 2×2 ។ លទ្ធផលពីលំហាត់ $33-36$ នឹងប្រើប្រាស់ចំណុចបន្ទាប់ ដើម្បីទាញយកលក្ខណៈសម្បត្តិស្រដៀងគ្នាសម្រាប់ម៉ាទ្រីស $n\times n$ ។

អនុវត្តលំហាត់៖

គណនា $\begin{vmatrix} 5 & -7 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \\ -4 & -8 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & -6 \end{vmatrix}$

លក្ខណសម្បត្តិនៃលេខសូន្យច្រើន។ ចាប់ផ្តើមដោយការពន្លាតសញ្ញាមីណ័រនៅជួរឈរទី៣ ដើម្បីទាក់ទង់ម៉ាទ្រីស 3×3 ដែលត្រូវបានគណនាដោយការពន្លាតជួរឈរមួយរបស់វា។

$$\begin{vmatrix} 5 & -7 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \\ -4 & -8 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & -6 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}2\begin{vmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -5 & -8 & 3 \\ 0 & 5 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= 2\cdot(-1)^{2+1}(-5)\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 20$$

$(-1)^{2+1}$ បន្ទាប់នូវការគណនាចុងក្រោយពីចំណុច $(2,1)$ នៃតម្លៃ -5 ក្នុងដេទែមីណង់ 3×3 ។

លំហាត់

ក្នុងលំហាត់1-8ចូរគណនាតម្លៃដេទែមីណង់ដោយប្រើកន្សោមហ្វាក់ទ័រនៃជួរដេកទី១។ហើយក្នុងលំហាត់ 1-4 ក៏អាចគណនាតម្លៃដេទែមីណង់ដោយប្រើកន្សោមហ្វាក់ទ័រនៃជួរឈរទី២ផងដែរ។

1. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$ 4. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \\ 2 & -4 & 7 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 7 & 3 \end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$

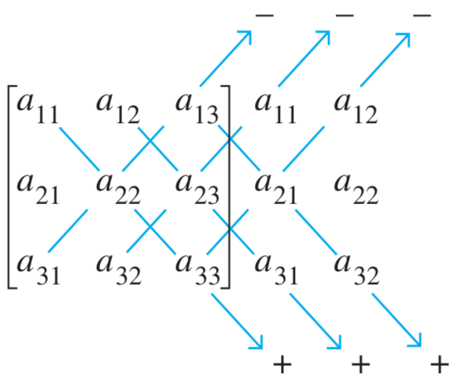
ក្នុងលំហាត់9-14 ចូរគណនាតម្លៃដេទែមីណង់ដោយប្រើកន្សោមហ្វាក់ទ័រ ។ហើយក៏អាចគណនាតម្លៃដេទែមីណង់ដោយប្រើកន្សោមហ្វាក់ទ័រនៃជួរឈរឬជួរដេក មានភាពងាយស្រួលក្នុងការគណនា។

9. $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}$ 10. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & -7 & 5 \\ 5 & 0 & 4 & 4 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -8 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ 12. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 0 \\ 5 & -8 & 4 & -3 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & -6 & 4 & -8 \\ 5 & 0 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ 14. $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 9 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 8 & -5 & 6 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

សម្រាប់កាគណនាដេទែមីណង់លំដាប់3×3 យើងអាចធ្វើការគណនា ដោយលើកជួរឈរទី១និងជួរឈរទី២ ដាក់ខាងស្តាំកន្សោមដេទែមីណង់ រួចហើយគុណអង្កត់ទ្រូងទាំង6 ដូចរូបខាងក្រោម៖



ចំពោះផលគុណអង្កត់ទ្រូងចុះមកក្រោមមានសញ្ញាវិជ្ជមាន ចំណែកផលគុណអង្កត់ទ្រូងឡើងលើមានសញ្ញាអវិជ្ជមាន។ ក្នុងលំហាត់ 15-18 ចូរគណនាដេទែមីណង់តាមវិធានខាងលើ។

ចំណាំ៖ របៀបខាងលើមិនអាចអនុវត្តបានជាទូទៅក្នុងការគណនាដេទែមីណង់លំដាប់ 4×4 បានទេ!

15. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ 16. $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$ 18. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

ក្នុងលំហាត់ 19-24 ចូរបង្ហាញពីឥទ្ធិពលប្រមាណវិធីជួរដេកលើតម្លៃដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីស។ តាមករណីលំហាត់ខាងក្រោម បង្ហាញពីឥទ្ធិពលប្រមាណវិធីជួរដេកលើតម្លៃដេទែមីណង់។

19. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$ 20. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & b \\ kc & kd \end{vmatrix}$

21. $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5+3k & 6+4k \end{vmatrix}$ 22. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix}$

23. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 8 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} k & k & k \\ -3 & 8 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

24. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 2 & 2 \\ 6 & 5 & 6 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ a & b & c \\ 6 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

ក្នុងលំហាត់25-30 ចូរគណនាតម្លៃដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីសបឋម

25. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix}$ 26. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{vmatrix}$

27. $\begin{vmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 28. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

29. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 30. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

៣.២ លក្ខណៈទូទៅនៃដេទែមីណង់

ភាពអាច់កំបាំងនៃដេទែមីណង់គឺការបទបែប ផ្លាស់ប្តូរទៅករបៀបគណនា នៅពេលប្រមាណវិធីត្រូវបានគណនា។ ផ្អែកតាមទ្រឹស្តីជាទូទៅនៃលទ្ធផលលំហាត់ $19-24$ ក្នុងចំណុច 3.1 ។ ដំណោះស្រាយ គឺស្ថិតនៅចុងបញ្ចប់នៃលំហាត់ចំណុចនោះ។

ទ្រឹស្តីបទ ៖
ប្រមាណវិធីនៃជួរក្នុងដេទែមីណង់
តាង A ជាម៉ាទ្រីសការេ៖
a. ប្រសិនបើមានផលគុណនៅក្នុងជួរមួយនៃ A ត្រូវបានបន្ថែមទៅជួរមួយទៀត ដើម្បីបង្កើតបានជាម៉ាទ្រីស B នោះ ដេទែមីណង់ B ស្មើដេទែមីណង់ A ។
b. ប្រសិនបើជួរពីរនៃ A គឺត្រូវបានប្តូរគ្នាដើម្បីបង្កើត B នោះដេទែមីណង់ B ផ្ទុយពីដេទែមីណង់ A ។
c. ប្រសិនបើជួរមួយនៃ A ត្រូវបានគុណដោយ K បង្កើត B នោះដេទែមីណង់ B ស្មើផលគុណ K រវាងដេទែមីណង់ A ។ ដោយផ្អែកតាមឧទាហរណ៍ គេបានបង្ហាញពីរបៀបប្រើប្រាស់ទ្រឹស្តីបទទី៣ ដើម្បីដោះស្រាយដេទែមីណង់ឱ្យមានប្រសិទ្ធភាព។

ដោយផ្អែកទៅលើឧទាហរណ៍ បានបង្ហាញពីរបៀបប្រើប្រាស់ទ្រឹស្តីបទទី៣ ដើម្បីដោះស្រាយដេទែមីណង់ឱ្យមានប្រសិទ្ធភាព។

ទ្រឹស្តីបទ៨.១ ដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីស A ហើយស្មើនឹងត្រង់ស្ប៉ូ A^T របស់វា គេបាន $|A|=|A^T|$ ។

ឧទាហរណ៍៖ គណនា $\det(A)$ $A=\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 8 & -9 \\ 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 8 & -9 \\ 1 & 7 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{3+1}(-1)\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 8 & -9 \end{vmatrix}+(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -9 \end{vmatrix}$$

$$=-(36-16)-7(-9+4)=-20+35=15$$

$$|A^T|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -4 & 8 & 7 \\ 2 & -9 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{1+3}(-1)\begin{vmatrix} -4 & 8 \\ 2 & -9 \end{vmatrix}+(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -9 \end{vmatrix}$$

$$-(36-16)-7(-9+4)=-20+35=15$$

ទ្រឹស្តីបទ ៨.២ A ជាម៉ាទ្រីសការេ

(i) បើ A មានជួរដេក(ជួរឈរ)ណាមួយសូន្យ នោះ $|A| = 0$

(ii) បើ A មានជួរដេក(ជួរឈរ)ណាមួយដូចគ្នា នោះ $|A| = 0$

(iii) បើ A ជាម៉ាទ្រីសត្រីកោណ(មានន័យថា A មានធាតុក្រោមអង្កត់ទ្រូងសូន្យឬធាតុលើអង្កត់ទ្រូង) នោះ $|A|$ ស្មើនឹងផលគុណនៃធាតុអង្កត់ទ្រូង ។ ដូច្នេះ $|I| = 1$ ដែល I ជាម៉ាទ្រីសឯកតា។

ឧទាហរណ៍១ គណនាដេទែមីណង់ A ដែល $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -2 & 8 & -9 \\ -1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$

ដំណោះស្រាយ

វិធីសាស្ត្រដើម្បីទម្រង់ថយនៃ A ជាជាន់ និងប្រើប្រាស់កត្តាហើយនឹងដេទែមីណង់ និងម៉ាទ្រីសដែលមានរាងដូចត្រីកោណ គឺជាការកំណត់អង្កត់ទ្រូង។ ការជំនួសជួរពីដំបូងក្នុងជួរឈរទី១ គឺមិនផ្លាស់ប្តូរដេទែមីណង់ទេ។

$$\det A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -2 & 8 & -9 \\ -1 & 7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ -1 & 7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

ការផ្លាស់ប្តូរជួរទី២ និងជួរទី៣ ផ្ទុយទៅនឹងសញ្ញាដេទែមីណង់នោះ៖

$$\det A = -\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} = -(1)(3)(-5) = 15$$

ការប្រើប្រាស់រួមគ្នានៃទ្រឹស្តី $3(C)$ ក្នុងការគណនាដោយផ្ទាល់ គឺជាការរកកត្តាផលគុណមួយរួមគ្នានៃជួរមួយនៃម៉ាទ្រីស។ សម្រាប់ឧទាហរណ៍៖

$$\begin{vmatrix} * & * & * \\ 5k & -2k & 3k \\ * & * & * \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} * & * & * \\ 5 & -2 & 3 \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

ការកំណត់ប្រើប្រាស់លេខខុសគ្នា គឺមិនប្តូរដើម្បីយើងប្រើវិធីនេះក្នុងឧទាហរណ៍បន្ទាប់។

ឧទាហរណ៍២ គណនាដេទែមីណង់ A ដែល $A = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 6 & 8 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

ដំណោះស្រាយ

ដើម្បីគណនានព្វន្ត យើងចង់ឱ្យជ្រុងខាងលើផ្នែកខាងឆ្វេងនៃជួរមួយ។ យើងអាចផ្លាស់ប្តូរជួរ១ ហើយនឹង៤ ។ ជំនួសមកវិញយើងយកកត្តាពីរចេញពីជួរលើបន្ទាប់មកទៅជួរដែលជំនួសនៅក្នុងជួរឈរទី១។

$$\det A = 2\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & -12 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

បន្ទាប់មកយើងអាចយកកត្តាពីរផ្សេងគ្នាទៀតមកពីជួរទី៣ ឬប្រើជួរទី៣ នៅក្នុងជួរឈរទី២ ធ្វើជាស្នូល។ យើងជ្រើសរើសប្រមាណវិធីទី២ ដែលបន្ថែម៤ដងនៃជួរទី២ ទៅជួរទី៣ ។

$$\det A = 2\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

ចុងក្រោយបន្ថែម $-\frac{1}{2}$ ដងនៃជួរទី 3 ទៅជួរទី 4 ហើយគណនាដេទែមីណង់នេះ ជារាងត្រីកោណ យើងឃើញថា៖

$$A = 2\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} = 2\cdot(1)(3)(-6)(1) = -36$$

$$U = \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{bmatrix}$$

សន្និដ្ឋានមានម៉ាទ្រីសការេ A មានទម្រង់ថយជាជាន់ U ដោយជំនួយ និងផ្លាស់ប្តូជួរ។ ប្រសិនបើមានការផ្លាស់ប្តូរ r នោះទ្រឹស្តីបទទី៣ $\det A = (-1)^r \det U$

$$U = \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{bmatrix}$$ នៅពេល U ស្ថិតក្នុងទម្រង់ជាជាន់វាមានរាងដូចត្រីកោណ ដូចនេះដេទែមីណង់ $\det U = 0$ U គឺជាតម្លៃនៃអង្គត់ទ្រូង $U_{11},...,U_{nn}$ ប្រសិនបើ A គឺបញ្ច្រាស ការកំណត់ U_{ii} គឺស្ថិតនៅជុំវិញទាំងអស់ពីព្រោះ $A \sim I_n$ ហើយនិង U_{ii} មិនត្រូវបានកំណត់ទំហំ ទៅកាន់លេខ១ ម្យ៉ាងទៀតយ៉ាងហោចណាស់ U_{nn} គឺសូន្យហើយតម្លៃ $U_{11},...,U_{nn}$ គឺសូន្យ។ មើលចំណុចលេខ១។

ដូចនេះ $\det A = \begin{cases} (-1)^r \\ 0 \end{cases}$

វាគួរឱ្យចាប់អារម្មណ៍ដើម្បីកំណត់ថា ទោះបីជាទម្រង់ជួរនៃពិពណ៌នាខាងលើ គឺមិនមានតែមួយទេ ពីព្រោះវាមិនបានបន្ថយជួរយ៉ាងពេញលេញ ហើយនៅជុំវិញ គឺមិនតែមួយ លទ្ធផលដែលនៅជុំវិញគឺមានតែមួយលើកលែងមានសញ្ញាដក។ រូបមន្ត (1) មិនត្រឹមតែផ្តល់ការបកស្រាយជាក់ស្តែងនៃដេទែមីណង់ A ប៉ុណ្ណោះទេ ថែមទាំងផ្តល់ទ្រឹស្តីបទក្នុងចំណុចនេះ។

ទ្រឹស្តីបទទី៤ ៖
ម៉ាទ្រីសនៃការេ A មួយអាចបញ្ច្រាស ប្រសិនបើមិនដូច្នោះទេដេទែមីណង់ $A\neq 0$ ។

ទ្រឹស្តីបទទី៤ បន្ថែមករណីដេទែមីណង់ $A\neq 0$ ដើម្បីបញ្ចូលសទ្រឹស្តីបទម៉ាទ្រីស។ សារៈសំខាន់នៃកូរ៉ូលែគឺថា ដេទែមីណង់ $A=0$ នៅពេលជួរឈរនៃ A អាស្រ័យលើលីនេអ៊ែរ បន្ថែមពីនេះដេទែមីណង់ $A=0$ នៅពេលជួរជាច្រើននៃ A គឺអាស្រ័យលើលីនេអ៊ែរ ជួរជាច្រើននៃ A គឺជាជួរនៃ A^T ជួរឈរអាស្រ័យលីនេអ៊ែរនៃ A^T ធ្វើឱ្យ A^T ទោលដូចនេះគឺ A បញ្ចៀសទ្រឹស្តីបទម៉ាទ្រីស។ ក្នុងការអនុវត្តន៍អាស្រ័យលើលីនេអ៊ែរជាក់ស្តែងនៅជួរឈរទី២ ឬជួរពីរដូចគ្នាឬក៏ជួរឈរមួយឬជួរមួយ គឺសូន្យ។

ឧទាហរណ៍ គណនាដេទែមីណង់ A ដែល $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ -6 & 7 & -7 & 4 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

ដំណោះស្រាយ បន្ថែម 2 ដងជួរទី១ ទៅជួរទី៣ ដើម្បីទទួលបាន

$$\det A=\det\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ -6 & 7 & -7 & 4 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{bmatrix}=0$$

ពីព្រោះ ជួរទី២ និងជួរទី៣ នៃម៉ាទ្រីសទី២ ស្មើគ្នា

កំណត់ចំណាំ

១. កម្មវិធីកុំព្យូទ័រភាគច្រើនដែលអាចគណនាដេទែមីណង់ A ។ សម្រាប់ម៉ាទ្រីសទូទៅនៃ A ដោយប្រើប្រាស់ទ្រឹស្តីនៃរូបមន្ត (1) ខាងលើ។

២. វាអាចបង្ហាញពីការវាយតម្លៃនៃដេទែមីណង់ $n\times n$ ដោយប្រើប្រាស់ប្រមាណវិធីជួរទាមទាប្រហែល $\frac{2n^3}{3}$ ប្រមាណវិធីនព្វន្ត។ បណ្តាកុំព្យូទ័រទំនើបទាំងឡាយអាចគណនាដេទែមីណង់ 25×25 ក្នុងផ្នែកមួយដោយប្រើរយៈពេលខ្លី។ វាទាមទាប្រហែល ១០,០០០ ប្រមាណវិធី។

កុំព្យូទ័រជាច្រើនអាចថែមទាំងដោះស្រាយយ៉ាងទូលាយពីម៉ាទ្រីស "ដែលជាតុភាគច្រើន គឺសូន្យ" ជាមួយឱកាសល្អដែលវា និងថាលក្ខណៈសម្បត្តិនៃវត្តមាននៃលេខសូន្យជាច្រើន។ ពិតណាស់ ការកំណត់លេខសូន្យអាចគណនាដោយដៃយ៉ាងលឿនផងដែរ។ ការគណនាក្នុងឧទាហរណ៍ បន្ទាប់រួមបញ្ចូលទាំងឥទ្ធិពលនៃប្រមាណវិធីជួរជាមួយនឹងយុទ្ធសាស្ត្រពីចំណុច 3.1 ពីការប្រើប្រាស់ការកំណត់សូន្យក្នុងការពន្លាតកូហ្វាក់ទ័រ។

ឧទាហរណ៍៤ គណនាដេទែមីណង់នៃ A ដែល $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ -2 & -5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

ដំណោះស្រាយ វិធីដ៏ល្អដើម្បីចាប់ផ្តើមក្នុងការប្រើប្រាស់លេខ 2 ក្នុងជួរឈរលេខ 1 ជាស្នូល ដើម្បីបំបាត់ -2 ខាងក្រោមវា។ បន្ទាប់មកប្រើប្រាស់កូហ្វាក់ទ័រ ដើម្បីបន្ថយទំហំនៃដេទែមីណង់ដោយធ្វើតាមប្រមាណវិធីជំនួសជួរដេទៃទៀត។ ដូចនេះ៖

$$\det A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ -2 & -5 & 4 & -2 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

ការផ្លាស់ប្តូរជួរទី 2 និង 3 អាចបង្កើតជាដេទែមីណង់រាងត្រីកោណ។ ការដោះស្រាយដទៃទៀត គឺដើម្បីរក្សាការពន្លាតកូហ្វាក់ទ័រនៅជួរដំបូង។

$$\det A = (-2)(1)\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -2\cdot(15) = -30$$

ទ្រឹស្តីបទ ៨.៣ ឧបមាម៉ាទ្រីស B បានពីការធ្វើប្រមាណវិធីជួរដេក(ជួរឈរ)នៃជាតុរបស់ម៉ាទ្រីស A

(i) បើពីរជួរដេក(ជួរឈរ)នៃ A ប្តូរគ្នា នោះ $|B| = -|A|$

(ii) បើជួរដេក(ជួរឈរ)នៃ A ជាកត្តានៃ k ណាមួយ នោះ $|B| = k|A|$

(iii) បើផលគុណនៃជួរដេក(ជួរឈរ)នៃ A ត្រូវបានបន្ថែមដោយជួរដេក(ជួរឈរ)ផ្សេងទៀត នោះ $|B| = |A|$ ។ $\det(kA) = k^n \det(A)$ (1)

ឧទាហរណ៍១ លក្ខណៈដេទែមីណង់ $\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

ឧទាហរណ៍២ គេឱ្យ $A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 3\\ 0 & 2 & 5\\ -2 & -4 & 10\end{bmatrix}$ និង $|A|=12$ ។ គណនា $|B_1|$, $|B_2|$, $|B_3|$ ។

$$B_1=\begin{bmatrix}1 & 12 & 3\\ 0 & 6 & 5\\ -2 & -12 & 10\end{bmatrix}\Rightarrow|B_1|=3\begin{vmatrix}1 & 4 & 3\\ 0 & 2 & 5\\ -2 & -4 & 10\end{vmatrix}=3\times12=36$$

$$B_2=\begin{bmatrix}1 & 4 & 3\\ -2 & -4 & 10\\ 0 & 2 & 5\end{bmatrix}\Rightarrow|B_2|=-|A|=-12$$

$$B_3=\begin{bmatrix}1 & 4 & 3\\ 0 & 2 & 5\\ 0 & 4 & 16\end{bmatrix}\quad \text{បានមកពី}\quad \begin{bmatrix}1 & 4 & 3\\ 0 & 2 & 5\\ -2 & -4 & 10\end{bmatrix}\ 2R_1+R_3\to R_3 \qquad \Rightarrow|B|=|A|=12$$

ទ្រឹស្តីបទ ៨.៤ ដេទែមីណង់នៃផលគុណពីរម៉ាទ្រីស A និង B គឺជាផលគុណនៃដេទែមីណង់ A និងដេទែមីណង់ B គេសរសេរ $\det(AB)=\det(A)\det(B)$ ។

ទ្រឹស្តីបទខាងលើនិយាយពីផលគុណដេទែមីណង់នៃអនុគមន៍មួយ ។

ទ្រឹស្តីបទ ៨.៥ យក A ជាម៉ាទ្រីសការេ នោះគេបាន៖

(i) A មានចម្រាស ដែលចម្រាស់របស់វាគឺ A^{-1} , $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$

(ii) $AX=0$ មានចម្លើយសូន្យតែមួយគត់

(iii) ដេទែមីណង់នៃ A មិនសូន្យ ដែល $\det(A)\neq0$ ។

LEMMA 8.6 យក E ជាធាតុនៃម៉ាទ្រីសមួយ នោះគ្រប់ម៉ាទ្រីស A , $|EA|=|E||A|$ ។

ទ្រឹស្តីបទ ៨.៧ ឧបមាម៉ាទ្រីស A និង B ជាម៉ាទ្រីសដូចគ្នា នោះគេបាន $|A|=|B|$ ។

ឧទាហរណ៍១ គណនាដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}1 & -4 & 2\\ -2 & 8 & -9\\ -1 & 7 & 0\end{pmatrix}$

ចម្លើយ

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -4 & 2\\ -2 & 8 & -9\\ -1 & 7 & 0\end{vmatrix}$$

$$2R_1 + R_2 \to R_2 \sim \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \\ -1 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$R_1 + R_3 \to R_3 \sim \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \ , \ R_2 \leftrightarrow R_3 \sim \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |B| = (1)(3)(-5) = -15$$

ឧទាហរណ៍២ គណនាដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីស $A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 6 & 8 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -8 & 6 & 8 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & -12 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 2\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & -12 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 2\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & & 1 \end{vmatrix} = 2(1)(3)(-6)(1) = -36$$

ឧទាហរណ៍៣ គណនាដេទែមីណង់ $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ -6 & 7 & -7 & 4 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

ដំណោះស្រាយ

យក $2R_1 + R_3 \to R_3 \quad \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 0$

ឧទាហរណ៍៤៖ គណនាដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីស $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ -2 & -5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix}0&1&2&-1\\2&5&-7&3\\0&3&6&2\\-2&-5&4&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&2&-1\\2&5&-7&3\\0&3&6&2\\0&0&-3&1\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}1&2&-1\\3&6&2\\0&-3&1\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}1&2&-1\\0&0&5\\0&-3&1\end{vmatrix}$$

$$|A|=-2(1)\begin{vmatrix}0&5\\-3&1\end{vmatrix}=-2(1)(15)=-30$$

លំហាត់

ក្នុងលំហាត់1-4 គណនាដេទែមីណង់ដោយប្រើលក្ខណៈដេទែមីណង់

1. $\begin{vmatrix}0&5&-2\\1&-3&6\\4&-1&8\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&-3&6\\0&5&-2\\4&-1&8\end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix}2&-6&4\\3&5&-2\\1&6&3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&-3&2\\3&5&-2\\1&6&3\end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix}1&3&-4\\2&0&-3\\5&-4&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&-4\\0&-6&5\\5&-4&7\end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix}1&2&3\\0&5&-4\\3&7&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&5&-4\\0&1&-5\end{vmatrix}$

ក្នុងលំហាត់5-10 គណនាដេទែមីណង់ដោយប្រើវិធីជួរទៅជាទម្រង់ Echelon

5. $\begin{vmatrix}1&5&-6\\-1&-4&4\\-2&-7&9\end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix}1&5&-3\\3&-3&3\\2&13&-7\end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix}1&3&0&2\\-2&-5&7&4\\3&5&2&1\\1&-1&2&-3\end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix}1&3&32&-4\\0&1&2&-5\\2&5&4&-3\\-3&-7&-5&2\end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix}1&-1&-3&0\\0&1&5&4\\-1&2&8&5\\3&-1&-2&3\end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix}1&3&-1&0&-2\\0&2&-4&-1&-6\\-2&-6&2&3&9\\3&7&-3&8&-7\\3&5&5&2&7\end{vmatrix}$

ក្នុងលំហាត់11-14 គណនាដេទែមីណង់ដោយប្រើវិធីសាស្ត្រចម្រុះ

11. $\begin{vmatrix}2&5&-3&-1\\3&0&1&-3\\-6&0&-4&9\\4&10&-4&-1\end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix}-1&2&3&0\\3&4&3&0\\5&4&6&6\\4&2&4&3\end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix}2&5&4&1\\4&7&6&2\\6&-2&-4&0\\-6&7&7&0\end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix}-3&-2&1&-4\\1&3&0&-3\\-3&4&-2&8\\3&-4&0&4\end{vmatrix}$

ក្នុងលំហាត់15-20 គណនាដេទែមីណង់ដោយស្គាល់ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 7$

15. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 5g & 5h & 5i \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 5g & 5h & 5i \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & 5i \end{vmatrix}$

20. $\begin{vmatrix} a+g & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

ក្នុងលំហាត់21-23 គណនាដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីស រួចរកម៉ាទ្រីប្រាសរបស់វា

21. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & -7 & -5 & 0 \\ 3 & 8 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

ក្នុងលំហាត់24-26 ប្រើដេទែមីណង់ដើម្បីបង្ហាញថាសំណុំវ៉ិចទ័រខាងក្រោមអាស្រ័យលីនេអ៊ែរនឹងគ្នា។

