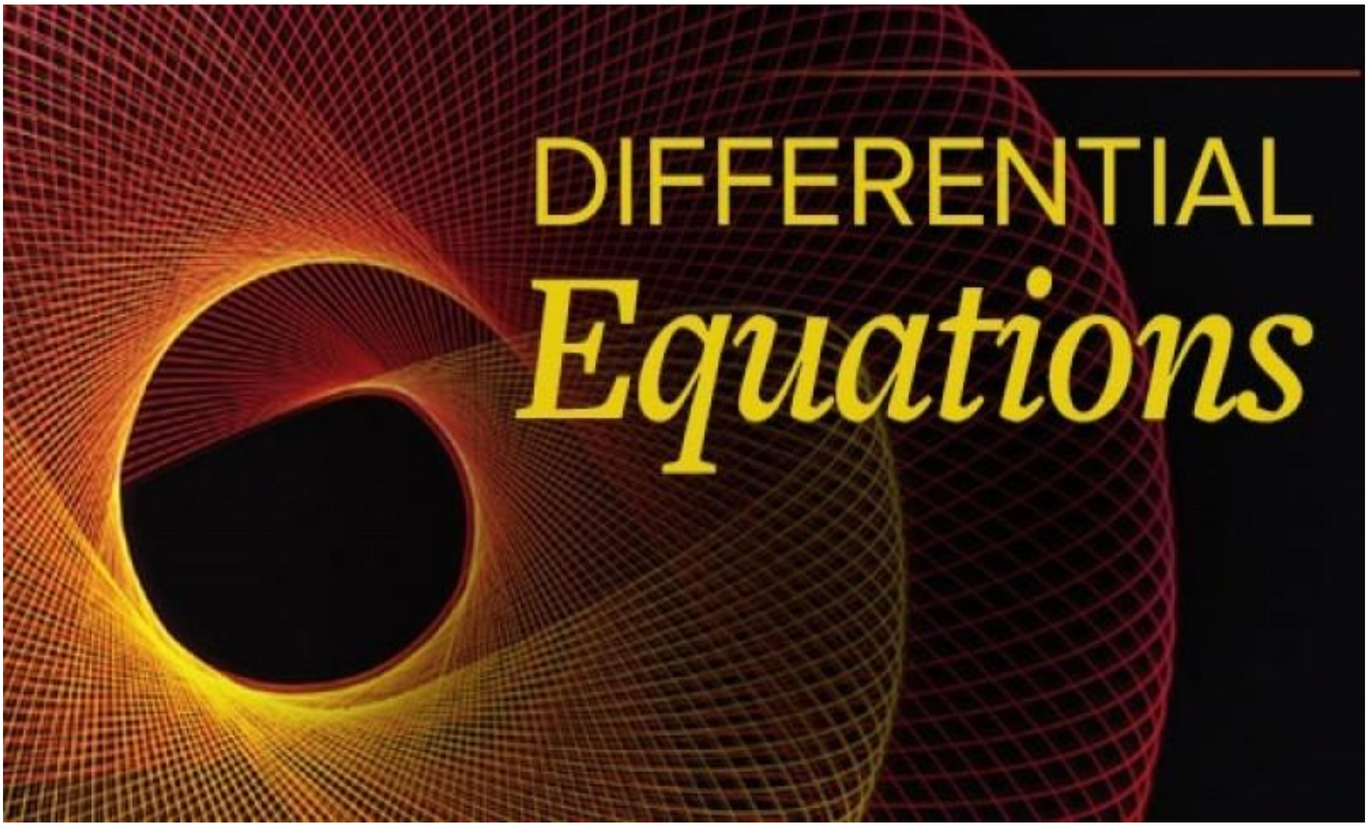
សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ២



អ្នកនិពន្ធដោយ៖ លោក យុត តា

គាំទ្រថវិកាលើការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អដោយ៖

“មូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍”

២០២២

គណៈកម្មការនិពន្ធ៖ អនុបណ្ឌិត ឃុត តា ជាគ្រូឧទ្ទេសឧត្តមសិក្សា
គណៈកម្មការរចនាទំព័រ ៖ លោកស្រី សំបាត់ អ៊ាត លោកស្រី ឈុំ ពៅ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យ៖

១.លោក ហ៊ុន វ៉ាទី

២.លោក ឈាន ហាខ

.

បុព្វកថា

ដំណើរអភិវឌ្ឍនៃព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជានៅក្នុងយុគសម័យទំនើបនេះ ជាមេរៀនដ៏ជោគជ័យបំផុតមួយដែលចាប់ឬសគល់ចេញពីការបញ្ចប់របបប្រល័យពូជសាសន៍ ការបញ្ចប់សង្គ្រាម ការផ្សះផ្សារជាតិ ការកសាងមូលដ្ឋានរឹងមាំនៃសន្តិភាពនិងស្ថេរភាព និងការអភិវឌ្ឍសេដ្ឋកិច្ច។ នៅក្រោយពេលដែលសន្តិភាពត្រូវបានកើតឡើងដោយបរិបូរណ៍នៅឆ្នាំ១៩៩៨ កម្ពុជាទទួលកំណើនសេដ្ឋកិច្ចខ្ពស់ គឺប្រមាណ៨% ក្នុងមួយឆ្នាំ។ លើសពីនេះទៀតអត្រានៃភាពក្រីក្រត្រូវបានកាត់បន្ថយពីប្រមាណ៥៣% នៅឆ្នាំ២០០៤ មកនៅទាបជាង១០% នៅឆ្នាំ២០១៩។ ដំណើរនៃការអភិវឌ្ឍជាតិជាសកម្មភាពដែលបន្តទៅមុខជាប់ជានិច្ច ហើយគោលនយោបាយថ្មីៗដែលមានលក្ខណៈអន្តរវិស័យគ្របដណ្តប់ ក៏កំពុងលេចរូបរាងឡើង ដើម្បីតម្រង់ទិសកម្ពុជាឆ្ពោះទៅកាន់ប្រទេសមានប្រាក់ចំណូលមធ្យមកម្រិតខ្ពស់នៅឆ្នាំ២០៣០ និងឈានឡើងជាប្រទេសមានប្រាក់ចំណូលខ្ពស់ នៅឆ្នាំ២០៥០។ ការប្រែប្រួលឆាប់រហ័សនៃនិម្មាបនកម្មពិភពលោក និងតំបន់រួមទាំងទំនាក់ទំនងភូមិសាស្ត្រនយោបាយ បានផ្តល់កាលានុវត្តភាពសម្រាប់ការអភិវឌ្ឍឧស្សាហកម្មនៅកម្ពុជា ដែលត្រូវបានរាជរដ្ឋាភិបាលចាត់ទុកជាមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃកំណើនសេដ្ឋកិច្ចកម្ពុជា។ រាជរដ្ឋាភិបាលកម្ពុជាបានកំពុងបន្តពង្រឹង និងអភិវឌ្ឍវិស័យអប់រំឆ្ពោះទៅរកការស្រាវជ្រាវ និងនវានុវត្តន៍ដើម្បីពង្រឹងសមត្ថភាពនិងជំនាញរបស់ធនធានមនុស្សនៅកម្ពុជាឱ្យស្របទៅនឹងបរិបទថ្មីនៃការអភិវឌ្ឍ ជាពិសេសការពង្រឹងសហគ្រិនភាពក្នុងការរៀបចំម៉ូដែលធុរកិច្ចថ្មីៗ។ ដើម្បីចាប់យកកាលានុវត្តភាពពីបដិវត្តន៍ឧស្សាហកម្មទី៤ និងសេដ្ឋកិច្ចឌីជីថលដែលកំពុងផុសផុលឡើង ប្រព័ន្ធអេកូឡូហ្ស៊ីដែលបង្កលក្ខណៈអំណោយផលដល់ការបង្កើតថ្មី នវានុវត្តន៍ ការស្រាវជ្រាវ និងអភិវឌ្ឍន៍ ត្រូវតែមានការកែលម្អ។

បណ្តាប្រទេសនៅទ្វីបអាស៊ីកំពុងនាំមុខក្នុងការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍ ដោយមានភាគហ៊ុនប្រមាណ៤៤% នៃការវិនិយោគទាំងមូលរបស់ពិភពលោក។ ប្រទេសចិនកំពុងបន្តកសាងហេដ្ឋារចនាសម្ព័ន្ធនៃការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍ ក៏ដូចជាសមត្ថភាពមនុស្ស។ ផ្ទុយទៅវិញ ប្រទេសនៅទ្វីបអាមេរិកខាងត្បូង និងអាហ្វ្រិក កំពុងស្ថិតនៅឆ្ងាយពីការវិនិយោគនេះ ហើយជាលទ្ធផល ប្រទេសទាំងនោះក៏ពុំមានកំណើនសេដ្ឋកិច្ចគួរឱ្យកត់សម្គាល់ដែរ។ ទុនវិនិយោគសរុបលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍរបស់ប្រទេសនៅទ្វីបអាមេរិកខាងត្បូងនិងអាហ្វ្រិក មានប្រមាណ៥%នៃការវិនិយោគទាំងមូលរបស់ពិភពលោក ក្នុងពេលដែលតំបន់ទាំង២នេះមានប្រជាជនប្រមាណ២០%នៃប្រជាជនពិភពលោក។ ប្រទេសចំនួន៦ដែលមានលំដាប់ខ្ពស់ជាងគេនៅក្នុងការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍ រួមមានសហរដ្ឋអាមេរិក ចិន ជប៉ុន អាល្លឺម៉ង់ ឥណ្ឌា និងកូរ៉េខាងត្បូង ដែលស្មើនឹងប្រមាណ៧០%នៃទុនវិនិយោគសរុបរបស់ពិភពលោក។

តើចំណេះដឹង ផលិតផល និងសេវាកម្មថ្មីទាំងនេះកើតឡើងពីអ្វី? ហើយកើតឡើងដោយរបៀបណា? ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជាកំពុងតែកសាងមូលដ្ឋានសម្រាប់ការត្រៀមខ្លួនទទួល និងប្រកួត

ប្រជែងក្នុងយុគសម័យបដិវត្តឧស្សាហកម្មទី៤ នៅក្នុងសេដ្ឋកិច្ចដែលផ្អែកលើពុទ្ធិ ហើយដែលប្រការនេះចាំបាច់តម្រូវឱ្យពលរដ្ឋកម្ពុជា ត្រូវក្លាយខ្លួនជាពលរដ្ឋឌីជីថល ពលរដ្ឋសកល និងពលរដ្ឋដែលប្រកបដោយការទទួលខុសត្រូវ ដែលមានសមត្ថភាពក្នុងការផលិត ចែកចាយ និងប្រើប្រាស់ពុទ្ធិដើម្បីទទួលមនុញ្ញផល និងរួមចំណែកក្នុងកំណើន។ ធនាគារពិភពលោកបានធ្វើការកត់សម្គាល់តាំងពីឆ្នាំ២០០២ នូវបម្លាស់ប្តូរនៃមូលដ្ឋានសេដ្ឋកិច្ច ពីសេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើកម្លាំងពលកម្ម និងធនធានអតិកម្ម (Labour and Resource Based Economy) ទៅកាន់សេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើពុទ្ធិ (Knowledge Based-Economy) ដែលក្នុងន័យនេះ ពុទ្ធិគឺជាគន្លឹះនៃការអភិវឌ្ឍ។ អាស្រ័យហេតុនេះ នៅលើគន្លងដែលកម្ពុជាកំពុងធ្វើដំណើរឆ្ពោះទៅកាន់សេដ្ឋកិច្ចឌីជីថល សង្គមកម្ពុជាត្រូវតែមានសមត្ថភាពក្នុងការផលិត ជ្រើសរើស បន្សាំ បង្កើតមុខរបរ និងប្រើប្រាស់ពុទ្ធិ ដើម្បីរក្សានិរន្តរភាពនៃកំណើន និងកែលម្អជីវភាពរស់នៅ។ សមត្ថភាពទាំងនេះ អាចកើតឡើងនៅពេលពលរដ្ឋកម្ពុជាមានឱកាសក្នុងការទទួលបានបទពិសោធន៍ពីការស្រាវជ្រាវ ការបណ្តុះគំនិតច្នៃប្រឌិត និងការស្វែងរកនវានុវត្តន៍។

កំណែទម្រង់វិស័យអប់រំ គឺជាការត្រួសត្រាយមាគ៌ាសម្រាប់ដំណើរឆ្ពោះទៅកាន់សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិ និងប្រជាពលរដ្ឋប្រកបដោយភាពរស់រវើក។ តាមរយៈមូលដ្ឋានអប់រំ សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិនឹងប្រមូលផ្តុំ បង្កើត និងចែករំលែក ទៅកាន់សមាជិកក្នុងសង្គមនូវសម្បទាអប់រំ ពិសេសគឺពុទ្ធិសម្បទាក្នុងបុព្វហេតុនៃមនុស្សជាតិនិងឧត្តមប្រយោជន៍នៃប្រទេស។ សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិ គឺពុំគ្រាន់តែជាសង្គមដែលសម្បូរព័ត៌មានប៉ុណ្ណោះទេ តែជាសង្គមដែលប្រជាពលរដ្ឋអាចធ្វើបរិវត្តកម្មពីព័ត៌មានទៅជាមូលធនប្រកបដោយប្រសិទ្ធភាព។ ការរីកចម្រើនទៅមុខជាលំដាប់នៃបច្ចេកវិទ្យានិងតំណភ្ជាប់ បានពង្រីកព្រំដែននៃការចូលទៅកាន់ និងការទទួលបានព័ត៌មានជាសកល ហើយដែលក្នុងន័យនេះ ការអប់រំនឹងបន្តវិវត្តទៅមុខនិងមានការផ្លាស់ប្តូរ។ សង្គមមួយដែលមានអំណាន និងរបាប់ជាបុរេលក្ខខណ្ឌនៃជីវភាពប្រចាំថ្ងៃនៃប្រជាពលរដ្ឋ ពេលនោះបំណិននៃអំណាន និពន្ធ និងការគណនាលេខនព្វន្ត គឺជាចលករនៃការរៀនរបស់សិស្ស។ ជាតុដ៏ចម្បងមួយដែលស្ថិតនៅក្នុងការកសាងសង្គមដែលប្រកបដោយពុទ្ធិគឺសៀវភៅសិក្សា ហើយការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សាជាប្រចាំ គឺជានវានុវត្តន៍នៃវិស័យអប់រំដែលនាំទៅរកការសិក្សាពេញមួយជីវិត ការអភិវឌ្ឍសម្បទាអប់រំ និងការចែករំលែកចំណេះដឹង។ មូលដ្ឋានអប់រំ ជាពិសេសគឺគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សាត្រូវមានតួនាទីដែលប្រកបដោយការឆ្លើយតបចំពោះតម្រូវការខាងលើនេះ។ សាស្ត្រាចារ្យ អ្នកស្រាវជ្រាវ និងបុគ្គលិកអប់រំត្រូវបន្តសិក្សាជាប់ជានិច្ចតាមរយៈការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ហើយដែលសៀវភៅសិក្សាទាំងនេះនឹងក្លាយជាស្ពាននៃទំនាក់ទំនងរវាងនវានុវត្តន៍នៃបច្ចេកវិទ្យា និងការរៀននិងបង្រៀននៅក្នុងថ្នាក់រៀន។

សង្គមដែលប្រកបពុទ្ធិ ក៏ជាសង្គមដែលបណ្តុះឱ្យមានរចនាសម្ព័ន្ធទន់នៃសេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើពុទ្ធិដែរ។ ឧទាហរណ៍ជាក់ស្តែងនៃបែបផែននេះរួមមាន Silicon Valley នៃសហរដ្ឋអាមេរិក សួនឧស្សាហកម្មវិស្វកម្មអាកាសយានយន្តនិងយានយន្តនៅទីក្រុង Munich ប្រទេសអាល្លឺម៉ង់ តំបន់ជីវបច្ចេកវិទ្យានៅក្រុង Hyderabad ប្រទេសឥណ្ឌា តំបន់ផលិតគ្រឿងអេឡិចត្រូនិក និងសារគមនាគមន៍ ឌីជីថលនៅទីក្រុង Seoul ប្រទេសកូរេខាងត្បូង ក៏ដូចជាសួនឧស្សាហកម្មថាមពល និង

ឥន្ទនគីមីសាស្ត្រនៃប្រទេសប្រេស៊ីល ហើយក៏នៅមានទីក្រុងនៃប្រទេសជាច្រើនទៀតនៅលើពិភពលោក លក្ខណៈសម្បត្តិនៃទីក្រុងទាំងនេះគឺការប្រើប្រាស់និន្នាការនៃការអភិវឌ្ឍដែលជំរុញ និងតម្រង់ទិសដោយចំណេះដឹង ហើយដែលចំណេះដឹងទាំងនោះកើតចេញជាដំបូងពីការវិនិយោគទៅលើគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា ស្ថាប័នស្រាវជ្រាវ មជ្ឈមណ្ឌលឧត្តមភាពនៃជំនាញជាន់ខ្ពស់ ការប្រកួតប្រជែងដោយគុណាធិបតេយ្យ និង ជាពិសេសគឺការបណ្ដុះវប្បធម៌អំណាននិងនិពន្ធសៀវភៅ។ ល្បឿននៃការរីកចម្រើនផ្នែកពុទ្ធិ និងបច្ចេកវិទ្យាកំពុងមានសន្ទុះលឿនជាងអ្វីដែលសិស្ស និងនិស្សិតអាចទទួលបានពីគ្រូនៅគ្រឹះស្ថានសិក្សា ដែលធ្វើឱ្យគោលដៅនៃការអប់រំនៅពេលបច្ចុប្បន្ននេះ មានការប្រឈមខ្លាំងជាងពេលណាទាំងអស់។ ឧទាហរណ៍ ក្នុងមួយឆ្នាំ មានសៀវភៅជាង២,២លានចំណងជើង ត្រូវបានសរសេរ និងបោះពុម្ព ដែលក្នុងនោះប្រទេសចិនមាន៤៤០ពាន់ ចំណែកឯសហរដ្ឋអាមេរិកមាន ៣០៥ ពាន់ និងប្រទេសរុស្ស៊ីមាន ១២០ពាន់ចំណងជើង។

ខណៈពេលដែលបច្ចេកវិទ្យាកំពុងរីកចម្រើនជារៀងរាល់ថ្ងៃ មធ្យោបាយសម្រាប់អំណានក៏មានច្រើនជម្រើសសម្រាប់សិស្ស និស្សិត និងសាធារណៈជនរួមមានការអានសៀវភៅ ការអានលើឧបករណ៍អេឡិចត្រូនិក ការអានដោយប្រើទូរសព្ទវៃឆ្លាត និងការអានលើកុំព្យូទ័រ ដែលសុទ្ធសឹងជាមធ្យោបាយសំខាន់ៗដែលនាំអ្នកអានទាំងឡាយឱ្យសម្រេចគោលបំណងអានរបស់ខ្លួន។ ម្យ៉ាងវិញទៀត អំណានដោយប្រើមធ្យោបាយបច្ចេកវិទ្យាទំនើប ចំណាយពេលតិច ងាយស្រួលអាន និងជួយដល់បរិស្ថានមួយកម្រិតទៀត។ នាពេលបច្ចុប្បន្ន សិស្ស និស្សិត និងសាធារណៈជនកម្ពុជាដែលស្រឡាញ់អំណានកំពុងតែប្រើប្រាស់មធ្យោបាយអំណានទាំងនេះ។ បើយើងក្រឡេកមើលទៅប្រទេសជឿនលឿន ទោះបីជាបច្ចេកវិទ្យារីកចម្រើនខ្លាំងយ៉ាងណា អំណានតាមរយៈសៀវភៅនៅតែមានសន្ទុះដដែល។ ម្យ៉ាងវិញទៀត បច្ចេកវិទ្យាអានបែបទំនើបតាមរយៈឧបករណ៍ទំនើប អាស្រ័យលើលទ្ធភាពនៃធនធានអប់រំឌីជីថល និងមាតិកាឌីជីថលគ្រប់គ្រាន់ដែលបានផលិត និងបង្ហោះចែកចាយសម្រាប់អំណាន។

ក្នុងបរិបទកម្ពុជា ជាពិសេសក្នុងបរិការណ៍នៃការផ្ទុះរីករាលដាលនៃជំងឺកូវីដ-១៩ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានជំរុញឱ្យមានបរិវត្តកម្មឌីជីថលនៅក្នុងអេកូស៊ីស្តែមនៃការអប់រំ ជាពិសេសការអប់រំតាមប្រព័ន្ធអេឡិចត្រូនិកនិងការអប់រំពីចម្ងាយដើម្បីលើកកម្ពស់អំណានតាមរយៈការផលិតមាតិកាឌីជីថលដែលមានភាពចំរុះ ការកសាងសមត្ថភាពផ្នែកតំណភ្ជាប់និងវេទិកាឌីជីថល ការពង្រីកវិសាលភាពនៃមជ្ឈមណ្ឌលទិន្នន័យ និងការលើកកម្ពស់គុណភាពនៃការផលិតធនធានអប់រំឌីជីថល គួបផ្សំជាមួយការចែកសន្លឹកកិច្ចការឱ្យសិស្សយកទៅរៀននៅផ្ទះ និងការចុះទៅជួបជាមួយសិស្សជាបណ្ដុំនៅតាមសហគមន៍។ ក្នុងន័យលើកកម្ពស់អំណាន និងភាពសម្បូរបែបនៃធនធានសៀវភៅសិក្សាឱ្យកាន់តែមានប្រសិទ្ធភាពនិងភាពសក្ដិសិទ្ធិ និងផ្ដល់ឱកាសអំណានកាន់តែច្រើនថែមទៀតដល់សិស្សានុសិស្ស និស្សិត និងសាធារណៈជន ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាលើកទឹកចិត្តនូវចំណុចមួយចំនួនដូចខាងក្រោម៖

1. សាស្ត្រាចារ្យ អ្នកស្រាវជ្រាវ និងបុគ្គលិកអប់រំ សូមបន្តនិងបង្កើនការបោះពុម្ពស្នាដៃបន្ថែមទៀត ដើម្បីធ្វើឱ្យធនធានសម្រាប់អំណានកាន់តែសម្បូរបែប ជាពិសេសធនធានអំណានជាខេមរភាសា
2. គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា សូមផ្តល់លទ្ធភាពគ្រប់បែបយ៉ាង ដើម្បីឱ្យបុគ្គលិកអប់រំគ្រប់លំដាប់ថ្នាក់ និង និស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សាអាចចូលរួមអាន និងសិក្សាស្រាវជ្រាវតាមគ្រប់លទ្ធភាពជាមួយធនធានអំណាន ជាពិសេសការរៀបចំឱ្យមានពេលវេលាសម្រាប់សហសិក្សា និងអំណានក្នុងបណ្ណាល័យ
3. សាស្ត្រាចារ្យតាមមុខវិជ្ជា និងអ្នកស្រាវជ្រាវតាមជំនាញឬវិស័យ ត្រូវរៀបចំដំណើរការរៀនបង្រៀន និងស្រាវជ្រាវដែលមានដាក់បញ្ចូលកិច្ចការស្វ័យសិក្សា សហសិក្សា ឬការស្រាវជ្រាវបណ្ណាល័យដែលតម្រូវឱ្យនិស្សិត ត្រូវអាននិងស្រាវជ្រាវជាមួយធនធានអំណាន
4. គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងមជ្ឈមណ្ឌលស្រាវជ្រាវ ត្រូវខិតខំឱ្យអស់លទ្ធភាពក្នុងការបង្កើតបណ្ណាល័យ មជ្ឈមណ្ឌលរក្សាឯកសារ ឬមជ្ឈមណ្ឌលអប់រំឌីជីថល ជាដើម ដើម្បីឱ្យបុគ្គលិកអប់រំគ្រប់លំដាប់ថ្នាក់និងនិស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សា អាចទទួលបាន និងស្វែងរកប្រភពសម្រាប់អំណាន កាន់តែសម្បូរបែប និងមានភាពបត់បែន ឆ្លើយតបតាមតម្រូវការអ្នកអាន
5. និស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សា ត្រូវខិតខំនិងចំណាយពេលអាន និងចាត់ទុកវប្បធម៌ និងអកប្បកិរិយាអំណានជាផ្នែកមួយ នៃពេលវេលានិងភាពស៊ីវិល័យនៃជីវិតប្រចាំថ្ងៃ
6. បងប្អូនជនរួមជាតិ ដែលជាមាតាបិតា ឬអ្នកអាណាព្យាបាល សូមជួយជំរុញនិងបង្កលក្ខណៈកាន់តែ ច្រើនថែមទៀត ជាពិសេសការលៃលកចំណាយនៅក្នុងគ្រួសារសម្រាប់ការទិញសម្ភារៈសិក្សា សៀវភៅអាន និងឧបករណ៍សម្រាប់អំណានដល់កូនៗ ដែលចាត់ទុកជាការវិនិយោគមួយដ៏សំខាន់ សម្រាប់ បង្កើនចំណេះដឹង និងអនាគតរបស់ពួកគេ។