24. $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$

៣.៣.ប្រមាណវិធីជួរឈរ

យើងអាចគណនាប្រមាណវិធីលើជួរឈរនៃម៉ាទ្រីសមួយ ក្នុងវិធីដែលស្រដៀងនឹងប្រមាណវិធីជួរដែលត្រូវពិចារណា។ ទ្រឹស្តីបទបន្ទាប់ដែកឲលបង្ហាញពីប្រមាណវិធីដែលមានផលដូចគ្នានឹងដេទែមីណង់ជាប្រមាណវិធីជួរ។

ទ្រឹស្តីបទ៥ ៖ ប្រសិនបើ A ជាម៉ាទ្រីស $n\times n$ នេះដេទែមីណង់ A^T ដេទែមីណង់ A ។

ទ្រឹស្តីបទនេះ គឺជាក់ស្តែងសម្រាប់ $n=1$ សន្និដ្ឋានថា ទ្រឹស្តីបទនេះពិតសម្រាប់ដេទែមីណង់ $k\times k$ ហើយតាង $n=k+1$។ បន្ទាប់មកកូហ្វាក់ទ័រនៃ a_{1j} ក្នុង A ស្មើនឹងកូហ្វាក់ទ័រ a_{j1} ក្នុង A^T ពីព្រោះកូហ្វាក់ទ័របានវិវត្តដេទែមីណង់ $k\times k$ ។ ហេតុនេះហើយ ការពន្លាតកូហ្វាក់ទ័រនៃដេទែមីណង់ A តាមជួរដំបូងស្មើនឹងការពន្លាតកូហ្វាក់ទ័រនៃដេទែមីណង់ A^T នៅជួរឈរដំបូង។ នោះ A នឹង A^T មានដេទែមីណង់ស្មើគ្នា។ ដូចនេះទ្រឹស្តីបទ គឺពិតសម្រាប់ $n=1$ ហើយតម្លៃភាពពិតនៃទ្រឹស្តីបទសម្រាប់តម្លៃមួយនៃ n កំណត់ថាពិតសម្រាប់តម្លៃ n បន្ទាប់ដែរ។ យោងទៅតាមនៃការរួមបញ្ចូលទ្រឹស្តីបទគឺគ្រប់ $n\geq 1$ ។

ពីព្រោះតែទ្រឹស្តីបទទី៥ ឃ្លានីមួយៗក្នុងទ្រឹស្តីបទទី៣ គឺពិតនៅពេលពាក្យ "ជួរដេក" ត្រូវបានជំនួសដោយជួរឈរ។ ដើម្បីបញ្ជាក់លក្ខណៈនោះដោយគ្រាន់តែភ្ជាប់ទ្រឹស្តីបទ៣ដើមទៅ A^T ។ប្រមាណវិធីជួរដេកលើ A^T ជាចំនួនប្រមាណវិធីជួរឈរលើ A ។

ប្រមាណវិធីជួរឈរគឺមានសារៈសំខាន់សម្រាប់វត្ថុបំណងនៃទ្រឹស្តីទាំងពីរនិងការគណនាដោយដៃជាយ៉ាងណាក៏ដោយបើមិនស្មុកស្មាញ យើងអាចគណនាប្រមាណវិធីជួរត្រឹមតែក្នុងការគណនាចំនួន។

៣.៤. ផលគុណនៃដេទែមីណង់ និងផលគុណនៃម៉ាទ្រីស

សំរាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទនេះគឺការអនុវត្តនៅក្នុងលំហាត់។

ទ្រឹស្តីបទ៦ ៖ លក្ខណៈនៃផលគុណ ប្រសិនបើ A និង B ជាម៉ាទ្រីស $n\times n$ នោះ $\det AB=(\det A)\cdot(\det B)$ ។

ឧទាហរណ៍៥

បញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ៦ សម្រាប់ $A=\begin{vmatrix}6&1\\3&2\end{vmatrix}$ និង $B=\begin{bmatrix}4&3\\1&2\end{bmatrix}$

ដំណោះស្រាយ

$$AB=\begin{bmatrix}6&1\\3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&3\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25&20\\14&13\end{bmatrix}$$

ហើយ៖ $\det AB=25\cdot 13-20\cdot 14=325-280=45$

នៅពេល $\det A=9$ និង $\det B=5$

$$(\det A)(\det B)=9\cdot 5=45=\det AB$$

បម្រាម៖ មានការភាន់ច្រឡំរួមថា គឺជាទ្រឹស្តីបទអាចប្រៀបធៀបបានសម្រាប់ផលបូកនៃម៉ាទ្រីស។ ទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយដេទែមីណង់ $(A+B)$ គឺមិនស្មើនឹងដេទែមីណង់ A បូកនឹងដេទែមីណង់ B ជាទូទៅ។

៣.៥. លក្ខណៈលីនេអ៊ែរអនុគមន៍នៃដេទែមីណង់

សម្រាប់ម៉ាទ្រីស $n\times n$ មួយយើងអាចពិចារណាដេទែមីណង់ A ជាអនុគមន៍នៃវ៉ិចទ័រជួរឈរ n ក្នុង A ។ ប្រសិនបើជួរឈរទាំងអស់លើកលែងតែមួយ គឺត្រូវបានរក្សាឱ្យថេរ។ នោះដេទែមីណង់ A ជាអនុគមន៍នៃលីនេអ៊ែដែលមានវ៉ិចទ័រមួយផ្លាស់ប្តូរ។ សន្និដ្ឋានថាជួរទី j នៃ a គឺតម្រូវឱ្យស្រដៀងគ្នា ហើយសរសេរដោយ៖

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_{j-1} & x & a_{j+1} & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

កំណត់ការផ្លាស់ប្តូរ T មួយពី $\mathbb{R}^n$ ទៅ $\mathbb{R}$ ដោយ៖

$$T(x)=\det\begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_{j-1} & x & a_{j+1} & \dots & a_n \end{bmatrix}$$ នោះ៖

$T(cx)=cT(x)$ សម្រាប់ស្កាលែទាំង C និង x នៅក្នុង $\mathbb{R}^n$ (2)

$T(u+v)=T(v)$ សម្រាប់ស្កាលែទាំង u,v នៅក្នុង $\mathbb{R}^n$ (3)

លក្ខណៈ (2) ជាទ្រឹស្តីបទ $3(C)$ អនុវត្តទៅលើជួរឈរនៃ A ។ A ជាកស្តុតាងនៃលក្ខណៈ (3) ទៅតាមពីការពន្លាតកូហ្វាក់ទ័រនៃដេទែមីណង់ A នៅជួរឈរទី J ។ (មើលឧទាហរណ៍ 43) នោះ (ផលគុណ) លក្ខណៈលីនេអ៊ែរនៃដេទែរមីណង់ ប្រែទៅជាវិបាកសំខាន់ៗជាច្រើនដែលអាចឱ្យយើងសិក្សាបានកាន់តែលម្អិតនៅមេរៀននេះ។

សំរាយបញ្ជាក់នៃទ្រឹស្តី ៣ នឹង ៦

វាជាឱកាសក្នុងការបង្ហាញទ្រឹស្តីបទ៣ នៅពេលដែលវាស្ថិតនៅតួនៃធាតុម៉ាទ្រីសដែលបានពិភាក្សានៅចំណុច 2.2 ។ យើងហៅធាតុម៉ាទ្រីស E មួយជាជួរជំនួសមួយ (ម៉ាទ្រីស) ប្រសិនបើ E គឺជាក់លាក់ពីអត្តសញ្ញាណ I ដោយបន្ថែមផលគុណជាជួរមួយទៅជាជួរដទៃទៀត។ E គឺជាការផ្លាស់ប្តូរមួយប្រសិនបើ E បានដោយការផ្លាស់ប្តូរជួរ២ នៃ I ដោយស្កាលែ r មួយមិនសូន្យ។ ជាមួយជំនាញវិទ្យាសាស្ត្រនេះ ទ្រឹស្តីបទទី៣ អាចផ្លាស់ទម្រង់ទៅជា៖

ប្រសិនបើ A ជាម៉ាទ្រីស $n\times n$ មួយ ហើយ E ជាធាតុនៃម៉ាទ្រីស $n\times n$ មួយនោះ៖

$\det EA=(\det E)\times(\det A)$ ដែល៖

ប្រសិនបើ E ជាជួរជំនួស

ប្រសិនបើ E ជាការផ្លាស់ប្តូរ

ប្រសិនបើ E ជាស្កាលែរមួយដោយ r

$$\det E = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ r \end{cases}$$

សំរាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទទី៣៖

សំរាយបញ្ជាក់គឺការបន្តយទៅលើទំហំនៃ A ។ ក្នុងករណីនៃម៉ាទ្រីស 2×2 ត្រូវបានបញ្ជាក់ក្នុងលំហាត់ទី $33-36$ នៃចំណុច 3.1 ។ សន្និដ្ឋានទ្រឹស្តីបទ ដែលបានបញ្ជាក់សម្រាប់ដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីស $k\times k$ ដែល $k\geq 2$ តាង $n=k+1$ និងតាង A ជា $n\times n$ ។ សកម្មភាពនៃ E លើការវិវត្តនៃ A ពីរជួរ ឬមួយជួរណាមួយ។ ដូចនេះ យើងអាចពង្រីកដេទែមីណង់ EA ឆ្លងកាត់ជួរមួយដែលមិនផ្លាស់ប្តូរដោយសកម្មភាព E និយាយជាជួរ i ។ តាង A_{ij} (រៀងគ្នា B_{il}) ជាម៉ាទ្រីសកំណត់ដោយលុបជួរ i និងជួរឈរ j ពី A (រៀងគ្នា EA)។ បន្ទាប់មកជួរនៃ B_{ij} គឺកំណត់ពីជួរនៃ A_{ij} ដោយវិធីដូចគ្នានឹងជាតុនៃប្រមាណវិធីជួរដែល E បំពេញលើ A ។ នៅពេលម៉ាទ្រីសរងទាំងនេះគឺត្រឹមតែ $k\times k$ សន្មត់ដោយចេតនាបង្ហាញថា៖

$\det B_{ij} = \alpha\cdot\det A_{ij}$ ដែល $\alpha = 1, -1,$ ឬ r អាស្រ័យលើធម្មជាតិនៃ E ការពន្លាតកូហ្វាក់ទ័រឆ្លងកាត់ជួរ i គឺ៖

$$\begin{aligned}\det EA &= a_{i1}(-1)^{i+1}\det B_{i1} + ... + a_{in}(-1)^{i+n}\det B_{in} \\ &= \alpha a_{i1}(-1)^{i+1}\det A_{i1} + ... + \alpha a_{in}(-1)^{i+1}\det A_{in} \\ &= \alpha\cdot\det A\end{aligned}$$

ដោយឡែកយក $A=I_n$ យើងឃើញថាដេទែរមីណង់ E ស្មើ $1,-1,$ r អាស្រ័យលើធម្មជាតិនៃ E ។ ដូចនេះ ទ្រឹស្តីបទនេះ ពិតសម្រាប់ $n=2$ ហើយការពិតតនៃទ្រឹស្តីបទនេះសម្រាប់តម្លៃនេះមួយនៃ n កំណត់របស់ខ្លួនពិតសម្រាប់តម្លៃ n បន្ទាប់ដែរ។ យោងទៅតាមគោលការណ៍ និងការបញ្ចូលទ្រឹស្តីបទនេះត្រូវតែពិតគ្រប់ $n\geq 2$ ។ ទ្រឹស្តីបទមិនសំខាន់សម្រាប់ $n=1$ ។

សំរាយបញ្ជាក់នៃទ្រឹស្តីបទទី៦៖

ប្រសិនបើ A មិនមានម៉ាទ្រីសច្រាសនោះ ក៏មិនពិតសម្រាប់ AB ។

ក្នុងករណីនេះ ដេទែមីណង់ $AB =$ ដេទែរមីណង់ $A\times$ ដេទែមីណង់ B ពីព្រោះផ្នែកទាំងពីរគឺសូន្យដោយទ្រឹស្តីបទទី៤ ។ ប្រសិនបើ A ច្រាសនោះ A ហើយនឹងម៉ាទ្រីស I_n គឺជាជួរសមមូលដោយទ្រឹស្តីម៉ាទ្រីសច្រាស។

ដូចនេះ មានជាតុម៉ាទ្រីសកើតឡើង $E_1,.......,E_p$ ដែល៖

$$A = E_p E_{p-1}......E_1\cdot I_n = E_p E_{p-1}......E_1$$

សង្ខេបដោយខ្លី សរសេរ $|A|$ សម្រាប់ដេទៃណង់ A ។ បន្ទាប់មក អនុវត្តទ្រឹស្តីបទទី៣ ម្តងហើយម្តងទៀត ដោយបកស្រាយខាងលើបង្ហាញថា

$$\begin{aligned}|AB| &= |E_p......E_1B| = |E_p||E_{p-1}......E_1B| = ...\\ &= |E_p|.....|E_1||B| = ... = |E_p......E_1||B|\\ &= |A||B|\end{aligned}$$

លំហាត់

ក្នុងលំហាត់1-4 គណនាដេទែមីណង់ដោយប្រើលក្ខណៈដេទែមីណង់

1. $\begin{vmatrix}0 & 5 & -2\\1 & -3 & 6\\4 & -1 & 8\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1 & -3 & 6\\0 & 5 & -2\\4 & -1 & 8\end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix}2 & -6 & 4\\3 & 5 & -2\\1 & 6 & 3\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}1 & -3 & 2\\3 & 5 & -2\\1 & 6 & 3\end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix}1 & 3 & -4\\2 & 0 & -3\\5 & -4 & 7\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 3 & -4\\0 & -6 & 5\\5 & -4 & 7\end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 5 & -4\\3 & 7 & 4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 5 & -4\\0 & 1 & -5\end{vmatrix}$

ក្នុងលំហាត់5-10 គណនាដេទែមីណង់ដោយប្រើវិធីជួរទៅជាទម្រង់ Echelon

5. $\begin{vmatrix}1 & 5 & -6\\-1 & -4 & 4\\-2 & -7 & 9\end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix}1 & 5 & -3\\3 & -3 & 3\\2 & 13 & -7\end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix}1 & 3 & 0 & 2\\-2 & -5 & 7 & 4\\3 & 5 & 2 & 1\\1 & -1 & 2 & -3\end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix}1 & 3 & 32 & -4\\0 & 1 & 2 & -5\\2 & 5 & 4 & -3\\-3 & -7 & -5 & 2\end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix}1 & -1 & -3 & 0\\0 & 1 & 5 & 4\\-1 & 2 & 8 & 5\\3 & -1 & -2 & 3\end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix}1 & 3 & -1 & 0 & -2\\0 & 2 & -4 & -1 & -6\\-2 & -6 & 2 & 3 & 9\\3 & 7 & -3 & 8 & -7\\3 & 5 & 5 & 2 & 7\end{vmatrix}$

ក្នុងលំហាត់11-14 គណនាដេទែមីណង់ដោយប្រើវិធីសាស្រ្តចម្រុះ

11. $\begin{vmatrix}2 & 5 & -3 & -1\\3 & 0 & 1 & -3\\-6 & 0 & -4 & 9\\4 & 10 & -4 & -1\end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix}-1 & 2 & 3 & 0\\3 & 4 & 3 & 0\\5 & 4 & 6 & 6\\4 & 2 & 4 & 3\end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix}2 & 5 & 4 & 1\\4 & 7 & 6 & 2\\6 & -2 & -4 & 0\\-6 & 7 & 7 & 0\end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix}-3 & -2 & 1 & -4\\1 & 3 & 0 & -3\\-3 & 4 & -2 & 8\\3 & -4 & 0 & 4\end{vmatrix}$

ក្នុងលំហាត់15-20 គណនាដេទែមីណង់ដោយស្គាល់ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 7$

15. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 5g & 5h & 5i \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & 5i \end{vmatrix}$

20. $\begin{vmatrix} a+g & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

ក្នុងលំហាត់21-23 គណនាដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីស រួចរកម៉ាទ្រីសច្រាសរបស់វា

21. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & -7 & -5 & 0 \\ 3 & 8 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

ក្នុងលំហាត់24-26 ប្រើដេទែមីណង់ដើម្បីបង្ហាញថាសំណុំវ៉ិចទ័រខាងក្រោមអាស្រ័យលីនេអ៊ែរនឹងគ្នា។

24. $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$

ក្នុងលំហាត់27-28 មាន A និង B ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ $n \times n$ ។ តើឃ្លាប្រយោគនោះ ត្រឹមត្រូវឬ ខុស ? សូមបញ្ជាក់ចម្លើយនីមួយៗ។

27. a. ការប្តូរជួរដេកគ្នា មិនប៉ះពាល់តម្លៃដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីស។

b. តម្លៃដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីស A គឺជាផលគុណធាតុសំខាន់ (pivots) ក្នុងម៉ាទ្រីស A ទម្រង់Echelon ដោយគុណបន្ថែម $(-1)^r$ ដែល r ជាចំនួនដងនៃការប្តូរជួរដេកក្នុងអំឡុងពេលធ្វើប្រមាណវិធីជួរដេកបឋម។

c. ប្រសិនបើជួរឈរនៃម៉ាទ្រីស A ជាសំណុំវ៉ិចទ័រ អាស្រ័យលីនេអ៊ែរនឹងគ្នា នោះ $det(A)=0$

d. $\det(A+B)=\det(A)+\det(B)$

28. a. ក្នុងដេទែមីណង់ប្រសិនបើប្តូរគ្នានៃជួរដេកពីរ នោះដេទែមីណង់ថ្មីស្មើដេទែមីណង់ចាស់។

b. ដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីស A ជាផលគុណធាតុនៃអង្កត់ទ្រូងនៃម៉ាទ្រីស A ។

c. បើ $det(A)=0$ នោះមានជួរដេក ឬជួរឈរពីរដូចគ្នា ឬ មានជួរដេក ឬជួរឈរស្មើ0។

d. $\det A^T=(-1)\det A$

29. គណនា $\det B^5$ បើ $B=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&2\\1&2&1\end{bmatrix}$

ក្នុងលំហាត់30-31 មាន $\det(AB)=\det A.\det B$ និង A B ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ 2×2

30. $A=\begin{bmatrix}3&0\\6&1\end{bmatrix}$ $B=2\begin{bmatrix}2&0\\5&4\end{bmatrix}$

31. $A=\begin{bmatrix}3&6\\-1&-2\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}4&2\\-1&-1\end{bmatrix}$

32. តាង A និង B ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ 3×3 ដែលមាន $\det A=4$ និង $\det B=-3$ ។ប្រើលក្ខណៈដេទែមីណង់គណនាដេទែមីណង់ខាងក្រោម៖

a.	$\det AB$	*b.*	$\det 5A$	*c.*	$\det B^T$
d.	$\det(A^{-1})$	*e.*	$\det A^5$		

33. តាង A និង B ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ 4×4 ដែលមាន $\det A=-1$ និង $\det B=2$ ។ប្រើលក្ខណៈដេទែមីណង់គណនាដេទែមីណង់ខាងក្រោម៖

a.	$\det AB$	*b.*	$\det B^5$	*c.*	$\det 2A$
d.	$\det(A^TA)$	*e.*	$\det B^{-1}AB$		

34. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\det A=\det B+\det C$ ដែលមាន

$A=\begin{bmatrix}a+c&b+f\\c&d\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$, $c=\begin{bmatrix}e&f\\c&d\end{bmatrix}$ ។

35. មាន $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ និង $B=\begin{bmatrix}b&b\\c&d\end{bmatrix}$ បង្ហាញថា $\det(A+B)=\det A+\det B$ ប្រសិនបើ $a+d=0$ ។

៣.៦. ច្បាប់ Cramer មាឌ និងបម្លែងលីនេអ៊ែរ

ផ្នែកនេះអនុវត្តទ្រឹស្តីផ្នែកមុនៗដើម្បីទទួលបានរូបមន្តទ្រឹស្តីសំខាន់ៗ និងការបកស្រាយធរណីមាត្រនៃដេទែមីណង់។

៣.៦.១.វិធានរបស់ Cramer

វិធានរបស់ Cramer គឺត្រូវការផ្ទៀងផ្ទាត់ក្នុងការគណនាខុសៗគ្នាច្រើន។ វាអាចត្រូវបានប្រើដើម្បីសិក្សាពីដំណោះស្រាយនៃ $Ax=b$ ត្រូវបានប្រែប្រួលដោយការផ្លាស់ប្តូរ b ទោះយ៉ាងណាក៏ដោយ រូបមន្តនេះមិនមានភាពច្បាស់លាស់សម្រាប់ការគណនាដទៃទៀតទេ លើកលែងតែម៉ាទ្រីស 2×2 ឬប្រហែលជា 3×3 ។

ចំពោះម៉ាទ្រីស $n\times n$ ណាមួយ A និង B ក្នុង $\mathbb{R}^n$ ដោយ $A_i(b)$ ជាម៉ាទ្រីសទទួលបានពី A ដោយជំនួសជួរឈរ i ដោយវ៉ិចទ័រ b ។

$$A_i(b) = [a_1.....b....a_n]$$

↑

Col i

> ទ្រឹស្តីបទ៧ ៖ វិធាន Cramer
>
> ឱ្យ A ជាចម្រាស់នៃម៉ាទ្រីស $n\times n$ ។ សម្រាប់ b នៅក្នុង $\mathbb{R}^n$ ដោះស្រាយតែមួយគត់គឺ x នៃ $Ax=b$ មានធាតុដែលបានផ្តល់អោយ៖
>
> $$x_1 = \frac{\det A_i(b)}{\det A}, \quad i=1,2,....,n \qquad (1)$$

សម្រាយបញ្ជាក់៖ តាងជួរឈរ A ដោយ $a_1,.....,a_n$ និងជួរឈរម៉ាទ្រីសឯកធា $n\times n$ I ដោយ $e_1,......e_n$ ។ ប្រសិនបើ $Ax=b$ និយមន័យនៃផលគុណម៉ាទ្រីសបង្ហាញថា៖

$$A\cdot I_i(x) = A[e_1........x.......e_n] = [Ae_1.......Ax.......Ae_n]$$
$$= [a_1......b.......a_n] = A_i(b)$$

ដោយលក្ខណៈផលគុណម៉ាទ្រីស៖

$$(\det A)(\det I_i(x)) = \det A_i(b)$$

ដេទែមីណង់ពីរនៅខាងឆ្វេង x_i ។ (បង្កើតកូហ្វាក់ទ័រតាមបណ្តោយជួរដេក i) ដូចនេះ $(\det A)\cdot x_i = \det A_i(b)$ ។ នេះគឺស្រាយបញ្ជាក់មួយព្រោះ A ជាចម្រាស់នឹង $\det A\neq 0$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១ ប្រើវិធាន Cramer ទៅដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម៖

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 6 \\ -5x_1 + 4x_2 &= 8 \end{aligned}$$

ដំណោះស្រាយ មើលប្រព័ន្ធសមីការដែល $Ax = b$ ។ ប្រើការណែនាំដូចខាងលើ៖

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \quad A_1(b) = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \quad A_2(b) = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$$

តាំងពី $\det A = 2$ ប្រព័ន្ធសមីការមានដំណោះស្រាយប្លែកៗដោយប្រើវិធាន Cramer

$$x_1 = \frac{\det A_1(b)}{\det A} = \frac{24+16}{2} = 20$$

$$x_2 = \frac{\det A_2(b)}{\det A} = \frac{24+30}{2} = 27$$

ការអនុវត្តទៅវិស្វកម្ម

បញ្ហាវិស្វកម្មសំខាន់ៗមួយចំនួន ជាពិសេសផ្នែកវិស្វកម្មអគ្គីសនី និងទ្រឹស្តីត្រួតពិនិត្យអាចផ្លាស់ប្តូរដោយ $Laplace\,transforms$ ។ វិធីសាស្ត្រនេះបំប្លែងប្រព័ន្ធសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរ ទៅជាប្រព័ន្ធសមីការពិជគណិតលីនេអ៊ែរ ដែលមេគុណទាក់ទងនឹងប៉ារ៉ាម៉ែត្រ។ ឧទាហរណ៍បន្ទាប់បង្ហាញពីប្រភេទប្រព័ន្ធសមីការពិជគណិតដែលអាចកើតមានឡើង។

ឧទាហរណ៍ទី២ ពិចារណាប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម ជាប៉ារ៉ាមែត្រ។ កំណត់តម្លៃរបស់ s ដែលសមីការនេះមានចម្លើយតែមួយគត់ ហើយប្រើវិធាន Cramer ដើម្បីដោះស្រាយ៖

$$\begin{aligned} 3sx_1 - 2x_2 &= 4 \\ -6x_1 + sx_2 &= 1 \end{aligned}$$

ដំណោះស្រាយ

បើប្រព័ន្ធសមីការនៃ $Ax = b$ បន្ទាប់មក

$$A = \begin{bmatrix} 3s & -2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_1(b) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_2(b) = \begin{bmatrix} 3s & 4 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$$

ពេលដែល $\det A = 3s^2 - 12 = 3(s+2)(s-2)$ ប្រព័ន្ធសមីការមានដំណោះស្រាយជាក់លាក់ពេល $s \neq \pm 2$ ។ សម្រាប់ s គឺមានដំណោះស្រាយ (x_1, x_2)

$$x_1 = \frac{\det A_1(b)}{\det A} = \frac{4s+2}{3(s+2)(s-2)}$$

$$x_2 = \frac{\det A_2(b)}{\det A} = \frac{3s+24}{3(s+2)(s-2)} = \frac{s+8}{(s+2)(s-2)}$$

៣.៦.២ រូបមន្តសម្រាប់រក A^{-1}

វិធានរបស់លោក Cramer មានលក្ខណៈសាមញ្ញទៅនឹងរូបមន្តទូទៅសម្រាប់ការរកម៉ាទ្រីសប្រាសនៃ A ជាម៉ាទ្រីសការេ $n \times n$ ។ ដែល j ជាជួរឈរនៃ A^{-1} គឺជាវ៉ិចទ័រ x ដែលបំពេញ។

$$Ax = e_j$$

ដែល e_j គឺជាជួរ j នៃម៉ាទ្រីសឯកតា ដែល i គឺជាធាតុនៃ x គឺ (i,j) ជាតុនៃ A^{-1} ដោយវិធានលោក Cramer ។