ដោយមានការគាំទ្រពីក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ នៅឆ្នាំ២០២០ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានបង្កើតមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ដែលហៅកាត់ថា“មូលនិធិ ស.គ.ន” និងហៅជាភាសាអង់គ្លេសថា The Research Creativity and Innovation Fund ដែលហៅកាត់ជាភាសាអង់គ្លេសថា “RCI Fund”។ គោលដៅចម្បងនៃមូលនិធិនេះ គឺរួមចំណែកលើកកម្ពស់វប្បធម៌នៃការស្រាវជ្រាវ បំផុសគំនិតច្នៃប្រឌិត និងជំរុញការធ្វើនវានុវត្ត ដើម្បីជាប្រយោជន៍ដល់វិស័យអប់រំ យុវជន និងកីឡា ដែលឆ្លើយតបទៅនឹងទីផ្សារពលកម្ម និងសាកលភាវូបនីយកម្ម។ មូលនិធិ ស.គ.ន បានសម្រេចកំណត់ប្រធានបទ ជាអាទិភាពសម្រាប់ការគាំទ្រដោយមូលនិធិចំនួន៣ រួមមាន ឌីជីថលនីយកម្មសម្រាប់បដិវត្តឧស្សាហកម្ម៤.០ (Digitalization for IR.4.0) ការស្រាវជ្រាវអនុវត្តលើវិស័យកសិកម្ម (Applied Agricultural Research) និងការស្រាវជ្រាវគរុកោសល្យសតវត្សទី២១ (21st Century Pedagogy Research)។

ដោយមានការធ្វើអាទិភាពូបនីយកម្មទៅលើទិសដៅនៃការប្រើប្រាស់ថវិកាមូលនិធិសម្រាប់ឆ្នាំ២០២០ ក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ និងក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានផ្តល់ការគាំទ្រដល់

ការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អ សៀវភៅសិក្សា(Text book) ដែលនឹងត្រូវប្រើប្រាស់នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។ គោលបំណងនៃការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អ សៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សាគឺដើម្បីបង្កើនបរិមាណ លើកកម្ពស់គុណភាព និងពង្រីកសមធម៌នៃធនធានសិក្សាជាខេមរភាសា ជូនដល់និស្សិតដែលកំពុងបន្តការសិក្សា និងត្រៀមខ្លួនធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។ លើសពីនេះទៀតការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា មានគោលដៅដូចខាងក្រោម ៖

- ឆ្លើយតបជាបន្ទាន់ចំពោះការខ្វះខាតធនធានសិក្សា ដែលជាតម្រូវការសិក្សារបស់និស្សិតនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា
- លើកកម្ពស់ទំនើបភាវូបនីយកម្ម និងឧត្តមានុវត្តន៍នៃការរៀននិងបង្រៀន និងការស្រាវជ្រាវនៅលើមុខវិជ្ជា កម្មវិធីសិក្សា ឬមុខជំនាញជាក់លាក់
- បង្កើនភាពស៊ីជម្រៅក្នុងការកសាងវិជ្ជាជីវៈនិងបទពិសោធន៍សម្រាប់ឋានៈសាស្ត្រាចារ្យ និងអ្នកស្រាវជ្រាវ
- រួមចំណែកដល់ការកសាងភាពជាសហគមន៍វិជ្ជាជីវៈ ការចែករំលែកបទពិសោធន៍ និងវប្បធម៌នៃការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានវាយតម្លៃខ្ពស់ចំពោះការបោះជំហានប្រកបដោយមនសិការវិជ្ជាជីវៈនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងបុគ្គលិកអប់រំទាំងអស់ ក្នុងការរៀបចំ រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ដើម្បីបង្កើនបរិមាណ លើកកម្ពស់គុណភាព និងពង្រឹងសមធម៌នៃធនធានសិក្សាជាខេមរភាសា ជូននិស្សិតដែលកំពុងបន្តការសិក្សា និងត្រៀមខ្លួនធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។ សៀវភៅសិក្សាជាផ្នែកមួយនៃការទទួលស្គាល់គុណភាពអប់រំនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងជាធនធានសិក្សាដែលជាមូលដ្ឋានមួយដ៏សំខាន់ ក្នុងការគាំទ្រដល់ការបង្រៀន និងរៀន ហើយត្រូវមានបរិមាណគ្រប់គ្រាន់ ឆ្លើយតបទៅនឹងកម្មវិធីអប់រំ និងតម្រូវការសិក្សាស្រាវជ្រាវ។ ជាគោលការណ៍ គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សាទាំងអស់ ត្រូវមានសៀវភៅសិក្សាដែលប្រើជាគោលសម្រាប់មុខវិជ្ជានីមួយៗ។ ចំនួនសៀវភៅសិក្សាដែលគ្រប់គ្រាន់សម្រាប់ការស្រាវជ្រាវ និងការសិក្សារបស់និស្សិត ត្រូវមានយ៉ាងតិចមួយចំណងជើងក្នុងមួយមុខវិជ្ជា ហើយត្រូវតម្កល់យ៉ាងតិច២ច្បាប់ នៅក្នុងបណ្ណាល័យ ឬអាចរកបានតាមប្រព័ន្ធអេឡិចត្រូនិក។ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា លើកទឹកចិត្តបន្ថែមទៀតជូនដល់គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សារដ្ឋ និងឯកជនដែលបានស្នើសុំថវិកាមូលនិធិរួច សូមចូលរួមបន្ថែមទៀតដើម្បីបង្កើនចំនួនចំណងជើងសៀវភៅ។ ចំណែកគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សារដ្ឋនិងឯកជនដែលពុំទាន់បានដាក់ពាក្យស្នើសុំ សូមចូលរួមដើម្បីជាគុណប្រយោជន៍ដល់តម្រូវការដ៏ទទូច និងថ្លៃថ្លានៃនិស្សិតកម្ពុជាក្នុងការសិក្សា និងស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។

សេចក្តីបញ្ជាក់
នៃមូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍

សៀវភៅសិក្សានេះជាលទ្ធផលនៃការស្នើសុំអនុវត្តថវិកាមូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ក្នុងគម្រោង**រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ដែលនឹងត្រូវប្រើប្រាស់នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។** សៀវភៅសិក្សានេះ ត្រូវបានរៀបរៀង និពន្ធ ឬកែលម្អដោយមានការធានាអះអាងថាជាស្នាដៃរបស់អ្នកនិពន្ធផ្ទាល់ និងបានឆ្លងកាត់ត្រួតពិនិត្យ ផ្តល់យោបល់ និងវាយតម្លៃដោយក្រុមប្រឹក្សាអប់រំ ក្រុមប្រឹក្សាស្រាវជ្រាវ ឬក្រុមប្រឹក្សាដែលមានតម្លៃស្មើនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងតាមរយៈកិច្ចសន្យាដែលបានធ្វើឡើង និងដែលបានតម្កល់ទុកនៅមូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍។ រាល់ខ្លឹមសារ ការបកស្រាយ និងរូបភាព គឺជាជំហរនិងទស្សនៈផ្ទាល់របស់អ្នកនិពន្ធ ហើយ ពុំឆ្លុះបញ្ចាំង ឬជាតំណាងដល់មូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ នៃក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ឡើយ។

មាតិកា

បុព្វកថា i

សេចក្តីបញ្ជាក់ vi

អារម្ភកថា xi

សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ xii

ការបរិយាយលើមុខវិជ្ជា xiii

មូលន័យសង្ខេប xiv

ជំពូកទី១ សេចក្តីផ្តើម 1

១.១. គំរូមូលដ្ឋានគណិតវិទ្យា ទិសដៅក្រុមវ៉ិចទ័រ 1

លំហាត់ 6

១.២. ចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមួយចំនួន 7

១.៣. ការចាត់ថ្នាក់នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល 9

១.៣.១. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលធម្មតា 9

១.៣.២ប្រព័ន្ធនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល 9

១.៣.៣.លំដាប់សមីការ 10

លំហាត់ 10

ជំពូកទី២ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់មួយ 11

២.១. សមីការលីនេអ៊ែរដែលមានអថេរជាមេគុណ 11

២.១.១.វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយទូទៅ 16

២.១.២ វិធីបម្រែបម្រួលនៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ 18

លំហាត់ 20

២.២. សមីការអាចញែកអថេរបាន 20

លំហាត់ 22

២.៣. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែន 23

២.៤. សមីការ ប៊ែនូយី (Bernoulli Equations) 25

២.៥. សមីការប្រាកដ 26

២.៦ សមីការមិនប្រាកដ និងកត្តាអាំងតេក្រាល 30

២.៦.១ វិធីកត្តាអាំងតេក្រាល 30
លំហាត់ 32
២.៧. សមីការអូម៉ូហ្សែន 34
២.៧.១. អនុគមន៍អូម៉ូហ្សែន 34
២.៧.២. សមីការអូម៉ូហ្សែន 35
២.៧.៣. វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយ 35
២.៨. ការជំនួស 37
២.៨. វិធីពីកាត(Picard's Method) 38
ជំពូកទី៣ សមីការលីនេអ៊ែលំដាប់ពីរ 42
៣.១ សមីការអូម៉ូហ្សែនជាមួយមេគុណថេរ 42
៣.១.១ និយមន័យ 43
៣.១.២ វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយ 44
លំហាត់ 47
៣.២ ដំណោះស្រាយគ្រឹះនៃសមីការលីនេអ៊ែរអូម៉ូហ្សែន 48
លំហាត់ 52
៣.៣ ភាពអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ និងដេទែមីណង់ (Wronskian) 55
លំហាត់ 57
៣.៤ ឫសកុំផ្លិចនៃសមីការសម្គាល់ 59
លំហាត់ 62
៣.៥ ឫសឌុប និង ការបង្រួមនៃលំដាប់ 66
៣.៥.១ វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយទូទៅ 67
៣.៥.២ បង្រួមនៃលំដាប់ 69
លំហាត់ 71
៣.៦. សមីការមិនអូម៉ូសែននិង វិធីសាស្ត្រនៃមេគុណមិនកំណត់ 74
៣.៦.១វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយ 75
លំហាត់ 78
៣.៧.១ វិធីបម្រែបម្រួលប៉ារ៉ាមែត្រ 80

លំហាត់ 81
៣.៨. រំញ័រមេកានិច និង អគ្គិសនី(Chanical And Electrical Vibrations) 82
៣.៩. កម្លាំងលំញ័រ (Forced Vibrations) 92
លំហាត់ 96
ជំពូកទី៤ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ខ្ពស់ 100
៤.១ ទ្រឹស្តីបទទូទៅនៃសមីការលីនេអ៊ែរលំដាប់ n 100
៤.១.១ ការបង្កើតចម្លើយទីពីរចេញពីចម្លើយទីមួយ 103
លំហាត់ 103
៤.២. សមីការអូម៉ូសែនមេគុណថេរ 104
៤.២.១ ករណីឫសជាចំនួនពិតនិងមិនស្មើ 105
៤.២.២ ករណីឫសជាចំនួនកុំផ្លិច(Complex Roots) 107
៤.២.៣ ករណីឫសឌុប(Repeated Root) 108
លំហាត់ 110
៤.៣. វិធីសាស្ត្រមេគុណមិនកំណត់ 112
លំហាត់ 115
៤.៤ វិធីបម្រែបម្រួលប៉ារ៉ាម៉ែត្រ 115
លំហាត់ 118
៤.៥ សមីការ អឺលែរ (Euler Equation) 119
៤.៥.១ មានឫសជាចំនួនពិតពីរផ្សេងគ្នា 119
៤.៥.២. មានឫសជាចំនួនពិតពីរដូចគ្នា 120
៤.៥.៣ មានឫសជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់ 121
៤.៤ មេគុណមិនកំណត់និងវិធីសាស្ត្រធ្វើឱ្យសូន្យ(Undetermined Coefficients-Annihilator Approach) 122
លំហាត់ 122
៤.៤.១ ការដាក់ផលគុណកត្តា 123
៤.៤.២ វិធីសាស្ត្រធ្វើឱ្យសូន្យ 124
៤.៤.៣ អនុវត្តសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល 125

លំហាត់ 127

អារម្ភកថា

ដោយហេតុថា តម្រូវការរបស់មនុស្ស ពីមួយថ្ងៃទៅមួយថ្ងៃ កាន់តែកើន ឡើងឥតឈប់ឈរនោះ មនុស្សតែងតែខិតខំប្រឹងប្រែងរិះរកគ្រប់វិធីទាំងអស់ ដើម្បី ធ្វើយ៉ាងណាបំពេញអោយខានតែបាននូវតម្រូវការទាំងអស់នោះ ។ ជាក់ស្តែង មនុស្សបានបង្កើតឡើងនូវមធ្យោបាយ ឧបករណ៍ សម្ភារៈប្រើប្រាស់ផ្សេងៗជា ច្រើនយ៉ាងទំនើបកម្ម សម្បូរបែប តាមលក្ខណៈវិទ្យាសាស្ត្រ។ ទាំងអស់នេះគឺវាកើតចេញមកពីការគិត ការពិចារណា ការគណនាយ៉ាងល្អិតល្អន់របស់មនុស្សពោលគឺ ការសិក្សាស្រាវជ្រាវនេះឯង។ កត្តាមួយក្នុងចំណោមកត្តាជាច្រើន ដែលធ្វើអោយ វិទ្យាសាស្ត្រលើពិភពលោក មានការប្រែប្រួលរីកចំរើនឡើងយ៉ាងលឿនបែបនេះគឺ គណិតវិទ្យា ព្រោះថា គណិតវិទ្យាជួយដោះស្រាយបញ្ហាជាច្រើន លើគ្រប់ផ្នែកទាំង អស់ដែលទាក់ទងនឹងការគណនាដូចជា ផ្នែកវិស្វករ ព័ត៌មានវិទ្យា សេដ្ឋកិច្ច ឧស្សាហកម្ម និង គ្រប់គ្រង។ល។ យើងសង្កេតឃើញថា បញ្ហាជាច្រើនក្នុងរូបវិទ្យា គីមីវិទ្យា និង បច្ចេកវិទ្យាជាច្រើន ជាប់ទាក់ទងយ៉ាងជិតស្និតនឹងការប្រើប្រាស់ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលសាមញ្ញលំដាប់មួយ លំដាប់ពីរ។ ក្នុងករណីនីមួយៗ មានការកំណត់នូវ ខ្សែកោងកែងនឹងខ្សែកោងដែលអោយ ការកើនឡើង និង ការថយចុះ ការកើតមាន នូវកាបូន ការរលាយសារជាតិគីមី និង ការព្យាករណ៍ចំនួនប្រជាជនជាដើម។ ទាំងអស់នេះបង្ហាញអោយឃើញថា សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដើរតួ យ៉ាងសំខាន់នៅក្នុងដំណោះស្រាយបញ្ហាទាំអស់នេះ។

ឆ្លងតាមបុព្វហេតុហេតុនៃការសិក្សាស្រាវជ្រាវខាងលើ យើងឃើញយ៉ាងច្បាស់នូវភាពចាំបាច់នៃការប្រើប្រាស់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលសាមញ្ញ។ ហេតុនេះ ក្នុងនាមខ្ញុំជាអ្នកសិក្សាស្រាវជ្រាវម្នាក់ ក៏បានចូលរួមចំណែកក្នុង បញ្ហានេះផងដែរ ដោយបានលើកឡើងនូវប្រធានបទមួយ ដែលទាក់ទងនិងសមីការឌីផរ៉ង់ស្យែលសាមញ្ញលំដាប់មួយ មកធ្វើការសិក្សាស្រាវជ្រាវ ក្នុងពេល នេះ។ តើសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានដំណោះស្រាយយ៉ាងដូចម្តេចសម្រាប់ប្រភេទនីមួយៗ? ហើយបញ្ហាទាំងឡាយ ដែលទាក់ទងនឹងសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលសាមញ្ញលំដាប់មួយ ឬលំដាប់ខ្ពស់ ត្រូវបានដោះស្រាយយ៉ាងដូចម្តេចដែរ?

សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ

ជាការពិតសៀវភៅ «សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ២ » ដែលលេចចេញជារូបរាងនៅពេលនេះគឺបាន កើតឡើងពីការខិតខំ និងយកចិត្តទុកដាក់ចូលរួមពីភាគី និងស្ថាប័នពាក់ព័ន្ធជាច្រើន។

ខ្ញុំបាទសូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅបំផុតដល់ភាគី និងស្ថាប័នពាក់ព័ន្ធទាំងអស់ដូចជា ៖

- ក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ ដែលបានគាំទ្រយ៉ាងពេញទំហឹងដល់ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាឱ្យបង្កើតមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ហៅកាត់ថា «មូលនិធិ ស.គ.ន»។

- ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាដែលបានបង្កើតមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ដែលហៅកាត់ថា «មូលនិធិ ស.គ.ន» ដើម្បីរួមចំណែកលើកកម្ពស់វប្បធម៌នៃការស្រាវជ្រាវ បំផុសគំនិតច្នៃប្រឌិត និងជំរុញការធ្វើនវានុវត្ត ដើម្បីជាប្រយោជន៍ដល់វិស័យអប់រំ យុវជន និងកីឡា ដែលឆ្លើយតបទៅនឹងទីផ្សារពលកម្ម និងសាកលភាវូបនីយកម្ម។

- មូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ដែលបានគាំទ្រដល់ការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា (Text book) ដែលនឹងត្រូវប្រើប្រាស់នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា ដើម្បីបង្កើនបរិមាណ លើកកម្ពស់គុណភាព និងពង្រីកសមធម៌នៃធនធានសិក្សាជាខេមរភាសាជូនដល់និស្សិតដែលកំពុងបន្តការសិក្សា និងត្រៀមខ្លួនធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។

- ឯកឧត្តមវិទ្យាស្ថានគរុកោសល្យបាត់ដំបងដែលបានចាត់តាំងជាគណៈកម្មការនិពន្ធចូលរួមការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សានេះ។

- នាយកដ្ឋានបណ្តុះបណ្តាលដែលបានចាត់តាំងជាគណៈកម្មការនិពន្ធ និងគណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យ លើស្នាដៃនៃការចូលរួមការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សានេះ។

- លោកប្រធាន នាយកដ្ឋានបណ្តុះបណ្តាលដែលព្រមព្រៀងទទួលសិទ្ធិជាតំណាងអ្នករៀបរៀងក្នុងការចាត់ចែង និងសម្របសម្រួលជាមួយក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ចុះហត្ថលេខាលើកិច្ចព្រមព្រៀង និងកិច្ចដំណើការទូទាត់ថវិកាតាមរយៈការស្នើសុំ និងទទួលថវិកា បោះពុម្ព និងផ្សព្វផ្សាយបន្តនូវស្នាដៃរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អរបស់អ្នករៀបរៀងក្នុងការរៀន និងបង្រៀនក្នុងគ្រឹះស្ថានសិក្សា និងប្រគល់សិទ្ធិស្របតាមការកំណត់នៃកិច្ចព្រមព្រៀង ស្តីពីការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា ក្រោមការគាំទ្រនៃមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍។

- គ្រូឧទ្ទេសឧត្តមមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យានៃវិទ្យាស្ថានគរុកោសល្យបាត់ដំបង ដែលបានផ្តល់មតិកែលម្អលើខ្លឹមសារ នៃមេរៀននីមួយៗឱ្យកាន់តែមានភាពសុក្រឹត និងមានលក្ខណៈវិទ្យាសាស្ត្រ។

ខ្ញុំបាទសង្ឃឹមថា សៀវភៅនេះនឹងឆ្លើយតបជាបន្ទាន់ចំពោះការខ្វះខាតធនធានសិក្សា ដែលជាតម្រូវការសិក្សារបស់សិស្ស និស្សិត នៅកម្រិតវិទ្យាល័យ និងឧត្តមសិក្សា។

ការបរិយាយលើមុខវិជ្ជា

ខ្លឹមសារមេរៀនដែលបានលើកឡើងក្នុងសៀវភៅនេះអាចជួយដោះស្រាយបញ្ហាក្នុងការបង្រៀន និងរៀនណិតវិទ្យាដែលបង្កលក្ខណៈងាយស្រួលដល់គ្រូឧទ្ទេស គ្រូបង្រៀន គរុនិស្សិត គរុសិស្ស សិស្សានុសិស្សអាចអនុវត្តន៍ និងស្រាវជ្រាវសម្រាប់សាធារណៈជនទូទៅ។ ជាមូលដ្ឋានគ្រឹះសម្រាប់ហ្វឹកហាត់គរុនិស្សិត សិស្សសិក្សានូវរាល់ខ្លឹមសារស្របតាមកម្មវិធីដែលធ្វើឱ្យមេរៀននីមួយៗមានទំនាក់ទំនងគ្នាពីមួយចំណុចទៅមួយចំណុច។

មុខវិជ្ជា គណនាឌីផេរ៉ង់ស្យែល II រៀបចំឡើងដើម្បីផ្តល់ឱ្យនិស្សិតនូវការសិក្សាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលក្នុងលំហ Banach និងអនុវត្តន៍របស់វា។ ប្រធានបទសំខាន់ៗរួមមានៈ
ផ្នែកទី១ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់១

-ទម្រង់សមីការលីនេអ៊ែរដែលមានអថេរជាមេគុណ

-ទម្រង់សមីការអាចញែកអថេរបាន

-ទ្រឹស្តីបទ Cauchy

-សមីការសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែន

- សមីការប្រកដ សមីការមិនប្រាកដ សមីការប៊ែរណូយី សមីការរីកាទី

ផ្នែកទី២ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ពីរ

- ករណីសមីការអូម៉ូហ្សែនជាមួយមេគុណថេរ

-ដំណោះស្រាយគ្រឹះនៃសមីការលីនៃអ៊ែរអូម៉ូហ្សែន

-ភាពអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ និងដេទែមីណង់ហ្វ្រង់ស្គៀន(Wronskian)

-ការបង្កើតចម្លើយទីពីរចេញពីចម្លើយទីមួយ

-ឫសពីរនៃសមីការសម្គាល់

-ឫសកុំផ្លិចនៃសមីការសម្គាល់

-ឫសឌុបនៃសមីការសម្គាល់

-ការប្រើវិធីសាស្ត្រមេគុណមិនកំណត់

-ការប្រើវិធីសាស្ត្របម្រែបម្រួលប៉ារ៉ាមែត្រ

-គណនាតាមនិមិត្តសញ្ញា $D^n y = \frac{d^n y}{dx^n}$ ឬការីឌីផេរ៉ង់ស្យែល។

ផ្នែកទី៣ សមីការឌីផេរ៉េង៉ស្យែលលំដាប់ខ្ពស់ គឺយើងផ្តោតការសិក្សាចាប់លំដាប់ទី៣ឡើងទៅហើយមានភាពស្រដៀងផ្នែកទីពីរ វិធីដោះស្រាយតាមប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និងសមីការអឺលែ Euler Equation ឬ Cauchy-Euler។

សៀវភៅនេះសរសេរឡើង នៅមានកម្រិតមិនទាន់អស់សេចក្តីនៅឡើយ ជាចុងក្រោយនេះក្នុងនាមយើងខ្ញុំជាអ្នកនិពន្ធ យើងខ្ញុំរីករាយក្នុងការរិះគន់ក្នុងន័យស្ថាបនាដោយក្តីរីករាយជានិច្ច។

មូលន័យសង្ខេប

សៀវភៅគណនាឌីផេរ៉ង់ស្យែល II រៀបចំឡើងដើម្បីផ្តល់ឱ្យនិស្សិតនូវការសិក្សាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល និងអនុវត្តន៍របស់វានេះផ្តោតសំខាន់ទៅការគណនាដែលមានមេរៀនសង្ខេប និយមន័យ ទ្រឹស្តីបទ ឧទាហរណ៍ លំហាត់អនុវត្តន៍ជាច្រើនព្រមទាំងមានទំនាក់ទំនងនៃមេរៀននីមួយៗ។

ផ្នែកទីមួយ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់១ ទម្រង់សមីការលីនេអ៊ែរដែលមានអថេរជាមេគុណ ទម្រង់សមីការអាចញែកអថេរបាន ទ្រឹស្តីបទកូស៊ី(Cauchy) សមីការសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែន សមីការប្រាកដ សមីការមិនប្រាកដ សមីការប៊ែរណូយី សមីការរីកាទី

ផ្នែកទីពីរ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ពីរ ករណីសមីការអូម៉ូហ្សែនជាមួយមេគុណថេរ ដំណោះស្រាយគ្រឹះនៃសមីការលីនេអ៊ែរអូម៉ូហ្សែន ភាពអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ និងដេទែមីណង់ហ្វ្រង់ស្គៀន (Wronskian) ការបង្កើតចម្លើយទីពីរចេញពីចម្លើយទីមួយ ឫសពីរនៃសមីការសម្គាល់ ឫសកុំផ្លិចនៃសមីការសម្គាល់ ឫសឌុបនៃសមីការសម្គាល់ ការប្រើវិធីសាស្ត្រមេគុណមិនកំណត់ ការប្រើវិធីសាស្ត្របម្រែបម្រួលប៉ារ៉ាម៉ែត្រ គណនាតាមនិមិត្តសញ្ញា $D^n y = \frac{d^n y}{dx^n}$ ឬការីឌីផេរ៉ង់ស្យែល។

ផ្នែកទីបី សមីការឌីផេរ៉ើស្យែលលំដាប់ខ្ពស់ គឺយើងផ្តោតការសិក្សាចាប់លំដាប់ទី៣ឡើងទៅ ហើយមានភាពស្រដៀងផ្នែកទីពីរ វិធីដោះស្រាយតាមប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និងសមីការអឺលែ Euler Equation ឬ Cauchy-Euler។

សៀវភៅនេះសរសេរឡើង នៅមានកម្រិតមិនទាន់អស់សេចក្តីនៅឡើយ ជាចុងក្រោយនេះក្នុងនាមយើងខ្ញុំជាអ្នកនិពន្ធ យើងខ្ញុំរីករាយក្នុងការរិះគន់ក្នុងន័យស្ថាបនាដោយក្តីរីករាយជានិច្ច។

ជំពូកទី១ សេចក្តីផ្តើម

នៅក្នុងជំពូកនេះ យើងព្យាយាមតាមវិធីផ្សេងៗគ្នាជាច្រើន ដើម្បីផ្តល់ទស្សនៈដល់ការសិក្សារបស់អ្នក។ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល។ ទីមួយ យើងប្រើបញ្ហាពីរដើម្បីបង្ហាញពីគំនិតជាមូលដ្ឋានមួយចំនួនថាយើងនឹងត្រលប់ទៅ និងពន្យល់ឱ្យបានញឹកញាប់នៅទូទាំងផ្នែកដែលនៅសល់សៀវភៅ។ ក្រោយមកទៀត យើងបង្ហាញពីវិធីជាច្រើននៃការបែងចែកសមីការ ដើម្បីផ្តល់ការរចនាសម្ព័ន្ធអង្គការសម្រាប់សៀវភៅ។ ជាចុងក្រោយ យើងគូសបញ្ជាក់អំពីនិន្នាការសំខាន់ៗមួយចំនួនក្នុងការអភិវឌ្ឍប្រវត្តិសាស្ត្រនៃប្រធានបទ និងលើកឡើងមួយចំនួននៃការផ្តើមគណិតវិទូដែលបានរួមចំណែកដល់វា។ ការសិក្សានៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានបានទាក់ទាញចំណាប់អារម្មណ៍របស់គណិតវិទូដ៏អស្ចារ្យបំផុតរបស់ពិភពលោកជាច្រើនរូបក្នុងអំឡុងពេលបីសតវត្សកន្លងមក។ យ៉ាងណាក៏ដោយ វានៅតែជាវាលមួយយ៉ាងស្វាហាប់នៃការស៊ើបអង្កេតនៅថ្ងៃនេះសំណួរបើកចំហគួរឱ្យចាប់អារម្មណ៍ជាច្រើន។

១.១. គំរូមូលដ្ឋានគណិតវិទ្យា និសដៅក្រុមទិចទ័រ

មុនពេលចាប់ផ្តើមការសិក្សាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល អ្នកគួរតែមានគំនិតខ្លះៗអំពីលទ្ធភាពដែលអាចធ្វើបានផលប្រយោជន៍ដែលនឹងទទួលបានដោយការធ្វើដូច្នេះ។ សម្រាប់សិស្សមួយចំនួនចំណាប់អារម្មណ៍ខាងក្នុងរបស់ប្រធានបទខ្លួនវាគឺជាការលើកទឹកចិត្តគ្រប់គ្រាន់ ប៉ុន្តែសម្រាប់ភាគច្រើនវាគឺជាលទ្ធភាពដ៏សំខាន់កម្មវិធីទៅកាន់វិស័យផ្សេងទៀត ដែលធ្វើឲ្យកិច្ចការនោះមានតម្លៃ។គោលការណ៍ ឬច្បាប់ជាច្រើន ដែលស្ថិតនៅក្រោមឥរិយាបទនៃពិភពធម្មជាតិសេចក្តីថ្លែងការណ៍ ឬទំនាក់ទំនងដែលពាក់ព័ន្ធនឹងអត្រាដែលអ្វីៗកើតឡើង។ នៅពេលសម្តែងនៅក្នុងពាក្យគណិតវិទ្យា ទំនាក់ទំនងគឺជាសមីការ ហើយអត្រាគឺជាដេរីវេ។សមីការដែលមាននិស្សន្ទវត្ថុ គឺជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល។ ដូច្នេះដើម្បីយល់និងដើម្បីស៊ើបអង្កេតបញ្ហាពាក់ព័ន្ធនឹងចលនានៃសារធាតុរាវ លំហូរនៃចរន្តនៅក្នុងសៀគ្វីអគ្គិសនីការសាយភាយកំដៅក្នុងវត្ថុរឹង ការសាយភាយ និងការរកឃើញនៃរលករញ្ជួយដី ឬការកើនឡើង ឬថយចុះនៃចំនួនប្រជាជន ក្នុងចំណោមប្រទេសជាច្រើនទៀតចាំបាច់ត្រូវដឹងអ្វីមួយអំពីសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែ-ល។សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលពិពណ៌នាអំពីដំណើរការរូបវន្តខ្លះត្រូវបានគេហៅថាគំរូគណិតវិទ្យា នៃដំណើរការនេះ និងគំរូបែបនេះជាច្រើនត្រូវបានពិភាក្សានៅក្នុងសៀវភៅនេះ។ យើងចាប់ផ្តើមជាមួយនឹងគំរូពីរដែលនាំទៅរកសមីការដែលងាយស្រួលដោះស្រាយ។ គួរកត់សម្គាល់ថាសូម្បីតែសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលសាមញ្ញបំផុតក៏ផ្តល់អត្ថប្រយោជន៍ផងដែរ។ គំរូនៃដំណើរការរាងកាយសំខាន់ៗ។

ឧទាហរណ៍ទី១ ឧបមាថាវត្ថុមួយកំពុងធ្លាក់ក្នុងបរិយាកាសជិតកម្រិតទឹកសមុទ្រ។ បង្កើតឌីផេរ៉ង់ស្យែលសមីការដែលពិពណ៌នាអំពីចលនា។យើងចាប់ផ្តើមដោយការតាងអក្សរដើម្បីតំណាងឱ្យបរិមាណផ្សេងៗដែលអាចទាក់ទងលើបញ្ហានេះ។ ចលនាកើតឡើងក្នុងចន្លោះពេលជាក់លាក់មួយ ដូច្នេះសូមឱ្យយើងប្រើ t ដើម្បីសម្គាល់ពេលវេលា។

ដូចគ្នានេះដែរ ចូរយើងប្រើ v ដើម្បីតំណាងឱ្យល្បឿននៃវត្ថុធ្លាក់។ ល្បឿននឹងសន្មតផ្លាស់ប្តូរជាមួយពេលវេលា ដូច្នេះយើងគិតពី v ជាអនុគមន៍នៃ t នៅក្នុងន័យផ្សេងទៀត t គឺជាឯកតាជ្យ និង v គឺជាអថេរអាស្រ័យ។ ដើម្បីឱ្យជាក់លាក់ អនុញ្ញាតឱ្យយើងវាស់ពេលវេលា t ជាវិនាទី និងល្បឿន v គិតជាម៉ែត្រ/វិនាទី។ លើសពីនេះ យើងនឹងសន្មត់ថា v គឺវិជ្ជមាននៅក្នុងទិសដៅចុះក្រោម នោះគឺនៅពេលដែលវត្ថុកំពុងធ្លាក់ចុះ។ច្បាប់រូបវន្តដែលគ្រប់គ្រងចលនារបស់វត្ថុ គឺជាច្បាប់ទីពីររបស់ញូតុន ដែលចែងថា ម៉ាសរបស់វត្ថុនឹងបង្កើនល្បឿនរបស់វាស្មើនឹងកម្លាំងសុទ្ធលើ វត្ថុ។ ក្នុងគណិតវិទ្យា ច្បាប់នេះត្រូវបានបញ្ជាក់ដោយសមីការៈ

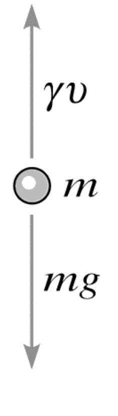
$$F = ma \qquad (1)$$

ដែល m គឺជាម៉ាស់របស់វត្ថុ a គឺជាសំទុះរបស់វា ហើយ F គឺជាកម្លាំងសុទ្ធដែលបញ្ចេញនៅលើវត្ថុ។ ខ្នាតឯកតារបស់យើង m គិតជាគីឡូក្រាម (kg) ហើយ v គិតជាម៉ែត្រ/វិនាទី (m/s) និង F នៅក្នុងញូតុន (N)។ ជាការពិតណាស់ a គឺទាក់ទងទៅនឹង v ដោយ $a = \frac{dv}{dt}$ ដូច្នេះយើងអាចសរសេរ (1) ឡើងវិញបានក្នុងទម្រង់

$$F = m\frac{dv}{dt} \qquad (2)$$

បន្ទាប់មក សូមពិចារណាអំពីកម្លាំងដែលធ្វើអំពើលើវត្ថុនៅពេលវាធ្លាក់។ ទំនាញបញ្ចេញកម្លាំងស្មើទម្ងន់របស់វត្ថុ $(F = mg)$ដែល g គឺជាការបង្កើនល្បឿនដោយសារទំនាញ។ នៅពេលនេះយើងបានជ្រើសរើស g ត្រូវបានគេកំណត់ដោយពិសោធន៍ថាប្រហែលស្មើនឹង $g = 9.8m/s^2$ នៅជិតផ្ទៃផែនដី។ វាក៏មានកម្លាំងដោយសារតែរេងកម្លាំងទប់នៃខ្យល់ ។ដូច្នេះកម្លាំងទប់មានរ៉ិចទ័រ γv ដែល γ ថេរហៅថា មេគុណទប់នៃខ្យល់។

ក្នុងការសរសេរកន្សោមសម្រាប់កម្លាំងសុទ្ធ F យើងត្រូវចាំថាទំនាញតែងតែធ្វើសកម្មភាពក្នុងទិសដៅចុះក្រោម (វិជ្ជមាន) ចំណែកឯការទបនៃខ្យល់ក្នុងទិសដៅឡើងលើ (អវិជ្ជមាន) ដូចជាបង្ហាញក្នុងរូបភាព 1.1.1 ។



រូបភាព 1.1.1

យើងបានរូបមន្ត $F = mg - \gamma v$ (3)

តាមសមីការ(2)យើងបាន $m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v$ (4)

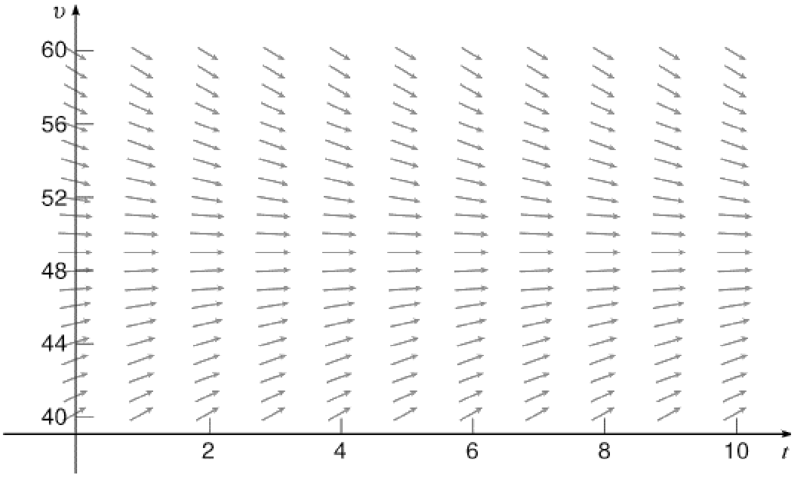
សមីការ (4) គឺជាគំរូមូលដ្ឋានគណិតវិទ្យានៃវត្ថុដែលធ្លាក់ក្នុងបរិយាកាសក្បែរនីវ៉ូទឹកសមុទ្រ។ មានទំនាក់ទំនងគំរូថេរបីនៅក្នុង m g និង γ អាស្រ័យយ៉ាងខ្លាំងទៅលើវត្ថុជាក់លាក់ដែលកំពុងធ្លាក់ចុះ ហើយពួកវាជាធម្មតាខុសគ្នាសម្រាប់វត្ថុផ្សេង។ វាជារឿងធម្មតាទេក្នុងការមានជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ចាប់តាំងពីពួកគេអាចទទួលបានតម្លៃក្នុងអំឡុងពេលនៃការពិសោធន៍។ ម្យ៉ាងទៀតតម្លៃនៃ g គឺដូចគ្នាសម្រាប់វត្ថុទាំងអស់។

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការ (4) យើងត្រូវស្វែងរកអនុគមន៍ $v = v(t)$ ដែលបំពេញសមីការ។ វា។វាមិនពិបាកធ្វើនោះទេ ហើយយើងនឹងបង្ហាញអ្នកពីរបៀបនៅក្នុងផ្នែកបន្ទាប់។ សម្រាប់ឥឡូវទោះយ៉ាងណាក៏ដោយ អនុញ្ញាតឱ្យយើងមើលអ្វីដែលយើងអាចរៀនអំពីដំណោះស្រាយដោយមិនចាំបាច់ស្វែងរកអ្វីទាំងអស់នៃពួកគេ។ ភារកិច្ចរបស់យើងត្រូវបានធ្វើឱ្យសាមញ្ញបន្តិច ប្រសិនបើយើងកំណត់តម្លៃលេខទៅ m និង γ ប៉ុន្តែនីតិវិធីគឺដូចគ្នាដោយមិនគិតពីតម្លៃណាមួយដែលយើងជ្រើសរើស។ ដូច្នេះ ចូរយើងស្មាន $m = 10kg$ និង $\gamma = 2kg/\sec$ ។ ប្រសិនបើឯកតាសម្រាប់ γហាក់ដូចជាប្លែក សូមចាំថា γv ត្រូវតែមានឯកតានៃកម្លាំងពោលគឺ $kg - m/\sec^2$ ។ បន្ទាប់មកសមីការ (4) អាចសរសេរឡើងវិញបាន។

$$\frac{dv}{dt} = 9.8 - \frac{v}{5} \qquad (5)$$

ឧទាហរណ៍ទី២៖យើងសង្កេតលើដំណោះស្រាយរបស់សមីការ (5) ដោយមិនដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល។យើងនឹងបន្តដោយមើលសមីការ (5) ពីការពិនិត្យតាមបែបធរណីមាត្រ។ ឧបមាថា v មានតម្លៃជាក់លាក់។ បន្ទាប់មកដោយការវាយតម្លៃផ្នែកខាងស្តាំនៃសមីការ (5) យើងអាចរកឃើញតម្លៃដែលត្រូវគ្នានៃ $\frac{dv}{dt}$។ ជាឧទាហរណ៍ ប្រសិនបើ$v = 40$បន្ទាប់មក$\frac{dv}{dt} = 1.8$ នេះមានន័យថាមេគុណនៃដំណោះស្រាយ $v = v(t)$ មានតម្លៃ 1.8 នៅចំណុចណាមួយដែល $v = 40$ ។ យើងអាចបង្ហាញព័ត៌មាននេះវត្ថុដោយក្រាហ្វិកនៅក្នុង($tv-$ **ប្លង់**) ដោយគូរផ្នែកបន្ទាត់ខ្លីដែលមានមេគុណប្រាប់ទិស $\frac{dv}{dt} = 1.8$ នៅចំណុចជាច្រើននៅលើបន្ទាត់ $v = 40$។ ស្រដៀងគ្នាដែរ ប្រសិនបើ $v = 50$ បន្ទាប់មក $\frac{dv}{dt} = -0.2$ ដូច្នេះយើងគូរផ្នែកបន្ទាត់ខ្លីៗជាមួយជម្រាលមេគុណប្រាប់ទិស -0.2 នៅចំណុចជាច្រើននៅលើបន្ទាត់ $v = 50$ ។ យើងទទួលបានរូបភាពទី 1.1.2 ដោយដំណើរការដូចគ្នា

វិធីជាមួយតម្លៃផ្សេងទៀតនៃv ។ រូបភាព 1.1.2 គឺជាឧទាហរណ៍នៃអ្វីដែលគេហៅថា **ទិសដៅក្រុមវ៉ិចទ័រ** **(Direction field) ឬ កាយនៃមេគុណប្រាប់(slope field)**។

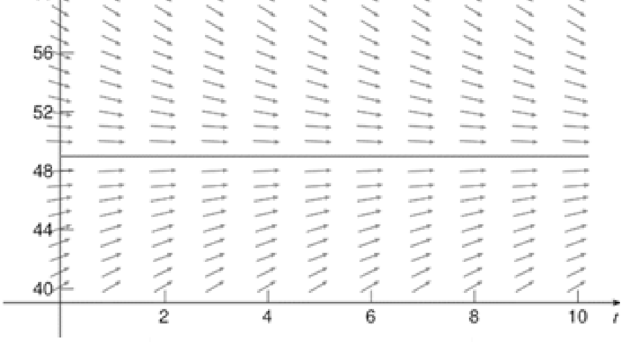


រូបភាព 1.1.2

សារៈសំខាន់នៃរូបភាព 1.1.2 គឺថាផ្នែកបន្ទាត់នីមួយៗគឺជាបន្ទាត់តង់សង់ទៅក្រាហ្វអនុគមន៍ចម្លើយនៃសមីការ (5). ដូច្នេះ ទោះបីជាយើងមិនបានរកឃើញដំណោះស្រាយណាមួយ និងមិនមានក្រាហ្វនៃដំណោះស្រាយលេចឡើងក្នុងរូបភាព យ៉ាងណាក៏ដោយ យើងអាចទាញការសន្និដ្ឋានប្រកបដោយគុណភាពមួយចំនួនអំពីឥរិយាបថនៃដំណោះស្រាយ។ សម្រាប់ឧទាហរណ៍ ប្រសិនបើ v តិចជាងតម្លៃសំខាន់ជាក់លាក់ នោះបន្ទាត់ទាំងអស់។
ផ្នែកមានជម្រាលវិជ្ជមាន ហើយល្បឿននៃវត្ថុធ្លាក់កើនឡើងនៅពេលវាធ្លាក់យូទៅៗ។ម្យ៉ាងវិញទៀត ប្រសិនបើ v ធំជាងតម្លៃសំខាន់ នោះផ្នែកបន្ទាត់មានជម្រាលអវិជ្ជមានហើយវត្ថុដែលធ្លាក់ចុះយឺតពេលវាធ្លាក់។ តើអ្វីជាតម្លៃសំខាន់នៃ v ដែលបំបែកវត្ថុតើល្បឿនរបស់អ្នកណាកំពុងកើនឡើងពីអ្នកដែលល្បឿនថយចុះ? ជាថ្មីម្តងទៀតទៅលើសមីការ (5)យើងសួរថាតើតម្លៃនៃ v នឹងប៉ុន្មានធ្វើឱ្យ $\frac{dv}{dt}=0$?