ចាំថា A_{ji} កំណត់ឱ្យអនុគមន៍ម៉ាទ្រីសរបស់ A ទ្រង់ទ្រាយដែលបានបង្កើតឡើងដោយលុបជួរដេក j និងជួរឈរ i ។ ការពង្រីកកូហ្វាក់ទ័រ A ចុះជួរឈរ i នៃ $A_i(e_i)$

បង្ហាញថា៖ $\det A_i(e_i) = (-1)^{i+j}\det A_{ji} = C_{ji}$ (3)

ដោយ C_{ji} គឺជាកូហ្វាក់ទ័រនៃ A ។ ដោយ (2) ជាតុនៃ (i,j) នៃ A^{-1} គឺកូហ្វាក់ទ័រ C_{ji} ដែលចែកនឹង $\det A$ ។ ចំណាំថា អក្សរតូចក្រោម នៅលើ C_{ji} ជាការបញ្ច្រាសនៃ (i,j)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \quad (4)$$

ម៉ាទ្រីសរបស់កូហ្វាក់ទ័រនៅខាងស្តាំនៃ (4) គេហៅថាការបន្ថែម (*Classical adjoint*) នៃ A ។ បានបញ្ចេញឱ្យ $adj\,A$ ។ (ពាក្យ *adjoint* គឺមានអត្ថន័យមួយទៀតក្នុងអត្ថបទកម្រិតខ្ពស់លើបម្លែងលីនេអ៊ែរ) គ្រាន់តែនិយាយឡើងវិញដោយពន្យល់យ៉ាងសាមញ្ញ (4) ។

<u>ទ្រឹស្តីបទទី៨៖</u> រូបមន្តច្រាស

យើងឱ្យ A ជាម៉ាទ្រីសច្រាស $n\times n$ ។ បន្ទាប់មក $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\times adj\,A$ ។

ឧទាហរណ៍៣ រកចម្រាសនៃម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

ដំណោះស្រាយ

តាមកូហ្វាក់ទ័រ

$$C_{11} = +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2\ ,\quad C_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3\ ,\quad C_{13} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 14\ ,\quad C_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7,\quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -7$$

$$C_{31} = +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4\ ,\quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\ ,\quad C_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

ម៉ាទ្រីស *adjugate* គឺការផ្លាស់ប្តូរម៉ាទ្រីសនៃកូហ្វាក់ទ័រ។ [ឧទាហរណ៍នៅក្នុង C_{12} ទៅក្នុង $(2,1)$]។

ដូច្នេះ $adj\,A = \begin{bmatrix} -2 & 14 & 4 \\ 3 & -7 & 1 \\ 5 & -7 & -3 \end{bmatrix}$

យើងអាចគណនា $\det A$ ដោយផ្ទាល់ ប៉ុន្តែការគណនាបានផ្តល់ការត្រួតពិនិត្យនូវការគណនាខាងលើនឹងផលគុណ $\det A$

$$(adj\,A)\cdot A = \begin{bmatrix} -2 & 14 & 4 \\ 3 & -7 & 1 \\ 5 & -7 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix} = 14I$$

ចាប់ពី $(adj\,A)\cdot A = 14I$ ទ្រឹស្តីបទទី៨ បង្ហាញថា $\det A = 14$ ហើយ

$$A^{-1} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} -2 & 14 & 4 \\ 3 & -7 & 1 \\ 5 & -7 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/7 & 1 & 2/7 \\ 3/14 & -1/2 & 1/14 \\ 5/14 & -1/2 & -3/4 \end{bmatrix}$$

កំណត់ចំនួន

វិធាន Cramer គឺជាការជំនួយទ្រឹស្តីផងដែរ។ វាអាចត្រូវបានប្រើដើម្បីសិក្សាពីដំណោះស្រាយនៃសមីការ $Ax = b$ គឺជាការផ្លាស់ប្តូរធាតុនៅក្នុង b ឬធាតុនៅក្នុង A (ដោយសារតែកំហុសនៃការពិសោធន៍នៅពេលដែលទទួលបានធាតុសម្រាប់ b ឬ A)។ ពេល A គឺជាម៉ាទ្រីស 3×3 ជាមួយនឹងធាតុដែលរួមបញ្ចូលគ្នាជាច្រើន វិធានរបស់លោក Cramer ពេលខ្លះត្រូវបានជ្រើសរើសសម្រាប់ការគណនាដោយផ្ទាល់ ព្រោះការកាត់បន្ថយជួរដេកនៃ $[A,b]$ ដែលមាននព្វន្តស្មុគស្មាញហើយ អាចមានភាពច្របូកច្របល់ និងការគណនាដេទែមីណង់យ៉ាងងាយស្រួល។ ចំពោះម៉ាទ្រីស $n\times n$ ធំជាង (ពិតឬស្មុគស្មាញ) វិធានរបស់លោក Cramer គឺគ្មានប្រសិទ្ធភាពទេ។ ការគណនាដេទែមីណង់មួយត្រូវការដោះស្រាយ $Ax = b$ ដោយកាត់បន្ថយជួរដេក។

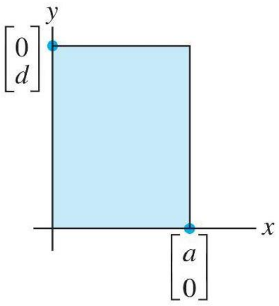
$$Ax = b$$
$$A^{-1}.Ax = A^{-1}.b$$
$$x = A^{-1}.b$$

៣.៦.៣. ដេទែមីណង់កេផ្ទៃក្រឡា ឬមាឌ

នៅក្នុងមេរៀនបន្ទាប់ យើងនឹងផ្ទៀងផ្ទាត់ការបកស្រាយធរណីមាត្រដេទែមីណង់ដែលបានពណ៌នានៅក្នុងជំពូកនេះ។ ទោះបីជាការពិភាក្សាទូទៅអំពីប្រវែង និងចម្ងាយក្នុង $\mathbb{R}^n$ នឹងមិនផ្តល់ឱ្យហេតុដល់ជំពូកទី៦ យើងសន្មត់នៅទីនេះថាកាគិតតាម *Eucliden* ធម្មតាផ្ទៃក្រឡានឹងមាឌត្រូវបានពន្យល់រួចហើយសម្រាប់ $\mathbb{R}^2$ និង $\mathbb{R}^3$ ។

ទ្រឹស្តីបទទី៩ ៖ ប្រសិនបើ A គឺជាម៉ាទ្រីស 2×2 ផ្ទៃនៃប្រលេឡូក្រាម គឺជាដេទែមីណង់ដោយជួរឈរ A គឺ $|\det A|$ ។ បើ A ជាម៉ាទ្រីស 3×3 មាឌនៃប្រលេឡូក្រាមជាដេទែមីណង់នៃជួរឈររបស់ A គឺ $|\det A|$ ។

៣.៦.៤. បង្ហាញធរណីមាត្រ៖



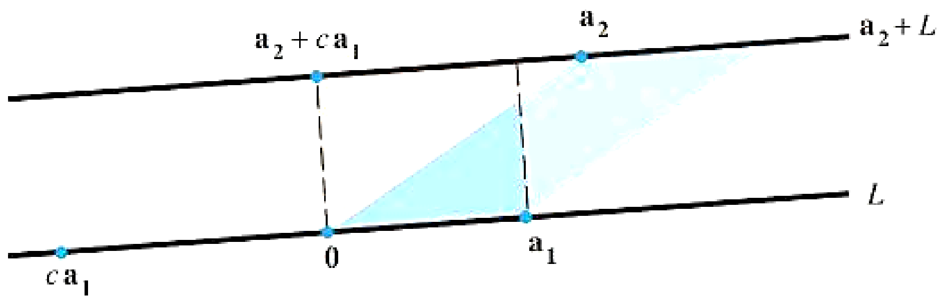
បង្ហាញថាទ្រឹស្តីនេះគឺពិតសម្រាប់ម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូង 2×2 ៖

$$\left|\det A\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}\right| = |ad| = \{\text{ ផ្ទៃចតុកោណ }\}$$

វានឹងគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីបង្ហាញថា ម៉ាទ្រីស 2×2 $A=[a_1,a_2]$ អាចត្រូវបានផ្លាស់ប្តូរទៅជាម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូងតាមរបៀបមួយដែលមិនផ្លាស់ប្តូរផ្ទៃនៃប្រលេឡូក្រាមស្របគ្នាហើយ $|\det A|$ ។ ផ្នែក 3.2 យើងដឹងថាតម្លៃដាច់ខាតនៃដេទែមីណង់មិនប្រែប្រួលទេនៅពេលជួរឈរទី២ ត្រូវបានផ្លាស់ប្តូរ ឬជួរឈរច្រើនជួរត្រូវបានបន្ថែមទៅជាជួរមួយទៀត។ ហើយវានឹងងាយស្រួល ដើម្បីបង្ហាញថា ការធ្វើដំណោះស្រាយបែបនេះគ្រប់គ្រាន់ ដើម្បីបំប្លែង A ទៅជាម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូង។ ការផ្លាស់ប្តូរជួរឈរ គឺមិនផ្លាស់ប្តូរប្រលេឡូក្រាមទេ។ ដូចនេះ វាគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីបញ្ជាក់ពីធរណីមាត្រជម្មតាដូចខាងក្រោម ដែលអនុវត្តន៍ចំពោះវ៉ិចទ័រក្នុង $\mathbb{R}^2$ ឬ $\mathbb{R}^3$ ។

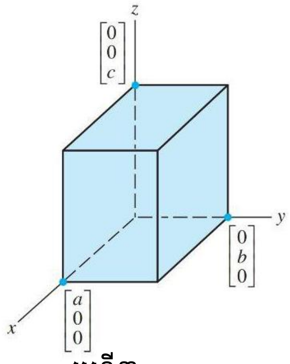
ឱ្យ a_1 និង a_2 ជាវ៉ិចទ័រមិនសូន្យ។ បន្ទាប់មកស្កាលែ C ផ្ទៃនៃប្រលេឡូក្រាមដេទែមីណង់ដោយ a_1 និង a_2+Ca_1 ។

ដើម្បីបញ្ជាក់ថា វាជាសេចក្តីថ្លែងការនេះយើងអាចសន្មត់ថា a_2 មិនមែនជាពហុគុណនៃ a_1 ទេ សម្រាប់ប្រលេឡូក្រាម២ ឬច្រើនអាចនឹងថយចុះនឹងមានផ្ទៃសូន្យ។ ប្រសិនបើ L ជាបន្ទាត់កាត់ O និង a_1 នោះ a_2+L គឺជាបន្ទាត់កាត់ a_2 ស្របទៅនឹង L ហើយ a_2+Ca_1 គឺស្ថិតនៅលើបន្ទាត់។ មើលរូបទី២ ចំណុច a_2 និង a_2+Ca_1 មានចម្ងាយកាត់ត្រង់ចំណុចដូចគ្នាទៅនឹង L ។ ដូចនេះ ប្រលេឡូក្រាមទាំងពីរស្ថិតក្នុងរូបភាពទី២ មានផ្ទៃដូចគ្នា ចាប់ពីគេចែកមូលដ្ឋានពី 0 ដល់ a_1 នេះបញ្ជាក់ពីភស្តុតាងសម្រាប់ $\mathbb{R}^2$ ។



រូបទី២ ប្រលេទ្បូក្រាមដែលមានផ្ទៃស្មើគ្នា

សម្រាយសម្រាប់ $\mathbb{R}^3$ គឺស្រដៀងគ្នា។ ទ្រឹស្តីបទនេះ គឺពិតសម្រាប់ម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូង 3×3 ។ មើលរូបទី៣ និងម៉ាទ្រីស 3×3 អាចត្រូវបានបម្លែងទៅជាម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូងដោយការធ្វើឱ្យជួរឈរមិនផ្លាស់ប្តូរ $|\det A|$ ។ (គិតអំពីការធ្វើឲ្យជួរដេកនៅលើ A^T ។ ដូច្នេះ វាគ្រាន់តែដើម្បីបង្ហាញថាដំណើរការទាំងនេះមិនប៉ះពាល់ដល់មាឌប្រលេទ្បូក្រាមដែលកំណត់ដោយវ៉ិចទ័រជួរឈរនៃ A ។

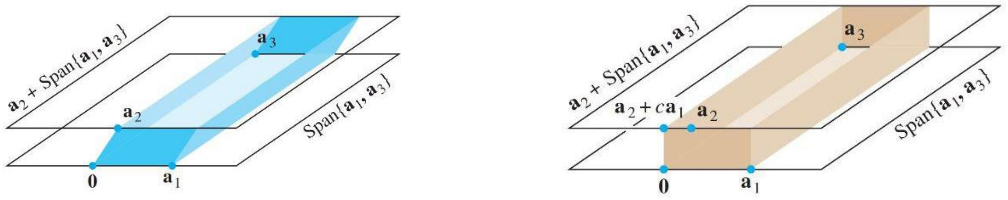


រូបទី៣

មាឌ $= |abc|$

ប្រលេទ្បូក្រាម វាគឺត្រូវបានគេបង្ហាញក្នុងរូបភាពទី ៤ ដែលជាប្រអប់ជាក់ស្រមោលពីរ ដែលមាឌ និងផ្ទៃនៃមូលដ្ឋាននៅក្នុងប្លង់ស្ប៉ាន $\{a_1, a_3\}$ គុណនឹងកម្ពស់នៃ a_2 ខាងលើស្ប៉ាន $\{a_1, a_3\}$ ។ វ៉ិចទ័រ $a_2 + Ca_1$ មានកម្ពស់ដូចគ្នា ព្រោះ $a_2 + Ca_1$ នៅក្នុងប្លង់សំណុំបង្ករ $\{a_1, a_3\}$ ដែលស្របទៅនឹងសំណុំបង្ករ $\{a_1, a_3\}$។

ដូចនេះ មាឌនៃប្រលេទ្បូក្រាម គឺមិនប្រែប្រួលនៅពេលដែល $[a_1 \ a_2 \ a_3]$ គឺប្រែប្រួលទៅ $[a_1 \ a_2 + Ca_1 \ a_3]$ ។ ដូចនេះ ដំណើរការនៃការជំនួសជួរឈរ គឺមិនបានប៉ះពាល់ដល់មាឌនោះទេ ដោយសារការផ្លាស់ប្តូរជួរឈរ មិនអាចធ្វើឲ្យមាឌប្រែប្រួល។ ការបង្ហាញត្រូវបានបញ្ចប់។



រូបទី៤ ប្រលេឡូក្រាមដែលមានមាឌស្មើគ្នា

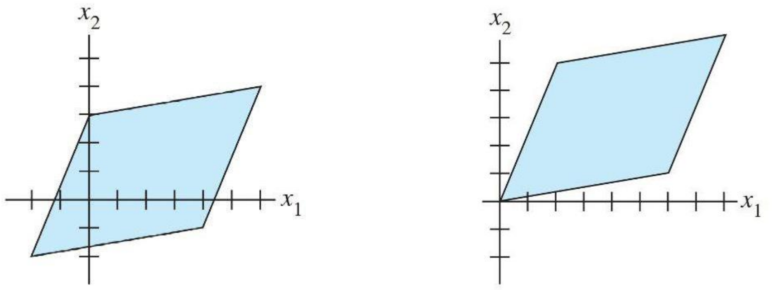
ឧទាហរណ៍៤ គណនាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាមដែលកំណត់ដោយដេទែមីណង់ត្រង់ចំណុច៖

$(-2,-2),(0,3),(4,-1)$ និង $(6,4)$

ដំណោះស្រាយ

បកស្រាយដំបូងលើប្រលេឡូក្រាមទៅនឹងប្រភពដើមជាកំពូល។ សម្រាប់ឧទាហរណ៍ រំកិលចេញកំពូល $(-2,-2)$ មករក0 ចេញពីកំពូលទាំង៤ ។ ប្រលេឡូក្រាមថ្មីមានផ្ទៃក្រឡាដូចគ្នា និងវាជាកំពូល $(0,0),(2,5),(6,1)$ និង $(8,6)$ ។ មើលរូបទី (b) នេះគឺជាប្រលេឡូក្រាមដែលមានដេទែមីណង់ជួរឈរនៃ $A=\begin{bmatrix}2&6\\5&1\end{bmatrix}$

$|\det A|=|-28|$ ផ្ទៃក្រឡានៃប្រលេឡូក្រាមគឺ 28 ។



(a) (b)

រូបទី៥ បកស្រាយពីប្រលេឡូក្រាមមិនមានការប្រែប្រួលផ្ទៃក្រឡា

៣.៧. បម្លែងលីនេអ៊ែរ

ដេទែមីណង់ គឺប្រើសម្រាប់ពណ៌នាអំពីលក្ខណៈធរណីមាត្រដ៏សំខាន់នៃការបម្លែងលីនេអ៊ែរនៅក្នុងប្លង់ $\mathbb{R}^3$ ។ ប្រសិនបើ T គឺជាបម្លែងលីនេអ៊ែរ ហើយ S ជាសំណុំក្នុងដែនកំណត់របស់ T អោយ $T(s)$ បញ្ជាក់សំណុំរូបភាពនៃចំណុចក្នុង S ។ យើងផ្តោតទៅលើផ្ទៃក្រឡា(ឬមាឌ)នៃ $T(s)$ ប្រៀបធៀបជាមួយនឹងផ្ទៃក្រឡា(ឬមាឌ)នៃសំណុំដើម S ។ ដើម្បីភាពងាយស្រួលនៅពេលដែល S ជាផ្ទៃដែលព័ទ្ធជុំវិញដោយប្រលេឡូក្រាមនោះក៏ចាត់ទុក S ជាប្រលេឡូក្រាមដែរ។

ទ្រឹស្តីបទទី១០ ៖

ឱ្យ $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ គឺជាបម្លែងលីនេអ៊ែរដេទែមីណង់ A ដោយម៉ាទ្រីស 2×2 ។ បើ S គឺជាប្រលេឡូក្រាមក្នុង $\mathbb{R}^2$ នោះ៖

$$\{\text{ ផ្ទៃក្រឡានៃ } T(s)\ \} = |\det A| \cdot \{\text{ ផ្ទៃក្រឡានៃ } s\} \qquad (5)$$

បើ T គឺជាដេទែមីណង់ដែលកំណត់ដោយ A ម៉ាទ្រីស 3×3 ហើយបើ S ជាប្រលេឡូក្រាមក្នុង $\mathbb{R}^3$ នោះ ៖

$$\{\text{ ផ្ទៃក្រឡានៃ } T(s)\ \} = |\det A| \cdot \{\text{ មាឌនៃ } s\ \} \qquad (6)$$

បង្ហាញ៖ ពិចារណាទៅលើករណី 2×2 ជាមួយ $A=[\,a_1, a_2\,]$ A គឺជាប្រលេឡូក្រាមនៃចំណុចដើមក្នុង $\mathbb{R}^2$ ដេទែមីណង់ដោយវ៉ិចទ័រ b_1 នឹង b_2 បានមកពី៖

$$S=\{\, s_1b_1+s_2b_2 : 0\le s_1\le 1\,, 0\le s_2\le 1\}$$

រូបនៃ S នៅក្រោម T មានចំណុចពី៖

$$T(\,s_1b_1+s_2b_2\,)=s_1T(b_1)+s_2T(b_2)$$
$$= s_1Ab_1+s_2Ab_2$$

ពេលដែល $0\le s_1\le 1\,, 0\le s_2\le 1$ ។ វាធ្វើតាម $T(s)$ គឺជាប្រលេឡូក្រាមដែលកំណត់ដោយដេទែមីណង់ជួរឈរនៃម៉ាទ្រីស $[\,Ab_1 \quad Ab_2\,]$ ។ ម៉ាទ្រីសនេះអាចសរសេរជា AB ពេល $B=[\,b_1 \quad b_2\,]$ ។ ប្រើទ្រឹស្តីបទទី៩ ហើយផលគុណជាទ្រឹស្តីសម្រាប់ដេទែមីណង់។

$$\{\text{ ផ្ទៃនៃ } T(s)\ \} = |\det AB| = |\det A|\cdot|\det B| \qquad = |\det A|\cdot\{\text{ ផ្ទៃនៃ } s\ \} \qquad (7)$$

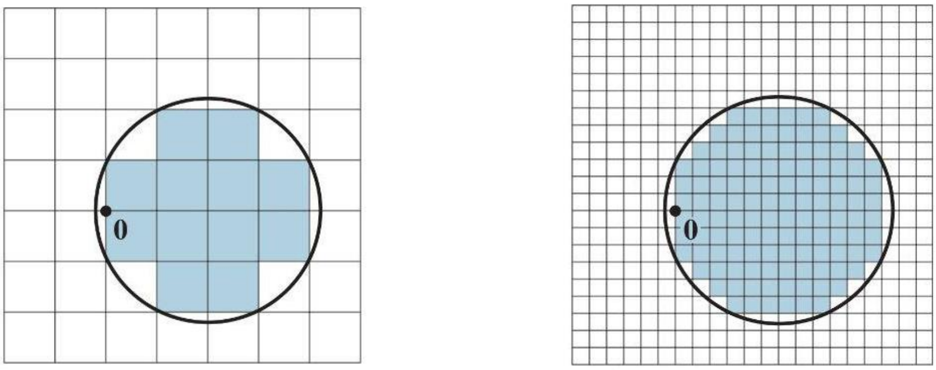
ដ្យាក្រាមប្រលេឡូក្រាមមានទម្រង់ $p+S$ ដែល p ជាវ៉ិចទ័រ ហើយ S ជាប្រលេឡូក្រាមត្រង់ចំណុចដើមខាងលើ។ វាគឺមិនងាយស្រួលឃើញថា T បម្លែង $p+S$ ទៅជា $T(p)+T(S)$ ។ (មើលលំហាត់ទី២៦) ដោយសារតែការបម្លែងមិនមានផលប៉ះពាល់លើផ្ទៃក្រឡានៃសំណុំ។

$$\{\text{ ផ្ទៃក្រឡានៃ } T(p+S)\ \} = \{\text{ ផ្ទៃក្រឡានៃ } T(p)+T(S)\ \}$$
$$= \{\text{ ផ្ទៃក្រឡានៃ } T(s)\ \} \text{ បម្លែង}$$
$$= |\det A|\cdot\ \{\text{ ផ្ទៃក្រឡានៃ } S\ \} \text{ ដោយសមីការ } (7)$$
$$= |\det A|\cdot\ \{\text{ ផ្ទៃក្រឡានៃ } p+S\ \} \text{បម្លែង}$$

នេះគឺបង្ហាញថា (5) ប្រើបានទាំងអស់សម្រាប់ប្រលេឡូក្រាមក្នុង $\mathbb{R}^2$ ។ នោះបញ្ជាក់ថា (6) សម្រាប់ម៉ាទ្រីស 3×3 ក្នុងករណីស្រដៀងគ្នា។

នៅពេលដែលព្យាយាមធ្វើទ្រឹស្តីបទទី១០ ទៅនឹងផ្ទៃមួយក្នុង $\mathbb{R}^2$ ឬ $\mathbb{R}^3$ ដែលមិនត្រូវបានភ្ជាប់ដោយត្រង់ ឬប្លង់ យើងត្រូវតែប្រឈមមុខ និងដោះស្រាយនៃរបៀបកំណត់ និងការគណនាផ្ទៃឬមាឌ។

នេះគឺជាសំណួរដែលសិស្សបានសិក្សាក្នុងការគណនា ហើយយើងគ្រាន់តែគូសបញ្ជាក់នូវគំនិតត្រង់ $\mathbb{R}^2$ ។ ប្រសិនបើ $\mathbb{R}$ គឺជាតំបន់ប្លង់ដែលមានផ្ទៃក្រឡាកំណត់នោះ $\mathbb{R}$ ត្រូវបានប៉ាន់ស្មានដោយក្រឡាចត្រង្គតូចមួយ ដែលស្ថិតនៅក្នុង $\mathbb{R}$ ។ ការេតូចល្មមផ្ទៃក្រឡានៃ $\mathbb{R}$ ត្រូវបានប៉ាន់ស្មានប្រមាណវិធីជិតបំផុតតាមការចង់បានដោយផលបូកផ្ទៃកនៃការេតូចៗ។ (មើលរូបទី៦)

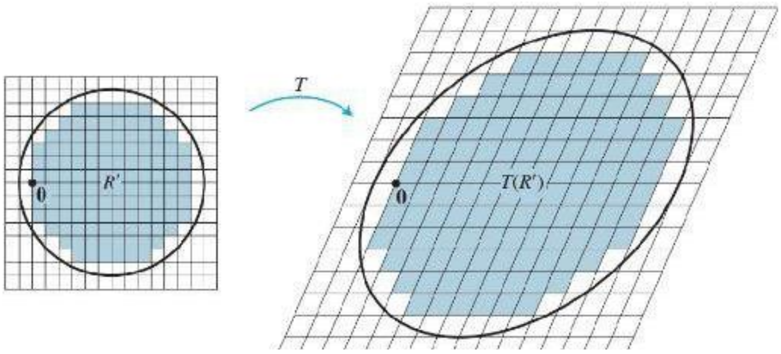


រូបទី៦ ការប៉ាន់ស្មានតំបន់ប្លង់ដោយប្រជុំនៃការេ

ការប៉ាន់ស្មានធ្វើឱ្យប្រសើរឡើងដូចជាក្រឡាចត្រង្គក្លាយទៅជាល្អ។

ប្រសិនបើ T បម្លែងលីនេអ៊ែរដែលជាប់ទាក់ទងជាមួយម៉ាទ្រីស $A:2\times 2$ បន្ទាប់មក រូបភាពនៃផ្ទៃប្លង់ R ស្ថិតនៅក្រោម T ត្រូវបានប៉ាន់ប្រមាណដោយរូបភាពការេតូចៗនៅខាងក្នុង R ។ ភស្តុតាងទ្រឹស្តីបទទី១០ រូបភាពនីមួយៗជាប្រលេឡូក្រាម ផ្ទៃក្រឡារបស់វាគឺ $|\det A|$ ពេលផ្ទៃក្រឡានៃការេ។ ប្រសិនបើ R' ជាប្រជុំនៃការេខាងក្នុង R នោះផ្ទៃក្រឡានៃ $T(R')$ ជា $|\det A|$ ពេលផ្ទៃក្រឡានៃ R' ។ មើលរូបភាពទី៧ ផ្ទៃក្រឡានៃ $T(R')$ គឺនៅជិតផ្ទៃក្រឡានៃ $T(R)$ ។ អាគុយម៉ង់ដែលពាក់ព័ន្ធនឹងការកំណត់អាចត្រូវផ្តល់ឱ្យដើម្បីបង្ហាញអំពីទ្រឹស្តីបទទូទៅនៃទ្រឹស្តីបទទី១០ ។