ចម្លើយគឺ $0=9.8-\frac{v}{5} \quad \Leftrightarrow v=5\times 9.8=49m/\sec$ ។

តាមពិតអនុគមន៍ថេរ $v(t)=49$ គឺជាចម្លើយនៃសមីការ (5) ដើម្បីផ្ទៀងផ្ទាត់សំណើនេះ ជំនួស $v(t)=49$ ទៅជាសមីការ(5) ហើយសង្កេតថាផ្នែកនីមួយៗនៃសមីការគឺសូន្យ។ ដោយសារតែរូបភាព 1.1.2 វាមិនផ្លាស់ប្តូរទៅតាមពេលវេលាទេ ចម្លើយ $v(t)=49$ ត្រូវបានគេហៅថា **ចម្លើយលំនឹង** (តម្លៃដើម)។



រូបភាព 1.1.2

ការបង្កើតគំរូគណិតវិទ្យា ក្នុងការអនុវត្តសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលទៅនឹងនុយ-វាលជាច្រើនដែលពួកវាមានប្រយោជន៍ ចាំបាច់ត្រូវបង្កើតជាដំបូងដែលសមស្របសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលពិពណ៌នា ឬគំរូបញ្ហាដែលកំពុងត្រូវបានស៊ើបអង្កេត។ ក្នុងផ្នែកនេះយើងបានមើលឧទាហរណ៍ពីរនៃដំណើរការគំរូនេះ មួយគូរពីរូបវិទ្យា និងមួយទៀតមកពីបរិស្ថានវិទ្យា។ ក្នុងការបង្កើតគំរូគណិតវិទ្យានាពេលអនាគតដោយខ្លួនឯង អ្នកគួរតែទទួលស្គាល់ថាបញ្ហានីមួយៗគឺខុសគ្នា ហើយជោគជ័យការធ្វើគំរូមិនមែនជាជំនាញដែលអាចត្រូវបានកាត់បន្ថយទៅនឹងការប្រតិបត្តិនៃសំណុំនៃវេជ្ជបញ្ជានោះទេ ជាការពិតណាស់ការសាងសង់គំរូដែលពេញចិត្ត ជួនកាលជាផ្នែកដ៏លំបាកបំផុតនៃបញ្ហា។ យ៉ាងណាក៏ដោយ វាប្រហែលជាមានប្រយោជន៍ក្នុងការរាយបញ្ជីជំហានមួយចំនួនដែលជាញឹកញាប់ជាផ្នែកនៃដំណើរការ៖

១.កំណត់អថេរឯករាជ្យ និងអាស្រ័យ ហើយកំណត់អក្សរដើម្បីតំណាងឱ្យពួកគេ។ជាញឹកញាប់អថេរឯករាជ្យគឺជាពេលវេលា។

២.ជ្រើសរើសឯកតារង្វាស់សម្រាប់អថេរនីមួយៗ។ ក្នុងន័យមួយជម្រើសនៃគ្រឿងគឺតាមអំពើចិត្ត ប៉ុន្តែជម្រើសមួយចំនួនអាចមានភាពងាយស្រួលជាងជម្រើសផ្សេងទៀត។ ឧទាហរណ៍យើងបានជ្រើសរើសវាស់ពេលវេលាជាវិនាទីក្នុងបញ្ហាធ្លាក់វត្ថុ និងខែក្នុងខែបញ្ហាប្រជាជន។

៣.បញ្ជាក់គោលការណ៍ជាមូលដ្ឋានដែលគូសបញ្ជាក់ ឬគ្រប់គ្រងបញ្ហាដែលអ្នកកំពុងស៊ើបអង្កេត។ នេះអាចជាច្បាប់រូបវន្តដែលទទួលស្គាល់យ៉ាងទូលំទូលាយ ដូចជាច្បាប់ចលនារបស់ញូតុន ឬវាអាចជាការសន្មត់ស្មានបន្ថែមទៀតដែលអាចផ្អែកលើបទពិសោធន៍ឬការសង្កេតផ្ទាល់ខ្លួនរបស់អ្នក។ ក្នុងករណីណាក៏ដោយ ជំហាននេះទំនងជាមិនមែនជាគណិតវិទ្យាសុទ្ធសាធទេ ប៉ុន្តែតម្រូវឱ្យអ្នកធ្វើត្រូវស្គាល់ពីវិស័យដែលបញ្ហាកើតឡើង។

៤.បង្ហាញគោលការណ៍ ឬច្បាប់ក្នុងជំហានទី ៣ ក្នុងលក្ខខណ្ឌនៃអថេរដែលអ្នកបានជ្រើសរើសក្នុងជំហានទី 1។អាចនិយាយបានស្រួលជាងធ្វើ។ វាអាចតម្រូវឱ្យមានការណែនាំនៃថេររាងកាយ ឬប៉ារ៉ាម៉ែត្រ (ដូចជាមេគុណអូសក្នុងឧទាហរណ៍ទី 1) និងការកំណត់ការអនុគ្រោះ។តម្លៃ priate សម្រាប់ពួកគេ។ ឬវាអាចពាក់ព័ន្ធនឹងការប្រើប្រាស់អថេរជំនួយ ឬកម្រិតមធ្យមនោះត្រូវតែទាក់ទងទៅនឹងអថេរចម្បង។

៥.ត្រូវប្រាកដថាពាក្យនីមួយៗនៅក្នុងសមីការរបស់អ្នកមានឯកតារូបវិទ្យាដូចគ្នា។ ប្រសិនបើនេះមិនមែនជាករណី បន្ទាប់មកសមីការរបស់អ្នកខុស ហើយអ្នកគួរតែស្វែងរកការជួសជុលវា។ ប្រសិនបើអង្គភាពយល់ព្រមសមីការរបស់អ្នកយ៉ាងហោចណាស់មានភាពស្របគ្នាតាមវិមាត្រ ទោះបីជាវាអាចមានចំណុចខ្វះខាតផ្សេងទៀតក៏ដោយ ថាការធ្វើតេស្តនេះមិនបង្ហាញ។

៦.នៅក្នុងបញ្ហាដែលបានពិចារណានៅទីនេះ លទ្ធផលនៃជំហានទី ៤ គឺជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតែមួយបង្កើតជាគំរូគណិតវិទ្យាដែលចង់បាន។ ទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយសូមចងចាំថាវាកាន់តែស្មុគស្មាញបញ្ហា គំរូគណិតវិទ្យាជាលទ្ធផលអាចមានភាពស្មុគស្មាញជាង ប្រហែលជាពាក់ព័ន្ធនឹងប្រព័ន្ធនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលជាច្រើន ជាឧទាហរណ៍។

លំហាត់

នៅក្នុងលំហាត់នីមួយៗ 1 ដល់ 6 ចូរគូសទិសដៅក្រុមរ៉ិចទ័រសម្រាប់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលបានផ្តល់ឱ្យ។ដោយផ្អែកលើទិសដៅក្រុមរ៉ិចទ័រកំណត់លក្ខណៈរបស់ y ពេល $t\to+\infty$ ។ ប្រសិនបើលក្ខណៈនេះអាស្រ័យនៅលើតម្លៃដើម(ចម្លើយលំនឹង)នៃ y នៅ $t=0$ ពិពណ៌នាអំពីភាពអាស្រ័យ។

1.	$y'=3-2y$	2.	$y'=2y-3$
3.	$y'=3+2y$	4.	$y'=-1-2y$
5.	$y'=1+2y$	6.	$y'=y+2$

នៅក្នុងលំហាត់នីមួយៗ 7 ដល់ 10 ចូរសរសេរសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃទម្រង់ $\frac{dy}{dt}=ay+b$ ចម្លើយរបស់សមីការមានលក្ខណៈអាស្រ័យចាំបាច់លើដូចជា $t\to+\infty$ ។

7. ចម្លើយទាំងអស់ខិតចូលទៅក្បែរៗ $y=3$ ។

8. ចម្លើយទាំងអស់ខិតចូលទៅក្បែរៗ $y=\frac{2}{3}$ ។

9. ចម្លើយទាំងអស់រីកចាកចេញពីរបន្ទាត់ $y=2$ ។

10. ចម្លើយទាំងអស់រីកចាកចេញពីរបន្ទាត $y=\frac{1}{3}$ ។

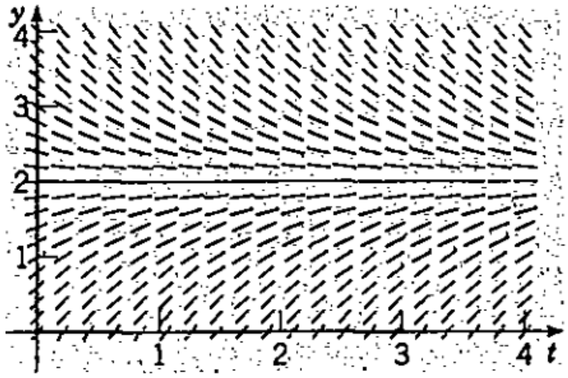
នៅក្នុងលំហាត់នីមួយៗ 11 ដល់ 14 ចូរគូរទិសដៅក្រុមរ៉ិចទ័រសម្រាប់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលបានផ្តល់ឱ្យ។ ដោយផ្អែកលើទិសដៅក្រុមរ៉ិចទ័រកំណត់លក្ខណៈរបស់ y ពេល $t\to+\infty$ ។ ប្រសិនបើលក្ខណៈនេះអាស្រ័យនៅលើតម្លៃដំបូងនៃ y នៅ $t=0$ ពិពណ៌នាអំពីភាពអាស្រ័យនេះ។ ចំណាំថានៅក្នុងលំហាត់ទាំងនេះសមីការមិនមែនជាទម្រង់ $\frac{dy}{dt}=ay+b$ ទេ ហើយលក្ខខណ្ឌនៃដំណោះស្រាយរបស់ពួកគេគឺខ្លះស្មុគស្មាញជាងសមីការក្នុងអត្ថបទមេរៀន៖

11.	$y'=y(4-y)$	12.	$y'=-y(5-y)$
13.	$y'=y^2$	14.	$y'=y(y-2)^2$

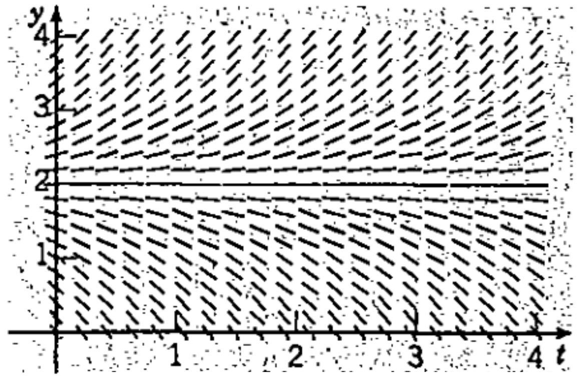
ពិចារណាលើសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលទាំងឡាយខាងក្រោម ដែលមួយចំនួនបានបង្កើតទិសដៅក្រុមរ៉ិចទ័រដែលបង្ហាញក្នុងរូបភាព 1.1.5 ដល់ 1.1.10 ។ នៅក្នុងបញ្ហានីមួយៗ 15 ដល់ 20 កំណត់អត្តសញ្ញាណនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលត្រូវគ្នានឹងទិសដៅក្រុមរ៉ិចទ័រដែលបានផ្តល់ឱ្យ។

(a)	$y'=2y-1$	(b).	$y'=2+y$
(c)	$y'=y-2$	(d)	$y'=y(y+3)$
(e)	$y'=y(y-3)$	(f)	$y'=1+2y$
(g)	$y'=-2-y$	(h)	$y'=y(3-y)$
(i)	$y'=1-2y$	(j)	$y'=2-y$

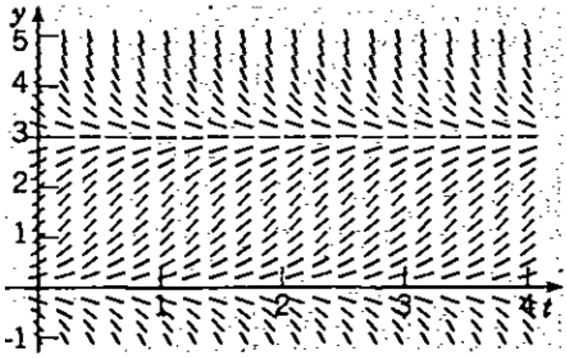
15. ទិសដៅក្រុមរ៉ិចទ័រនៃរូបភាព 1.1.5 ។
16. ទិសដៅក្រុមរ៉ិចទ័រនៃរូបភាព 1.1.6 ។
17. ទិសដៅក្រុមរ៉ិចទ័រនៃរូបភាព 1.1.7 ។
18. ទិសដៅក្រុមរ៉ិចទ័រនៃរូបភាព 1.1.8 ។
19. ទិសដៅក្រុមរ៉ិចទ័រនៃរូបភាព 1.1.9 ។
20. ទិសដៅក្រុមរ៉ិចទ័រនៃរូបភាព 1.1.10។



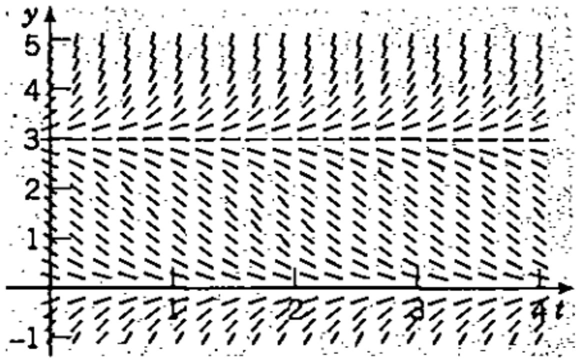
រូបភាព 1.1.5



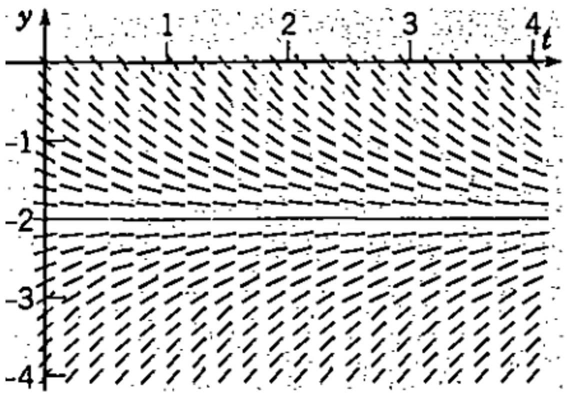
រូបភាព 1.1.6



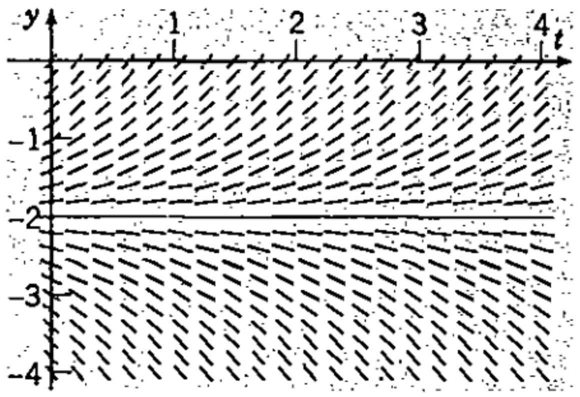
រូបភាព 1.1.9



រូបភាព 1.1.10



រូបភាព 1.1.7



រូបភាព 1.1.8

១.២. ចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមួយចំនួន

នៅក្នុងផ្នែកមុន យើងបានទាញយកសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v \qquad (1)$$

$$\frac{dp}{dt} = rp - k \qquad (2)$$

សមីការ (1) ធ្វើគំរូវត្ថុដែលធ្លាក់ និង សមីការ (2) ចំនួននៃសត្វកណ្តុរនៅលើវាលស្រែចាប់បានដោយសត្វទីទុយ។ សមីការទាំងពីរនេះគឺជាទម្រង់ទូទៅៈ

$$\frac{dy}{dt} = ay + b \qquad (3)$$

ដែល a និង b ជាចំនួនថេរ។

ឧទាហរណ៍១ សមីការនេះជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃការចាប់កណ្ដុរស្រែរបស់សត្វទីទុយ

$$\frac{dp}{dt} = 0.5p - 450 \qquad (4)$$

ដែលយើងពិពណ៌នាអំពីអន្តរកម្មនៃចំនួនជាក់លាក់នៃសត្វកណ្ដុរ និងសត្វទីទុយ។ ស្វែងរកដំណោះស្រាយនៃសមីការនេះ។

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការនេះ យើងត្រូវស្វែងរកអនុគមន៍ $p(t)$ ដែលនៅពេលជំនួសក្នុងសមីការ។

ដំបូងសរសេរសមីការ(4)ឡើងវិញក្នុងទម្រង់

$$\frac{dp}{dt} = 0.5p - 450 \qquad (4)$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p-900}{2} \qquad (5)$$

$$\frac{dp}{p-900} = \frac{1}{2}dt \qquad (p \neq 900) \qquad (6)$$

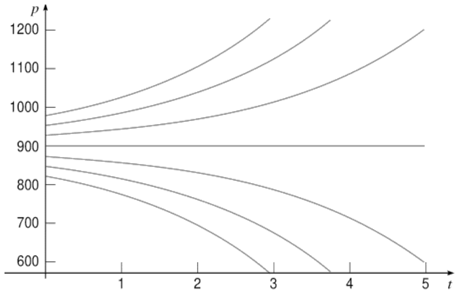
$$\int \frac{dp}{p-900} = \int \frac{1}{2}dt \qquad (7)$$

$$\ln|p-900| = \frac{1}{2}t + c \qquad (8)$$

$$|p-900| = e^{\frac{1}{2}t+c} \qquad (9)$$

$$\Rightarrow p = ce^{\frac{1}{2}t} + 900 \qquad (10)$$

ដែល $c = \pm e^{c}$ ក៏ជាចំនួនអថេរ (មិនសូន្យ) ផងដែរ។ ចំណាំថាអនុគមន៍ថេរ $p = 900$ ក៏ជាដំណោះស្រាយរបស់សមីការ(5)ផងដែរ ហើយវាមាននៅក្នុងអនុគមន៍ចម្លើយ (10) ប្រសិនបើយើងឱ្យ $c = 0$ ក្រាហ្វនៃសមីការ សម្រាប់តម្លៃជាច្រើននៃ c ត្រូវបានបង្ហាញក្នុងរូបភាព 1.2.1 ។



រូបភាព 1.2.1

លំហាត់

1. ដោះស្រាយលំហាត់តាមបញ្ហាតម្លៃដើមនីមួយៗខាងក្រោម ហើយរៀបចំគូសក្រាបនៃអនុគមន៍ចម្លើយតាមតម្លៃមួយចំនួនរបស់អ្នក y_o បន្ទាប់មកបកស្រាយពីរបីអំពីរបៀបដែលដំណោះស្រាយប្រហាក់ប្រហែល និងខុសគ្នាតាមករណីនីមួយៗផ្សេងទៀត។

(a) $\dfrac{dy}{dt} = -y + 5,$ $y(0) = y_0$

(b) $\dfrac{dy}{dt} = -2y + 5,$ $y(0) = y_0$

(c) $\dfrac{dy}{dt} = -2y + 10,$ $y(0) = y_0$

(d) $\dfrac{dy}{dt} = y - 5$ $y(0) = y_0$

(e) $\dfrac{dy}{dt} = 2y - 5$ $y(0) = y_0$

(f) $\dfrac{dy}{dt} = 2y - 10$ $y(0) = y_0$

១.៣. ការចាត់ថ្នាក់នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

១.៣.១. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលធម្មតា

ការចាត់ថ្នាក់ជាក់ស្តែងមួយគឺផ្អែកលើថាតើអនុគមន៍អាស្រ័យលើអថេរឯករាជ្យតែមួយឬនៅលើអថេរឯករាជ្យច្រើន។ ក្នុងករណីដំបូងធម្មតាលេចឡើងនៅក្នុងសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ហើយវាត្រូវបានគេនិយាយថាជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលធម្មតា។

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលទាំងអស់ដែលបានពិភាក្សានៅក្នុងផ្នែកមុនគឺជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលធម្មតា។ សម្រាប់ឧទាហរណ៍មួយទៀតនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលធម្មតាគឺ

$$L\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C}Q(t) = E(t) \qquad (1)$$

ឧទាហរណ៍ទី១ ខាងក្រោមនេះជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលធម្មតា

1. $\dfrac{d^2Q(t)}{dt^2} + 4\dfrac{dQ(t)}{dt} + 5Q(t) = t^2$

2. $4Q''(t) + 4Q'(t) + Q(t) = t^3 - 10$

១.៣.២ប្រព័ន្ធនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

ការចាត់ថ្នាក់មួយទៀតនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលអាស្រ័យលើអនុគមន៍អាស្រ័យច្រើនដែលអាស្រ័យលើអថេរឯករាជ្យតែមួយឬនៅលើអថេរឯករាជ្យច្រើន មានទម្រង់

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = ax - \alpha xy \\ \dfrac{dy}{dt} = -cy + \gamma xy \end{cases} \qquad (2)$$

ដែល $y(t)$ $x(t)$ ជាអនុគមន៍អាស្រ័យ ហើយ t ជាអថេរឯករាជ្យនិង a, α, c, γ ជាចំនួនថេរ។
ឧទាហរណ៍ទី១ ខាងក្រោមនេះជាប្រព័ន្ធនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖

1. $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = x - xy \\ \dfrac{dy}{dt} = y + xy \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 3x - xy \\ \dfrac{dy}{dt} = -2y + 4xy \end{cases}$$

១.៣.៣.លំដាប់សមីការ

លំដាប់នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល គឺជាលំដាប់នៃដេរីវេទីរ៉ខ្ពស់បំផុតលេចឡើងក្នុងសមីការ។ សមីការនៅក្នុងផ្នែកមុនគឺជាលំដាប់ទីមួយទាំងអស់ ចំណែកសមីការ (1)គឺជាសមីការលំដាប់ទីពីរ។
ជាទូទៅតម្រង់សមីការ

$$F\left[t, y, y', ..., y^{(n)}\right] = 0 \qquad (3)$$

ឧទាហរណ៍ទី១ ខាងក្រោមនេះជាលំដាប់នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖

1. $y''' - 5y' + 5y = 2e^{t}$
2. $6ty'' - y' - 2y = 2e^{-t}$
3. $y'' + 2ty' + y = 3e^{-t}$
4. $4e^{t}y'' - 4y' + y = 16e^{t/2}$

លំហាត់

ក្នុងបណ្ដាលំហាត់ខាងក្រោមពី1-6 ចូរកំណត់ដឺក្រេរបស់សមីការ និងបញ្ជាក់ថាជាសមីការលីនេអ៊ែរឬមិនលីនេអ៊ែរ។

1. $t^2 y'' + ty' + 2y = \sin t$
2. $\left(1 + y^2\right)\dfrac{d^2y}{dt^2} + t\dfrac{dy}{dt} + y = e^{t}$
3. $y'''' + y''' + y'' + y' + y = 1$
4. $\dfrac{dy}{dt} + ty^2 = 0$
5. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \sin\left(t + y\right) = \sin t$
6. $\dfrac{d^3y}{dt^3} + t\dfrac{dy}{dt} + \left(\cos^2 t\right)y = t^3$

ជំពូកទី២ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់មួយ

ជំពូកនេះយើងនឹងសិក្សាពីសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់មួយ $\frac{dy}{dt}=f(t,y)$ (1) ដែល $f(x)$ គឺអនុគមន៍មួយដែលមានពីរអថេរ។ អនុគមន៍ឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y=\phi(t)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះគ្រប់ t នៅចន្លោះដែនកំណត់មួយនោះ $y=\phi(t)$ គឺត្រូវបានហៅថាចម្លើយ ហើយគោលបំណងរបស់យើងត្រូវបានកំណត់ ថាតើមានអនុគមន៍មិនមានវិធីសាស្ត្រទូទៅមួយសម្រាប់ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់សស្យែលលំដាប់មួយទេ។ ប៉ុន្តែយើងនឹងបកស្រាយវិធីសាស្ត្រមួយចំនួនដែលអាចអនុវត្តបានថ្នាក់រងជាក់លាក់មួយនៃសមីការធីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់មួយ។ អ្វីដែលសំខាន់គឺសមីការលីនេអ៊ែរ សមីការញែកអថេរ និងសមីការពិតប្រាកដ។ ផ្នែកផ្សេងនៃជំពូកនេះបកស្រាយចំណុចសំខាន់នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់មួយ ណែនាំគំនិតសម្រាប់ចម្លើយប្រហែលដោយការគណនាលេខ និងការពិភាក្សាសំណួរទ្រឹស្តីមួយចំនួន ដែលមានចម្លើយតែមួយគត់ និងផ្សាភ្ជាប់នឹងជីវភាពរស់នៅប្រចាំថ្ងៃ។ ផ្នែកចុងក្រោយលើកយកសមីការលំដាប់មួយខុសគ្នា ដែលមានចំណុចសំខាន់ស្រដៀងនឹងសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ហើយពេលខ្លះគោរពតាមធម្មតា ដើម្បីត្រួតពិនិត្យ។