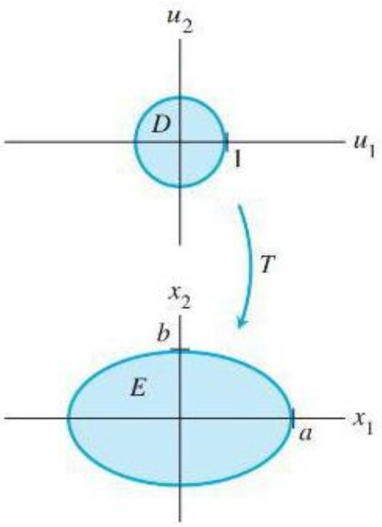
សេចក្តីសន្និដ្ឋានទ្រឹស្តីបទទី១០ ជាប់ទាក់ទងនៅពេល S គឺជាផ្ទៃក្នុង $\mathbb{R}^2$ ដែលមានផ្ទៃក្រឡាកំណត់ ឬផ្ទៃក្នុង $\mathbb{R}^3$ ជាមួយនឹងការកំណត់មាឌ។



រូបភាពទី៧ សន្ទត់ $T(R)$ ដោយប្រជុំនៃប្រលេឡូក្រាម

ឧទាហរណ៍៥ ឱ្យ a និង b គឺជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ រកផ្ទៃក្រឡានៃតំបន់ E ដោយដែនកំណត់រាងអេលីប មានសមីការ ៖ $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1$

ដំណោះស្រាយ



យើងអះអាងថា E គឺជារូបភាពស្ថិតក្នុងឯកតារបស់ D ដែលស្ថិតនៅខាងក្រោមការបំប្លែងលីនេអ៊ែរ T ដេទេមីណង់ដោយម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ ព្រោះបើ $u=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ និង

$x=Au$

នោះ៖ $u_1=\frac{x_1}{a}$, $u_2=\frac{x_2}{b}$ ។

វាដូចថា u គឺនៅក្នុងថាសឯកតាជាមួយ $u_1^2+u_2^2\le 1$ ប្រសិន x នៅក្នុង E ជាមួយ $\left(\frac{x_1}{a}\right)^2+\left(\frac{x_2}{b}\right)^2\le 1$ តាមរយៈការបង្កើតទ្រឹស្តីបទទី១០

$$\{\text{ ផ្ទៃក្រឡានៃអេលីប }\}=\{\text{ ផ្ទៃក្រឡានៃ } TCD\ \}$$
$$=|\det A|\cdot\{\text{ ផ្ទៃក្រឡានៃ } D\ \}$$
$$=ab\cdot\pi(1)^2=\pi ab$$

បញ្ហានៃការអនុវត្ត ៖ បើ S ជាប្រលេឡូក្រាមដេលកំណត់ដោយដេទែមីណង់នៃវ៉ិចទ័រ $b_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $b_2=\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ ហើយអោយ $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃរូប S នៅខាងក្រោម $x\mapsto Ax$ ។

លំហាត់

លំហាត់ 1-6 ចូរប្អូនៗដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

1. $\begin{cases} 5x_1+7x_2=3 \\ 2x_1+4x_2=1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x_1+x_2=6 \\ 5x_1+2x_2=7 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1-2x_2=7 \\ -5x_1+6x_2=-5 \end{cases}$

4. $\begin{cases} -5x_1+3x_2=9 \\ 3x_1-x_2=-5 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1+x_2=7 \\ -3x_1+x_3=-8 \\ x_2+2x_3=-3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=4 \\ -x_1+2x_3=2 \\ 3x_1+x_2+3x_3=-2 \end{cases}$

លំហាត់ 7-10 ចូរប្អូនៗដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការជាមួយប៉ារ៉ាម៉ែត្រ s ។រួចពណ៌នាចម្លើយរបស់វា។

7. $\begin{cases} 6sx_1 + 4x_2 = 5 \\ 2x_1 + 2sx_2 = -2 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 3sx_1 - 5x_2 = 3 \\ 9x_1 + 5sx_2 = 2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} sx_1 - 2sx_2 = -1 \\ 3x_1 + 6sx_2 = 4 \end{cases}$ 10. $\begin{cases} 2sx_1 + x_2 = 1 \\ 3sx_1 + 6sx_2 = 2 \end{cases}$

លំហាត់ 11-16 ចូរប្អូនៗរកម៉ាតទ្រីស *Adjugate* ។រួចគណនាម៉ាទ្រីសប្រាសរបស់វា។

11. $\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 12. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 14. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ 16. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

17. បើមានម៉ាទ្រីស A លំដាប់ 2×2 ។ រកម៉ាទ្រីសប្រាសនៃម៉ាទ្រីស A ។

18. ឧបមាថាគ្រប់ធាតុទាំងអស់នៃម៉ាទ្រីស A ជាចំនួនគត់និងមាន $\det(A)=1$ ។ បង្ហាញថា ហេតុអ្វីបានជាធាតុទាំងអស់នៃម៉ាទ្រីស A^{-1} ជាចំនួនគត់ដែរ ?

លំហាត់ 19-22 ចូរប្អូនៗដោះស្រាយផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាម តាមកូអរដោនេកំពូលនីមួយៗ៖

19. $(0,0), (5,2), (6,4), (11,6)$

20. $(0,0), (-1,3), (4,-5), (3,-2)$

21. $(-1,0), (0,5), (1,-4), (2,1)$

22. $(0,-2), (6,-1), (-3,1), (3,2)$

23. ចូរប្អូនៗដោះស្រាយរកមាឌប្រឡេពីប៉ែតតាមកូអរដោនេកំពូលនៅលើគល់តម្រុយ និងកំពូលជាប់គល់តម្រុយនីមួយៗមាន $(1,0,-2), (1,2,4), (7,1,0)$ ៕

24. ចូរប្អូនៗដោះស្រាយរកមាឌប្រឡេពីប៉ែតតាមកូអរដោនេកំពូលនៅលើគល់តម្រុយ និងកំពូលជាប់គល់តម្រុយនីមួយៗមាន $(1,4,0), (-1,-5,2), (-1,2,-1)$ ៕

25.ប្រើទ្រឹស្តីមាឌ ស្រាយបញ្ជាក់ថាហេតុអ្វីដេទែមីណង់ 3×3 មាន $\det(A)=0$ កាលណាវាគ្មានម៉ាទ្រីសប្រាស។

26. តាង S គឺជាប្រលេឡូក្រាម កំណត់ដោយវ៉ិចទ័រ $b_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ ហើយតាង $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ ។ រកផ្ទៃក្រឡានៃរូបភាព S ក្រោមបម្លែល $x \mapsto Ax$ ។

27. អនុវត្តតាមតាមលំហាត់26 ជាមួយ $b_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ហើយតាង $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ។

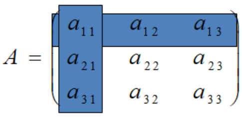
28. ចូររករូបមន្តផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ដែលមានកំពូល 0 v_1 និង v_2 ក្នុង R^2 ។

29. បង្ហាញថា រូបមន្តផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណដែលមានកំពូល (x_1,y_1) , (x_2,y_2) និង (x_3,y_3) ក្នុង R^2

$$A=\frac{1}{2}\times\det\begin{bmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{bmatrix}$$

៣.៨.មីន័រ កូហ្វាក់ទ័រ និងអែដជយ (Minors, Cofactors, Ad joint)

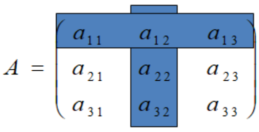
គេឱ្យម៉ាទ្រីសៈ $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$



ម៉ាទ្រីស Minor , $M_{11}=\begin{pmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$

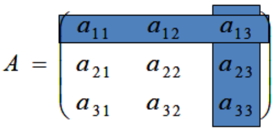
Minorនៃ $a_{11}=|M_{11}|=a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}$

ម៉ាទ្រីសMinor , $M_{12}=\begin{pmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{pmatrix}$



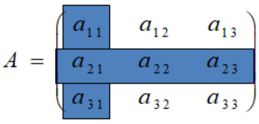
Minorនៃ $a_{12}=|M_{12}|=a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23}$

ម៉ាទ្រីសMinor , $M_{13}=\begin{pmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{pmatrix}$



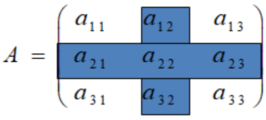
Minor នៃ $a_{13}=|M_{13}|=a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}$

ម៉ាទ្រីសMinor , $M_{21}=\begin{pmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$



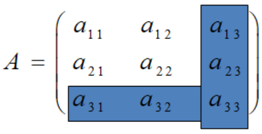
Minor នៃ $a_{21}=|M_{21}|=a_{12}a_{33}-a_{32}a_{13}$

ម៉ាទ្រីសMinor , $M_{22}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{pmatrix}$



Minor នៃ $a_{22}=|M_{22}|=a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13}$

ម៉ាទ្រីសMinor , $M_{33}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$



Minor នៃ $a_{33}=|M_{33}|=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$

ម៉ាទ្រីសនៃ Minors : $\begin{pmatrix}|M_{11}| & |M_{12}| & |M_{13}|\\ |M_{21}| & |M_{22}| & |M_{23}|\\ |M_{31}| & |M_{32}| & |M_{33}|\end{pmatrix}$

ចំណាំ៖ Minor គឺទម្រង់ខ្លីដេទែមីណង់ នៃ ម៉ាទ្រីសMinor រៀងគ្នា។

សញ្ញាMinor ត្រូវបានហៅថា Cofactor។

Cofactor នៃធាតុនៅក្នុង i^{th} ជួរដេក j^{th} ជួរឈរ គឺតាងដោយ C_{ij}

$$C_{ij}=(-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right|$$

$$\text{ម៉ាទ្រីសនៃ } Cofactors=\begin{pmatrix}|M_{11}| & -|M_{12}| & |M13|\\ -|M_{21}| & |M_{22}| & -|M_{23}|\\ |M_{31}| & -|M_{32}| & |M_{33}|\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{pmatrix}$$

Adjoint នៃម៉ាទ្រីស A គឺជាបំលែងនៃម៉ាទ្រីសCofactorរបស់វា។ វាគឺតាងដោយ $adj\,A$

$$\text{adj (A)} = C^T=\begin{pmatrix}C_{11} & C_{21} & C_{31}\\ C_{12} & C_{22} & C_{32}\\ C_{13} & C_{23} & C_{33}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}|M_{11}| & -|M_{21}| & |M_{31}|\\ -|M_{12}| & |M_{22}| & -|M_{32}|\\ |M_{13}| & -|M_{23}| & |M_{33}|\end{pmatrix}$$

៣.៩. ថ្នាក់នៃអែដចយ (Classical Adjoint)

តាង $A=\left[a_{ij}\right]$ មានម៉ាទ្រីស $n\times n$ នៅលើ K និង តាង A_{ij} បញ្ជាក់ពីCofactor នៃ a_{ij} ។ Classical Adjoint នៃ A តាងដោយ $adj\,A$ គឺជាបំលែងនៃម៉ាទ្រីស Cofactorនៃ A ។ គឺ

$$adj\,A=\left[A_{ij}\right]^T$$

យើងនិយាយថា “Classical adjoint” ជំនួសអោយងាយ “adjiont” ពីព្រោះ ពាក្យ “adjiont” បច្ចុប្បន្ន ត្រូវបានប្រើសម្រាប់គំនិតខុសគ្នាទាំងស្រុង។

ឧទាហរណ៍១ តាង $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -4\\ 0 & -4 & 2\\ 1 & -1 & 5\end{bmatrix}$ ។រក Cofactor នៃ 9 ធាតុ នៃ A ខាងក្រោម៖

$$A_{11}=+\begin{vmatrix}-4 & 2\\ -1 & 5\end{vmatrix}=-18\,,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 5\end{vmatrix}=2\;,\quad A_{13}=+\begin{vmatrix}0 & -4\\ 1 & -1\end{vmatrix}=4$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}3 & -4\\ -1 & 5\end{vmatrix}=-11\,,\quad A_{22}=+\begin{vmatrix}2 & -4\\ 1 & 5\end{vmatrix}=14\;,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=5$$

$$A_{31}=+\begin{vmatrix}3 & -4\\ -4 & 2\end{vmatrix}=-10\,,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & -4\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-4\;,\quad A_{33}=+\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & -4\end{vmatrix}=-8$$

ការបំលែងម៉ាទ្រីស Cofactor ខាងលើដែលទិន្នផលទៅជា Classical adjiont នៃ A នោះគឺ

$$adj\,A=\begin{bmatrix}-18 & -11 & -10\\ 2 & 14 & -4\\ 4 & 5 & -8\end{bmatrix}$$

ឧទាហរណ៍ទី២ គេឱ្យ $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 5\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$ ។ រកម៉ាទ្រីសច្រាស A^{-1}

តាមរូបមន្ត $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times adj(A) \quad that\ |A|\neq 0$

$$|A|=4+0-12-(0-10+3)=-8+7=-1$$

$$A_{11}=+\begin{vmatrix}2 & 5\\ -1 & 1\end{vmatrix}=7\ ,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}3 & 5\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-3\ ,\quad A_{13}=+\begin{vmatrix}3 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-3$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}1 & 4\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-5\ ,\quad A_{22}=+\begin{vmatrix}2 & 4\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2\ ,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}=2$$

$$A_{31}=+\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\end{vmatrix}=-3\ ,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 5\end{vmatrix}=2\ ,\quad A_{33}=+\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=1$$

$$adj\,A=\begin{bmatrix}7 & -5 & -3\\ -3 & 2 & 2\\ -3 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

គេបាន ម៉ាទ្រីសច្រាស

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}7 & -5 & -3\\ -3 & 2 & 2\\ -3 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-7 & 5 & 3\\ 3 & -2 & -2\\ 3 & -2 & -1\end{bmatrix}$$

ឧទាហរណ៍ទី៣ មានម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ ។ គណនា $adj\,A$ និង A^{-1}

ចម្លើយ

គណនា $adj\,A$

$$A_{11}=+\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=2\ ,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-7\ ,\quad A_{13}=+\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=4$$

$$A_{11}=+\begin{vmatrix}2&2\\2&3\end{vmatrix}=2\ ,\qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}3&2\\1&3\end{vmatrix}=-7\ ,\qquad A_{13}=+\begin{vmatrix}3&2\\1&2\end{vmatrix}=4$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}=1\ ,\qquad A_{22}=+\begin{vmatrix}2&2\\1&3\end{vmatrix}=4\ ,\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=-3$$

$$A_{31}=+\begin{vmatrix}1&2\\2&2\end{vmatrix}=-2\ ,\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}2&2\\3&2\end{vmatrix}=2\ ,\qquad A_{33}=+\begin{vmatrix}2&1\\3&2\end{vmatrix}=1$$

គេបាន $adj\,A=\begin{bmatrix}2&1&-2\\-7&4&2\\4&-3&1\end{bmatrix}$

គណនា A^{-1}

យើងមាន $A=\begin{pmatrix}2&1&2\\3&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}$

តាមរូបមន្ត $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\times adj(A)\qquad that\ |A|\neq 0$

$$|A|=(12+2+12)-(4+8+9)=26-21=5$$

$$adj\,A=\begin{bmatrix}2&1&-2\\-7&4&2\\4&-3&1\end{bmatrix}$$

គេបាន $A^{-1}=\dfrac{1}{5}\begin{bmatrix}2&1&-2\\-7&4&2\\4&-3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}&\frac{1}{5}&-\frac{2}{5}\\-\frac{7}{5}&\frac{4}{5}&\frac{2}{5}\\\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}&\frac{1}{5}\end{bmatrix}$

ដូចនេះ $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}&\frac{1}{5}&-\frac{2}{5}\\-\frac{7}{5}&\frac{4}{5}&\frac{2}{5}\\\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}&\frac{1}{5}\end{bmatrix}$

៣.១០. អនុវត្តន៍សមីការលីនេអ៊ែរ ច្បាប់របស់ Cramer

ទ្រឹស្ដីបទ ៣.១០ ប្រព័ន្ធ(ការេ) $AX = B$ មានដំណោះស្រាយ លុះត្រាតែ $D \neq 0$ ។ នៅក្នុងករណីដំណោះស្រាយប្លែក ត្រូវបានផ្ដល់ដោយ

$$x_1 = \frac{N_1}{D}, \quad x_2 = \frac{N_2}{D}, \quad ..., \quad x_n = \frac{N_n}{D}$$

$$N_1 = \det(A_1), \quad N_2 = \det(A_2), \quad ..., \quad N_n = \det(A_n)$$

ទ្រឹស្ដីបទ ៣.១១ ប្រព័ន្ធការេស្មើសាច់មួយ $AX = 0$ មានដំណោះស្រាយ មិនស្មើសូន្យ លុះត្រាតែ $D = |A| = 0$

ឧទាហរណ៍១ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ ប្រើដេទែមីណង់ $\begin{cases} x+y+z=5 \\ x-2y-3z=-1 \\ 2x+y=z=3 \end{cases}$ ។

ចម្លើយ

ដំបូងគណនាមេគុណនៃម៉ាទ្រីស D

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2-6+1+4+3+1 = 5$$

ពីព្រោះ $D \neq 0$ មានប្រពន្ធដំណោះស្រាយពិសេសដើម្បីគណនាយើងជំនួសរៀងគ្នា មេគុណនៃនៅក្នុងម៉ាទ្រីសនៃមេគុណ x, y, z ដោយ N_x, N_y, N_z លក្ខខណ្ឌថេរទិន្នផលនេះ

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10-9-1+6+15-1 = 20$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -10$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 15$$

ដូច្នេះដំណោះស្រាយតែមួយគត់នៃប្រព័ន្ធគឺ

$$x = \frac{D_x}{D} = 4 \qquad y = \frac{D_y}{D} = -2 \qquad z = \frac{D_z}{D} = 3$$

នោះគឺជាវ៉ិចទ័រចម្លើយ $(4, -2, 3)$

ឧទាហរណ៍ទី២ ប្រើ Cramer គឺជាក្បួនដោះស្រាយសម្រាប់ y ដោយមិនចាំបាច់ដោះស្រាយសម្រាប់ x, z និង w ដែលមិនស្គាល់

$$\begin{cases}4x+y+z+w=6\\3x+7y-z+w=1\\7x+3y-5z+8w=-3\\x+y+z+2w=3\end{cases}$$

ចម្លើយ

ដំបូងគណនាមេគុណនៃម៉ាទ្រីស D

$$D=\begin{vmatrix}4&1&1&1\\3&7&-1&1\\7&3&-5&8\\1&1&1&2\end{vmatrix}=\text{.........}$$ គិតដោយខ្លួនឯង

$$D_y=\begin{vmatrix}4&6&1&1\\3&1&-1&1\\7&-3&-5&8\\1&3&1&2\end{vmatrix}=\text{.........}$$ គិតដោយខ្លួនឯង

$$y=\frac{D_y}{D}=\text{....................}$$

នោះគឺជាវ៉ិចទ័រចម្លើយ

ឧទាហរណ៍៣ គេឱ្យកន្សោម $Ax=b$ ជាប្រព័ន្ធក្នុងឧទាហរណ៍ ២

(ក) ដោះស្រាយតាមក្បួន Cramer

(ខ) ដោះស្រាយដោយការលុបបំបាត់របស់ហ្គូស

(គ) តើវិធីសាស្ត្រណាដែលទាក់ទងនឹងការគណនាងាយ?

៣.១១. ប្លុកម៉ាទ្រីសនិងកត្តាកំណត់

ទ្រឹស្តីបទខាងក្រោមគឺជាលទ្ធផលចម្បងនៃផ្នែកនេះ

ទ្រឹស្តីបទ ៣.១២៖ សន្មត់ថា M គឺជាម៉ាទ្រីសការេរាងត្រីកោណខាងលើ (ត្រីកោណក្រោម) ដែលមានប្លុកអង្កត់ទ្រូង $A_1, A_2, ..., A_n$ នោះ ៖

$$\det(M)=\det(A_1)\det(A_2)...\det(A_n)$$ ។

សូមកត់សម្គាល់ថា M គឺជាម៉ាទ្រីសការេរាងត្រីកោណខាងលើ (ត្រីកោណក្រោម) វាយតម្លៃកត្តាកំណត់នៃប្លុកអង្កត់ទ្រូងនីមួយៗ

ឧទាហរណ៍១ រកដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីស $M=\begin{bmatrix}2&3&4&7&8\\-1&5&3&2&1\\0&0&2&1&5\\0&0&3&-1&4\\0&0&5&2&6\end{bmatrix}$

គេបាន $M = \left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & 3 & 4 & 7 & 8 \\ -1 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 6 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$

M គឺជាម៉ាទ្រីសត្រីកោណលើ ហេតុនេះតំលៃកំណត់នៃប្លុកអង្កត់ទ្រូងនីមួយៗ

$|M_{11}| = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = 10 + 3 = 13$

$|M_{22}| = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix} = -12 + 20 + 30 + 25 - 16 - 18 = 29$

គេបាន $|M| = |M_{11}| \times |M_{22}| = 13 \times 29 = 377$

ឧទាហរណ៍១ រកដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីស $M = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

$$M = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{cc|c|cc} 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 9 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 5 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right| = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$$

M គឺជាម៉ាទ្រីសខ្មៅ ត្រីកោណក្រោម ហេតុនេះតំលៃកំណត់នៃប្លុកអង្កត់ទ្រូងនីមួយៗ

$|M_{11}| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 8 = 7$

$|M_{22}| = |2| = 2$

$|M_{33}| = \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 21 = 3$

នោះ $\det M = |M| = |M_{11}| \times |M_{22}| \times |M_{33}| = 7(2)(3) = 42$

ឧទាហរណ៍៣ កំណត់តម្លៃដេទែមីណង់នីមួយៗខាងក្រោម៖

$$a.\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ -2 & 3 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \qquad b.\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \qquad c.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

កំណត់សំគាល់ ៖ សន្មត់ថា $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ ដែល A, B, C, D គឺជាម៉ាទ្រីសការេ ។ ជាទូទៅវាមិនពិតទេ $|M| = |A||D| - |B||C|$ ។

៣.១២. មាឌ

កត្តាកំណត់ទាក់ទងទៅនឹងសញ្ញាណនៃតំបន់និងកម្រិតសំឡេងដូចខាងក្រោម $u_1, u_2, ..., u_n$ ក្នុង $\mathbb{R}^n$ ត្រូវវ៉ិចទ័រ អនុញ្ញាតឱ្យ S ជាប៉ារ៉ាឡែលប៉ារ៉ាឡែលដែលកំណត់ដោយវ៉ិចទ័រ។

នោះ $S = \{a_1u_1 + a_2u_2 + ... + a_nu_n : 0 \le a_i \le 1\ ,\ i = 1, ..., n\}$ ហើយជា $n = 2, S$ (ជាប៉ារ៉ាឡែល) $V(S)$ រកតម្លៃ S នៅពេល $n = 2$ នោះ តម្លៃដាច់ខាតនៃ $V(S) = Absolute\ value\ of\ \det(A)$ ដែល A គឺជាម៉ាទ្រីសដែលមានជួរដេក $u_1, u_2, ..., u_n$ ជាទូទៅប្រសិនបើនិងប្រសិនបើវ៉ិចទ័រ $V(S) = 0$ កុំបង្កើតប្រព័ន្ធកូអរដោនេសម្រាប់ $\mathbb{R}^n$ (i.e. ប្រសិនបើនិងប្រសិនបើវ៉ិចទ័រពឹងផ្អែកលើលីនេអ៊ែរ)

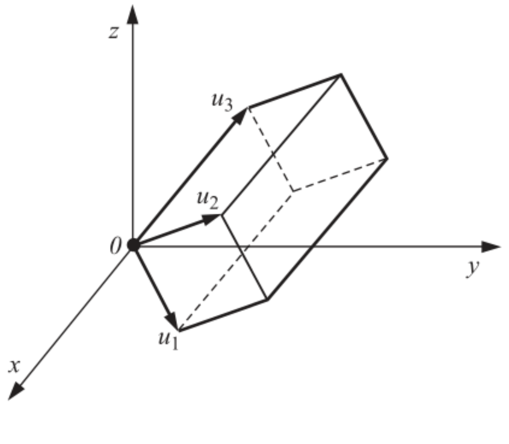
ឧទាហរណ៍១ រកមាឌនៃប្រលេពីប៉ែតកែងកំណត់ដោយវ៉ិចទ័របើ

$u_1 = (1,1,0), u_2 = (1,1,1), u_3 = (0,2,3)$ នេះ $V(S), S\ in\ \mathbb{R}^3$ (រូបភាព១)

មាឌកំណត់នៃម៉ាទ្រីសដែលមានជួរដេក

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 0 + 0 - 0 - 2 - 3 = -2$$

ដូចនេះ $V(S) = |-2| = 2$



ឧទាហរណ៍២ រកមាឌ $V(S)$ នៃប្រលេពីប៉ែត នោះ S ក្នុង R^3 កំណត់ដោយវ៉ិចទ័រ

(a). $u_1=(1,1,1)$, $u_2=(1,3,-4)$, $u_3=(1,2,-5)$

(b). $u_1=(1,2,4)$, $u_2=(2,1,-3)$, $u_3=(5,7,9)$

$V(S)$ គឺជាតម្លៃដាច់ខាតនៃមាឌកំណត់នៃម៉ាទ្រីស M ដែលជួរដេកគឺជាវ៉ិចទ័រផ្តល់។ ដូចនេះ

$$(a)\quad |M|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -4\\ 1 & 2 & -5\end{vmatrix}=-15-4+2-3+8+5=-7$$

$\Rightarrow V(s)=|-7|=7$

$$(b)\quad |M|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 1 & -3\\ 5 & 7 & 9\end{vmatrix}=9-30+56-20+21-36=0$$

$\Rightarrow V(s)=|0|=0$

ឧទាហរណ៍៣ រកមាឌ $V(S)$ នៃប្រលេពីប៉ែត នោះ S ក្នុង R^3 កំណត់ដោយវ៉ិចទ័រ

(a). $u_1=(1,2,-3)$, $u_2=(3,4,-1)$, $u_3=(2,-1,5)$

(b). $u_1=(1,1,3)$, $u_2=(1,-2,-4)$, $u_3=(4,1,5)$

$V(S)$ គឺជាតម្លៃដាច់ខាតនៃមាឌកំណត់នៃម៉ាទ្រីស M ដែលជួរដេកគឺជាវ៉ិចទ័រផ្តល់។ ដូចនេះ

$$(a)\quad |M|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 4 & -1\\ 2 & -1 & 5\end{vmatrix}=20-4+9+24-1-30=18$$