២.១. សមីការលីនេអ៊ែរដែលមានអថេរជាមេគុណ

បើអនុគមន៍ f ក្នុងសមីការ (1) អាស្រ័យលីនេអ៊ែរលើអថេរឯករាជ្យ y ។ នោះសមីការ (1) ហៅថាសមីការលីនេអ៊ែរលំដាប់មួយ។ ក្នុងផ្នែកនេះយើងបានពិភាក្សាពីប្រភេទនៃសមីការលីនេអ៊ែរលំដាប់មួយ ដែលមានមេគុណជាចំនួនថេរ។ គេសរសេរ៖

$$\frac{dy}{dt}=-ay+b \qquad (2)$$

ដែល a,b ជាចំនួនថេរ។ សមីការមួយនៃទម្រង់បែបនេះបកស្រាយពីចលនានៃវត្ថុមួយធ្លាក់នៅក្នុងបរិយាកាស។ យើងពិនិត្យទម្រង់ទូទៅនៃសមីការលីនេអ៊ែរលំដាប់មួយ។ ដែលទទួលបានមកពីការប្តូរអថេរ a និង b នៅក្នុងសមីការ (2) ដោយអនុគមន៍នៃចំនួនថេរ t ។ យើងនឹងសរសេរទម្រង់ទូទៅនៃសមីការលីនេអ៊ែរលំដាប់មួយដោយ៖

$$\frac{dy}{dt}+p(t)y=g(t) \qquad (3)$$

ដែល $p(t)$ និង $g(t)$ បានមកពីអនុគមន៍នៃអថេរមិនអាស្រ័យ t ។សមីការ (2) អាចដោះស្រាយដោយប្រើអាំងតេក្រាល ដែលបានបង្ហាញក្នុងផ្នែក 1.2 ។ ដូច្នេះយើងអាចសរសេរសមីការជា៖

$$\frac{dy/dt}{y-(b/a)}=-a \qquad (4)$$

តាមការគណនាអាំងតេក្រាលយើងទទួលបាន

$$\ln\left|y-(b/a)\right|=-at+C$$

ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (2) គឺ

$$y=(b/a)+ce^{-at} \qquad (5)$$

ដែល c ជាចំនួនថេរណាមួយ។ ឧទាហរណ៍ បើ $a=2$ និង $b=3$ នោះសមីការ (2) គេបាន

$$\frac{dy}{dt}+2y=3 \qquad (6)$$

ហើយចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ

$$y=\frac{3}{2}+ce^{-2t}, c\in\mathbb{R} \qquad (7)$$

ក៏ប៉ុន្តែចម្លើយតាមវិធីសាស្ត្រនេះមិនអាចដោះស្រាយសមីការទូទៅ បាននោះទេ។ ដូច្នេះយើងត្រូវការប្រើប្រាស់វិធីសាស្ត្រផ្សេងសម្រាប់ចម្លើយរបស់វា។ វិធីសាស្ត្រឡិបនិហ្ស(Leibniz) វាជាប់ទាក់ទងនឹងការគុណ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (3) នឹងសមីការ $\mu(t)$ នោះយើងអាចរកចម្លើយនៃសមីការបានតាមអាំងតេក្រាល។ អនុគមន៍ $\mu(t)$ ហៅថា កត្តាអាំងក្រាល។ ធ្វើការបកស្រាយដំបូងឱ្យធម្មតាតាមដែលអាចធ្វើទៅបាន យើងនឹងប្រើវិធីសាស្ត្រនេះដើម្បីដោះស្រាយសមីការ (6) បន្ទាប់មកបង្ហាញពីរបៀបបញ្ចូលវាទៅក្នុងសមីការលីនេអ៊ែរលំដាប់មួយផ្សេងទៀត រួមទាំងសមីការទូទៅផងដែរ។

ឧទាហរណ៍១៖ រកចម្លើយនៃសមីការ $\dfrac{dy}{dt}+2y=3 \qquad (6)$

សម្រាយបញ្ជាក់

រកកត្តាអាំងតេក្រាលចំពោះសមីការនេះ។

ជំហានដំបូង គឺគុណសមីការ (6) ដោយអនុគមន៍ $\mu(t)$ នោះ

$$\mu(t)\frac{dy}{dt}+2\mu(t)y=3\mu(t) \qquad (8)$$

អង្គខាងឆ្វេងនៃសមីការ (8) ជាដេរីវេ។ បើដូច្នេះយើងអាចអាំងតេក្រាលសមីការ (8)។ យ៉ាងណាយើងនៅមិនទាន់ស្គាល់អនុគមន៍ y នោះទេ។ ជម្រើសរបស់យើងនៃកត្តាអាំងតេក្រាល $\mu(t)$ យើងសង្កេតអង្គខាងឆ្វេងនៃសមីការ (8) មានពីរតួ ដែលតួដំបូងគឺជាលទ្ធផលនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលផលគុណ $\mu(t)y$ ។ ដូច្នេះយើងត្រូវកំណត់ $\mu(t)$ នោះផ្នែកខាងឆ្វេងនៃសមីការ (8) ក្លាយជាដេរីវេនៃកន្សោម $\mu(t)y$ ។ បើយើងប្រៀបធៀបផ្នែកខាងឆ្វេងនៃសមីការ (8) នឹងរូបមន្តឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$\frac{d}{dt}\left[\mu(t)y\right]=\mu(t)\frac{dy}{dt}+\frac{d\mu(t)}{dt}y \qquad (9)$$

យើងចំណាំថាតួដំបូងគឺដូចគ្នា ហើយតួទីពីរក៏ដូច្នោះដែរ ឱ្យតែយើងជ្រើសយក $\mu(t)$ ដើម្បីផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\frac{d\mu(t)}{dt}=2\mu(t) \qquad (10)$$

ដូច្នេះយើងនឹងរកកត្តាអាំងតេក្រាលបានសម្រេច ប្រសិនបើយើងរកចម្លើយមួយនៃសមីការ (10) ។ ប្រហែលជាអ្នកអាចងាយស្រួលកំណត់អនុគមន៍មួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ (10)៖

តើអនុគមន៍មានដេរីវេដែលស្មើនឹងពីរដងនៃសមីការដើមដែរឬទេ?

របៀបម្យ៉ាងទៀតយើងអាចសរសេរសមីការ (10) ជា

$$\frac{d\mu(t)/dt}{\mu(t)}=2 \qquad (11)$$

ដែលសមមូលនឹង $$\frac{d}{dt}\ln|\mu(t)| = 2 \qquad (12)$$

បន្ទាប់មក

$$\ln|\mu(t)| = 2t + C \qquad (13)$$

ឬ $$\mu(t) = ce^{2t} \qquad (14)$$

អនុគមន៍ $\mu(t)$ បានបញ្ជាក់ក្នុងសមីការ (14) ដែលជាកត្តាអាំងតេក្រាលរបស់សមីការ (6)។ ដោយសារយើងមិនត្រូវការកត្តាអាំងតេក្រាលទូទៅ ដូច្នេះយើងនឹងជំនួស $c = 1$ ក្នុងសមីការ(14) ហើយយក $\mu(t) = e^{2t}$ ។

គុណសមីការ (6) នឹង e^{2t} យើងបាន

$$e^{2t}\frac{dy}{dt} + 2e^{2t}y = 3e^{2t} \qquad (15)$$

តាមជម្រើសដែលយើងមាននៃកត្តាអាំងតេក្រាល អង្គខាងឆ្វេងនៃសមីការ (15) គឺជាដេរីវេនៃ $e^{2t}y$

ដូច្នេះយើងបានសមីការ $$\frac{d}{dt}\left(e^{2t}y\right) = 3e^{2t} \qquad (16)$$

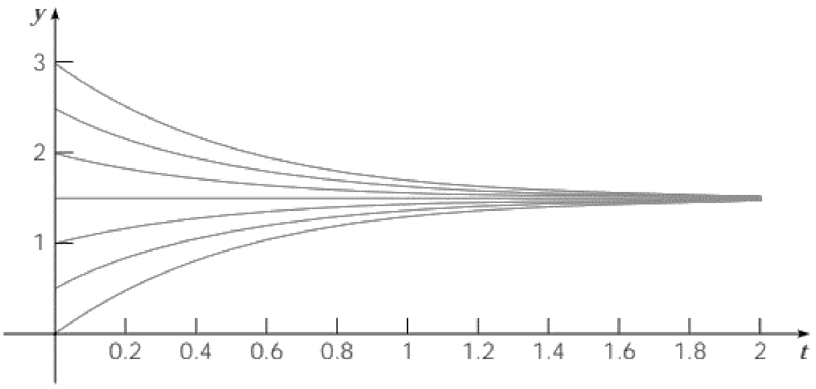
ដោយគណនាអាំងតេក្រាលអង្គទាំងពីរនៃសមីការ (16) យើងបាន

$$e^{2t}y = \frac{3}{2}e^{2t} + c \qquad (17)$$

ដែល c គឺជាចំនួនថេរមួយ។ ចុងក្រោយតាមរយៈការដោះស្រាយសមីការ (17) ចំពោះ y យើងមានចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (6) គឺ

$$y = \frac{3}{2} + ce^{-2t} \qquad (18)$$

ដូចនេះចម្លើយ (18) គឺដូចនឹងចម្លើយ (7) ដែលរកឃើញខាងលើ។ រូបភាព (1.1.1) បង្ហាញពីក្រាហ្វនៃនៃសមីការ (18) ចំពោះតម្លៃមួយចំនួននៃ c ។ ចម្លើយរួមទៅរកតម្លៃថេរ $y = \frac{3}{2}$ ដែលត្រូវគ្នានឹង $c = 0$ ។



រូបភាព 1.1. 1

ដូចដែលបានបង្ហាញពីរបៀបនៃដំណើរការវិធីសាស្រ្ត កត្តាអាំងតេក្រាលក្នុងឧទាហរណ៍ងាយខាងលើ។ យើងបំលែងវាទៅជាថ្នាក់ផ្សេងៗនៃសមីការ ហើយយើងនឹងធ្វើបែបនេះបីជំហាន។ ដំបូងពិនិត្យសមីការ (2)ម្តងទៀត ដែលពេលនេះយើងសរសេរជាទម្រង់

$$\frac{dy}{dt}+ay=b \qquad (19)$$

ដេរីវេក្នុងឧទាហរណ៍១ ដែលគ្រាន់តែផ្លាស់ប្តូរមេគុណ 2 និង 3 ក្នុងសមីការ (6) ដោយ a និង b រៀងគ្នា។ កត្តាអាំងតេក្រាលគឺ $\mu(t)=e^{at}$ ហើយសមីការ (5) ជាចម្លើយដែលដូចនឹងសមីការ (18) ដែលជំនួស 2 ដោយ a និង 3 ដោយ b ។

ជំហានបន្ទាប់គឺជំនួសចំនួនថេរ b ដោយអនុគមន៍ $g(t)$ ។នោះយើងបានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$\frac{dy}{dt}+ay=g(t) \qquad (20)$$

កត្តាអាំងតេក្រាលអាស្រ័យលើតែមេគុណនៃ y ប៉ុណ្ណោះ ដូច្នេះសមីការ (20) កត្តាអាំងតេក្រាលគឺ $\mu(t)=e^{at}$ ។ គុណសមីការ (20) នឹង $\mu(t)$យើងបាន

$$e^{at}\frac{dy}{dt}+ae^{at}y=e^{at}g(t) \qquad \text{ឬ} \qquad \frac{d}{dt}\left(e^{at}y\right)=e^{at}g(t) \qquad (21)$$

បំពាក់អាំងតេក្រាលអង្គទាំងពីរនៃសមីការ (21) យើងឃើញថា

$$e^{at}y=\int e^{as}g(s)\,ds+c \qquad (22)$$

ដែល c ជាចំនួនថេរណាមួយ។ ចំណាំថាយើងធ្លាប់ប្រើអថេរ s បង្ហាញពីអថេរអាំងតេក្រាល ដើម្បីញែកវាចេញពីអថេរមិនអាស្រ័យ t។ តាមការដោះស្រាយសមីការ (22) យើងទទួលបានម្លើយទូទៅ

$$y=e^{-at}\int e^{as}g(s)\,dx+ce^{-at} \qquad (23)$$

សម្រាប់អនុគមន៍ងាយ $g(s)$ អាំងតេក្រាលក្នុងសមីការ (23) អាចប៉ាន់ស្មានបាន ហើយចម្លើយ y បានបញ្ជាក់ក្នុងតួនៃអនុគមន៍ងាយ ដូចនៅក្នុងឧទាហរណ៍បន្ទាប់។ ម្យ៉ាងទៀតសម្រាប់អនុគមន៍ដែលស្មុគ្រស្មាញ $g(s)$ វាអាចចាំបាច់ក្នុងការរកចម្លើយក្នុងទម្រង់អាំងតេក្រាល សមីការ(23) ។

ឧទាហរណ៍២៖ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$\frac{dy}{dt}+\frac{1}{2}y=2+t \qquad (24)$$

ព្រាងចម្លើយមួយចំនួន ហើយរកចម្លើយដោយឡែក (Particular solution) ដែលក្រាហ្វមានចំណុច (0.2) ។

ក្នុងករណីនេះ $a=\frac{1}{2}$ ដូច្នេះកត្តាអាំងតេក្រាលគឺ $\mu(t)=e^{t/2}$ ។ គុណសមីការ (24) នឹងកត្តានេះ យើងបានសមីការ

$$\frac{d}{dt}\left(e^{t/2}y\right)=2e^{t/2}+te^{t/2} \qquad (25)$$

ដោយបំពាក់អាំងតេក្រាលអង្គទាំងពីរនៃសមីការ (25) ប្រើប្រាស់អាំងតេក្រាលដោយផ្នែកចំពោះតួទីពីរនៅផ្នែកខាងស្តាំ យើងបាន

$$e^{t/2}y = 4e^{t/2} + 2te^{t/2} - 4e^{t/2} + c$$

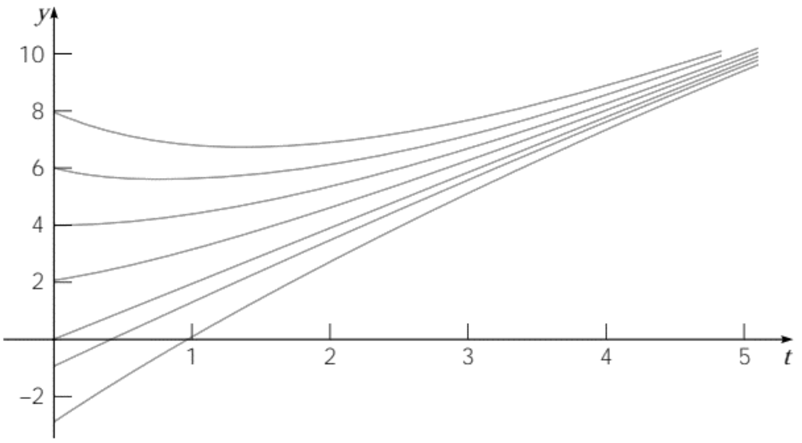
ដោយ c ជាចំនួនថេរណាមួយនោះ

$$y = 2t + ct^{-t/2} \qquad (26)$$

ដើម្បីរកចម្លើយដែលឆ្លងកាត់ចំណុចដំបូង $(0,2)$ យើងកំណត់យក $t=0$ និង $y=2$ ក្នុងសមីការ (26) យើងបានចម្លើយ $2=0+c$ ។ នោះ $c=2$ ដូច្នេះចម្លើយដែលចង់បានគឺ

$$y = 2t + 2e^{-t/2} \qquad (27)$$

ក្រាហ្វចម្លើយ (26) ចំពោះតម្លៃមួយចំនួននៃ c បានបង្ហាញក្នុងរូបភាព $(2.1.2)$ សង្កេតមើលចម្លើយទៅរកចំណុចតែមួយ ចម្លើយមិនថេរដូចក្នុងឧទាហរណ៍ទី១ និងឧទាហរណ៍ក្នុងជំពូកទី១នោះទេ ប៉ុន្តែចម្លើយ $y=2t$ ស៊ីគ្នានឹង $c=0$



រូបភាព 1.1. 2

ឧទាហរណ៍៣៖ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$\frac{dy}{dt} - 2y = 4 - t \qquad (28)$$

ដោយសារតែមេគុណនៃ y គឺ -2 កត្តាអាំងតេក្រាលនៃសមីការ (28) គឺ $\mu(t) = e^{-2t}$ ។ គុណសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនឹង $\mu(t)$ ។ យើងបាន

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-2t}y\right) = 4e^{-2t} - te^{-2t} \qquad (29)$$

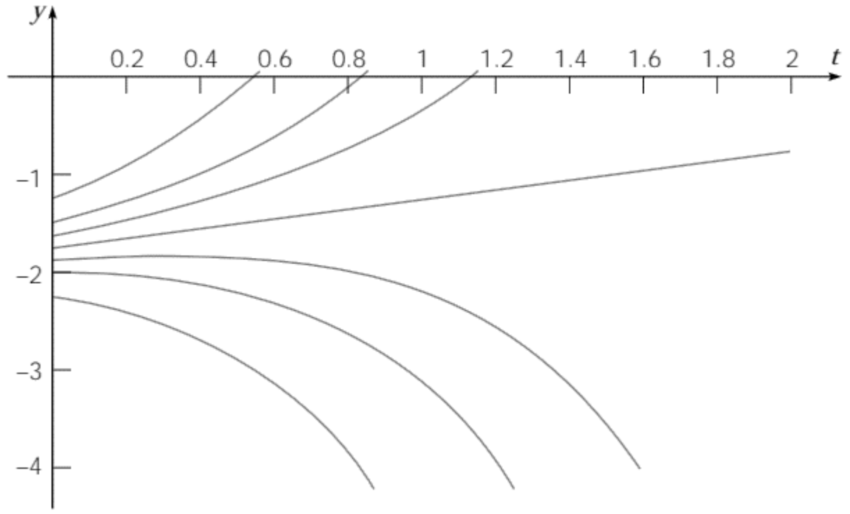
បន្ទាប់មកបំពាក់អាំតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរនៃសមីការនេះ យើងបាន៖

$$e^{-2t}y = -2e^{-2t} + \frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{4}e^{-2t} + c$$

យើងធ្លាប់អាំងតេក្រាលដោយផ្នែកចំពោះតួចុងក្រោយក្នុងសមីការ (29) ។ នោះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (28) គឺ

$$y = -\frac{7}{4} + \frac{1}{2}t + ce^{2t} \qquad (30)$$

ក្រាហ្វនៃចម្លើយ (30) ចំពោះតម្លៃ c មួយចំនួនបានបង្ហាញក្នុងរូបភាព $(1.1.3)$ ។ ទម្រង់នៃចម្លើយចំពោះតម្លៃ t គឺបានកំណត់ដោយផ្នែក ce^{2t} ។ ដូច្នេះនៅពេល $c=0$ បើយើងជួស $c=0$ ទៅក្នុងសមីការ (30) ហើយបន្ទាប់មកកំណត់ $t=0$ យើងទទួលបាន $y=-\frac{7}{4}$ ។ នេះគឺជាចំណុចញែកនៅលើអ័ក្ស y ។ ចំណាំថា សម្រាប់តម្លៃដើមនេះ ចម្លើយគឺ $y=-\frac{7}{4}+\frac{1}{2}t$ ។



រូបភាព 1.1. 3

ឧទាហរណ៍២ និង៣ គឺជាករណីពិសេសនៃសមីការ (20)

$$\frac{dy}{dt}+ay=g(t)$$

ដែលចម្លើយមកពីសមីការ (23)

$$y=e^{-at}\int e^{as}g(s)ds+ce^{-at}$$

យើងសង្កេតឃើញថា ប្រសិនបើ $a>0$ ជាចម្លើយរួម(ដូចឧទាហរណ៍២)ហើយប្រសិន $a<0$ ជាចម្លើយរីក(ដូចឧទាហរណ៍៣)។

២.១.១.វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយទូទៅ

ជំហានចុងក្រោយក្នុងការបង្ហាញវិធីសាស្ត្រនៃកត្តាអាំងតេក្រាលរបស់សមីការលីនេអ៊ែរលំដាប់មួយទូទៅ (3)

$$\frac{dy}{dt}+p(t)y=g(t) \qquad (3)$$

ដែល $p(t)$ និង $g(t)$ គឺជាអនុគមន៍។ បើយើងគុណសមីការ (3) ដោយអនុគមន៍មិនកំណត់ $\mu(t)$ យើងបាន

$$\mu(t)\frac{dy}{dt}+p(t)\mu(t)y=\mu(t)g(t) \qquad (31)$$

យើងឃើញថាផ្នែកខាងឆ្វេងនៃសមីការ (31) គឺដេរីវេនៃជាគុ $\mu(t)y$ នាំឲ្យ $\mu(t)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)\mu(t) \qquad (32)$$

បើយើងយក $\mu(t)$ វិជ្ជមាននោះយើងបាន

$$\frac{d\mu(t)/dt}{\mu(t)} = p(t)$$

ហើយដូច្នេះ

$$\ln\mu(t) = \int p(t)dt + k$$

ដោយយក $k=0$ យើងអាចទទួលបានអនុគមន៍ងាយមួយ ចំពោះ $\mu(t)$ គេអាចសរសេរ

$$\mu(t) = \exp\int p(t)dt \qquad (33)$$

ចំណាំថា $\mu(t)$ វិជ្ជមានគ្រប់តម្លៃ t ចំពោះសមីការ (31) យើងមាន

$$\frac{d}{dt}\left[\mu(t)y\right] = \mu(t)g(t) \qquad (34)$$

នោះ
$$\mu(t)y = \int \mu(t)g(t)dt + c$$

ដូច្នេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ(3) គឺ $y = \dfrac{\int u(t)g(t)dt + c}{\mu(t)} \qquad (35)$

ឧទាហរណ៍៤ ដោះស្រាយសមីការតាមបញ្ហាតម្លៃដើម

$$ty' + 2y = 4t^2 \qquad (36)$$

ដែល $y(1) = 2 \qquad (37)$

សរសេរសមីការជាទម្រង់ស្តង់ដាយើងបាន

$$y' + (2/t)y = 4t \qquad (38)$$

ដូច្នេះ $p(t) = \frac{2}{t}$ ហើយ $g(t) = 4t$ ។ ដើម្បីដោះស្រាយសមីការ (38) ដំបូងយើងគណនាកត្តាអាំងតេក្រាល $\mu(t)$

$$\mu(t) = \exp\int\frac{2}{t}dt = e^{2\ln|t|} = t^2 \qquad (39)$$

គុណសមីការ(38) នឹង $\mu(t) = t^2$ យើងបាន

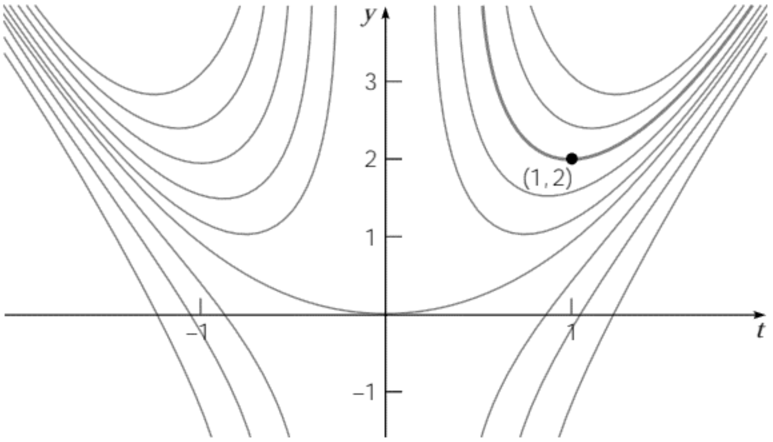
$$t^2y' + 2ty = (t^2y)' = 4t^3$$

ដូច្នេះ $t^2y = t^4 + c$ ដែល c ជាចំនួនថេរ។យើងបាន $y = t^2 + \dfrac{c}{t^2} \qquad (40)$

គឺជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ។ ចំពោះតម្លៃមួយចំនួននៃ c សមីការ (36) អាំងតេក្រាលខ្សែកោង (Integral curves) ដូចរូប (2.1.4)។ ដើម្បីផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដំបូង យើងត្រូវឱ្យតម្លៃ $c=1$ នោះ

$$y = t^2 + \frac{1}{t^2}, \qquad t > 0 \qquad (41)$$

គឺជាចម្លើយនៃតម្លៃដើមឬចម្លើយពិសេស។ ចម្លើយនេះបានបង្ហាញថាកោងខ្លាំងដូចរូបភាព (1.1.4) ។ ចំណាំថា វាគ្មានដែនកំណត់និងអាស៊ីមតូតចំពោះផ្នែកវិជ្ជមាននៃអ័ក្ស y ទេ ដូច $t \to 0$ ពីខាងស្តាំ។ នេះគឺដោយសារគ្មានដែនកំណត់ក្នុងមេគុណ $p(t)$ ។ អនុគមន៍ $y = t^2 + \left(1/t^2\right)$ ចំពោះ $t < 0$ មិនមែនផ្នែកនៃចម្លើយនៃតម្លៃដើមនេះទេ



រូបភាព 1.1.4

នេះគឺឧទាហរណ៍ដំបូងដែលចម្លើយមិនអាចកំណត់បានចំពោះតម្លៃ t មួយចំនួន។ ជាថ្មីម្តងទៀត នេះដោយសារតែគ្មានដែនកំណត់ក្នុង $p(t)$ ពេល $t=0$ ដែលចម្លើយរួមនៅចម្លោះ $0<t<\infty$ ។

២.១.២ វិធីបម្រែបម្រួលនៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ

ពិចារណាតាមវិធីសាស្ត្រដោះស្រាយទូទៅសមីការលីនេអ៊ែរលំដាប់១។

$$y' + p(t)y = g(t) \qquad (i)$$

(a). បើ $g(t)=0$ ដំណោះស្រាយបង្ហាញតាម

$$y' + p(t)y = 0 \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dt} = -p(t)y$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(t)\,dt \qquad \Leftrightarrow \ln|y| = -\int p(t)\,dt + c$$

$$y = Ae^{\left[-\int p(t)dt\right]} \qquad (ii)$$

(b). បើ $g(t) \neq 0$ សម្មត់ថាដំណោះស្រាយមានទម្រង់

$$y = A(t)\mathrm{e}^{\left(-\int p(t)dt\right)} \qquad (iii)$$

$$y' = A'(t)\mathrm{e}^{\left(-\int p(t)dt\right)} - A(t)p(t)e^{-\int p(t)dt}$$

ដោយជំនួស y, y' ក្នុងសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលបានផ្តល់ឱ្យ បញ្ជាក់ថា $A(t)$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ

$$A'(t)\mathrm{e}^{\left(-\int p(t)dt\right)} - A(t)p(t)e^{-\int p(t)dt} + p(t)A(t)e^{-\int p(t)dt} = g(t)$$

$$A'(t)e^{\left(-\int p(t)dt\right)} = g(t)$$

$$A'(t) = g(t)e^{\int p(t)dt}$$

$$A(t) = \int\left[g(t)e^{\int p(t)dt}\right]dt + c \qquad (iv)$$

(c). យក $A(t)$ ពីសមីការ (iv) ជំនួស $A(t)$ ក្នុងសមីការ (iii) និងកំណត់ y

$$y = \left(\int\left[g(t)e^{\int p(t)dt}\right]dt + c\right)e^{-\int p(t)dt}; \quad c \in \mathbb{R}$$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ដំណោះស្រាយដែលបានរកជាមួយសមីការនោះ។

ឧទាហរណ៍១ រកចម្លើយសមីការខាងក្រោមតាមវិធីបម្រែបម្រួលប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $y'-2y = t^2e^{2t}$

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការលីនេអ៊ែរអូម៉ូហ្សែន $y'-2y=0$

$$\frac{dy}{dt} - 2y = 0 \quad ; \quad \frac{dy}{y} = 2dt$$

$$\int\frac{dy}{y} = \int 2dt \quad ; \quad \ln|y| = 2t + c$$

$$y = Ae^{2t} \quad ; \quad A = \pm e^{c}$$

យើងរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការលីនេអ៊ែរមិនអូម៉ូហ្សែន $y'-2y = t^2e^{2t}$ ដោយសន្មតយក

$y = A(t)e^{2t}$; $y' = A'(t)e^{2t} + 2A(t)e^{2t}$ យកជំនួសក្នុងសមីការដើមគេបាន

$$A'(t)e^{2t} + 2A(t)e^{2t} - 2A(t)e^{2t} = t^2e^{2t}$$

$$A(t) = \int t^2dt = \frac{t^3}{3} + c$$

អនុគមន៍ចម្លើយ $y(t) = \left(\frac{t^3}{3} + c\right)e^{2t} = ce^{2t} + \frac{1}{3}t^3e^{2t} \qquad c \in \mathbb{R}$

ឧទាហរណ៍២៖ រកចម្លើយសមីការខាងក្រោមតាមវិធីបម្រែបម្រួលប៉ារ៉ាម៉ែត្រ

$$y' + \left(\frac{1}{t}\right)y = 3\cos 2t \quad ,t>0$$

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការលីនេអ៊ែរអូម៉ូហ្សែន $y' + \left(\frac{1}{t}\right)y = 0$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{t}y = 0 \quad ; \quad \frac{dy}{y} = -\frac{1}{t}dt$$

$$\int\frac{dy}{y} = \int\frac{1}{t}dt \quad ; \quad \ln|y| = -\ln|t| + \ln|A|$$

$$y = A\frac{1}{t}; \quad A \in \mathbb{R}$$

យើងរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការលីនេអ៊ែរមិនអូម៉ូហ្សែន $y' + \left(\frac{1}{t}\right)y = 3\cos 2t \quad ,t>0$ ដោយសន្មតយក

$y = A(t)\frac{1}{t}$; $y' = A'(t)\frac{1}{t} - A(t)\frac{1}{t^2}$ យកជំនួសក្នុងសមីការដើមគេបាន

$A'(t)\frac{1}{t} - A(t)\frac{1}{t^2} + A(t)\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t} = 3\cos 2t$

$A(t) = \int 3t\cos 2t dt = \frac{3t}{2}\sin 2t + \frac{3}{4}\cos 2t + c$

អនុគមន៍ចម្លើយ $y(t) = \left(\frac{3t}{2}\sin 2t + \frac{3}{4}\cos 2t + c\right)\frac{1}{t} = \frac{3}{2}\sin 2t + \frac{3}{4t}\cos 2t + c\frac{1}{t} \quad c \in \mathbb{R}$

លំហាត់

ក្នុងលំហាត់1-12 ចូររកចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរ

$1. y' + 3y = te^{-2t}$	$2. y' - 2y = t^2e^{2t}$
$3. y + y = te^{-t} + 1$	$4. y' + \frac{1}{t}y = 3\cos 2t, \quad t > 0$
$5. y' - 2y = 3e^t$	$6. ry' + 2y = \sin t, \quad t > 0$
$7. y + 2ty = 2te^{-t^2}$	$8. (1+t^2)y' + 4ty = (1+t^2)^{-2}$
$9. 2y' + y = 3t$	$10. ty' - y = t^2e^{-t}$
$11. y' + y = 5\sin 2t$	$12. 2y' + y = 3t^2$

ក្នុងលំហាត់13-20 ចូររកចម្លើយពិសេសនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរតាមបញ្ហាតម្លៃដើម

$13. y' - y = 2te^{2t}, \quad y(0) = 1$	$14. y' + 2y = te^{-2t}, \quad y(1) = 0$
$15. ty' + 2y = t^2 - t + 1, \quad y(1) = \frac{1}{2}, t > 0$	$16. y + \left(\frac{2}{t}\right)y = \frac{\cos t}{t^2}, \quad y(\pi) = 0, \quad t > 0$
$17. y' - 2y = e^{2t}, \quad y(0) = 2$	$18. ty' + 2y = \sin t, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
$19. t^3y' + 4t^2y = e^{-t}, \quad y(-1) = 0$	$20. ty' + (t+1)y = t, \quad y(\ln) = 1$

២.២. សមីការអាចញែកអថេរបាន

នៅក្នុងដំណោះស្រាយសមីការមុនៗដែលមានទម្រង់

$$\frac{dy}{dt} = ay + b \qquad (1)$$

ដែល a និង b ជាចំនួនអថេរ។ យើងបានបង្ហាញពីរបៀបដោះស្រាយសមីការដែលមាន y ជាអថេរអាស្រ័យនិង t ជាអថេឯករាជ្យ។ ប៉ុន្តែនៅក្នុងផ្នែកនេះយើងបន្តសិក្សាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទីមួយមានរាងទូទៅគឺ

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (2)$$

ដែល y ជាអថេរអាស្រ័យនិង x ជាអថេឯករាជ្យ។ សមីការ (2) មិនមែនជាសមីការលីនេអ៊ែរ នោះមិនអាចអនុវត្តន៍បានទេសម្រាប់ការដោះស្រាយសមីការនោះ។ យើងពិចារណាថ្នាក់រងនៃសមីការលំដាប់ទីមួយដើម្បីកំណត់ថ្នាក់នៃសមីការ។

យើងសរសេរសមីការ (2) ឡើងវិញក្នុងទម្រង់៖

$$M(x,y)+N(x,y)\frac{dy}{dx}=0 \qquad (3)$$

កំណត់ $M(x,y)=-f(a,y)$ និង $N(x,y)=1$ ប៉ុន្តែអាចមានវិធីផ្សេងទៀត។ ក្នុងករណីដែល M ជាអនុគមន៍ x តែមួយគត់ និង N ជាអនុគមន៍ y តែមួយគត់ នោះសមីការ (3) ក្លាយជា

$$M(x)+N(y)\frac{dy}{dx}=0 \qquad (4)$$

សមីការនេះត្រូវបានហៅថា សមីការអាចញែកអថេរបាន ព្រោះវាអាចសរសេរក្នុងទម្រង់ឌីផេរ៉ង់ស្យែលបាន

$$M(x)dx+N(y)dy=0 \qquad (5)$$

ឧទាហរណ៍១ ដោះស្រាយសមីការញែកអថេរខាងក្រោម៖

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{1-y^2}$$

សម្រាយបញ្ជាក់

មាន $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{1-y^2}$

យើងបាន $-x^2+\left(1-y^2\right)\frac{dy}{dx}=0$

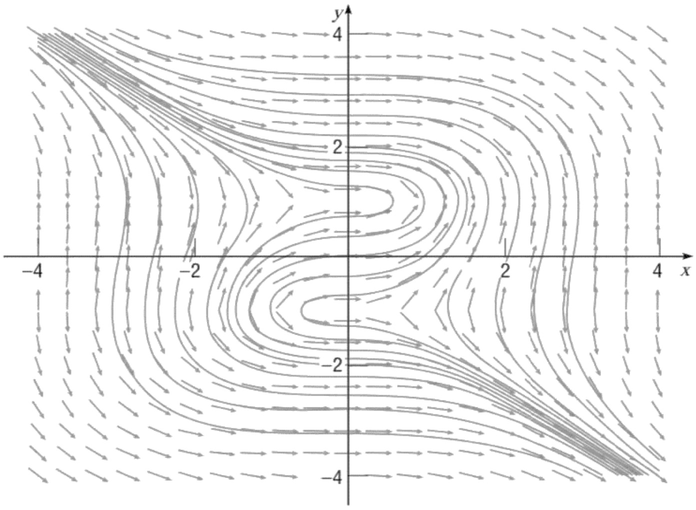
$$\Rightarrow -x^2dx=-\left(1-y^2\right)dy$$

$$-\int x^2dx=-\int\left(1-y^2\right)dy$$

$$-\frac{x^3}{3}=-\left(y-\frac{y^3}{3}\right)+c$$

$$-x^3+3y-y^3=c \qquad , \qquad c\in R$$

ចម្លើយសមីការគឺជាគ្រួសារខ្សែរកោង $-x^3+3y-y^3=c$ បង្ហាញដូចរូប(1.2.1)ក្រោម៖



រូបភាព 1.2. 1

ឧទាហរណ៍២ ៖ ដោះស្រាយសមីការព្រៀកអថេរខាងក្រោម៖

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}\ ,\ \ y(0)=-1$$

យើងបាន

$$2(y-1)dy=\left(3x^2+4x+2\right)dx$$

$$\Rightarrow 2\int(y-1)dy=\int\left(3x^2+4x+2\right)dx$$

$$2\left(\frac{y^2}{2}-y\right)=\left(x^3+2x^2+2x\right)+c$$

$$y^2-2y=x^3+2x^2+2x+c$$

ដោយ $y(0)=-1$

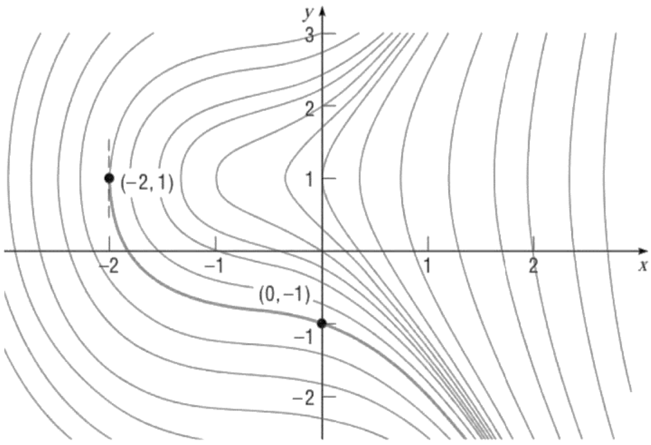
$$(-1)^2-2(-1)=(0)^3+2(0)^2+2(0)+c$$

$$1+2=c$$

$$c=3$$

ចម្លើយពិសេសនៃសមីការគឺ $y^2-2y=x^3+2x^2+2x+3$

ចម្លើយសមីការគឺជាគ្រួសារខ្សែកោង $y^2-2y=x^3+2x^2+2x+c$ បង្ហាញដូចរូប(1.2.2)ក្រោម៖



រូបភាព1.2.2

លំហាត់

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល1ដល់8

1. $y'=\frac{x^2}{y}$ 2. $y'=\frac{x^2}{y\left(1+x^3\right)}$

3. $y'+y^2\sin x=0$ 4. $y'=\frac{\left(3x^2-1\right)}{(3+2y)}$

5. $y'=\left(\cos^2 x\right)\left(\cos^2 2y\right)$ 6. $xy'=\left(1-y^2\right)^{\frac{1}{2}}$

7. $\frac{dy}{dx}=\frac{x-e^{-x}}{y+e^{y}}$ 8. $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{1+y^2}$

លំហាត់ទី 9 ដល់ 20 :

a. រកដំណោះស្រាយតាមតម្លៃដើម

b. គូសក្រាហ្វនៃដំណោះស្រាយ

c. កំណត់ចន្លោះចម្លើយដែលដំណោះស្រាយត្រូវបានកំណត់

9. $y'=(1-2x)y^2, y(0)=-\frac{1}{6}$ 10. $y'=\frac{(1-2x)}{y}, y(1)=-2$

11. $xdx+ye^{-x}dy=0, y(0)=1$ 12. $\frac{dr}{d\theta}=\frac{r^2}{\theta}\ , r(1)=2$

13. $y'=\frac{2x}{(y+x^2y)}, y(0)=-2$ 14. $y'=xy^3(1+x^2)^{\frac{-1}{2}}\ , y(0)=1$

15. $y'=\frac{2x}{(1+2y)}\ , y(2)=0$ 16. $y'=\frac{x(x^2+1)}{4y^3}, y(0)=\frac{-1}{\sqrt{2}}$

17. $y'=\frac{(3x^2-e^x)}{(2y-5)}, y(0)=1$ 18. $y'=\frac{(e^{-x}-e^x)}{(3+4y)}, y(0)=1$

19. $\sin 2xdx+\cos 3ydy=0,$ $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$

20. $y^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dy=\arcsin xdx$; $y(0)=0$

21. ដំណោះស្រាយតម្លៃដើម $y'=\frac{(1+3x^2)}{(3y^2-6y)}$, $y(0)=1$ និងកំណត់ចន្លោះចម្លើយដែលដំណោះស្រាយមានសុពលភាព។ ជំនួយ៖ ដើម្បីរកចន្លោះចម្លើយនៃ រកចំណុចដែលខ្សែកោងអាំងតេក្រាលមានបន្ទាត់ប្រាប់ទិសបញ្ឈរ។

22. ដំណោះស្រាយតម្លៃដើម $y'=\frac{3x^2}{(3y^2-4)}$, $y(1)=0$ និងកំណត់ចន្លោះចម្លើយដែលត្រឹមត្រូវ។ ជំនួយ៖ ដើម្បីរកចន្លោះចម្លើយនៃនិយមន័យ រកចំណុចដែលខ្សែកោងអាំងតេក្រាលមានបន្ទាត់ប្រាប់ទិសបញ្ឈរ។

២.៣. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែន

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរមានទម្រង់៖

$$y'+p(t)y=g(t) \qquad (1)$$

ប្រសិនបើ $g(t)=0$ សមីការក្លាយជាទម្រង់

$$y'+p(t)y=0 \qquad (2)$$

សមីការ (2) ត្រូវបានគេហៅថាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរអូម៉ូហ្សែន។ យើងធ្វើការដោះស្រាយសមីការ (2) តាមវិធីខាងក្រោម៖

$y'+p(t)y=0$

$y'=-p(t)y$

$\frac{dy}{dt}=-p(t)y$

$\frac{dy}{y}=-p(t)dt$ ធ្វើអាំងតេក្រាលលើអង្គសងខាង

$\int\frac{dy}{y}=-\int p(t)dt$

$y=Ae^{-\int p(t)dt} \quad ,A\in R$ (3) ជាអនុគមន៍ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (2)

ឧទាហរណ៍១៖ ចូរដោះស្រាយថាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែន

$y'-3y=0$

ចម្លើយ

ដោះស្រាយថាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែន

$y'-3y=0$ ដែល $p(t)=-3$

អនុគមន៍ចម្លើយទូទៅនៃសមីការមានទម្រង់ $y=Ae^{-\int p(t)dt}$ (3)

$y=Ae^{-\int -3dr}=Ae^{3t} \quad ,A\in R$

ដូចនេះ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែនមានអនុគមន៍ចម្លើយទូទៅ $y=Ae^{3t} \quad ,A\in R$

ឧទាហរណ៍២៖ ចូរដោះស្រាយថាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែន

$x\frac{dy}{dx}-4y=0$

ចម្លើយ

ដោះស្រាយថាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែន

$x\frac{dy}{dx}-4y=0 \quad \Leftrightarrow \quad y'-\frac{4}{x}y=0$ ដែល $p(x)=-\frac{4}{x}$

អនុគមន៍ចម្លើយទូទៅនៃសមីការមានទម្រង់ $y=Ae^{-\int p(t)dt}$ (3)

$y=Ae^{-\int -\frac{4}{x}dx}=Ae^{4\ln x}=Ax^4 \quad ,A\in R$

ដូចនេះ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែនមានអនុគមន៍ចម្លើយទូទៅ $y=Ax^4 \quad ,A\in R$

<u>ករណីពិសេស</u>

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែន $y'+p(t)y=0$ ។បើអនុគមន៍ $p(t)=\alpha$ ជាចំនួនថេរ នោះ សមីការមានក្លាយជា $y'+\alpha y=0$ (4)

អនុគមន៍ចម្លើយទូទៅអនុគមន៍ចម្លើយទូទៅគឺ $y(t)=Ae^{-\alpha x} \quad ,A\in\mathbb{R}$

ឧទាហរណ៍៣៖ ចូរដោះស្រាយថាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែន

$2\frac{dy}{dx}-4y=0$

ចម្លើយ

ដោះស្រាយថាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែន

$$2\frac{dy}{dx}-4y=0 \quad \Leftrightarrow \quad y'-2y=0$$ ដែល $\alpha=-2$

អនុគមន៍ចម្លើយទូទៅនៃសមីការមានទម្រង់ $y(x)=Ae^{2x} \quad A\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែនមានអនុគមន៍ចម្លើយទូទៅ $y=Ae^{2x} \quad ,A\in R$

២.៤. សមីការ ប៊ែនូយី (Bernoulli Equations)

ពេលខ្លះវាអាចធ្វើទៅបានដើម្បីដោះស្រាយសមីការមិនមែនលីនេអ៊ែរដោយធ្វើការផ្លាស់ប្តូរអថេរអាស្រ័យដែលបំប្លែងវាទៅជាសមីការលីនេអ៊ែរ។វាពិតជាសំខាន់បំផុតចំពោះសមីការមានទម្រង់៖

$$y'+p(t)y=q(t)y^n \qquad (1)$$

សមីការ (1) គេហៅថាសមីការ ប៊ែនូយី ដែល n ជាចំនួនពិតហើយ $n\neq\{0,1\}$ ។

<u>វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយសមីការនៃប្រភេទនេះ</u>

តាង $w=y^{1-n}$ ធ្វើដេរីវេធៀបអថេរ t

$$\frac{dw}{dt}=(1-n)y^{-n}y' \qquad \Rightarrow y'=\frac{y^n}{(1-n)}\frac{dw}{dt}$$ យកទៅជំនួសសមីការ (1)

$$\frac{y^n}{(1-n)}\frac{dw}{dt}+p(t)y=q(t)y^n$$

$$\frac{dw}{dt}+p(t)(1-n)y^{1-n}=(1-n)q(t)$$

$$w'+p(t)(1-n)w=(1-n)q(t) \qquad (2)$$

សមីការ (2) គឺជាសមីការ លីនេអ៊ែរលំដាប់មួយ ដូចនេះយើងដោះស្រាយបានដូចឧទាហរណ៍មុនៗ។

ឧទាហរណ៍១៖ ចូរដោះស្រាយសមីការឌីប៊ែនូយី $\frac{dy}{dt}+\frac{1}{t}y=ty^2$

ចម្លើយ

ដោះស្រាយសមីការឌីប៊ែនូយី

$\frac{dy}{dt}+\frac{1}{t}y=ty^2$ មាន $n=2$, $q(t)=t$, $p(t)=\frac{1}{t}$

យើងទទួលបាន

$$w'+p(t)(1-n)w=(1-n)q(t)$$

$$w'-\frac{1}{t}w=-t$$

អនុគមន៍ចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $y(t)=\frac{1}{-t^2+ct}, \qquad c\in\mathbb{R}$

ឧទាហរណ៍២៖ ចូរដោះស្រាយសមីការឌីប៊ែនូយី

$$y'+\frac{4}{x}y=x^3y^2 \qquad y(1)=-1 \qquad x>0$$

ចម្លើយ

ដោះស្រាយសមីការឌីប៉ែនូយី

$$y'+\frac{4}{x}y=x^3y^2 \qquad \text{មាន } n=2 \quad , \qquad q(x)=x^2 \quad , \qquad p(x)=\frac{4}{x}$$

យើងទទួលបាន

$$w'+p(x)(1-n)w=(1-n)q(x)$$

$$w'-\frac{4}{x}w=-x^3$$

អនុគមន៍ចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $y^{-1}=x^4(c-\ln x) \quad , \quad c\in\mathbb{R}$

ដោយលក្ខខណ្ឌដើម $y(1)=-1$ គេបាន

$$-1=1(c-\ln 1)\ \Rightarrow c=-1$$

អនុគមន៍ចម្លើយពិសេសនៃសមីការគឺ $y^{-1}=-x^4(1+\ln x)$

ឧទាហរណ៍៣ ៖ ដោះស្រាយសមីការញែកអថេរខាងក្រោមតាមលក្ខខណ្ឌដើម៖

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y\cos x}{1+2y^2} \quad ; \quad y(0)=1$$