$\Rightarrow V(s)=|18|=18$

$$(b)\quad |M|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & -2 & -4\\ 4 & 1 & 5\end{vmatrix}=-10-16+3+24+4-5=0$$

$\Rightarrow V(s)=|0|=0$

ឧទាហរណ៍៤ រកមាឌ $V(S)$ នៃប្រលេពីប៉ែត នោះ S ក្នុង R^4 កំណត់ដោយវ៉ិចទ័រ

$u_1=(1,-2,5,-1)$, $u_2=(2,1,-2,1)$, $u_3=(3,0,1,-2)$, $u_4=(1,-1,4,-1)$

$V(S)$ គឺជាតម្លៃដាច់ខាតនៃមាឌកំណត់នៃម៉ាទ្រីស M ដែលជួរដេកគឺជាវ៉ិចទ័រផ្តល់។ ដូចនេះ

$$|M|=\begin{vmatrix}1 & -2 & 5 & -1\\ 2 & 1 & -2 & 1\\ 3 & 0 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 4 & -1\end{vmatrix}=17$$

$$\Rightarrow V(s)=|17|=17$$

ដេទែមីណង់នៃប្រមាណវិធីលីនេអ៊ែរ

តាង F ជាប្រតិបត្តិករលីនេអ៊ែរលើវ៉ិចទ័រ V ដែលមានវិមាត្រកំណត់។ សូមឱ្យ A ជាតំណាងម៉ាទ្រីសនៃ F ដែលទាក់ទងទៅនឹងមូលដ្ឋានមួយចំនួន S នៃ V បន្ទាប់មកយើងកំណត់កត្តាកំណត់របស់ F សរសេរ $\det(F)$ ៖ $\det(F)=|A|$

ទ្រឹស្តីបទ៨.១៣ តាង F និង G ជាសញ្ញាប្រមាណវិធីលីនេអ៊ែរនៅលើវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ V បន្ទាប់មក

i. $\det(F\circ G)=\det(F)\det(G)$

ii. F មិនអាចបញ្ច្រាសបានទេប្រសិនបើ $\det(F)\neq 0$ ។

ឧទាហរណ៍១ តាង F ជាប្រមាណវិធីលីនេអ៊ែរ(Linear operation)នៅក្នុង $\mathbb{R}^3$ និង តាង A ជាម៉ាទ្រីសដែលតំណាងអោយ F ទាក់ទងទៅនឹងគោលនៃ $\mathbb{R}^3$

$$F(x,y,z)=(2x-4y+z,x-2y+3z,5x+y-z)$$

និង $A=\begin{bmatrix}2 & -4 & 1\\ 1 & -2 & 3\\ 5 & 1 & -1\end{bmatrix}$

នោះ $\det(F)=|A|=4-60+1+10-6-4=-55$

ឧទាហរណ៍២ រកដេទែមីណង់នៃ $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ កំណត់ដោយ

$$F(x,y,z)=(x+3y-4z,2y+7z,x+5y-3z)$$

ដេទែមីណង់ឬប្រមាណវិធីលីនេអ៊ែរ F គឺស្មើនឹងដេទែមីណង់ឬម៉ាទ្រីសដែលតំណាងអោយ F ។ ដូចនេះដំបូងរកម៉ាទ្រីស A ដែលតំណាងអោយ F នៅក្នុងគោលធម្មតាដែលជួរដេករបស់វា ជាមេគុណនៃ (x,y,z) រៀងគ្នា។

គេបាន $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -4\\ 0 & 2 & 7\\ 1 & 5 & -3\end{bmatrix}$

ដូចនេះ $\det(F)=|A|=-6+21+0+8-35-0=-8$

ឧទាហរណ៍៣ រកដេទែមីណង់នៃបម្លែងលីនេអ៊ែរនីមួយៗខាងក្រោម៖

(a) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ កំណត់ដោយ $T(x,y)=(2x-9y,3x-5y),$

ដេទែមីណង់ឬប្រមាណវិធីលីនេអ៊ែរ F គឺស្មើនឹងដេទែមីណង់ឬម៉ាទ្រីសដែលតំណាងអោយ F ។

ដូចនេះដំបូងរកម៉ាទ្រីស A ដែលតំណាងអោយ F នៅក្នុងគោលធម្មតាដែលជួរដេករបស់វា ជាមេគុណនៃ (x,y) រៀងគ្នា។

គេបាន $A=\begin{bmatrix}2 & -9\\ 3 & -5\end{bmatrix} \Rightarrow \det(F)=|A|=\begin{vmatrix}2 & -9\\ 3 & -5\end{vmatrix}=-10+18=8$

ដូចនេះ $\det(F)=|A|=8$

(b) $\mathrm{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ កំណត់ដោយ $F(x,y,z)=(3x-2z,5y+7z,x+y+z)$,

ដេទែមីណង់ឬប្រមាណវិធីលីនេអ៊ែរ F គឺស្មើនឹងដេទែមីណង់ឬម៉ាទ្រីសដែលតំណាងអោយ F ។

ដូចនេះដំបូងរកម៉ាទ្រីស A ដែលតំណាងអោយ F នៅក្នុងគោលធម្មតាដែលជួរដេករបស់វា ជាមេគុណនៃ (x,y,z) រៀងគ្នា។

គេបាន $A=\begin{bmatrix}3 & 0 & -1\\ 0 & 5 & 7\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \det(F)=|A|=\begin{vmatrix}3 & 0 & -1\\ 0 & 5 & 7\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=15+0+0+5-21=-1$

ដូចនេះ $\det(F)=|A|=-1$

(c) $\mathrm{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ កំណត់ដោយ $F(x,y,z)=(2x+7y-4z,4x-6y+2z)$.

ដេទែមីណង់ឬប្រមាណវិធីលីនេអ៊ែរ F គឺស្មើនឹងដេទែមីណង់ឬម៉ាទ្រីសដែលតំណាងអោយ F ។

ដូចនេះដំបូងរកម៉ាទ្រីស A ដែលតំណាងអោយ F នៅក្នុងគោលធម្មតាដែលជួរដេករបស់វា ជាមេគុណនៃ (x,y,z) រៀងគ្នា។

គេបាន $A=\begin{bmatrix}2 & 7 & -4\\ 4 & -6 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \det(F)=|A|=\begin{vmatrix}2 & 7 & -4\\ 4 & -6 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0$

ដូចនេះ $\det(F)=|A|=0$

ជំពូកទី៤ អង្កត់ទ្រូងកម្ម

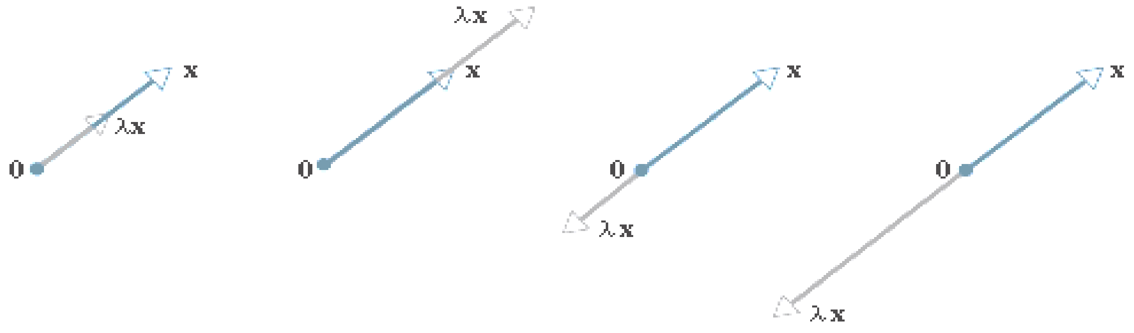
៤.១. តម្លៃផ្ទាល់ និង វ៉ិចទ័រផ្ទាល់

និយមន័យ៤.១

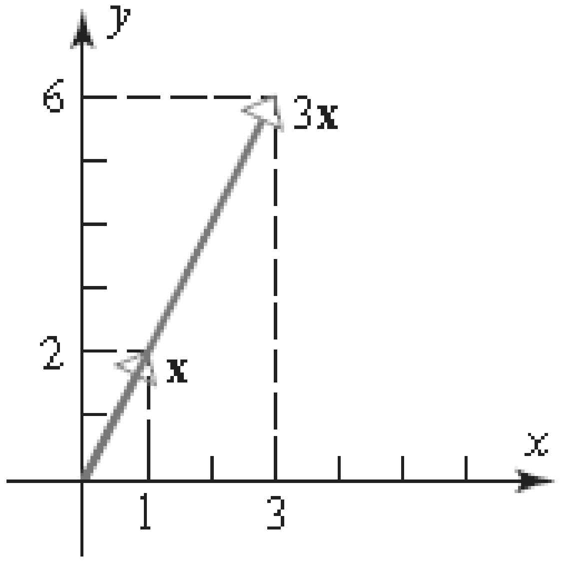
បើ A ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ $n\times n$ នោះវ៉ិចទ័រមិនសូន្យ X នៃ R^n ហៅថា **វ៉ិចទ័រផ្ទាល់** នៃម៉ាទ្រីស A កាលណា

$$AX=\lambda X$$

ចំពោះតម្លៃ λ ណាមួយជាចំនួនថេរ។ តម្លៃស្កាលែ λ ហៅថា **តម្លៃផ្ទាល់** នៃម៉ាទ្រីស A ហើយវ៉ិចទ័រ X ត្រូវបានហៅថា **វ៉ិចទ័រផ្ទាល់** ដែលត្រូវនឹង **តម្លៃផ្ទាល់** λ ។



(a) $0\le\lambda\le1$ (b) $\lambda\ge1$ (c) $-1\le\lambda\le0$ (d) $\lambda\le-1$



ទ្រឹស្តីបទ ៤.១

បើ A ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ $n \times n$ មួយនោះតម្លៃផ្ទាល់ λ នៃ R^n នៃម៉ាទ្រីស A កាលណាវាផ្ទៀតផ្ទាត់ $\det(\lambda I - A)X = 0$ $\lvert \lambda I - A \rvert X = 0$ សមីការនេះហៅថា សមីការសម្គាល់នៃ A ។

ឧទាហរណ៍ទី១៖ វ៉ិចទ័រផ្ទាល់នៃម៉ាទ្រីស 2×2

$$\text{វ៉ិចទ័រ } \mathrm{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ គឺជាវ៉ិចទ័រផ្ទាល់នៃ } A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

ដែលត្រូវនឹងតម្លៃផ្ទាល់ $\lambda = 3$ គេបាន

$$A\mathrm{x} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3\mathrm{x}$$

តាមលក្ខណៈធរណីមាត្រ ផលគុណនៃ A បានមកពីវ៉ិចទ័រដោយផលគុណកត្តានឹង3

ឧទាហរណ៍ទី២ រកតម្លៃផ្ទាល់ (Eigenvalue)

ក្នុងឧទាហរណ៍ទី១យើងបានរកឃើញថា $\lambda = 3$ គឺជាតម្លៃផ្ទាល់នៃម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

ប៉ុន្តែយើងមិនបានពន្យល់ពីវិធីសាស្ត្រក្នុងការរកវាទេ។ ប្រើសមីការសម្គាល់ (characteristic equation)ដើម្បីរកគ្រប់តម្លៃផ្ទាល់នៃម៉ាទ្រីសនេះ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្តក្នុងទ្រឹស្តីបទខាងលើ តម្លៃផ្ទាល់នៃ A គឺជាចម្លើយនៃសមីការ $\det(\lambda I - A) = 0$

គេអាចសរសេរ៖

$$\begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

គេបាន $(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$

នោះបង្ហាញអោយឃើញថា តម្លៃផ្ទាល់នៃ A គឺ $\lambda = 3$ និង $\lambda = -1$ ។ ដូចនេះ បន្ថែមពីតម្លៃផ្ទាល់ $\lambda = 3$ នៅក្នុងឧទាហរណ៍ទី១ យើងបានរកឃើញតម្លៃផ្ទាល់មួយទៀតគឺ $\lambda = -1$

ឧទាហរណ៍ទី៣៖ មានតម្លៃផ្ទាល់នៃម៉ាទ្រីស 3×3 ។

$$\text{រកតម្លៃផ្ទាល់នៃ } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

ដំណោះស្រាយ

ពហុធាសម្គាល់នៃ A គឺ

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 4 & -17 & \lambda - 8 \end{bmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4$$

តម្លៃផ្ទាល់នៃ A ត្រូវតែផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការដឺក្រេទី៣

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = 0 \qquad (5)$$

$$(\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$$

នោះដំណោះស្រាយនៅសល់របស់សមីការ(5)ត្រូវនឹងសមីការដឺក្រេទី២

$$(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$$

ដែលអាចដោះស្រាយតាមរយៈរូបមន្តដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី២ ដូចនេះ តម្លៃផ្ទាល់នៃ A គឺ

$$\lambda = 4, \lambda = 2 + \sqrt{3} \text{ និង } \lambda = 2 - \sqrt{3}$$

ឧទាហរណ៍ទី៤៖ តម្លៃផ្ទាល់នៃម៉ាទ្រីសត្រីកោណលើ (Eigenvalues of a Upper Triangular Matrix)

រកតម្លៃផ្ទាល់នៃម៉ាទ្រីសត្រីកោណលើ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

ដំណោះស្រាយ

រំលឹកឡើងវិញពីដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីសត្រីកោណគឺជាផលគុណនៃធាតុដែលដែលនៅក្នុងអង្កត់ទ្រូង (ទ្រឹស្តីបទ2.1.2) គេបាន៖

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ 0 & \lambda - a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ 0 & 0 & \lambda - a_{33} & -a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - a_{44} \end{bmatrix}$$

$$= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33})(\lambda - a_{44})$$

ដូចនេះ សមីការសម្គាល់គឺ: $(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33})(\lambda - a_{44}) = 0$

និងតម្លៃផ្ទាល់:

$$\lambda = a_{11}, \lambda = a_{22}, \lambda = a_{33}, \lambda = a_{44}$$

ដែលពិតប្រាកដជាធាតុនៃអង្កត់ទ្រូនៃម៉ាទ្រីស A

ទ្រឹស្តីបទ៖ បើ A ជាម៉ាទ្រីសត្រីកោណលើ(ត្រីកោណក្រោម)នោះតម្លៃផ្ទល់នៃម៉ាទ្រីសធ A គឺជាធាតុរបស់អង្កត់នៃម៉ាទ្រីស A ។

ឧទាហរណ៍៥ តម្លៃផ្ទាល់នៃម៉ាទ្រីសត្រីកោណក្រោម(Eigenvalues of a Lower Triangular Matrix)៖
តាមរយៈការសង្កេត តម្លៃផ្ទាល់នៃម៉ាទ្រីសត្រីកោណក្រោម

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ -1 & \frac{2}{3} & 0\\ 5 & -8 & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$ គឺ $\lambda=\frac{1}{2},\lambda=\frac{2}{3}$ និង $\lambda=-\frac{1}{4}$

ទ្រឹស្តីបទ៥.១.៣ បើ A ជាម៉ាទ្រីសទំហំ $n\times n$ នោះសំណើរខាងក្រោមសមមូលគ្នា។

ក. λ ជាតម្លៃផ្ទាល់នៃ A

ខ. λ ជាចម្លើយមួយនៃសមីការសម្គាល់ $\det(\lambda I-A)=0$

គ. ប្រព័ន្ធសមីការ $\det(\lambda I-A)x=0$ មានចម្លើយច្រើនរាប់មិនអស់

ឃ. មានវ៉ិចទ័រមិនសូន្យ x ដែល $Ax=\lambda x$ ។

៥.២. ការរកវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ និង គោលនៃលំហផ្ទាល់

និយមន័យ៥.២ តាង A ជាម៉ាទ្រីសទំហំ $n\times n$ និងជាតម្លៃផ្ទាល់នៃ A ។ លំហចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការ $(\lambda I-A)x=0$ ហៅថាលំហផ្ទាល់នៃ A ដែលត្រូវនិងតម្លៃផ្ទាល់ λ ហើយតាងដោយ E_λ ។

ឥឡូវនេះយើងដឹងពីរបៀបរកតម្លៃផ្ទាល់នៃម៉ាទ្រីស យើងនិងពិចារណាលើបញ្ហានៃការរកវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនិងវា។ តាមនិយមន័យវ៉ិចទ័រផ្ទាល់នៃ A ដែលត្រូវនិងតម្លៃផ្ទាល់និងតម្លៃ λ គឺជាវ៉ិចទ័រមិនសូន្យដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $(\lambda I-A)x=0$ ដូច្នេះយើងអាចរកវ៉ិចទ័រផ្ទាល់នៃ A ដែលត្រូវនិង λ វាអាចបង្ហាញដូចជា:

1. លំហរទទេរនៃម៉ាទ្រីស $\lambda I-A$
2. *Kernel* នៃប្រមាណវិធីលើម៉ាទ្រីស $T_{\lambda I-A}:R^n\to R^n$
3. សំណុំនៃវ៉ិចទ័រចំពោះ $Ax=\lambda x$ ។

ឧទាហរណ៍១ រកគោលនៃលំហផ្ទាល់នៃម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}$

ចម្លើយ: ទម្រង់សមីការនៃ A គឺ

$$\begin{vmatrix}\lambda+1 & -3\\ -2 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)-6=(\lambda-2)(\lambda+3)=0$$

ដូច្នេះ តម្លៃផ្ទាល់នៃ A គឺ $\lambda = 2$, $\lambda = -3$ ។

ដូច្នេះមានតម្លៃផ្ទាល់ពីរនៃ A ដែលមួយសម្រាប់តម្លៃផ្ទាល់។

តាមនិមយន័យៈ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ គឺជាវ៉ិចទ័រផ្ទាល់នៃ A ដែលត្រូវនិងតម្លៃផ្ទាល់ λ

លុះត្រាតែ $(\lambda I - A)x = 0$ នោះគេបាន

$$\begin{bmatrix} \lambda+1 & -3 \\ -2 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ក្នុងករណីដែល $\lambda = 2$ សមីការនេះក្លាយជា

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ដំណោះស្រាយទូទៅរបស់សមីរនេះគឺ $x_1 = t, \quad x_2 = t$

(ផ្ទៀងផ្ទាត់) ចាប់ពីនេះអាចត្រូវបានសរសេរក្នុងទម្រង់ម៉ាទ្រីសជា $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

តាមនោះគេបាន $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ គឺជាគោលនៃលំហផ្ទាល់ដែលត្រូវនិង $\lambda = 2$ ។

យើងទុកវាអោយអ្នកធ្វើតាមគម្រូនៃការគណនាទាំងនេះនិងបង្ហាញថា ជាគោលនៃលំហផ្ទាល់ដែលត្រូវនិង $\lambda = -3$ ។

ឧទាហរណ៍២ រកគោលនៃលំហផ្ទាល់នៃម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

ចម្លើយ ក្នុងឧទាហរណ៍មួយយើងបានរកឃើញទម្រង់នៃ $(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$

អ្វីដែលយើងទទួលបានគឺ $\lambda = 3$ និង $\lambda = -1$ ។ ដូច្នេះមានលំហផ្ទាល់ពីរនៃ A ដែលត្រូវនិងតម្លៃផ្ទាល់ទាំងនេះ។

តាមនិយមន័យ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ គឺជាវ៉ិចទ័រផ្ទាល់នៃ A ត្រូវនិងតម្លៃផ្ទាល់ λ លុះត្រាតែ x ជាតម្លៃរ៉ាប់មិនអស់នៃ $(\lambda I - A)x = 0$

នោះគឺ $\begin{bmatrix} \lambda-3 & 0 \\ -8 & \lambda+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

បើ $\lambda = 3$ បន្ទាប់មកសមីការនេះក្លាយជា $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

ដំណោះស្រាយទូទៅរបស់សមីការនេះគឺ $x_1 = \frac{1}{2}t, \qquad x_2 = t$

(ផ្ទៀងផ្ទាត់) ឬនៅក្នុងទម្រង់ម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

ដូច្នេះ $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ គឺជាគោលនៃលំហផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹង $\lambda = 3$

បើ $\lambda = -1$ គេបាន $\begin{bmatrix} \lambda-3 & 0 \\ -8 & \lambda+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ បន្ទាប់មកសមីការនេះក្លាយជា $\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

ដំណោះស្រាយទូទៅរបស់សមីការនេះគឺ $x_1 = 0, \ x_2 = t$

(ផ្ទៀងផ្ទាត់) ឬនៅក្នុងទម្រង់ម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

ដូច្នេះ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ គឺជាគោលនៃលំហផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹង $\lambda = -1$

ឧទាហរណ៍៣៖ វ៉ិចទ័រផ្ទាល់និង គោលនៃលំហផ្ទាល់

រកគោលនៃលំហផ្ទាល់ $A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

ចម្លើយៈ ទម្រង់សមីការនៃ A គឺ $|\lambda I - A| = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = 0$$

ដូច្នេះ តម្លៃផ្ទាល់នៃ A គឺ $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ មានលំហផ្ទាល់ពីរនៃ A ។

តាមនិយមន័យ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ ជាវ៉ិចទ័រផ្ទៀងផ្ទាត់នៃ A ដែលត្រូវនិង λ លុះត្រា x ជាចម្លើយរ៉ាប់មិនអស់នៃ $(\lambda I - A)X = 0$ ក្នុងទម្រង់ម៉ាទ្រីស

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

ក្នុងករណី $\lambda = 2$ សមីការ(5)ក្លាយជា

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

លទ្ធផលនៃការដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការនេះប្រើវិធីហ្គោស(ផ្ទៀងផ្ទាត់)

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

តាង $x_3 = s$, $x_2 = t$, $x_1 = -s$

គេបាន $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-s\\t\\s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-s\\0\\s\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\t\\0\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$

ដូច្នេះវ៉ិចទ័រផ្ទាល់នៃ A ដែលត្រូវនឹង $\lambda = 2$ ជាវ៉ិចទ័រមិនសូន្យនៃទម្រង់វ៉ិចទ័រ

$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ និង $\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

វ៉ិចទ័រទាំងនេះមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ បានមកពីគោលមួយនៃលំហផ្ទាល់ដែលត្រូវនិង $\lambda = 2$ ។

ករណីបើ $\lambda = 1$ បន្ទាប់មក(5)ក្លាយជា

$$\begin{bmatrix}1&0&2\\-1&-1&-1\\-1&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

លទ្ធផលនៃការដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះ (ផ្ទៀងផ្ទាត់)។

$$\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

តាង $x_3 = s$ គេបាន $x_2 = s,\ x_1 = -2s$

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2s\\s\\s\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}$$

ដូច្នេះវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹង $\lambda = 1$ ជាវ៉ិចទ័រមិនសូន្យនៃទម្រង់

$$\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}$$

ដូច្នេះ វ៉ិចទ័រ $\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}$ ជាគោលនៃលំហផ្ទាល់ដែលត្រូវនិង $\lambda = 1$ ។

ឧទាហរណ៍៤៖ រកគោលលំហនៃម៉ាទ្រីស $L=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix}$

ពហុធាសម្គាល់ $\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 1\\ -1 & \lambda-2 & 1\\ 1 & 1 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)\left[(\lambda-2)^2-1\right]+\left[-(\lambda-2)-1\right]$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda-4)$$

រកតម្លៃផ្ទាលដោយប្រើ $|\lambda I-A|=0 \quad \Rightarrow (\lambda-1)^2(\lambda-4)=0$ គេបាន

$$\lambda_1=\lambda_1=1, \qquad \lambda_2=4$$

ដូច្នេះ L មានតម្លៃផ្ទាល់ $\lambda_1=1$ (ដែលមានពីរកត្តា) និង $\lambda_2=4$ (ដែលមានមួយកត្តា)។
ដើម្បីរកវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលផ្គុំដោយតម្លៃផ្ទាល់នីមួយៗយើងដោះស្រាយប្រព័ន្ធអូម៉ូសែន

$$(\lambda I-L)X=0$$

$$\begin{pmatrix}\lambda-2 & -1 & 1\\ -1 & \lambda-2 & 1\\ 1 & 1 & \lambda-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

- បើ $\lambda=4$ យើងកំណត់យកម៉ាទ្រីសបន្ថែមចំពោះប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរ

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -3\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & -3 & -3\\ 0 & -3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

តាង $x_3=t \quad \Rightarrow x_1=x_2=-t$

$$X=\begin{pmatrix}-t\\ -t\\ t\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$$

វ៉ិចទ័រណាមួយនៃទម្រង់ $t\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ គឺជាវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនិងតម្លៃផ្ទាល់ $\lambda = 4$។

ដូច្នេះ L កាត់បន្ទាត់ត្រង់គល់តម្រុយ។

- បើ $\lambda = 1$ម្តងទៀតយើងកំណត់យកម៉ាទ្រីសបន្ថែម និងរកសំណុំចម្លើយ

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

បន្ទាប់មកសំណុំចម្លើយមានប៉ារ៉ាម៉ែត្រពីរគឺ s និង t ព្រោះ $x_3 = s,\ x_2 = t$, $x_1 = -t + s$

ដូច្នេះ L បានមកពីសំណុំ $X = s\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

សំណុំនេះគឺប្លង់មួយកាត់គល់តម្រុយ។ ដូច្នេះផលគុណពីរតម្លៃផ្ទាល់មានពីរវ៉ិចទ័រផ្ទាល់មិន

អាស្រ័យ $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ និង $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ ដែលកំណត់ដោយប្លង់មិនប្រែប្រួល។

៤.៣. ស្វ័យគុណនៃម៉ាទ្រីស

ប្លង់នៃតម្លៃផ្ទាល់និងវ៉ិចទ័រផ្ទាល់នៃម៉ាទ្រីស A គឺបានរកឃើញវាគឺជាបញ្ហាសាមញ្ញក្នុងការរកតម្លៃផ្ទាល់និងវ៉ិចទ័រផ្ទាល់នៃស្វ័យគុណវិជ្ជមានណាមួយនៃ A។ ឧទាហរណ៍បើ λ ជាតម្លៃផ្ទាល់នៃ A ហើយ x ជាវ៉ិចទ័រដែលត្រូវនឹងវានោះ

$$A^2x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda(\lambda x) = \lambda^2 x$$