យើងបាន

$$(1+2y^2)dy=y\cos x dx$$

$$\left(\frac{1}{y}+2y\right)dy=\cos x dx$$

$$\Rightarrow\int\left(\frac{1}{y}+2y\right)dy=\int\cos x dx$$

$$\ln|y|+y^2=\sin x+c$$

ដោយ $y(0)=1$

យើងបាន

$$\ln|1|+(1)^2=\sin(0)+c$$

$$\Rightarrow c=1$$

$$\Leftrightarrow |y|+y^2=\sin x+1$$

ចម្លើយសមីការគឺជាគ្រួសារខ្សែកោង $\ln|y|+y^2=\sin x+c$

២.៥. សមីការប្រាកដ

សម្រាប់សមីការលំដាប់ទីមួយ មានវិធីសាស្ត្ររួមបញ្ចូលមួយចំនួនដែលអាចអនុវត្តបានចំពោះលំហាត់ថ្នាក់ផ្សេងៗ។អ្វីដែលសំខាន់បំផុតនោះគឺ សមីការលីនេអ៊ែរ ដែលយើងបានពិភាក្សាពីមុនមក។ នៅទីនេះយើងនិងគណនាថ្នាក់។

សមីការដែលគេស្គាល់ថាជាសមីការប្រាកដដែលមានវិធីសាស្ត្រគណនាយ៉ាងល្អនៃដំណោះស្រាយ។ ទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ សមីការលំដាប់មួយទាំងនោះដែលអាចដោះស្រាយតាមវិធីសាស្ត្រនៃការគណនាបឋមគឺពិសេសជាង។ សមីការលំដាប់ទីមួយភាគច្រើនមិនអាចដោះស្រាយតាមវិធីនេះបានទេ។

ឧទាហរណ៍១ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $2x+y^2+2xyy'=0$ (1)

សមីការមិនមែនជាសមីការលីនេអ៊ែ ឬសមីការមិនអាចបំបែកបាន ដូច្នេះវិធីសាស្ត្រទាំងនេះមិនអាចគណនាបានទេ។ តែគេសង្កេតឃើញថាមានអនុគមន៍ $\psi(x,y)=x^2+xy^2$ មានលក្ខណៈដូចខាងក្រោម៖ $\frac{\partial \psi}{\partial x}=2x+y^2$, $\frac{\partial \psi}{\partial y}=2xy$ (2)

ដូច្នេះ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលយើងអាចសរសេរជា $\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$ (3)

ដោយ y ជាអនុគមន៍នៃ x ហើយយើងអាចសរសេរសមីការតាមទម្រង់សមមូល

$$\frac{d\psi}{dx}=\frac{d}{dx}\left(x^2+xy^2\right)=0 \qquad (4)$$

ដូច្នេះ $$\psi(x,y)=x^2+xy^2=c \qquad (5)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ ហើយជាសមីការខាងលើជាចម្លើយនៃសមីការ(1)។

នៅក្នុងការដោះស្រាយសមីការ (1) មានជំហានសំខាន់គឺរកអនុគមន៍ $\psi(x,y)$ មានទំនាក់ទំនងជាមួយ(2)ជាទូទៅសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលត្រូវបានសរសេរ

$$M(x,y)+N(x,y)y' \qquad (6)$$

ឧបមាថា $\psi(x,y)$ មានលក្ខណៈដូចខាងក្រោម៖

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}=M(x,y),\quad \frac{\partial \psi}{\partial y}=N(x,y) \qquad (7)$$

ដូចនេះ $\psi(x,y)=c$ គឺជាអនុគមន៍អ៊ីមព្លីស៊ីត ជាចម្លើយសមីការ

$$M(x,y)+N(x,y)y'=\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial y}\bullet\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\psi(x,y)\right]=0$$

ហើយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល(6)ក្លាយទៅជា $\frac{d}{dx}\left[\psi(x,y)\right]=0\Rightarrow\psi(x,y)=\int dx=c$ (8)

ក្នុងករណីនេះសមីការ (6) ត្រូវបានគេហៅថាជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលប្រាកដ។ ចម្លើយសមីការ (6) ត្រូវបានផ្តល់ឱ្យក្នុងទម្រង់ $\psi(x,y)=c$, $c\in R$ (9)

ក្នុងឧទាហរណ៍១ ខ្ញុំគិតថាវាមានភាពងាយស្រួលក្នុងការមើលថាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលជាសមីការប្រាកដហើយងាយស្រួលនៅក្នុងការដោះស្រាយតាមរយៈ ψ សម្រាប់សមីការស្មុគស្មាញជាងនេះវាមិនអាចដោះស្រាយបានស្រួលនោះទេ។ វិធីជាទូទៅក្នុងការកំណត់ថាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលបានផ្តល់ឱ្យជាសមីការប្រាកដត្រូវបានកំណត់តាមទ្រឹស្តីបទខាងក្រោម។

ទ្រឹស្តីបទ១.៥.១ ៖គេតាងអនុគមន៍ M, N, M_y, N_x មានដេរីវេទីមួយដោយផ្នែក ហើយជាប់នៅក្នុងដែនចតុកោណកែង $R: \alpha \prec x \prec \beta, \gamma \prec y \prec \delta$ នោះសមីការ (6) មានទម្រង់៖

$$M(x,y)+N(x,y)y' = 0$$

សមីការខាងលើគឺជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលប្រាកដនៅក្នុង R ប្រសិនបើ

$$M_y(x,y)=N_x(x,y) \qquad (10)$$

នៅចំណុចនីមួយនៃ R នោះគឺមានអនុគមន៍ ψ បំពេញសមីការ (7)

$$\psi_x(x,y)=M(x,y), \quad \psi_y(x,y)=N(x,y)$$

ប្រសិនបើ M និង N បំពេញសមីការ (10) ។

ទ្រឹស្តីនេះត្រូវបានបង្ហាញជា២ផ្នែក ដំបូងយើងនឹងបង្ហាញថាប្រសិនបើអនុគមន៍ ψ បំពេញសមីការ (7) នោះវាធ្វើតាមសមីការ (10) គណនា M និង N ពីសមីការ (10) បន្ទាប់ (6) ក្លាយជាសមីការប្រាកដ។ ការបង្ហាញពីភាពពាក់ព័ន្ធនៃអនុគមន៍ ψ ត្រូវគ្នាជាមួយសមីការ (7)

$$\psi_x(x,y)=M(x,y), \quad \psi_y(x,y)=N(x,y)$$

អាំងតេក្រាលដំបូងនៃសមីការ (7) ទាក់ទងទៅនឹង x និង y ថេរ យើងរកឃើញ

$$\psi(x,y)=\int M(x,y)dx+h(y) \qquad (12)$$

អនុមន៍ h គឺអាស្រ័យទៅលើអនុគមន៍ y ដែលវាមានភាពប្រែប្រួល។ ឥឡូវយើងនឹងបង្ហាញថាវាតែងតែងតែជ្រើសរើសបានជានិច្ចចំពោះ $h(y)$ ដូច្នេះ $\psi_y = N$ មកពីសមីការ (12)

$$\psi_y = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx+h'(y)$$

$$=\int M_y(x,y)dx+h'(y)$$

កំណត់ $\psi_y = N$ និងដោះស្រាយ $h'(y)$ យើងបាន

$$h'(y)=N(x,y)-\int M_y(x,y)dx \qquad (13)$$

ដើម្បីកំណត $h(y)$ ពីសមីការ (13) វាចាំបាច់ណាស់ទោះបីវាមានរាងដោយផ្នែកក៏ដោយក៏វានៅតែជាអនុគមន៍នៃ y គ្រប់ពេល។ ដើម្បីដោះស្រាយយើងអាចបែងចែកបរិមាណនៅក្នុងសំណួរទាក់ទងនឹង x ដោយទទួលបាន

$$N(x,y)-M(x,y)$$

ដែលជាលេខសូន្យនៅក្នុងសមីការ (10) ដូច្នេះទោះបីជាទម្រង់ជាក់ស្តែងរបស់វាក៏ដោយក៏ផ្នែកខាងស្តាំនៃសមីការ (13) មិនអាស្រ័យលើ x ហើយក៏បូកបញ្ចូលគ្នាតែមួយបន្ទាប់មកបាន $h(y)$ ។ ការជំនួស $h(y)$ នៅក្នុងសមីការ (12) យើងទទួលបានដំណោះស្រាយនៃសមីការ (7) គឺ

$$\psi(x,y)=\int M(x,y)dx+\int\left[N(x,y)-\int M_y(x,y)dx\right]dy \qquad (14)$$

ឧទាហរណ៍២៖ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $\left(y\cos x+2xe^{y}\right)+\left(\sin x+x^{2}e^{y}-1\right)y'=0 \quad (15)$

ចម្លើយ

យើងដឹងថា $M\left(x,y\right)=y\cos x+2xe^{y}$, $N\left(x,y\right)=\sin x+x^{2}e^{y}-1$

នោះ $M_{y}\left(x,y\right)=\dfrac{dM}{dy}=\cos x+2xe^{y}=N_{x}\left(x,y\right)=\dfrac{dN}{dx}$

ដូច្នេះសមីការដែលផ្ដល់គឺជាសមីការប្រាកដ ដូច្នេះមាន $\psi\left(x,y\right)$

$$\psi_{x}\left(x,y\right)=\frac{d\psi}{dx}=y\cos x+2xe^{y}=M\left(x,y\right) \qquad (*)$$

$$\psi_{y}\left(x,y\right)=\frac{d\psi}{dy}=\sin x+x^{2}e^{y}-1=N\left(x,y\right) \qquad (**)$$

គណនាអាំងតេក្រាល $(*)$ យើងបាន

$$\psi\left(x,y\right)=\int\left(y\cos x+2xe^{y}\right)dx=y\sin x+x^{2}e^{y}+h\left(y\right) \qquad (16)$$

យកសមីការ (16) មកដេរីវេធៀបអថេរ y គេបាន៖

$$\psi_{y}=\left(x,y\right)=\sin x+x^{2}e^{y}+h'\left(y\right)=N\left(x,y\right)$$

$$\sin x+x^{2}e^{y}+h'\left(y\right)=\sin x+x^{2}e^{y}-1$$

$$h'\left(y\right)=-1 \qquad \Rightarrow h\left(y\right)=-y$$

ដូច្នេះ ជំនួស $h\left(y\right)=-y$ នៅក្នុងសមីការ (16)

$$\psi=\left(x,y\right)=\sin x+x^{2}e^{y}-y$$

ដូច្នេះ អនុគមន៍ចម្លើយរបស់សមីការ (15) គឺ $y\sin x+x^{2}e^{y}-y=c \qquad (17)$

ប្រតិបត្តិ

1. $2xy-9x^{2}+\left(2y+x^{2}+1\right)\dfrac{dy}{dx}=0$ $\qquad \left(y^{2}+\left(x^{2}+1\right)y-3x^{3}=c\right)$
2. $2xy^{2}+4=2\left(3-x^{2}y\right)y'$ $\quad y\left(-1\right)=8$ $\qquad \left(x^{2}y^{2}-6y+4x-12=0\right)$
3. $3y^{3}e^{3xy}-1+\left(2ye^{3xy}+3xy^{2}e^{3xy}\right)y'=0$ $\quad y\left(0\right)=1$ $\qquad \left(y^{2}e^{3xy}-x-1=0\right)$

✵ចំណាំ

ចំពោះសមីការប្រាកដ យើងគណនាបានយ៉ាងរហ័សតាមវិធីខាងក្រោម៖

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

$$\int M(x,y)dx+\int N(x,y)dy=c$$

ដែល $N(x,y)$ ធ្វើតែតួណាមិនជាប់អញ្ញាត x និងប្រាសមកវិញ។

ឧទាហរណ៍៣ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $\left(x+y-10\right)dx+\left(x-y-2\right)dy=0$

$$\int\left(x+y-10\right)dx+\int\left(-y-2\right)dy=\int 0$$

$$\frac{x^{2}}{2}+yx-10x-\frac{y^{2}}{2}-2y=c$$

ឧទាហរណ៍៤៖ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $\left(y^2-x^2\right)dx+2xydy=0$

$$\int\left(-x^2\right)dx+\int 2xydy=\int 0$$

$$-\frac{x^3}{3}+xy^2=c$$

២.៦ សមីការមិនប្រាកដ និងកត្តាអាំងតេក្រាល

២.៦.១ វិធីកត្តាអាំងតេក្រាល

ឧទាហរណ៍១ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $\left(3xy+y^2\right)+\left(x^2+xy\right)y'=0$

$$M_y\left(x,y\right)=3x+2y,\quad N_x\left(x,y\right)=2x+y$$

ដោយ $M_y\neq N_x$ សមីការដែលផ្តល់ឱ្យមិនមែនជាសមីការប្រាកដ។

ពេលខ្លះយើងត្រូវការបំលែងសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមិនប្រាកដទៅជាសមីការប្រាកដ ដោយគុណសមីការនឹងកត្តាអាំងតេក្រាល។ សូមចាំថានេះជានីតិវិធីដែលបានប្រើក្នុងការដោះស្រាយសមីការលីនេអ៊ែនៅក្នុងផ្នែក1.1។ ដើម្បីអង្កេតពីលទ្ធផលនៃការអនុវត្តឱ្យទូលំទូលាយយើងនឹងគុណសមីការនឹងកត្តាអាំងតេក្រាល៖

$$M\left(x,y\right)dx+N\left(x,y\right)dy=0 \qquad (1)$$

ជ្រើសរើសអនុគមន៍ μ មួយដូច្នេះលទ្ធផលនៃសមីការ

$$\mu\left(x,y\right)M\left(x,y\right)dx+\mu\left(x,y\right)N\left(x,y\right)dy=0 \qquad (2)$$

ដោយទ្រឹស្តី 1.5.1 គឺជាសមីការប្រាកដប្រសិនបើ

$$\left(\mu M\right)_y=\left(\mu N\right)_x \qquad (3)$$

M និង N ជាអនុគមន៍ដែលបានផ្តល់ឱ្យដោយសមីការ (3) ដែលហៅថាកត្តាអាំងតេក្រាល បំពេញសមីការដេរីវេដោយផ្នែកលំដាប់ទីមួយ

$$\left(\mu M\right)_y=\left(\mu N\right)_x$$

$$\mu_y M+\mu M_y=\mu_x N+\mu N_x$$

$$M\mu_y-N\mu_x+\left(M_y-N_x\right)\mu=0 \qquad (4)$$

ករណីទី១

បើសិនកត្តាអាំងតេក្រាល $\mu(x,y)$ មានតែអថេរមិនអាស្រ័យ x នោះកន្សោម $M\mu_y=0$ សមីការ (4) ក្លាយ

$$-N\mu_x+\left(M_y-N_x\right)\mu=0$$

$$\frac{d\mu}{dx}=\frac{\left(M_y-N_x\right)}{N}\mu$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\left(M_y-N_x\right)}{N}dx$$

$$\mu\left(x\right)=e^{\int\frac{\left(M_y-N_x\right)}{N}dx} \qquad (5)$$

ករណីទី២

បើសិនកត្តាអាំងតេក្រាល $\mu(x,y)$ មានតែអថេរមិនអាស្រ័យ y នោះកន្សោម $M\mu_x=0$ សមីការ (4) ក្លាយ

$$M\mu_y+\left(M_y-N_x\right)\mu=0$$

$$\frac{d\mu}{dy}=-\frac{\left(M_y-N_x\right)}{M}\mu$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\left(N_x-M_y\right)}{M}dy$$

$$\mu(y)=e^{\int\frac{\left(N_x-M_y\right)}{M}dy} \qquad (6)$$

ឧទាហរណ៍១៖ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $\left(3xy+y^2\right)+\left(x^2+xy\right)y'=0$

ចម្លើយ

$M_y(x,y)=3x+2y, \quad N_x(x,y)=2x+y$

ដោយ $M_y\neq N_x$ សមីការដែលផ្ដល់ឱ្យមិនមែនជាសមីការប្រាកដ។

កត្តាអាំងតេក្រាល $\mu(x)=e^{\int\frac{M_Y-N_X}{N}dx}=e^{\int\frac{x+y}{x^2+xy}dx}=e^{\int\frac{1}{x}dx}=x$ យកគុណសមីការដើម

$\left(3x^2y+xy^2\right)+\left(x^3+x^2y\right)y'=0$

យើងដឹងថា $\quad M(x,y)=3x^2y+xy^2\ , \qquad N(x,y)=x^3+x^2y$

នោះ $\quad M_y(x,y)=\frac{dM}{dy}=3x^2+2xy=N_x(x,y)=\frac{dN}{dx}$

ដូច្នេះសមីការដែលផ្ដល់គឺជាសមីការប្រាកដ ដូច្នេះមាន $\psi(x,y)$

$$\psi_x(x,y)=\frac{d\psi}{dx}=3x^2y+xy^2=M(x,y) \qquad (*)$$

$$\psi_y(x,y)=\frac{d\psi}{dy}=x^3+x^2y=N(x,y) \qquad (**)$$

គណនាអាំងតេក្រាល $(**)$ យើងបាន $\psi(x,y)=\int\left(x^3+x^2y\right)dy=x^3y+\frac{1}{2}x^2y^2+h(x) \qquad (1)$

យកសមីការ (1) មកដេរីវេធៀបអថេរ x គេបាន៖

$$\frac{d\psi}{dx}=3x^2y+xy^2+h'(x)\Leftrightarrow M=3x^2y+xy^2+h'(x)\Leftrightarrow h'(x)=0\Rightarrow h(x)=c_1$$

ដូច្នេះ ជំនួស $h(x)=c_1$ នៅក្នុងសមីការ (1)

$$x^3y+\frac{1}{2}x^2y^2=c$$

ដូច្នេះ អនុគមន៍ចម្លើយរបស់សមីការ គឺ $x^3y+\frac{1}{2}x^2y^2=c$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $\left(x+y^2\right)dx-2xydy=0$

ចម្លើយ

$M_y(x,y)=2y, \quad N_x(x,y)=-2y$

ដោយ $M_y \neq N_x$ សមីការដែលផ្តល់ឱ្យមិនមែនជាសមីការប្រាកដ។

កត្តាអាំងតេក្រាល $\mu(x)=e^{\int\frac{M_Y-N_X}{N}dx}=e^{\int\frac{4y}{-2xy}dx}=e^{\int\frac{-2}{x}dx}=\frac{1}{x^2}$ យកគុណសមីការដើម

$$\left(\frac{1}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)dx-\frac{2y}{x}dy=0$$

យើងដឹងថា $M(x,y)=\frac{1}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2 \quad , \qquad N(x,y)=-\frac{2y}{x}$

នោះ $M_y(x,y)=\frac{dM}{dy}=\frac{2y}{x^2}=N_x(x,y)=\frac{dN}{dx}$

ដូច្នេះសមីការដែលផ្តល់គឺជាសមីការប្រាកដ ដូច្នេះមាន $\psi(x,y)$

$$\psi_x(x,y)=\frac{d\psi}{dx}=\frac{1}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2=M(x,y) \qquad (*)$$

$$\psi_y(x,y)=\frac{d\psi}{dy}=-\frac{2y}{x}=N(x,y) \qquad (**)$$

គណនាអាំងតេក្រាល $(**)$ យើងបាន $\psi(x,y)=\int\frac{-2y}{x}dy=-\frac{y^2}{x}+h(x) \qquad (1)$

យកសមីការ (1) មកដេរីវេធៀបអថេរ x គេបាន៖

$$\frac{d\psi}{dx}=\frac{y^2}{x^2}+h'(x) \Leftrightarrow M=\frac{y^2}{x^2}+h'(x) \Leftrightarrow h'(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow h(x)=\ln|x|$$

ដូច្នេះ ជំនួស $h(x)=\ln|x|$ នៅក្នុងសមីការ (1)

$$-\frac{y^2}{x}+\ln|x|=c$$

ដូច្នេះ អនុគមន៍ចម្លើយរបស់សមីការ គឺ $-\frac{y^2}{x}+\ln|x|=c$

ប្រតិបត្តិ

1/ $\left(4xy+3y^2-x\right)dx+x(x+y)dy=0 \qquad \left(x^3\left(4xy+4y^2-x\right)=c\right)$

2/ $y(x+y+1)dx+x(x+3y+2)dy=0 \qquad \left(xy^2(x+2y+2)=c\right)$

លំហាត់

តើលំហាត់ណាខ្លះ ជាសមីការប្រាកដ ?រួចដោះស្រាយសមីការប្រាកដនោះ។

1. $(2x+3)+(2y-2)y'=0$
2. $(2x+4y)+(2x-2y)y'=0$
3. $\left(3x^2-2xy+2\right)dx+\left(6x^2-x^2+3\right)dy=0$
4. $\left(2xy^2+2y\right)+\left(2x^2y+2x\right)y'=0$
5. $\frac{dy}{dx}=-\frac{ax+by}{bx+cy}$

6. $\frac{dy}{dx}=-\frac{ax-by}{bx-cy}$

7. $\left(e^x\sin y-2y\sin x\right)dx+\left(e^x\cos y-2\sin x\right)dy=0$

8. $\left(e^x\sin y+3y\right)dx-\left(3x-e^x\sin y\right)dy=0$

9. $\left(ye^{xy}\cos 2x-2e^{xy}\sin 2x+2x\right)dx+\left(xe^{xy}\cos 2x-3\right)dy=0$

10. $\left(\frac{y}{x}+6x\right)dx+\left(\ln x-2\right)dy=0,\ \ x\succ 0$

11. $\left(x\ln y+xy\right)dx+\left(y\ln x+xy\right)dy=0,\ \ x,y\succ 0$

12. $\frac{xdx}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{ydy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}=0$

នៅក្នុងលំហាត់នីមួយៗ 13 និង 14 ដោះស្រាយរកចម្លើយប្រាកដតាមបញ្ចូតម្លៃដើម

13. $\left(2x-y\right)dx+\left(2y-x\right)dy=0,\quad y\left(1\right)=3$

14. $\left(9x^2+y-1\right)dx-\left(4y-x\right)dy=0,\quad y\left(1\right)=0$

នៅក្នុងលំហាត់ទី 15 និង 16 ស្វែងរកតម្លៃ b ដែលសមីការដែលផ្តល់ឱ្យគឺជាសមីការប្រាកដ បន្ទាប់មកដោះស្រាយសមីការដោយប្រើតម្លៃ b

15. $\left(xy^2+bx^2y\right)dx+\left(x+y\right)x^2dy=0$

16. $\left(ye^{2xy}+x\right)dx+bxe^{2xy}dy=0$

17. ពិចារណាទៅលើសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលប្រាកដ $M\left(x,y\right)dx+N\left(x,y\right)dy=0$ ។
រករូបមន្តទម្រង់អ៊ីមព្លីស៊ីត $\psi\left(x,y\right)=c$ សម្រាប់ដំណោះស្រាយរកចម្លើយសមីការ (14) ។ ប៉ុន្តែអាំងតេក្រាលនៃ $\psi_y=N$ បន្ទាប់មក $\psi_x=M$ ដូចនៅក្នុងអត្ថបទ។

18. បង្ហាញថាជាសមីការអាចបំបែកបាន $M\left(x\right)+N\left(y\right)y'=0$ ជាសមីការប្រាកដ។

បង្ហាញថាសមីការទី 19 ដល់ទី 22 គឺជាសមីកាមិនប្រាកដ ហើយក្លាយជាសមីការប្រាកដពេលគុណនឹងកត្តាអាំងតេក្រាល បន្ទាប់មកដោះស្រាយសមីការ។

19. $x^2y^3+x\left(1+y^2\right)y'=0,\quad \mu\left(x,y\right)=\frac{1}{xy^3}$

20. $\left(\frac{\sin y}{y}-2e^{-x}\sin x\right)dx+\left(\frac{\cos y+2e^{-x}\cos x}{y}\right)dy=0,\quad \mu\left(x,y\right)=ye^x$

21. $ydx+\left(2x-ye^x\right)dy=0,\quad \mu\left(x,y\right)=y$

22. $\left(x+2\right)\sin ydx+x\cos ydy=0,\quad \mu\left(x,y\right)=xe^x$

23. បង្ហាញថាប្រសិនបើ $\frac{N_x-M_y}{M}=Q$ នោះ Q គឺជាអនុគមន៍មួយតែប៉ុណ្ណោះនៃ y ហើយវាជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $M+Ny'=0$ ។

ហើយទម្រង់នៃកត្តាអាំងតេក្រាលគឺ 23. $\mu\left(y\right)=\exp\int Q\left(y\right)dy=e^{\int Q(y)dy}$ ។

24. បង្ហាញថាប្រសិនបើ $\frac{N_x - M_y}{xM - yN} = R$ ដែល R អាស្រ័យលើ x និង y តែប៉ុណ្ណោះ។ ហើយបន្ទាប់មកវាជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $M + Ny' = 0$ ។

ហើយ $\mu(x,y)$ ជាទម្រង់នៃកត្តាអាំងតេក្រាល។ ស្វែងរកទម្រង់ទូទៅនៃកត្តាអាំងតេក្រាលនេះ។

នៅក្នុងលំហាត់ទី 25 ដល់ 31 រកកត្តាអាំងតេក្រាលដើម្បីដោះស្រាយសមីការដែលបានផ្តល់ឱ្យ។

25. $\left(3x^2y + 2xy + y^3\right)dx + \left(x^2 + y^2\right)dy = 0$

26. $y' = e^{2x} + y - 1$

27. $dx + \left(\frac{x}{y} - \sin y\right)dy = 0$

28. $ydx + \left(2xy + 2y\csc y\right)dy = 0$

29. $e^x dx + \left(e^x \cot y + 2y\csc y\right)dy = 0$

30. $\left[4\left(\frac{x^3}{y^2}\right) + \left(\frac{3}{7}\right)\right]dx + \left[3\left(\frac{x}{y^2}\right) + 4y\right]dy = 0$

31. $\left(3x + \frac{6}{y}\right) + \left(\frac{x^2}{y} + 3\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = 0$

32. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $\left(3xy + y^2\right) + \left(x^2 + xy\right)y' = 0$ ប្រើកត្តាអាំងតេក្រាល $\mu(x,y) = \left[xy(2x+y)\right]^{-1}$ ។ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាដំណោះស្រាយគឺដូចគ្នាទៅនឹងអ្វីដែលទទួលបាននៅក្នុងឧទាហរណ៍ទី4 ជាមួយនឹងកត្តាអាំងតេក្រាលផ្សេងគ្នា។

២.៧. សមីការអូម៉ូហ្សែន

២.៧.១. អនុគមន៍អូម៉ូហ្សែន

និយមន័យ៖ បើអនុគមន៍ $f(x,y)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$, n ជាចំនួនពិត នោះ $f(x,y)$ ហៅថាអនុគមន៍អូម៉ូហ្សែនដឺក្រេទី n ។

ឧទាហរណ៍១៖ តើអនុគមន៍ខាងក្រោម ជាអនុគមន៍អូម៉ូហ្សែនឬទេ ?