ដូច្នេះ λ^2 ជាតម្លៃផ្ទាល់នៃ A^2 និង x ជាវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនិងវា។

ជាទូទៅយើងបានលទ្ធផលដូចខាងក្រោម៖

ទ្រឹស្តីបទ៥.១.៤ បើ k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន , λ ជាតម្លៃផ្ទាល់នៃម៉ាទ្រីស A និង x ជាវ៉ិចទ័រដែលត្រូវនិងវានោះ λ^k និង x ជាវ៉ិចទ័រដែលត្រូវនិងវានោះ។

ឧទាហរណ៍៨៖ ស្វ័យគុណនៃម៉ាទ្រីស រកតម្លៃផ្ទាល់និងវ៉ិចទ័រផ្ទាល់នៃ A^7 ។

ក្នុងឧទាហរណ៍៧ យើងបានបង្ហាញថា តម្លៃផ្ទាល់នៃ $A = \begin{bmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$

គឺ $\lambda = 2$ និង $\lambda = 1$ បានពីទ្រឹស្តីបទ 5.1.4 ទាំងពីរ $\lambda = 2^7 = 128$ និង $\lambda = 1^7 = 1$ ជាតម្លៃផ្ទាល់នៃ A^7 ។ យើងក៏ថែមទាំងបង្ហាញថា $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ និង $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ជាវ៉ិចទ័រផ្ទាល់នៃ A ដែលទាក់ទងទៅនឹងតម្លៃផ្ទាល់ $\lambda = 2$ បានពីទ្រឹស្តីបទ 5.1.4 វាថែមទាំងជាវ៉ិចទ័រផ្ទាល់នៃ A^7 ដែលទាក់ទងនឹង $\lambda = 2^7 = 128$ ។ ស្រដៀងគ្នានេះ វ៉ិចទ័រផ្ទាល់ $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ នៃ A ដែលទាក់ទងទៅនឹងតម្លៃផ្ទាល់ $\lambda = 1$ ក៏ជាវ៉ិចទ័រផ្ទាល់នៃ A^7 ដែលទាក់ទងនឹង $\lambda = 1^7 = 1$ ។

តម្លៃផ្ទាល់ និងភាពច្រាស

ចំណុចបន្ទាប់នៃទ្រឹស្តីបទបានបង្កើតទំនាក់ទំនងរវាងតម្លៃផ្ទាល់ និងភាពច្រាសនៃម៉ាទ្រីស ។

ទ្រឹស្តីបទ៥.១.៥ ម៉ាទ្រីសការេ A មួយ គឺច្រាស បើ $\lambda = 0$ មិនមែនជាតម្លៃផ្ទាល់នៃ A ។

លំហាត់

នៅក្នុងឧទាហរណ៍ 1-2 ទទួលបានដោយការគុណ ដែល x ជាវ៉ិចទ័រផ្ទាល់នៃ A និងស្វែងរកតម្លៃផ្ទាល់ដែលទាក់ទង ។

1. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \ X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

4. រកទម្រង់នៃសមីការសំគាល់នៃម៉ាទ្រីសខាងក្រោម៖

$(a)\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$(b)\quad \begin{bmatrix} 10 & -9 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

5. រកតម្លៃផ្ទាល់នៃម៉ាទ្រីសក្នុងលំហាត់ទី3 ។

$(a)\quad \lambda^4+\lambda^3-3\lambda^2-\lambda+2=0$

$(b)\quad \lambda^4-8\lambda^3+19\lambda^2-24\lambda+48=0$

4. រកគោលនៃលំហផ្ទាល់នៃម៉ាទ្រីសក្នុងលំហាត់ទី3 ។

(a) $\lambda = 1$: គោល $\begin{bmatrix}2\\3\\1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$

$\lambda = 2$: គោល $\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$

$\lambda = -1$: គោល $\begin{bmatrix}-2\\1\\1\\0\end{bmatrix}$

(b) $\lambda = 4$: គោល $\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\1\\0\\0\end{bmatrix}$

6. ដោយសង្កេតមើល រកតម្លៃផ្ទាល់នៃម៉ាទ្រីសខាងក្រោម៖

$(a).\begin{bmatrix}-1 & 6\\0 & 5\end{bmatrix}$

$(b).\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\-2 & 7 & 0\\4 & 8 & 1\end{bmatrix}$

$(c).\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0\\0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

7. រកតម្លៃផ្ទាល់នៃ A^9 :

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

9. តាង A ជាម៉ាទ្រីស 2×2 មួយ និងប្រាប់បន្ទាត់មួយដែលកាត់គល់តម្រុយនៃ R^2 ដែលមិនប្រែប្រួលក្រោម A បើ Ax នោះលើបន្ទាត់ដែល x នៅលើ។ រកសមីការបន្ទាត់ទាំងអស់ក្នុង R^2 ប្រសិនបើមាន នៅក្នុងម៉ាទ្រីសដែលផ្តល់ឱ្យ ។

$(a).A=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$(b).A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$(c).A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

10. បង្ហាញថាទម្រង់នៃសមីការម៉ាទ្រីស 2×2 A មួយ អាចសរសេរទៅជា
$\lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A) = 0$ ដែល $tr(A)$ ជា trace នៃ A ។

11. ដោយប្រើប្រាស់លទ្ធផលនៅក្នុងលំហាត់ទី18 ដើម្បីបង្ហាញថាបើ $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
នោះចម្លើយនៃទម្រង់សមីការនៃ A គឺ

$$\lambda = \frac{1}{2}\left[(a+d) \pm \sqrt{(a-d)^2+4bc}\right]$$

ប្រើប្រាស់លទ្ធផលដើម្បីបង្ហាញថា A មាន

(a) តម្លៃផ្ទាល់ពិតពីរផ្សេងគ្នា បើ $(a-d)^2+4bc>0$

(b) តម្លៃផ្ទាល់ពិតពីរដូចគ្នា បើ $(a-d)^2+4bc=0$

(c) តម្លៃផ្ទាល់កុំផ្លិចផ្សេងគ្នា បើ $(a-d)^2+4bc<0$

៤.២. អង្កត់ទ្រូងកម្ម

យើងកត់សម្គាល់ឃើញថា បើម៉ាទ្រីស B វាដូចទៅនឹង A នោះវាក៏ពិតដែរចំពោះ ទ្រីស A វាដូចទៅនឹង B ។ យើងអាចបង្ហាញថា B ដែល $B = Q^{-1}AQ$ ដោយបានពី $Q = P^{-1}$។ ជាករណីដែលយើងជាធម្មតានិយាយថា A និង B ជាម៉ាទ្រីសដូចគ្នា បើមានម៉ាទ្រីសណាមួយដូចទៅនឹងម៉ាទ្រីសមួយទៀត។

ឧទាហរណ៍១ រកម៉ាទ្រីស P ដែលធ្វើអង្កត់ទ្រូងកម្មលើម៉ាទ្រីស A

$$A=\begin{bmatrix}0&0&-2\\1&2&1\\1&0&3\end{bmatrix}$$

ដំណោះស្រាយ ក្នុងឧទាហរណ៍ទី៧នៃផ្នែកមុនយើងបានរកឃើញសមីការនៃ A គឺ

$$(\lambda-1)(\lambda-2)^2=0\Rightarrow\lambda=1,\lambda=2$$

ហើយគោលនៃវ៉ិចទ័រផ្ទាល់មាន៖

$$\lambda=2\qquad p_1=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}, p_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\lambda=1\qquad p_3=\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}$$

សរុបមកមានគោលនៃវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ចំនួន៣

ដូច្នេះម៉ាទ្រីស P គឺ $P=\begin{bmatrix}-1&0&-2\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$

ផ្ទៀងផ្ទាត់៖ $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0&2\\1&1&1\\-1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&-2\\1&2&1\\1&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&-2\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

ដូច្នេះ $P=\begin{bmatrix}-1&0&-2\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$

ឧទាហរណ៍២ ម៉ាទ្រីស A មិនអាចធ្វើអង្កត់ទ្រូងកម្មបាន

រកម៉ាទ្រីស P ដែលធ្វើអង្កត់ទ្រូងកម្មលើ

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&0\\-3&5&2\end{bmatrix}$$

ដំណោះស្រាយ

សមីការនៃ A គឺ

$$\det(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 0 \\ 3 & -5 & \lambda-2 \end{bmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

សមីការអាចសរសេរ $(\lambda-1)(\lambda-2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, \lambda - 2$

នោះតម្លៃផ្ទាល់នៃ A គឺ $\lambda = 1, \lambda - 2$ ។ យើងនឹងបង្ហាញអ្នកនូវមូលដ្ឋានគោលវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ខាងក្រោម

$$\lambda = 1 \qquad p_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 2 \qquad p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ដោយ A ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ 3×3 តែមូលដ្ឋានគោលវ៉ិចទ័រផ្ទាល់នៃ A មានតែ២ នោះ A មិនអាចធ្វើអង្កត់ទ្រូងកម្មបានទេ។

ទ្រឹស្តីបទ ៥.២.២ ប្រសិនបើ $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ គឺជាវ៉ិចទ័រផ្ទាល់នៃម៉ាទ្រីស A មួយដែលត្រូវគ្នាជាមួយតម្លៃផ្ទាល់ផ្សេងគ្នា គេថា $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ មិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ។

ទ្រឹស្តីបទ ៥.២.៣ បើ A ជាម៉ាទ្រីសមានលំដាប់ $n\times n$ ហើយមាន n តម្លៃផ្ទាល់ផ្សេងគ្នានោះម៉ាទ្រីស A អាចធ្វើអង្កត់ទ្រូងកម្មបាន។

ឧទាហរណ៍៣ ប្រើប្រាស់ទ្រឹស្តីបទ ៥.២.៣

យើងបានឃើញក្នុងឧទាហរណ៍ទី៣នៃផ្នែកមុន

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

ម៉ាទ្រីស A មានតម្លៃផ្ទាល់ផ្សេងគ្នាគឺ $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2+\sqrt{3}$ និង $\lambda_3 = 2-\sqrt{3}$ ដូច្នេះ A អាចធ្វើអង្កត់ទ្រូងកម្មបាននិង

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

សម្រាប់ការរកម៉ាទ្រីសឆ្លាស់នៃ P ប្រសិនបើយើងត្រូវការអាចប្រើ P មករកនៅក្នុងឧទាហរណ៍១នៃផ្នែកនេះ។

ឧទាហរណ៍៤ អង្កត់ទ្រូងកម្មនៃម៉ាទ្រីសត្រីកោណ

ចំពោះតម្លៃផ្ទាល់នៃម៉ាទ្រីសត្រីកោណដែលជាធាតុអង្កត់ទ្រូងនៃម៉ាទ្រីសត្រីកោណ។ គេថាម៉ាទ្រីសត្រីកោណដែលមានធាតុខុសគ្នានៅលើអង្កត់ទ្រូងគឺអាចធ្វើអង្កត់ទ្រូងកម្មបាន។

ឧទាហរណ៍ គេមានម៉ាទ្រីស A

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

A ជាម៉ាទ្រីសដែលអាចធ្វើអង្កត់ទ្រូងកម្មបានជាមួយនឹងតម្លៃផ្ទាល់

$$\lambda_1=-1, \lambda_2=3, \lambda_3=5, \lambda_4=-2$$

៤.២.១.ភាពសមមូល

ម៉ាទ្រីសស្រដៀងគ្នាមានលក្ខណៈដូចគ្នាជាច្រើន។ ឧទាហរណ៍ បើ $B=P^{-1}AP$ នោះវាមានន័យថា A និង B មានដេទែមីណង់ស្មើគ្នា គេបាន

$$\det(B)=\det(P^{-1}AP)=\det(P^{-1})\det(A)\det(P)$$
$$=\frac{1}{\det(P)}\det(A)\det(P)=\det(A)$$ ។

តារាង1 ភាពសមមូល

លក្ខណៈ	ការពណ៌នា
ដេទែមីណង់	A និង $P^{-1}AP$ មានដេទែមីណង់ដូចគ្នា
ភាពប្រាស	A មានភាពប្រាស ប្រសិនបើ $P^{-1}AP$ ប្រាស
រ៉ង់	A និង $P^{-1}AP$ មានរ៉ង់ដូចគ្នា
ភាពគ្មានតម្លៃ	A និង $P^{-1}AP$ គ្មានតម្លៃដូចគ្នា
គន្លង	A និង $P^{-1}AP$ មានគន្លងដូចគ្នា
ពហុធាសម្គាល់	A និង $P^{-1}AP$ មានពហុធាសម្គាល់ដូចគ្នា
តម្លៃផ្ទាល់	A និង $P^{-1}AP$ មានតម្លៃផ្ទាល់ដូចគ្នា
ទំហំលំហផ្ទាល់	បើ λ ជាតម្លៃផ្ទាល់នៃ A ហើយ $P^{-1}AP$ នោះលំហផ្ទាល់នៃ λ ហើយលំហផ្ទាល់នៃ $P^{-1}AP$ ត្រូវគ្នានឹង λ មានទំហំស្មើគ្នា។

និយមន័យ២

> ម៉ាទ្រីសការេ A មួយអាចធ្វើអង្កត់ទ្រូងកម្មបាន បើវាដូចគ្នាទៅនឹងម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូងណាមួយ។ មានន័យថា ម៉ាទ្រីស P ដែលមានម៉ាទ្រីសច្រាស $P^{-1}AP$ ជាម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូង។ ក្នុងករណីនេះគេថា ម៉ាទ្រីស P អង្កត់ទ្រូងកម្ម A

ទ្រឹស្ដីបទ

> បើ ម៉ាទ្រីសការេ A មានទំហំ $n\times n$ នោះសំណើរខាងក្រោម សមមូលគ្នា។
> ក. A អាចធ្វើអង្កត់ទ្រូងកម្មបាន។
> ខ. A មាន n វ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ។

ជំហានដំបូង កាត់បន្ថយប្រព័ន្ធសមីការឲ្យទៅជាទំរង់ Echelon ដោយអនុវត្តប្រមាណវិធីដូចខាងក្រោម « ជំនួស L_1 ដោយ $-2L_1+L_2$ » ហើយជំនួស L_3 ដោយ$-5L_1+L_3$ » បន្ទាប់មក ជំនួស L_3 ដោយ $-2L_2+L_3$ »

ប្រមាណវិធីខាងលើបានលទ្ធផលគឺ

$$\begin{aligned} x_1+2x_2-3x_3+2x_4-4x_5&=0\\ x_3+3x_4+2x_5&=0\\ 2x_3-6x_4+4x_5&=0\end{aligned} \quad \text{និង} \quad \begin{aligned} x_1+2x_2-3x_3+2x_4-4x_5&=0\\ x_3+3x_4+2x_5&=0\end{aligned}$$

ប្រព័ន្ធនៅក្នុងទម្រង់ Echelon មានអថេរសេរីចំនួនបី x_2, x_4, x_5

ដូច្នេះ $mW=3$ចម្លើយជាវ៉ិចទ័របីដែលបង្កបានជាគោលមួយនៃ W ត្រូវបានទាញបានដូចខាងក្រោម៖

(1). យក $x_2=1, x_4=0, x_5=0$ ជំនួសសមីការ ហើយទាញបានចម្លើយ $u_1=(-2,1,0,0,0)$

(2). យក $x_2=0, x_4=1, x_5=0$ ជំនួសសមីការ ហើយទាញបានចម្លើយ $u_2=(7,0,3,1,0)$

(3). យក $x_2=0, x_4=0, x_5=1$ ជំនួសសមីការ ហើយទាញបានចម្លើយ $u_3=(-2,0,-2,0,1)$

វ៉ិចទ័រ $u_1=(-2,1,0,0,0)$,$u_2=(7,0,3,1,0)$, $u_3=(-2,0,-2,0,1)$បង្កបានជាគោលមួយនៃ W ។

ចំណាំ

ចម្លើយណាមួយនៃប្រព័ន្ធនៅក្នុងឧទាហរណ៍ 3.18 អាចសរសេរជាទម្រង់

$$\begin{aligned} au_1+bu_2+cu_3&=a(-2,1,0,0,0)+b(7,0,3,1,0)+c(-2,0,-2,0,1)\\ &=(-2a+7b-2c,\ a,\ 3b-2c,\ b,\ c)\end{aligned}$$

ឬ $x_1=-2a+7b-2c,\ x_2=a,\ x_3=3b-2c,\ x_4=b,\ x_5=c$

ដែល a, b, c ជាចំនួនថេរណាមួយ ។ សង្កេតថា ការសរសេរខាងលើគឺជាការសរសេរជាទម្រង់ប៉ារ៉ាមែត្រនៃចម្លើយទូទៅក្រោមជម្រើសប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $x_2=a, x_4=b, x_5=c$ ។

៤.២.២. ប្រព័ន្ធសមីការមិនអូម៉ូសែន និងទំនាក់ទំនងអូម៉ូសែន

តាង $AX = B$ ជាប្រព័ន្ធសមីការមិនអូម៉ូសែននៃសមីការលីនេអ៊ែរ។ នោះ $AX = 0$ ហៅថាប្រព័ន្ធសមីការទំនាក់ទំនងអូម៉ូសែន ។ ជាឧទាហរណ៍៖

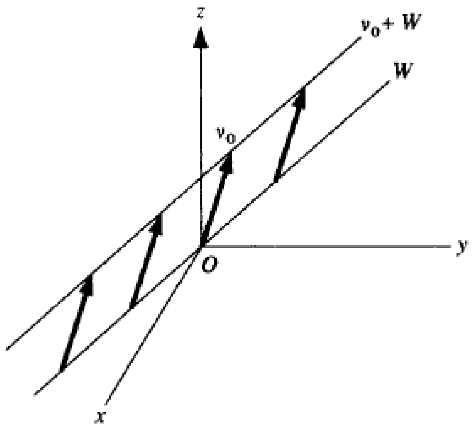
$$\begin{matrix} x+2y-4z=7 \\ 3x-5y+6z=8 \end{matrix} \quad \text{និង} \quad \begin{matrix} x+2y-4z=0 \\ 3x-5y+6z=0 \end{matrix}$$

បានបង្ហាញថាប្រព័ន្ធមិនអ៊ូម៉ូសែនមួយ និងប្រព័ន្ធទំនាក់ទំនងអ៊ូម៉ូសែនរបស់វា ។

ទំនាក់ទំនងរវាងចម្លើយ U នៃប្រព័ន្ធមិនអ៊ូម៉ូសែន $AX = B$ និងចម្លើយ W នៃប្រព័ន្ធទំនាក់ទំនងអ៊ូម៉ូសែនរបស់វា $AX = 0$មាននៅក្នុងទ្រឹស្តីបទខាងក្រោម។

ទ្រឹស្តីបទ៣.១៥ តាង v_0 ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃ $AX = B$ ហើយតាង W ជាចម្លើយទូទៅនៃ $AX = 0$ ។ នោះខាងក្រោមគឺជាចម្លើយទូទៅនៃ $AX = B$:

$$U = v_0 + W = \{v_0 + w : w \in W\}$$



ជំពូកទី៥ អនុគមន៍លីនេអ៊ែរ លំហឌុល

៥.១. សេចក្តីផ្តើម

នៅក្នុងជំពូកនេះ យើងសិក្សារូបភាពបន្ទាត់លីនេអ៊ែរ ពីទំហំវ៉ិចទ័រ V ទៅក្នុងកាយ K នៃទំហំស្កាលែរ របស់វា។ ក្នុងធម្មជាតិទ្រឹស្តីបទទាំងអស់ និងលទ្ធផលសម្រាប់រូបភាពបន្ទាត់លីនេអ៊ែរដោយមានឥទ្ធិពលលើ V សម្រាប់ករណីពិសេសនេះ។ ទោះយ៉ាងណាក៏ដោយ យើងចាត់ទុករូបភាពបន្ទាត់លីនេអ៊ែរទាំងនេះ

ដោយឡែកពីគ្នា ដោយសារតែសារៈសំខាន់ជាមូលដ្ឋានរបស់ពួកគេ និងដោយសារតែទំនាក់ទំនងពិសេសនៃ V ទៅកាយ K រូបភាពបន្ទាត់លីនេអ៊ែរ ផ្តល់ឱ្យភាពបង្កើនការយល់ឃើញ និងលទ្ធផលថ្មីដែលមិនអនុវត្តនៅក្នុងករណីទូទៅ។

៥.២.អនុគមន៍លីនេអ៊ែរ និង លំហឌុល

៥.២.១.អនុគមន៍លីនេអ៊ែរ

តាង V ជាលំហវ៉ិចទ័រលើកាយ K មួយ។ រូបភាព $\phi : V \to K$ ត្រូវបានគេហៅថា**អនុគមន៍លីនេអ៊ែរ** (ឬទម្រង់លីនេអ៊ែរ)ប្រសិនបើគ្រប់វ៉ិចទ័រ $u, v \in V$ គ្រប់ $a, b \in K$ ៖

$\phi(au+bv) = a\phi(u) + b\phi(v)$

ម្យ៉ាងវិញទៀត **អនុគមន៍លីនេអ៊ែរ** នៅលើ V គឺជារូបភាពបន្ទាត់លីនេអ៊ែរពី V ទៅ K ។

ឧទាហរណ៍១.១

តាង $\pi_i : K^n \to K$ គឺជារូបភាពទី i កំណត់ដោយ $\pi_i(a_1, a_2, ..., a_n) = a_i$ ។ នោះ π_i គឺលីនេអ៊ែរ

ដូចនេះ $\pi_i(a_1, a_2, ..., a_n) = a_i$ ជាអនុគមន៍លីនេអ៊ែរ K^n ។

ឧទាហរណ៍១.២

តាង V គឺជាលំហវ៉ិចទ័រនៃពហុធាមានអថេរ t កំណត់លើ R ។តាង $J : V \to R$ គឺអាំងតេក្រាល $J(p(t)) = \int_0^1 p(t)\,dt$ នោះ J គឺលីនេអ៊ែរ

ដូចនេះ J ជាអនុគមន៍លីនេអ៊ែរលើ V ។

ឧទាហរណ៍១.៣

តាង V គឺជាលំហវ៉ិចទ័រនៃម៉ាទ្រីសការេលំដាប n កំណត់លើកាយ K ។តាង $T : V \to K$ គឺជារូបភាពផលបូកអង្កត់ទ្រូង $T(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{ij}$ ដែល $A = [a_{ij}]$

នោះគឺ T កំណត់ដោយផលបូកនៃធាតុអង្កត់ទ្រូងម៉ាទ្រីស A ។ T មានទម្រង់ជាលីនេអ៊ែរ

ដូច្នេះ វាគឺជាអនុគមន៍លីនេអ៊ែរលើ V

៥.២.២. លំហឌុល

សំណុំអនុគមន៍លីនេអ៊ែរលើលំហវ៉ិចទ័រ V នៅលើកាយ K គឺជាលំហវ៉ិចទ័រលើ K ផងដែរ ដែលមានផលបូកនិងផលគុណស្កាលែរ កំណត់ដោយ៖

$$(\phi+\sigma)(v)=\phi(v)+\sigma(v)$$

$$(k\phi)(v)=k\phi(v)$$

ដែល ϕ និង σ អនុគមន៍លីនេអ៊ែរលើលំហវ៉ិចទ័រ V ហើយ $k\in K$ ។លំហនេះ គេហៅថា **លំហឌុល** តាងអក្សរ V^*

ឧទាហរណ៍២.១

តាង $V=K^n$ គឺជាលំហវ៉ិចទ័រនៃ $n-tuple$ យើងកំណត់វ៉ិចទ័រជួរឈរ។ លំហឌុល V^* កំណត់លំហវ៉ិចទ័រជួរដេក។អនុគមន៍លីនេអ៊ែរ $\phi=(a_1,a_2,.....,a_n)$ ក្នុង V^* គឺជារូបភាពតំណាងដោយ៖

$$\phi(x_1,x_2,...,x_n)=[a_1,a_2,...,a_n][x_1,x_2,...,x_n]^T=x_1a_1+x_2a_2+....+x_na_n$$

កន្សោមរូបមន្តនៅខាងលើត្រូវបានគេហៅថា ទម្រង់លីនេអ៊ែរ។

៥.៥. ប្រមាណវិធីធ្វើឲ្យសូន្យ

យើងតាង W ជាសំណុំរងនៃលំហវ៉ិចទ័រ V (មិនចាំបាច់លំហរងទេ)។អនុគមន៍ $\phi\in V^*$ ជាអនុគមន៍លីនេអ៊ែរមួយ ត្រូវបានគេហៅថា **ប្រមាណវិធីធ្វើឲ្យសូន្យ នៃ** W ប្រសិនបើ $\phi(w)=0$ គ្រប់ $w\in W$ មានន័យថា ប្រសិនប់គ្រប់ $\phi(W)=\{0\}$ ។ដែលបង្ហាញយើងថា សំណុំនៃរូបភាពតំណាងទាំងអស់នោះកំណត់ដោយ W^0 ហើយយើងហៅថា**វិធីធ្វើឲ្យសូន្យ** នៃ W ហើយវាក៏ជាលំហរងមួយរបស់ V^* ។បញ្ជាក់កាន់តែច្បាស់ $0\in W^0$ ។

ឥឡូវយើងឧបមាថា $\phi,\sigma\in W^0$ មានតម្លៃស្កាលែរ $a,b\in K$ និងមាន $w\in W$

$$(a\phi+b\sigma)(w)=a\phi(w)+b\sigma(w)=a0+b0=0$$

ដូចនេះ $(a\phi+b\sigma)\in w^0$ ហើយ W^0 ជាលំហរងនៃ V^*

ក្នុងករណី W ជាលំហរងនៃ V យើងមានទំនាក់ទំនងដូចខាងក្រោមរវាង W និង**វិធីធ្វើឲ្យសូន្យ** W^0 របស់វា។

<u>ទ្រឹស្តីបទ ៥.៥.</u>

ឧបមាថា V មានវិមាត្រអាចកំណត់បាន ហើយ W គឺជាលំហរងមួយរបស់ V នោះយើងបាន៖

$i \qquad \dim W+\dim W^0=\dim V$

$ii \qquad W^{00}=\left(w^0\right)^0=W$

ដែល $W^{00}=\{v\in V:\phi(v)=0 \qquad \forall\phi\in W^0\}$ ដែល W^{00} ជាផ្នែកស្ថិតក្នុងលំហរង V ។

សម្រាប់បញ្ជាក់

$i \quad \dim W+\dim W^0=\dim V$

ឧបមាថាមាន $\dim V=n$ ហើយ $\dim V=r\le n$

យើងនឹងបង្ហាញថា $\dim W^0 = n-r$ ដោយយកសំណុំគោល $\{w_1, w_2, ... w_r\}$ របស់ W និងបង្ហាញថាវាជាគោលរបស់ V មានសំណុំ $\{w_1, w_2, ... w_r, v_1, v_2 .... v_{n-1}\}$

យើងពិនិត្យ គោលរបស់ឌុល

$$\{\phi_1, \phi_2 ... \phi_r, \sigma_1, ..., \sigma_{n-r}\}$$

តាមនិយមន័យ គោលឌុល គ្រប់ប្រមាណវិធីធ្វើឲ្យសូន្យរបស់ σ ជារបស់ w_i នោះ $\sigma_1 .... \sigma_{n-r} \in W^0$ ។ បញ្ជាក់ថា $\{\sigma_i\}$ គឺជាគោលរបស់ W^0 ឥឡូវ $\{\sigma_j\}$ ជាផ្នែកនៃ V^* ហើយដូននេះវាអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ។

$$\sigma = \sigma(w_1)\phi_1 + ... + \sigma(w_r)\phi_r + \sigma(v_1)\sigma_1 + ... + \sigma(v_{n-r})\sigma_{n-r}$$

$$\sigma = 0\phi_1 + ... + 0\phi_r + \sigma(v_1)\sigma_1 + ... + \sigma(v_{n-r})\sigma_{n-r}$$

$$\sigma = \sigma(v_1)\sigma_1 + ... + \sigma(v_{n-r})\sigma_{n-r}$$

ដូចនេះ $\{\sigma_1, ..., \sigma_{n-1}\}$ ជាសំណុំបង្ក(spans)និងជាគោលនៃ W^0 ។តាមសម្រាយខាងលើគេបាន

$$\dim W^0 = n - r = \dim V - \dim W$$

$$\dim W + \dim W^0 = \dim V$$

ii $\quad W^{00} = \left(w^0\right)^0 = W$

ឧបមាថាមាន $\dim V = n$ ហើយ $\dim W = r$ នោះ $\dim V^* = n$ ហើយតាមការស្រាយបញ្ជាក់(i)

$$\dim W^0 = n - r$$

$$\dim W^{00} = n - (n-1) = r$$

$$\dim W^{00} = \dim W$$

$$\Rightarrow W^{00} = W$$

៥.៣. គោលលំហឌុល

សន្មត់ថា V គឺជាលំហវ៉ិចទ័រនៃ n វិមាត្រនៅលើ K ។ យោងតាមទ្រឹស្តីបទ 5.11 វិមាត្រនៃលំហរទ្វេ V^* ក៏ជា n វិមាត្រដែរ(ពីព្រោះ K មានវិមាត្រ 1 នៅលើខ្លួនវាផ្ទាល់)។ ជាក់ស្តែង គ្រប់មូលដ្ឋាននៃ V នីមួយៗកំណត់បាន V^* មូលដ្ឋានមួយដូចខាងក្រោម(មើលលំហាត់ 11.3 សម្រាប់ការសម្រាយបញ្ជាក់) ។

ទ្រឹស្តីបទ 5.1 សន្មត់ថា $\{v_1, ..., v_n\}$ ជាគោលមួយរបស់ V នៅលើ K ។ តាង $\phi_1, ..., \phi_n \in V^*$ ជាអនុគមន៍លីនេអ៊ែដែលកំណត់ដោយ $\phi_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \ if \quad i = j \\ 0 \ if \ i \neq j \end{cases}$ នោះ $\{\phi_1, ..., \phi_n\}$ ជាមូលដ្ឋានមួយរបស់ V^* ។

គោល $\{\phi_i\}$ ខាងលើគឺគេហៅថា គោលលំហឌុល $\{v_1\}$ ។ រូបមន្តខាងលើ ដែលជា ការប្រើប្រាស់ Kronecker delta δ_{ij} គឺជាការសរសេរកាត់

$$\phi_1(v_1)=1,\ \phi_1(v_2)=0,\ \phi_1(v_3)=0,\ \dots,\phi_1(v_n)=0$$
$$\phi_2(v_1)=0,\ \phi_2(v_2)=1,\ \phi_2(v_3)=0,\ \dots,\phi_2(v_n)=0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\phi_n(v_1)=0,\ \phi_n(v_2)=0,\dots,\phi_n(v_{n-1})=0,\ \phi_1(v_n)=1$$

តាមទ្រឹស្តីបទ 5.2 ដែលផែនទីលីនេអ៊ែ $\{\phi_i\}$ ទាំងនេះគឺប្លែក និងកំណត់បានល្អ។

៥.៣. ស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ 11.1 សន្មត់ថា $\{v_1,\dots,v_n\}$ ជាគោលមួយរបស់ V នៅលើ K ។ តាង $\phi_1,\dots,\phi_n\in V^*$ កំណត់ដោយ $\phi_i(v_j)=0$ ចំពោះ $i\neq j$ ប៉ុន្តែ $\phi_i(v_j)=1$ ចំពោះ $i=j$ ។ នោះ $\{\phi_1,\dots,\phi_n\}$ ជាគោលរបស់ V^* ។

ជាដំបូងយើងបង្ហាញថា $\{\phi_1,\dots,\phi_n\}$ ស្ប៉ាន V^* ។ តាង ϕ ជាធាតុរបស់ V^* និងសន្មត់ថា

$$\phi(v_1)=k_1,\qquad \phi(v_2)=k_2,\quad \dots\dots\qquad \phi(v_n)=k_n$$

យក $\sigma=k_1\phi_1+\dots+k_n\phi_n$ គេបាន

$$\sigma(v_1)=(k_1\phi_1+\dots+k_n\phi_n)(v_1)=k_1\phi_1(v_1)+k_2\phi_2(v_2)+\dots+k_n\phi_n(v_1)=k_1\cdot1+k_2\cdot0+\dots+k_n\cdot0=k_1$$

ដូចគ្នាដែរចំពោះ $i=2,\dots,n,$

$$\sigma(v_i)=(k_1\phi_1+\dots+k_n\phi_n)(v_i)=k_1\phi_1(v_i)+\dots+k_i\phi_i(v_i)+\dots+k_n\phi_n(v_i)=k_i$$

ដូចនេះ $\phi(v_i)=\sigma(v_i)$ ចំពោះ $i=1,\dots,n$ ។ ពីព្រោះ ϕ និង σ ត្រូវគ្នានៅលើគោលវិចទ័រដែល $\phi=\sigma=k_1\phi_1+\dots+k_n\phi_n$ គេទាញបានថា $\{\phi_1,\dots,\phi_n\}$ ស្ប៉ាន V^* ។

វាសំខាន់ដែលត្រូវស្រាយឱ្យឃើញថា $\{\phi_1,\dots,\phi_n\}$ គឺមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ។ សន្មត់ថា

$$a_1\phi_1+a_2\phi_2+\dots+a_n\phi_n=0$$

គុណអង្គសងខាងនឹង v_1 យើងបាន

$$0=0(v_1)=(a_1\phi_1+\dots+n_n\phi_n)(v_1)=a_1\phi_1(v_1)+a_2\phi_2(v_1)+\dots+a_n\phi_n(v_1)=a_1\cdot1+a_2\cdot0+\dots+a_n\cdot0=a_1$$

ដូចគ្នាដែរចំពោះ $i=2,\dots,n,$

$$0=0(v_i)=(a_1\phi_1+\dots+a_n\phi_n)(v_i)=a_1\phi_1(v_i)+\dots+a_i\phi_i(v_i)+\dots+a_n\phi_n(v_i)=a_i$$

ដូចនេះ $a_1=0,\dots,a_n=0$ ។ ដូច្នេះ $\{\phi_1,\dots,\phi_n\}$ គឺមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ ហើយ $\{\phi_1,\dots,\phi_n\}$ ជាគោលនៃ V^* ។

ឧទាហរណ៍ 5.3 គេមានមូលដ្ឋាន $\{v_1=(2.1),\ v_2=(3,1)\}$ នៅលើ $\mathbb{R}^2$ ។ រកមូលដ្ឋានទ្វេ $\{\phi_1,\phi_2\}$ ។

យើងស្វែងរកអនុគមន៍លីនេអ៊ែ $\phi_1(x,y)=ax+by$ និង $\phi_2(x,y)=cx+dy$ ដែល $\phi_1(v_1)=1,\ \phi_1(v_2)=0,\ \phi_2(v_1)=0,\ \phi_2(v_2)=1$ ចំពោះលក្ខខណ្ឌទាំងបួននេះនាំឱ្យយើងបានប្រព័ន្ធសមីការដូចខាងក្រោម

$$\left.\begin{array}{l}\phi_1(v_1)=\phi_1(2,1)=2a+b=1\\ \phi_1(v_2)=\phi_1(3,1)=3a+b=0\end{array}\right\}\ \text{និង}\ \left.\begin{array}{l}\phi_2(v_1)=\phi_2(2,1)=2c+d=0\\ \phi_2(v_2)=\phi_2(3,1)=3c+d=1\end{array}\right\}$$

ដំណោះស្រាយ រកឃើញថា $a=-1,b=3$ និង $c=1,d=-2$ ។ ដូច្នេះហើយ $\phi_1(x,y)=-x+3y$ និង $\phi_2(x,y)=-x-2y$ ដែលជាទម្រង់នៃមូលដ្ឋានទ្វេ។

ទ្រឹស្តីបទពីរខាងក្រោម (បានស្រាយបញ្ជាក់នៅក្នុងលំហាត់ 11.4 និង 11.5 រៀងគ្នា) ដែលផ្តល់ទំនាក់ទំនងរវាងមូលដ្ឋាន និងទ្វេររបស់ទ្រឹស្តីបទទាំងពីរ។

ទ្រឹស្តីបទ 5.2៖ តាង $\{v_1,...,v_n\}$ ជាមូលដ្ឋានមួយរបស់ V និងតាង $\{\phi_1,...,\phi_n\}$ ជាមូលដ្ឋានទ្វេរនៅក្នុង V^* ។ នោះ

(i) ចំពោះវ៉ិចទ័រ $u\in V$ ដែល $u=\phi_1(u)v_1+\phi_2(u)v_2+...+\phi_n(u)v_n$ ។

(ii) ចំពោះអនុគមន៍លីនេអ៊ែរ $\sigma=\sigma(v_1)\phi_1+\sigma(v_2)\phi_2+...+\sigma(v_n)\phi_n$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ

តាង $\{v_1`,...,v_n\}$ ជាគោលនៃ V និងតាង $\{\phi_1,...,\phi_n\}$ ជាគោលឌុយអាល់ក្នុង V^* ។គ្រប់ $u\in V$ និង $\sigma\in V^*$ (i) $u=\sum_i \phi_i(u)v_i$, (ii) $\sigma=\sum_i \phi(v_i)\phi_i$,

សន្មត់ថា $u=a_1v_1+a_2v_2+...+a_nv_n$

នោះ $\phi_1(u)=a_1\phi_1(v_1)+a_2\phi_2(v_2)+...+a_n\phi_n(v_n)=a_1\cdot 1+a_2\cdot 0+...+a_n\cdot 0=a_1$

ដូចគ្នាដែរ $i=2,....,n$

$\phi_i(u)=a_1\phi_i(v_1)+...+a_i\phi_i(v_i)+a_n\phi_i(v_n)=a_i$

គេបាន $\phi_1(u)=a_1,\phi_2(u)=a_2,...,\phi_n(u)=a_n$ ជំនួសចម្លើយក្នុងសមីការ (1) គេបាន (i)

ជំហានបន្ទាប់បង្ហាញ (ii) គុណអនុគមន៍លីនេអ៊ែរ σ ទៅអង្គសងខាងនៃ (i)

$$\begin{aligned}\sigma(u)&=\phi_1(u)\sigma(v_1)+\phi_2(u)\sigma(v_2)+...+\phi_n(u)\sigma(v_n)\\&=\sigma(v_1)\phi_1(u)+\sigma(v_2)\phi_2(u)+...+\sigma(v_n)\phi_n(u)\\&=(\sigma(v_1)\phi_1+\sigma(v_2)\phi_2+...+\sigma(v_n)\phi_n)(u)\end{aligned}$$

ពីព្រោះគ្រប់ $u\in V,\sigma=\sigma(v_1)\phi_2+\sigma(v_2)\phi_2+...+\sigma(v_n)\phi_n$ ។

ទ្រឹស្តីបទ 5.3៖ តាង $\{v_1,...,v_n\}$ និង $\{w_1,...,w_n\}$ ជាមូលដ្ឋានមួយរបស់ V ហើយតាង $\{\phi_1,...,\phi_n\}$ និង $\{\sigma_1,...,\sigma_n\}$ ជាមូលដ្ឋាននៅក្នុង V^* ទ្វេរទៅ $\{v_i\}$ និង $\{w_i\}$ រៀងគ្នា។ សន្មាត់ថា P ជាម៉ាទ្រីសប្តូរគោល ពី $\{v_i\}$ ទៅ $\{w_i\}$ ។ នោះ $(P^{-1})^{\tau}$ គឺជាម៉ាទ្រីស change-of-basis ពី $\{\phi_i\}$ ទៅ $\{\sigma_i\}$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ

តាង $\{v_i\}$ និង $\{w_i\}$ ជាគោលនៃ V និងតាង $\{\phi_i\}$ និង $\{\sigma_i\}$ ជាគោលឌុយអាល់ក្នុង V^* ។តាង P ជាទម្រង់ប្តូរគោលម៉ាទ្រីសពី $\{v_i\}$ ទៅ $\{w_i\}$ ។នោះ $(P^{-1})^T$ ជាទម្រង់ប្តូរគោលម៉ាទ្រីសពី $\{\phi_i\}$ ទៅ $\{\sigma_i\}$ ។

សន្មត់ថា $i=1,....,n$

$w_i=a_{i1}v_1+a_{i2}v_2+...+a_{in}v_n$ និង $\sigma_i=b_{i1}\phi_1+b_{i2}\phi_2+...+a_{in}v_n$

គេបាន $P=[a_{ij}]$ និង $Q=[b_{ij}]$ ។ យើងត្រូវបង្ហាញថា $Q=(P^{-1})^T$

តាង R_i កំណត់ជួរដេកទី i នៃ Q និង C_j កំណត់ជួរឈរទី j នៃ P^T ។ គេបាន

$R_i=(b_{i1},b_{i2},...,b_{in})$ និង $C_j=(a_{j1},a_{j2},...,a_{jn})^T$

តាមនិយមន័យគោលឌុយអាល់

$$\sigma_i(w_j)=(b_{i1}\phi_1+b_{i2}\phi_2+...+b_{in}\phi_n)(a_{j1}v_1+a_{j2}v_2+...+a_{jn}v_n)$$
$$=b_{i1}a_{j1}+b_{i2}a_{j2}+...+b_{in}a_{jn}=R_iC_j=\delta_{ij}$$

ដែល δ_{ij} ជាដេលតាក្រូណេក័រ។ ដូច្នេះ $QP^T=[R_iC_j]=[\delta_{ij}]=I$

ដូចនេះ $Q=(P^T)^{-1}=(P^{-1})^T$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ 11.1 សន្មត់ថា $\{v_1,...,v_n\}$ ជាមូលដ្ឋានមួយរបស់ V នៅលើ K ។ តាង $\phi_1,...,\phi_n\in V^*$ កំណត់ដោយ $\phi_i(v_j)=0$ ចំពោះ $i\neq j$ ប៉ុន្តែ $\phi_i(v_j)=1$ ចំពោះ $i=j$ ។ នោះ $\{\phi_1,...,\phi_n\}$ ជាមូលដ្ឋានទ្វេររបស់ V^* ។

ជាដំបូងយើងបង្ហាញថា $\{\phi_1,...,\phi_n\}$ នៅក្នុង V^* ។ តាង ϕ ជាធាតុរបស់ V^* និងសន្មត់ថា

$$\phi(v_1)=k_1,\qquad \phi(v_2)=k_2,\quad .....\qquad \phi(v_1)=k_1,$$

យក $\sigma=k_1\phi_1+...+k_n\phi_n$ គេបាន

$$\sigma(v_1)=(k_1\phi_1+...+k_n\phi_n)(v_1)=k_1\phi_1(v_1)+k_2\phi_2(v_2)+...+k_n\phi_n(v_1)=k_1\cdot 1+k_2\cdot 0+...+k_n\cdot 0=k_1$$

ដូចគ្នាដែរចំពោះ $i=2,...,n,$

$$\sigma(v_i)=(k_1\phi_1+...+k_n\phi_n)(v_i)=k_1\phi_1(v_i)+...+k_i\phi_i(v_i)+...+k_n\phi_n(v_i)=k_i$$

ដូចនេះ $\phi(v_i)=\sigma(v_i)$ ចំពោះ $i=1,....,n$ ។ ពីព្រោះ ϕ និង σ ត្រូវគ្នានៅលើវ៉ិចទ័រមូលដ្ឋានដែល $\phi=\sigma=k_1\phi_1+...+k_n\phi_n$ គេទាញបានថា $\{\phi_1,...,\phi_n\}$ នៅក្នុង V^* ។

វាសំខាន់ដែលត្រូវស្រាយឱ្យឃើញថា $\{\phi_1,...,\phi_n\}$ ជាលីនេអ៊ែឯករាជ្យ។ សន្មត់ថា

$$a_1\phi_1+a_2\phi_2+...+a_n\phi_n=0$$

គុណអង្គសងខាងនឹង v_1 យើងបាន

$$0=0(v_1)=(a_1\phi_1+...+n_n\phi_n)(v_1)=a_1\phi_1(v_1)+a_2\phi_2(v_1)+...+a_n\phi_n(v_1)=a_1\cdot 1+a_2\cdot 0+...+a_n\cdot 0=a_1$$

ដូចគ្នាដែរចំពោះ $i=2,...,n,$

$$0=0(v_i)=(a_1\phi_1+...+a_n\phi_n)(v_i)=a_1\phi_1(v_i)+...+a_i\phi_i(v_i)+...+a_n\phi_n(v_i)=a_i$$

ដូចនេះ $a_1=0,...,a_n=0$ ។ ដូច្នេះ $\{\phi_1,...,\phi_n\}$ ជាលីនេអ៊ែឯករាជ្យ ហើយ $\{\phi_1,...,\phi_n\}$ ជាមូលដ្ឋាននៃ V^* ។

៥.៤. លំហាឌុលទី២ (Second Dual Space)

ពិនិត្យឡើងវិញ៖ គ្រប់លំហវ៉ិចទ័រ V មានលំហឌុយអាល់ V^* ដែលមានអនុគមន៍លីនេអ៊ែរទាំងអស់នៅលើ V ដូចនេះ V^* មានលំហឌុយអាល់ V^{**} ហៅថាលំហឌុយអាល់ទី២នៃ V ដែលមានអនុគមន៍លីនេអ៊ែរទាំងអស់នៅលើ V^* ។

យើងនឹងបង្ហាញថាគ្រប់ $v \in V$ កំណត់គ្រប់ធាតុជាក់លាក់មួយ $\hat{v} \in V^{**}$ ។ ដំបូងចំពោះ $\phi \in V^*$ កំណត់ $v(\phi) = \phi(v)$ ។

វាត្រូវបានបង្ហាញក្នុងអនុវត្តន៍ $\hat{v}: V^* \to K$ គឺលីនេអ៊ែរ។ សម្រាប់ទំហំស្កាលែ $a, b \in K$ និងអនុគមន៍ $\phi, \sigma \in V^*$

យើងបាន $\hat{v}(a\phi + b\sigma) = (a\phi + b\sigma)(v) = a\phi(v) + b\phi(v) = a\hat{v}(\phi) + b\hat{v}(\sigma)$

នោះ $\hat{v}$ គឺលីនេអ៊ែរ ដូចនេះ $\hat{v} \in V^{**}$ ទ្រឹស្តីបទខាងក្រោម(បង្ហាញក្នុងលំហាត់12.7)។

ទ្រឹស្តីបទ5.4៖ បើ V មានវិមាត្រកំណត់ អនុវត្តន៍ $v \mapsto \hat{v}$ គឺអ៊ីសូម៉ូភីសនៃ V លើ V^{**} ។

អនុវត្តន៍ខាងលើ $v \mapsto \hat{v}$ ហៅថា អនុវត្តន៍ធម្មជាតិនៃ V លើ V^{**} ។ យើងកំណត់ថាអនុវត្តន៍នេះនឹងមិននៅលើ V^{**} បើ V មានវិមាត្រមិនកំណត់ ទោះជាយ៉ាងណាវានៅតែលីនេអ៊ែរ មិនតែប៉ុណ្ណោះវាតែងតែជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ។

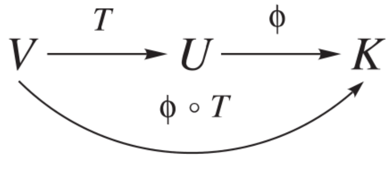
ឥឡូវយើងសន្មតថា V មានវិមាត្រកំណត់។ ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទ11.4 ។ អនុវត្តន៍ធម្មជាតិកំណត់អ៊ីសូម៉ូភីសរវាង V លើ V^{**} លុះត្រាតែបានលើកឡើង នោះយើងនឹងកំណត់ V ជាមួយ V^{**} ដោយប្រើអនុវត្តន៍នេះ។

តាមលក្ខខណ្ឌខាងលើយើងនឹងបង្ហាញ V គឺជាលំហនៃអនុគមន៍លីនេអ៊ែរនៅលើ V^{**} ហើយសរសេរ $V = V^{**}$ យើងត្រូវកត់សម្គាល់ថា បើ $\{\phi_i\}$ គឺជាគោលនៃ V^* ឌុយអាល់ទៅនឹងគោល $\{v_i\}$ នៃ V
នោះ $\{v_i\}$ គឺជាគោលនៃ $V^{**} = V$ ដែលឌុយអាល់ទៅនឹង $\{\phi_i\}$ ។

៥.៦. រូបភាពបម្លែងលីនេអ៊ែរ

តាង $T: V \to U$ ជារូបភាពលីនេអ៊ែរសេរីចន្លោះ លំហវ៉ិចទ័រ V ទៅក្នុងលំហវ៉ិចទ័រ U ។ ឥឡូវសម្រាប់អ្វីមួយ។

អនុគមន៍លីនេអ៊ែរ $\phi \in U^*$ មានសមាសភាព $\phi \circ T$ គឺជាការគូសវាសរូបភាពលីនេអ៊ែរពី V ទៅក្នុង K ៖



ដែល $\phi \circ T \in V^*$ នោះទំនាក់ទំនង $\phi \mapsto \phi \circ T$ គឺជារូបភាពពី U^* ក្នុង V^* ។ តាងដោយនិមិត្តញ្ញា T^t ហើយហៅថា បម្លែង T ។ ម្យ៉ាងទៀត $T^t: U^* \to V^*$ កំណតដោយ៖

$$T^t(\phi) = \phi \circ T$$

នោះ $\left(T^t(\phi)\right)(v) = \phi\left(T(v)\right) \qquad \forall v \in V$

ទ្រឹស្តីបទ ៥.៦.

បម្លែងរូបភាព $T^t(\phi)=\phi\circ T$ ជាបម្លែងលីនេអ៊ែរ

សម្រាប់បញ្ជាក់

មានតម្លៃស្កាលែរ $a,b\in K$ ហើយនឹងអនុគមន៍លីនេអ៊ែរ $\phi,\sigma\in U^*$

$$T^t(\phi)=\phi\circ T\Rightarrow T^t(a\phi+b\sigma)=(a\phi+b\sigma)\circ T=a(T\circ\phi)+b(T\circ\sigma)=T^t(a)+T^t(b)$$

នេះបញ្ជាក់ថា $T^t(\phi)=\phi\circ T$ គឺលីនេអ៊ែរ

ទ្រឹស្តីបទ ៥.៧.

តាង $T:V\to U$ គឺលីនេអ៊ែរ ហើយតាង A ជាម៉ាទ្រីសតំណាងរបស់ T មានទំនាក់ទំនងទៅគោល $\{v_i\}$ របស់ V ហើយនិង $\{u_i\}$ របស់ U ។នោះម៉ាទ្រីសត្រង់ស្ប៉ូ A^T គឺជាម៉ាទ្រីសត្រូវនឹង $T^t:U^*\to V^*$ មានទាក់ទងនឹង គោលឌុល ពីរគឺ $\{v_i\}$ និង $\{u_i\}$ ។

ដំណោះស្រាយ

លំហឌុយអាល់ និងគោលឌុយអាល់

៥.១. រកគោល $\{\phi_1,\phi_2,\phi_3\}$ ដែលត្រូវបានឌុយអាល់ទៅនឹងគោលនៃ $\mathbb{R}^3$:

$$\{v_1=(1,-1,3),v_2=(0,1,-1),v_3=(0,3,-2)\}$$

ទម្រង់អនុគមន៍លីនេអ៊ែរ

$\phi_1(x,y,z)=a_1x+a_2y+a_3z,\ \phi_2(x,y,z)=b_1x+b_2y+b_3z,\ \phi_3(x,y,z)=c_1x+c_2y+c_3z$

ដោយអនុវត្តតាមនិយមន័យនៃគោលឌុយអាល់ $\phi_i(v_j)=0$ ដែល $i\neq j$ តែ $\phi_i(v_j)=1$ ដែល $i=j$

យើងរក ϕ_1 ដោយកំណត់ $\phi_1(v_1)=1,\phi_1(v_2)=0,\phi_1(v_3)=0$

គេបាន $\phi_1(1,-1,3)=a_1-a_2+3a_3=1,\phi_1(0,1,-1)=a_2-a_3=0,\phi_1(0,3,-2)=3a_2-2a_3=0$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $a_1=1,a_2=0,a_3=0$

ដូចនេះ $\phi_1(x,y,z)=x$ ។

យើងរក ϕ_2 ដោយកំណត់ $\phi_2(v_1)=0,\phi_2(v_2)=1,\phi_2(v_3)=0$

គេបាន $\phi_2(1,-1,3)=b_1-b_2+3b_3=0,\phi_2(0,1,-1)=b_2-b_3=1,\phi_2(0,3,-2)=3b_2-2b_3=0$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $b_1=7,b_2=-2,b_3=-3$

ដូចនេះ $\phi_2(x,y,z)=7x-2y-3z$ ។

យើងរក ϕ_3 ដោយកំណត់ $\phi_3(v_1)=0,\phi_3(v_2)=0,\phi_3(v_3)=1$

គេបាន $\phi_3(1,-1,3)=c_1-c_2+3c_3=0,\phi_3(0,1,-1)=c_2-c_3=1,\phi_3(0,3,-2)=3c_2-2c_3=1$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $c_1=-2,c_2=1,c_3=1$

ដូចនេះ $\phi_3(x,y,z)=-2x+y+z$ ។

៥.២. តាង $V=\{a+bt:a,b\in\mathbb{R}\}$ លំហវ៉ិចទ័រនៃដឺក្រេនៃពហុធា ≤ 1 ។ រកគោល $\{v_1,v_2\}$ នៃ V ដែលត្រូវបានឌុយអាល់ទៅនឹងគោល $\{\phi_1,\phi_2\}$ នៃ V^* កំណត់ដោយ

$$\phi_1(f(t))=\int_0^1 f(t)dt \text{ និង } \phi_2(f(t))=\int_0^2 f(t)dt$$

តាង $v_1=a+bt$ និង $v_2=c+dt$ ។

តាមនិយមន័យនៃគោលឌុយអាល់

$$\phi_1(v_1)=1,\ \phi_1(v_2)=0 \text{ និង } \phi_2(v_1)=0,\ \phi_i(v_j)=1$$

ដូចនេះ

$$\left.\begin{aligned}\phi_1(v_1)&=\int_0^1(a+bt)dt=a+\frac{1}{2}b=1\\ \phi_2(v_1)&=\int_0^2(a+bt)dt=2a+2b=0\end{aligned}\right\} \text{ និង } \left.\begin{aligned}\phi_1(v_2)&=\int_0^1(c+dt)dt=c+\frac{1}{2}d=0\\ \phi_2(v_2)&=\int_0^2(c+dt)dt=2c+2d=1\end{aligned}\right\}$$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធ $a=2,\ b=-2$ និង $c=-\frac{1}{2},\ d=1$ ។ ដូចនេះ $\left\{v_1=2-2t,\ v_2=-\frac{1}{2}+t\right\}$ គឺជាគោលនៃ V ដែលឌុយអាល់ទៅនឹង $\{\phi_1,\phi_2\}$ ។

៥.៣. ស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ 11.1 សន្មត់ថា $\{v_1,...,v_n\}$ ជាគោលមួយរបស់ V នៅលើ K ។ តាង $\phi_1,...,\phi_n\in V^*$ កំណត់ដោយ $\phi_i(v_j)=0$ ចំពោះ $i\neq j$ ប៉ុន្តែ $\phi_i(v_j)=1$ ចំពោះ $i=j$ ។ នោះ $\{\phi_1,...,\phi_n\}$ ជាគោលរបស់ V^* ។

ជាដំបូងយើងបង្ហាញថា $\{\phi_1,...,\phi_n\}$ ស្ប៉ាន V^* ។ តាង ϕ ជាធាតុរបស់ V^* និងសន្មត់ថា

$$\phi(v_1)=k_1,\qquad \phi(v_2)=k_2,\quad .....\qquad \phi(v_n)=k_n$$

យក $\sigma=k_1\phi_1+...+k_n\phi_n$ គេបាន

$$\sigma(v_1)=(k_1\phi_1+...+k_n\phi_n)(v_1)=k_1\phi_1(v_1)+k_2\phi_2(v_2)+...+k_n\phi_n(v_1)=k_1\cdot 1+k_2\cdot 0+...+k_n\cdot 0=k_1$$

ដូចគ្នាដែរចំពោះ $i=2,...,n,$

$$\sigma(v_i)=(k_1\phi_1+...+k_n\phi_n)(v_i)=k_1\phi_1(v_i)+...+k_i\phi_i(v_i)+...+k_n\phi_n(v_i)=k_i$$

ដូចនេះ $\phi(v_i)=\sigma(v_i)$ ចំពោះ $i=1,....,n$ ។ ពីព្រោះ ϕ និង σ ត្រូវគ្នានៅលើគោលវិចទ័រដែល $\phi=\sigma=k_1\phi_1+...+k_n\phi_n$ គេទាញបានថា $\{\phi_1,...,\phi_n\}$ ស្ប៉ាន V^* ។

វាសំខាន់ដែលត្រូវស្រាយឱ្យឃើញថា $\{\phi_1,...,\phi_n\}$ គឺមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ។ សន្មត់ថា

$$a_1\phi_1+a_2\phi_2+...+a_n\phi_n=0$$

គុណអង្គសងខាងនឹង v_1 យើងបាន

$$0=0(v_1)=(a_1\phi_1+...+n_n\phi_n)(v_1)=a_1\phi_1(v_1)+a_2\phi_2(v_1)+...+a_n\phi_n(v_1)=a_1\cdot 1+a_2\cdot 0+...+a_n\cdot 0=a_1$$

ដូចគ្នាដែរចំពោះ $i=2,...,n,$

$$0=0(v_i)=(a_1\phi_1+...+a_n\phi_n)(v_i)=a_1\phi_1(v_i)+...+a_i\phi_i(v_i)+...+a_n\phi_n(v_i)=a_i$$

ដូចនេះ $a_1=0,...,a_n=0$ ។ ដូច្នេះ $\{\phi_1,...,\phi_n\}$ គឺមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ ហើយ $\{\phi_1,...,\phi_n\}$ ជាគោលនៃ V^* ។

១១.៤. ស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ១១.២ តាង $\{v_1`,...,v_n\}$ ជាគោលនៃ V និងតាង $\{\phi_1,...,\phi_n\}$ ជាគោលឌុយអាល់ក្នុង V^* ។ គ្រប់ $u\in V$ និង $\sigma\in V^*$ $(i)\ u=\sum_i\phi_i(u)v_i,\ (ii)\ \sigma=\sum_i\phi(v_i)\phi_i,$

សន្មត់ថា $u=a_1v_1+a_2v_2+...+a_nv_n$

នោះ $\phi_1(u)=a_1\phi_1(v_1)+a_2\phi_2(v_2)+...+a_n\phi_n(v_n)=a_1\cdot 1+a_2\cdot 0+...+a_n\cdot 0=a_1$

ដូចគ្នាដែរ $i=2,....,n$

$\phi_i(u)=a_1\phi_i(v_1)+...+a_i\phi_i(v_i)+a_n\phi_i(v_n)=a_i$

គេបាន $\phi_1(u)=a_1,\phi_2(u)=a_2,...,\phi_n(u)=a_n$ ជំនួសចម្លើយក្នុងសមីការ (1) គេបាន (i)

ជំហានបន្ទាប់បង្ហាញ (ii) គុណអនុគមន៍លីនេអ៊ែរ σ ទៅអង្គសងខាងនៃ (i)

$$\sigma(u)=\phi_1(u)\sigma(v_1)+\phi_2(u)\sigma(v_2)+...+\phi_n(u)\sigma(v_n)$$
$$=\sigma(v_1)\phi_1(u)+\sigma(v_2)\phi_2(u)+...+\sigma(v_n)\phi_n(u)$$
$$=(\sigma(v_1)\phi_1+\sigma(v_2)\phi_2+...+\sigma(v_n)\phi_n)(u)$$

ពីព្រោះគ្រប់ $u\in V,\sigma=\sigma(v_1)\phi_2+\sigma(v_2)\phi_2+...+\sigma(v_n)\phi_n$ ។

៥.៥. ស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ១១.៣ តាង $\{v_i\}$ និង $\{w_i\}$ ជាគោលនៃ V និងតាង $\{\phi_i\}$ និង $\{\sigma_i\}$ ជាគោលឌុយអាល់ក្នុង V^* ។ តាង P ជាទម្រង់ប្តូរគោលម៉ាទ្រីសពី $\{v_i\}$ ទៅ $\{w_i\}$ ។ នោះ $(P^{-1})^T$ ជាទម្រង់ប្តូរគោលម៉ាទ្រីសពី $\{\phi_i\}$ ទៅ $\{\sigma_i\}$ ។

សន្មត់ថា $i=1,....,n$

$w_i=a_{i1}v_1+a_{i2}v_2+...+a_{in}v_n$ និង $\sigma_i=b_{i1}\phi_1+b_{i2}\phi_2+...+a_{in}v_n$

គេបាន $P=[a_{ij}]$ និង $Q=[b_{ij}]$ ។ យើងត្រូវបង្ហាញថា $Q=(P^{-1})^T$

តាង R_i កំណត់ជួរដេកទី i នៃ Q និង C_j កំណត់ជួរឈរទី j នៃ P^T ។ គេបាន

$R_i=(b_{i1},b_{i2},...,b_{in})$ និង $C_j=(a_{j1},a_{j2},...,a_{jn})^T$

តាមនិយមន័យគោលឌុយអាល់

$$\sigma_i(w_j)=(b_{i1}\phi_1+b_{i2}\phi_2+...+b_{in}\phi_n)(a_{j1}v_1+a_{j2}v_2+...+a_{jn}v_n)$$
$$=b_{i1}a_{j1}+b_{i2}a_{j2}+...+b_{in}a_{jn}=R_iC_j=\delta_{ij}$$

ដែល δ_{ij} ជាដេលតាក្រូណេក័រ។ ដូច្នេះ $QP^T=[R_iC_j]=[\delta_{ij}]=I$

ដូចនេះ $Q=(P^T)^{-1}=(P^{-1})^T$ ។

៥.៦. សន្មតថា $v\in V,v\neq 0$ និង $\dim V=n$ ។ បង្ហាញថាមាន $\phi\in V^*$ ដែល $\phi(v)\neq 0$ ។

យើងពង្រីក $\{v\}$ ទៅជាគោល $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ នៃ V ។ តាមទ្រឹស្តីបទ៥.២ មានសមីការលីនេអ៊ែរតែមួយ $\phi:V\to K$ ដែលមាន $\phi(v)=1$ និង $\phi(v_i)=0,\ i=2,...,n$ ។ ដូចនេះ ϕ មានលក្ខណៈដែលត្រូវការ។

៥.៧. ស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ១១.៤. សន្មតថា $\dim V=n$ ។ អនុវត្ត $v\mapsto\hat{v}$ គឺអ៊ីសូម៉ូភីសនៃ V លើ V^{**} ។

ដំបូងបង្ហាញអនុវត្ត $v \mapsto \hat{v}$ គឺលីនេអ៊ែរសម្រាប់ទំហំវ៉ិចទ័រ $v, w \in V$ និងទំហំស្កាលែ $a, b \in K, \widehat{av+bw} = a\hat{v} + b\hat{w}$ ។ គ្រប់អនុគមន៍លីនេអ៊ែរ $\phi \in V^{**}$,

$$\widehat{av+bw}(\phi) = \phi(av+bw) = a\phi(v) + b\phi(w) = a\hat{v}(\phi) + b\hat{w}(\phi) = \left(a\hat{v} + b\hat{w}\right)(\phi)$$

ព្រោះ $\widehat{av+bw}(\phi) = \left(a\hat{v} + b\hat{w}\right)(\phi)$ សម្រាប់គ្រប់ $\phi \in V^*$ ។ យើងមាន $\widehat{av+bw} = a\hat{v} + b\hat{w}$ ។ ដូចនេះ អនុវត្ត $v \mapsto \hat{v}$ គឺលីនេអ៊ែរ។

សន្មតថា $v \in V, v \neq 0$ ។ តាមលំហាត់១១.៦ មាន $\phi \in V^*$ ដែល $\phi(v) \neq 0$ ។ ដូចនេះ $\hat{v}(\phi) = \phi(v) \neq 0$ និង $\hat{v} \neq 0$ ។ ព្រោះ $v \neq 0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\hat{v} \neq 0$ អនុវត្ត $v \mapsto \hat{v}$ គឺពហុវចនៈនិងអ៊ីសូម៉ូភីស។

គេបាន $\dim V = \dim V^* = \dim V^{**}$ ព្រោះ V មានវិមាត្រកំណត់។ យោងតាម អនុវត្ត $v \mapsto \hat{v}$ គឺជាអ៊ីសូម៉ូភីសនៃ V លើ V^{**} ។

៥.៨. បង្ហាញថាបើ $\phi \in V^*$ បំបែកសំណុំរង S នៃ V នោះ ϕ បំបែកលីនេអ៊ែរ ស្ប៉ាន $L(S)$ នៃ S ។ នោះ $S^0 = \left[span(S)\right]^0$

សន្មតថា $v \in span(S)$ ។ គេមាន $w_1, ..., w_r \in S$ ដែល $v = a_1w_1 + a_2w_2 + ... + a_rw_r$

$\phi(v) = a_1\phi(w_1) + a_2\phi(w_2) + ... + a_r\phi(w_r) = a_1 0 + a_2 0 + ... + a_r 0 = 0$

ព្រោះ v មានជាតុណាមួយនៃ $span(S)$ ϕ បំបែក $span(S)$ ។

៥.៩. រកគោលនៃបំបែក W^0 នៃលំហរង W នៃ $\mathbb{R}^4$ ស្ប៉ានដោយ

$v_1 = (1,2,-3,4)$ និង $v_2 = (0,1,4,-1)$

តាមលំហាត់១១.៨. វាគ្រប់គ្រាន់ក្នុងការរកគោលនៃសំណុំអនុគមន៍លីនេអ៊ែរ ϕ ដែល $\phi(v_1) = 0$ និង $\phi(v_2) = 0$ ដែល $\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4$ ។ ដូច្នេះ

$\phi(1,2,-3,4) = a + 2b - 3c + 4d = 0$ និង $\phi(0,1,4,-1) = b = 4c - d = 0$

ប្រព័ន្ធនៃពីរសមីការក្នុងប៉ារ៉ាម៉ែត្រ a,b,c,d គឺក្នុងទម្រង់echelon ជាមួយអថេរសេរី c និង d

(1) កំណត់ $c = 1, d = 0$ គេបាន $a = 11, b = -4, c = 1, d = 0$

(2) កំណត់ $c = 0, d = 1$ គេបាន $a = 6, b = -1, c = 0, d = 1$

អនុគមន៍លីនេអ៊ែរ $\phi_1(x_i) = 11x_1 - 4x_2 + x_3$ និង $\phi_2(x_i) = 6x_1 - x_2 + x_4$ ជាគោលនៃ W^0 ។

៥.១០. បង្ហាញថា

i. សម្រាប់សំណុំរង S នៃ $V, S \subseteq S^{00}$

តាង $v \in S$ នោះគ្រប់អនុគមន៍លីនេអ៊ែរ $\phi \in S^0$, $\hat{v}(\phi) = \phi(v) = 0$ ។ គេបាន $\hat{v} \in \left(S^0\right)^0$ ។ ដូចនេះ នៅក្រោមការកំណត់អត្តសញ្ញាណនៃ V និង $V^{**}, v \in S^{00}$ ។ យោងតាម $S \subseteq S^{00}$ ។

ii. បើ $S_1 \subseteq S_2$ នោះ $S_2^0 \subseteq S_1^0$

តាង $\phi \in S_2^0$ នោះ $\phi(v) = 0$ គ្រប់ $v \in S_2$ ប៉ុន្តែ $S_1 \subseteq S_2$ គេបាន ϕ បំបែកគ្រប់ធាតុនៃ S_1 ដូចនេះ $S_2^0 \subseteq S_1^0$ ។

៥.១១. ស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ១១.៥។ សន្មតថា V មានវិមាត្រកំណត់និង W គឺជាលំហរងនៃ V ។ គេបាន

i. $\dim W + \dim W^0 = \dim V$

សន្មតថា $\dim V = n$ និង $\dim W = r \le n$ ។ យើងនឹងបង្ហាញថា $\dim W^0 = n - r$ ។ យើងជ្រើសរើសគោល $\{w_1,...,w_r\}$ នៃ W និងពង្រីកវាទៅជាគោលនៃ V ដែល $\{w_1,...,w_r,v_1,...,v_{n-1}\}$ ។

ពិចារណាគោលឌុយអាល់ $\{\phi_1,...,\phi_r,\sigma_1,...,\sigma_{n-1}\}$

តាមនិយមន័យនៃគោលឌុយអាល់ គេបាន $\sigma_1,...,\sigma_{n-r} \in W^0$

យើងបាន $\{\sigma_i\}$ គឺជាគោលនៃ W^0 ។ នោះ $\{\sigma_j\}$ ជាផ្នែកនៃគោលមួយនៃ V^* ហើយវាមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ។

បន្ទាប់មកយើងបង្ហាញថា $\{\phi_j\}$ ស្ប៉ាន W^0 ។ តាង $\sigma \in W^0$ តាមទ្រឹស្តីបទ១១.២

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma(w_1)\phi + ... + \sigma(w_r)\phi_r + \sigma(v_1)\sigma_1 + ... + \sigma(v_{n-r})\sigma_{n-r}\\ &= 0\phi + ... + 0\phi_r + \sigma(v_1)\sigma_1 + ... + \sigma(v_{n-r})\sigma_{n-r}\\ &= \sigma(v_1)\sigma_1 + ... + \sigma(v_{n-r})\sigma_{n-r}\end{aligned}$$

គេបាន $\{\sigma_1,...,\sigma_{n-1}\}$ ស្ប៉ាន W^0 ហើយវាជាគោលនៃ W^0 ។ នាំឱ្យ

$$\dim W^0 = n - r = \dim V - \dim W$$

ii. $W^{00} = W$

សន្មតថា $\dim V = n$ និង $\dim W = r$ ។ នោះ $\dim V^* = n$ និង $\dim W^0 = n - r$ ។ គេបាន $\dim W^{00} = n - (n-r) = r$ ដូចនេះ $\dim W = \dim W^{00}$ ។ តាមលំហាត់១១.១០ $W \subseteq W^{00}$ ផ្អែកតាម $W = W^{00}$ ។

៥.១២. តាង U និង W ជាលំហរងនៃ V ។ បង្ហាញថា $(U+W)^0 = U^0 \cap W^0$ ។

តាង $\phi \in (U+W)^0$ ។ នោះ ϕ បំប្លែងជា $U+W$ និងជាទូទៅ ϕ បំប្លែង U និង W ។ គេបាន $\phi \in U^0$ និង $\phi \in W^0$ គេបាន $\phi \in U^0 \cap W^0$ ។ ដូចនេះ $(U+W)^0 = U^0 \cap W^0$ ។

ម្យ៉ាងវិញទៀត សន្មតថា $\sigma \in U^0 \cap W^0$ ។ គេបាន σ បំប្លែងជា U និង W ។ បើ $v \in U + W$ នោះ $v = u + w$ ដែល $u \in U$ និង $w \in W$ ។ ដូចនេះ $\sigma(v) = \sigma(u) + \sigma(w) = 0 + 0 = 0$ ។ គេបាន σ បំប្លែង $U+W$ ដែល $\sigma \in (U+W)^0$ ។ ដូចនេះ $(U+W)^0 = U^0 \cap W^0$ ។

៥.១៣. តាង ϕ ជាអនុគមន៍លីនេអ៊ែរលើ $\mathbb{R}^2$ កំណត់ដោយ $\phi(x,y) = x - 2y$ ។

ប្រមាណវិធីលីនេអ៊ែរ T លើ $\mathbb{R}^2$ រក $(T^t(\phi))(x,y)$

a. $T(x,y) = (x,0)$

$(T^t(\phi))(x,y) = \phi(T(x,y)) = \phi(x,0) = x$

b. $T(x,y) = (y, x+y)$

$(T^t(\phi))(x,y) = \phi(T(x,y)) = \phi(y,x+y) = y - 2(x+y) = -2x - y$

c. $T(x,y)=(2x-3y,5x+2y)$ តាមន័យនិយមន័យ $T^t(\phi)=\phi\circ T$ ដែល

$(T^t(\phi))(v)=\phi(T(v))$ សម្រាប់គ្រប់ v

$(T^t(\phi))(x,y)=\phi(T(x,y))=\phi(2x-3y,5x+2y)=(2x-3y)-2(5x+2y)=-8x-7y$

៥.១៤. តាង $T:V\to U$ គឺលីនេអ៊ែរ និងតាង $T^t:U^*\to V^*$ គឺត្រង់ស្ប៉ូ។ បង្ហាញថា *Kernel* នៃ T^t គឺបំប្លែងរូបភាពនៃ T ដែល $Ker\ T^t=(\operatorname{Im}T)^0$ ។

សន្មតថា $\phi\in\ker T^t$ ដែល $T^t(\phi)=\phi\circ T=0$ ។ បើ $u\in\operatorname{Im}T$ នោះ $u=T(v)$ សម្រាប់គ្រប់ $u\in V$ នោះ $\phi(u)=\phi(T(v))=(\phi\circ T)(v)=0(v)=0$

យើងមាន $\phi(u)=0$ សម្រាប់គ្រប់ $u\in\operatorname{Im}T$ នោះ $\phi\in(\operatorname{Im}T)^0$ ។ ដូច្នេះ $Ker\ T^t\subseteq(\operatorname{Im}T)^0$ ។

ម្យ៉ាងទៀត សន្មតថា $\sigma\in(\operatorname{Im}T)^0$ ដែល $\sigma(\operatorname{Im}T)=\{0\}$ ។ នោះ គ្រប់ $u\in V$

$$(T^t(\sigma))(v)=(\sigma\circ T)(v)=\sigma(T(v))=0=0(v)$$

យើងមាន $(T^t(\sigma))(v)=0(v)$ សម្រាប់គ្រប់ $u\in V$ នោះ $T^t(\sigma)=0$ ។ ដូច្នេះ $\sigma\in\ker T^t$ និង $(\operatorname{Im}T)^0\subseteq\ker T^t$ ។

ទំនាក់ទំនងទាំងពីរគឺស្មើគ្នា។

៥.១៥. សន្មតថា V និង U មានវិមាត្រកំណត់ និង $T:V\to U$ គឺលីនេអ៊ែរ។

បង្ហាញថា $rank(T)=rank(T^t)$

សន្មតថា $\dim V=n$ និង $\dim U=m$ ហើយសន្មតថា $rank(T)=r$ តាមទ្រឹស្តីបទ១១.៥

$$\dim(\operatorname{Im}T)^0=\dim u-\dim(\operatorname{Im}T)=m-rank(T)=m-r$$

ដោយលំហាត់១១.១៤ $KerT^t=(\operatorname{Im}T)^0, nullity(T^t)=m-r$

$$rank(T^t)=\dim U^*-nullity(T^t)=m-(m-r)=r=rank(T)$$

៥.១៦. ស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ១១.៧ តាង $T:V\to U$ គឺលីនេអ៊ែរ និងតាង A គឺជាម៉ាទ្រីសនៃ T ក្នុងគោល $\{v_j\}$ នៃ V និង $\{u_i\}$ នៃ U ។ នោះម៉ាទ្រីសត្រង់ស្ប៉ូ A^T គឺជាម៉ាទ្រីសនៃ $T^t:U^*\to V^*$ ក្នុងគោលឌុយអាល់ $\{u_i\}$ និង $\{v_j\}$ ។

សន្មតថា សម្រាប់ $j=1,...,m,$

$$T(v_j)=a_{j1}u_1+a_{j2}u_2+...+a_{jn}u_n \qquad (1)$$

យើងចង់បង្ហាញសម្រាប់ $i=1,...,n,$

$$T^t(\sigma_i)=a_{1i}\phi_1+a_{2i}\phi_2+...+a_{mi}\phi_m \qquad (2)$$

ដែល $\{\sigma_i\}$ និង $\{\phi_j\}$ គឺជាគោលឌុលអាល់ $\{u_i\}$ និង $\{v_j\}$ ។

តាង $u\in V$ និងសន្មតថា $v=k_1v_1+k_2v_2+...+k_mv_m$ តាម (1) គេបាន

$$
\begin{aligned}
T(v) &= k_1T(v_1)+k_2T(v_2)+...+k_mT(v_m)\\
&= k_1(a_{11}u_1+...+a_{1n}u_n)+k_2(a_{21}u_1+...+a_{2n}u_n)+...+k_m(a_{m1}u_1+...+a_{mn}u_n)\\
&= (k_1a_{11}+k_2a_{21}+...+k_ma_{m1})u_1+...+(k_1a_{1n}+k_2a_{2n}+...+k_ma_{mn})u_n\\
&= \sum_{i=1}^{n}(k_1a_{1i}+k_2a_{2i}+...+k_ma_{mi})u_i
\end{aligned}
$$

ម្យ៉ាងទៀត សម្រាប់ $j=1,...,n$

$$
\begin{aligned}
\left(T^t(\sigma_j)(v)\right) &= \sigma_j\left(T(v)\right)=\sigma_j\left(\sum_{i=1}^{n}(k_1a_{1i}+k_2a_{2i}+...+k_ma_{mi})u_i\right)\\
&= k_1a_{1j}+k_2a_{2j}+...+k_ma_{mj} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

មួយវិញទៀត សម្រាប់ $j=1,...,n$

$$
\begin{aligned}
(a_{1j}\phi_1+a_{2j}\phi_2+...+a_{mj}\phi_m)(v) &= (a_{1j}\phi_1+a_{2j}\phi_2+...+a_{mj}\phi_m)(k_1v_1+k_2v_2+...+k_mv_m)\\
&= k_1a_{1j}+k_2a_{2j}+...+k_ma_{mj} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ $T^t(\sigma_j)=a_{1j}\phi_1+a_{2j}\phi_2+...+a_{mj}\phi_m,\ \ j=1,...,n$ ។

ឯកសារយោង

1. វចនានុក្រម គណិតវិទ្យា អង់គ្លេស-ខ្មែរ ,RUPP (2017)
2. វចនានុក្រម សម្តេចសង្ឃ ជួន ណាត
3. សៀវភៅពីជគណិតលីនេអ៊ែរ សកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ(២០១៣)
4. ឯកសាររបស់ ពីជគណិតលីនេអ៊ែរ លោកស្រីបណ្ឌិត ឡឹង រដ្ឋា (២០២៣)
5. សៀវភៅ ពីជគណិតលីនេអ៊ែរ
6. Álgebra lineal - Eduardo Espinoza Ramos
7. Algebra 1_McGraw-Hill.pdf (PDFDrive.com)
8. Hogben-Handbook of Linear Algebra-(CRC press, 2007)
9. Linear_Algebra,_4th_Edition__(2009)Lipschutz-Lipson
10. Linear Algebra and Its Applications 4E (Lay).
11. howard_anton_chris_rorres_elementary_linear_algebra_applications_version_11th_edition
12. Linear Algebra
13. David Cherney, Tom Denton,Rohit Thomas and Andrew Waldron: Edited by Katrina Glaeser and Travis Scrimshaw,First Edition. Davis California, 2013