1. $f(x,y) = x - 3\sqrt{xy} + 5y$

$\Rightarrow f(tx,ty) = tx - 3\sqrt{txty} + 5ty = t\left(x - 3\sqrt{xy} + 5y\right) = tf(x,y)$

ជាអនុគមន៍អូម៉ូហ្សែនដឺក្រេទី1។

2. $f(x,y) = \sqrt{x^3 + y^3}$

$\Rightarrow f(tx,ty) = \sqrt{(tx)^3 + (ty)^3} = t^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x^3 + y^3}\right) = t^{\frac{3}{2}} f(x,y)$

ជាអនុគមន៍អូម៉ូហ្សែនដឺក្រេទី $\frac{3}{2}$ ។

3. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

$\Rightarrow f(tx,ty) = (tx)^2 + (ty)^2 - 1 \neq t^2 f(x,y)$

មិនមែនជាអនុគមន៍អូម៉ូហ្សែនទេ។

ប្រតិបត្តិ

តើអនុគមន៍ខាងក្រោម ជាអនុគមន៍អូម៉ូហ្សែនឬទេ ?

1. $f(x,y)=6xy^3-x^2y^2$

2. $f(x,y)=x^2-y$

២.៧.២. សមីការអូម៉ូហ្សែន

បើសមីការ $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ មានលក្ខណៈខាងក្រោម៖

$M(tx,ty)=t^nM(x,y)$ និង $N(tx,ty)=t^nM(x,y)$ គេហៅថា មេគុណអូម៉ូហ្សែន ឬ ជាសមីការអូម៉ូហ្សែន។

២.៧.៣. វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយ

បើសមីការ $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ មានលក្ខណៈ:

$M(x,y)$ និង $N(x,y)$ អនុគមន៍អូម៉ូហ្សែនដឺក្រេដូចគ្នា នោះសមីការ $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ ជាសមីការអូម៉ូហ្សែនយើងអាចបម្លែងវាទៅជាសមីការញែកអថេរបាន ដោយជំនួស $y=ux$ ឬ $x=vy$ ដែល u និង v ជាអថេរអាស្រ័យថ្មី។ គេបាន

$y=ux \Rightarrow dy=udx+xdu$ យកទៅជំនួសសមីការដើម

$$M(x,ux)dx+N(x,ux)(udx+xdu)=0$$

$$x^nM(1,u)dx+x^nN(1,u)(udx+xdu)=0$$

$$M(1,u)dx+uN(1,u)dx+N(1,u)xdu=0$$

$$[M(1,u)+uN(1,u)]dx+N(1,u)xdu=0$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{N(1,u)}{[M(1,u)+uN(1,u)]}du=0$$

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{N(1,u)}{[M(1,u)+uN(1,u)]}du=\int 0dx$$

ឧទាហរណ៍១៖ ដោះសមីការអូម៉ូហ្សែន $(x^2+y^2)dx+(x^2-xy)dy=0$។

ចម្លើយ

ដោះសមីការអូម៉ូហ្សែន $(x^2+y^2)dx+(x^2-xy)dy=0$

$M(x,y)$ និង $N(x,y)$ អនុគមន៍អូម៉ូហ្សែនដឺក្រេ 2 ដូចគ្នា

តាង $y=ux\Rightarrow u=\dfrac{y}{x}\Rightarrow dy=udx+xdu$ យកទៅជំនួសសមីការដើម

$$\left(x^2+(ux)^2\right)dx+\left(x^2-x^2u\right)(udx+xdu)=0$$

$$\left(1+u^2\right)dx+u(1-u)dx+x(1-u)du=0$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{1-u}{1+u}du=0 \qquad \Rightarrow \int\frac{dx}{x}+\int\frac{1-u}{1+u}du=\ln c$$

$$\ln|x|+\int\frac{-(u+1)+2}{u+1}=\ln c$$

$$\ln|x|-u+2\ln|u+1|=\ln c \Rightarrow \ln|x|-\frac{y}{x}+2\ln\left|\frac{y}{x}+1\right|=\ln c$$

$$c(x+y)^2=xe^{\frac{y}{x}} \qquad c\in R$$

ដូចនេះ ចម្លើយសមីការគឺ $c(x+y)^2=xe^{\frac{y}{x}}$ $\qquad c\in R$

ឧទាហរណ៍២៖ ដោះសមីការអូម៉ូហ្សែន $\left(2\sqrt{xy}-y\right)dx+xdy=0$ ។

ចម្លើយ

ដោះសមីការអូម៉ូហ្សែន $\left(2\sqrt{xy}-y\right)dx+xdy=0$

$M(x,y)$ និង $N(x,y)$ អនុគមន៍អូម៉ូហ្សែនដឺក្រេ 1 ដូចគ្នា

តាង $\qquad y=ux\Rightarrow u=\frac{y}{x}\Rightarrow dy=udx+xdu \qquad$ យកទៅជំនួសសមីការដើម

$$\left(2\sqrt{x^2u}-ux\right)dx-x\left(udx+xdu\right)=0$$

$$\left(2\sqrt{u}-u\right)dx-udx-xdu=0$$

$$\left(2\sqrt{u}-2u\right)dx-xdu=0$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{du}{2u+2\sqrt{u}}=0$$

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{du}{2u+2\sqrt{u}}=c$$

$$\sqrt{xy}-x=c$$

ឧទាហរណ៍៣៖ ដោះស្រាយសមីការអូម៉ូហ្សែន $\quad 2x^3ydx+\left(x^4+y^4\right)dy=0$ ។

ចម្លើយ

ដោះសមីការអូម៉ូហ្សែន $2x^3ydx+\left(x^4+y^4\right)dy=0$

$M(x,y)$ និង $N(x,y)$ អនុគមន៍អូម៉ូហ្សែនដឺក្រេ 4 ដូចគ្នា

តាង $x=vy\Rightarrow v=\frac{x}{y}\Rightarrow dx=vdy+ydv$ យកទៅជំនួសសមីការដើម

$$2v^3y^4\left(vdy+ydv\right)+\left(v^4y^4+y^4\right)dy=0$$

$$2v^3ydv+(3v^4+1)dy=0$$

$$\Rightarrow\frac{2v^3dv}{3v^4+2}+\frac{dy}{y}=0$$

$$\Rightarrow\int\frac{2v^3dv}{3v^4+2}+\int\frac{dy}{y}=c \qquad \Leftrightarrow 6\ln\left|3v^4+2\right|+\ln|y|=\ln c_1$$

$\Leftrightarrow 3x^4y^2+y^6=c$ ជាអនុគមន៍ចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ។

២.៨. ការជំនួស

ក្នុងការជនួស ជំហានដំបូងយើងត្រូវពិនិត្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទីមួយមានទម្រង់៖

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

តាង $u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = ux$ ហើយអនុគមន៍ u និង y មានអថេរអាស្រ័យ x ។ ធ្វើដេរីវេអនុគមន៍អ៊ីមព្លីស៊ីត $y' = u + xu'$ ជំនួសសមីការខាងលើគេបាន៖

$u + xu' = F(u) \Leftrightarrow F(u) - u = xu' \quad \Leftrightarrow F(u) - u = x\frac{du}{dx}$

$\frac{du}{F(u) - u} = \frac{dx}{x}$

យើងគណនាគណនាបានព្រោះវាក្លាយជាសមីការ ញែកអថេរបាន។

ឧទាហរណ៍១៖ ដោះស្រាយសមីការ $x\frac{dy}{dx} = y + xe^{\frac{y}{x}}$, $\quad y(1) = 1$ ។

ចម្លើយ

$x\frac{dy}{dx} = y + xe^{\frac{y}{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$ តាង $u = \frac{y}{x} \quad \Leftrightarrow y = ux \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$ យើងបាន

$u + x\frac{du}{dx} = u + e^{u} \quad \Leftrightarrow \frac{du}{e^{u}} = \frac{dx}{x} \quad \Leftrightarrow -e^{-u} = \ln|x| + c \quad \Leftrightarrow -e^{-\frac{y}{x}} - \ln|x| = c$

តាមលក្ខខណ្ឌដើម $-e^{-\frac{1}{1}} = c \Rightarrow c = \frac{1}{e}$

ដូចនេះ អនុគមន៍ចម្លើយប្រាកដមួយរបស់សមីការគឺ $-e^{-\frac{y}{x}} = \ln|x| + \frac{1}{e}$

ឧទាហរណ៍២៖ ដោះស្រាយសមីការ $xy' = y(\ln x - \ln y), \quad y(1) = 4, \quad x > 0$ ។

ចម្លើយ

$xy' = y(\ln x - \ln y)$

$y' = \frac{y}{x}\ln\left(\frac{x}{y}\right)$

$y' = -\frac{y}{x}\ln\left(\frac{y}{x}\right)$

តាង $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux \Rightarrow dy = u + x\frac{du}{dx}$ យកជំនួសសមីការ គេបាន

$u + x\frac{du}{dx} = -u\ln u \Rightarrow x\frac{du}{dx} = -u - u\ln u \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{du}{-u(1+\ln u)} \Rightarrow \int\frac{dx}{x} = \int\frac{du}{-u(1+\ln u)}$

$\int\frac{dx}{x} = \int\frac{du}{u\left(\ln(\frac{1}{u}) - 1\right)}$ តាង $v = \ln\left(\frac{1}{u}\right) - 1$ យើងបាន

$$\ln x + c = -\ln\left(\ln\left(\frac{1}{u}\right) - 1\right) \Rightarrow c - \ln x = \ln\left(\ln\left(\frac{1}{u}\right) - 1\right)$$

$$\ln\left(\frac{1}{u}\right) - 1 = e^{c - \ln x} \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{u}\right) - 1 = \frac{e^{c}}{e^{\ln x}}$$

$$\ln\left(\frac{1}{u}\right) - 1 = \frac{c}{x} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{c}{x} + 1$$

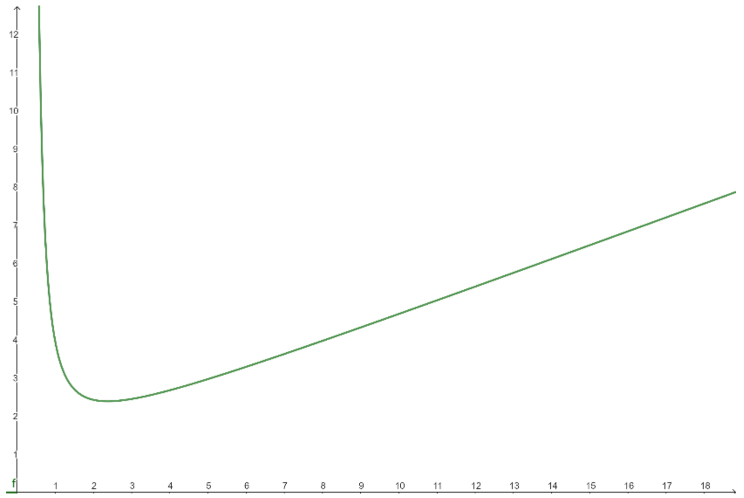
$$\frac{1}{u} = e^{\frac{c}{x} + 1} \Leftrightarrow u = e^{-\frac{c}{x} - 1}$$

តែតម្លៃ $u = \frac{y}{x}$ នោះទាញបាន

$$\frac{y}{x} = e^{-\frac{c}{x} - 1} \qquad \Leftrightarrow y = xe^{-\frac{c}{x} - 1} \quad c \in R$$

តាមលក្ខខ័ណ្ឌដើមយើងរកបាន $c = -(1 + \ln 4)$ នោះចម្លើយពិសេស

$$y = xe^{\frac{1 + \ln 4}{x} - 1}$$



២.៨. វិធីពីកាត(Picard′s Method)

ក្នុងការរកចម្លើយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែ $y' = f(x, y)$ (1)
មានលក្ខខណ្ឌដើម $y(x_0) = y_0$ ដោយធ្វើអាំងតេក្រាលអង្គសងខាងធៀបអថេរ x គេបាន៖

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt + c$$ លក្ខខណ្ឌដើម $y(x_0) = y_0$ យើហបាន៖

$$y(x_0) = c + \int_{x_0}^{x_0} f(t, y(t))\,dt \Leftrightarrow c = y(x_0) = y_0$$

ដូចនេះ $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$ (2)

យើងធ្វើការដោះស្រាយសមីការ (2) តាមវិធីប៉ាន់ស្មានបន្តបន្ទាប់។

ឧបមាថា $y_0(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ទូទៅណាមួយ ដែលតាងឲ្យចំនួនប៉ាន់ស្មានណាមួយនៃសមីការ(2)ហើយ $f(x, y(x_0))$ ជាអុគមន៍ដោយស្គាល់ អាស្រ័យជាមួយអថេរ x ហើយអនុគមន៍នេះត្រូវបានគណនាបានតាមអាំងតេក្រាល។ ជាមួយ $y(t)$ គេជំនួសដោយ $y_0(t)$អង្គខាងស្តាំនៃសមីការ (2)

$y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y_0(t))dt$ ដោយធ្វើបន្តបន្ទាប់ យើងបាន៖

$$y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y_1(t))dt$$

$$y_3(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y_2(t))dt$$

....

$$y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y_{n-1}(t))dt \qquad n=1,2,3,4,5.....................(3)$$

ទម្រង់ (3) ហៅថា វិធីពីកាតនៃអ៊ីតេរ៉ាស្យុង $(Picard's\ Method\ of\ Iteration)$

ឧទាហរណ៍១៖ដោះស្រាយសមីការ $y'=y-1 \qquad y(0)=2$

ចម្លើយ

យើងមាន $x_0=0 \qquad y_0=2 \qquad f(t,y_{n-1}(t))=y_{n-1}(t)-1$ នោះសមីការ (3) គឺ

$$y_n(t)=2+\int_0^x (y_{n-1}(t)-1)dt \qquad n=1,2,3....$$

ធ្វើការអាំងតេក្រាលបន្តបន្ទាប់

$$y_1(t)=2+\int_0^x (y_0(t)-1)dt \quad \Leftrightarrow y_1(t)=2+\int_0^x (2-1)dt=2+x$$

$$y_2(t)=2+\int_0^x (y_1(t)-1)dt \quad \Leftrightarrow y_2(t)=2+\int_0^x (2+t-1)dt=2+x+\frac{x^2}{2}$$

$$y_3(t)=2+\int_0^x (y_2(t)-1)dt \quad \Leftrightarrow y_3(t)=2+\int_0^x \left(2+t+\frac{t^2}{2}-1\right)dt=2+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2.3}$$

$$y_4(t)=2+\int_0^x (y_3(t)-1)dt \quad \Leftrightarrow y_3(t)=2+\int_0^x \left(2+t+\frac{t^2}{2}+\frac{x^3}{2.3}-1\right)dt=2+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4}$$

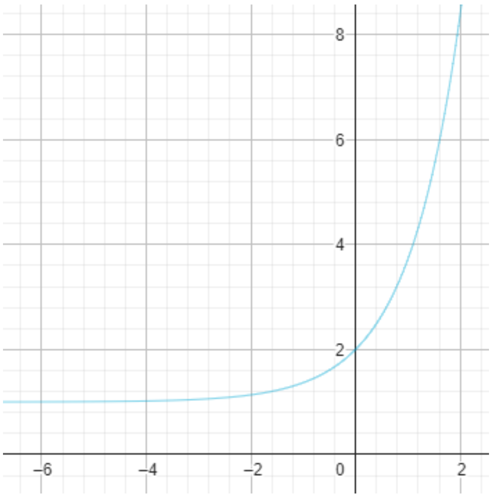
....

....

$$y_n(t)=2+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4}+....+\frac{x^n}{n!}=1+\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

បើ $n\to+\infty$ នោះយើងបាន $y(t)=1+e^x$ ពីព្រោះ $e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^n}{n!}$

ដូចនេះ ចម្លើយសមីការគឺ $y(t)=1+e^x$



លំហាត់

ក្នុងបញ្ហានីមួយៗ 1 ដល់ 32 បង្ហាញសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលផ្តល់ឱ្យ។ ប្រសិនបើមានលក្ខខណ្ឌដំបូង ចូររកដំណោះស្រាយដែលបំពេញឱ្យវា។

$\frac{dy}{dx}=\frac{x^3-2y}{x}$

2. $(x+y)dx-(x-y)dy=0$

$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{3+3y^2-x}, \quad y(0)=0$

4. $(x+e^y)dy-dx=0$

5. $\frac{dy}{dx}=-\frac{2xy+y^2+1}{x^2+2xy}$

6. $x\frac{dy}{dx}+xy=1-y, \quad y(1)=0$

7. $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{x^2y+y^3} \quad Hin:Let u=x^2$

8. $x\frac{dy}{dx}+2y=\frac{\sin x}{x}, \quad y(2)=1$

9. $\frac{dy}{dx}=-\frac{2xy+1}{x^2+2y}$

10. $(3y^2+2xy)dx-(2xy+x^2)dy=0$

11. $(x^2+y)dx+(x+e^y)dy=0$

12. $\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{1+e^x}$

13. $xdy-ydx=(xy)^{1/2}dx$

14. $(x+y)dx+(x+2y)dy=0, \quad y(2)=3$

15. $(e^x+1)\frac{dy}{dx}=y-ye^x$

16. $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{x^2}$

17. $\frac{dy}{dx}=e^{2x}+3y$

18. $(2y+3x)dx=-xdy$

19. $xdy-ydx=2x^2y^2dy, \quad y(1)=-2$

20. $y'=e^{x+y}$

21. $xy'=y+xe^{y/x}$

22. $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-1}{y^2+1}, \quad y(-1)=1$

23. $xy'+y-y^2e^{2x}=0$

24. $2\sin y\cos xdx+\cos y\sin xdy=0$

25. $\left(2\frac{x}{y}-\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx+\left(\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{x^2}{y^2}\right)dy=0$

26. $(2y+1)dx+\left(\frac{x^2-y}{x}\right)dy=0$

27. $(\cos 2y-\sin x)dx-2\tan x\sin 2ydy=0$

28. $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-2y-y^3}{2x+3xy^2}$

29. $\frac{dy}{dx}=\frac{2y+\sqrt{x^2-y^2}}{2x}$

30. $\frac{dy}{dx}=\frac{y^3}{1-2xy^2}, \quad y(0)=1$

31. $(x^2y+xy-y)dx+(x^2y-2x^2)dy=0$

32. $\frac{dy}{dx}=-\frac{3x^2y+y^2}{2x^3+3xy}, \quad y(1)=-2$ ។

33. រកចំណូលប្រចាំឆ្នាំនៃគណនីធនាគារមួយដែលបង់ការប្រាក់ក្នុងអត្រា 7% ជារៀងរាល់ថ្ងៃដែលសមមាត្រនៃភាពខុសគ្នារវាងប្រាក់បង់ចុងក្រោយនិងប្រាក់ដំបូងត្រូវបានបែងចែកដោយប្រាក់ដំបូង។

34. វិនិយោគិនម្នាក់បានដាក់ប្រាក់ $1000 នៅក្នុងគណនីបង់ការប្រាក់ក្នុងអត្រា 8% ជារៀងរាល់ខែនិងដាក់ប្រាក់បន្ថែម $25 ក្នុងមួយខែ។ រកប្រាក់នៅក្នុងគណនីបន្ទាប់ពីដាក់បាន 3ឆ្នាំ។

35. និស្សិតមហាវិទ្យាល័យបានខ្ចីប្រាក់ $8000 ដើម្បីទិញឡានមួយ។ អ្នកណែនាំគិតការប្រាក់តាមអត្រាប្រចាំឆ្នាំ 10%។ តើអត្រាការបង់ប្រាក់ប្រចាំខែប៉ុន្មានដែលត្រូវបង់ក្នុងរយៈពេល 3ឆ្នាំ? ប្រៀបធៀបលទ្ធផលរបស់អ្នកនឹងបញ្ហា 9 ក្នុងផ្នែក 2.3។

36. អ្នកទិញផ្ទះម្នាក់ចង់បង់រំលស់ $100,000 ក្នុងរយៈពេល 30 ឆ្នាំ។ តើត្រូវបង់ប្រាក់ប្រចាំខែប៉ុន្មានបើអត្រាការប្រាក់គឺ (a)9%, (b)10%, (c)12%?

37. អ្នកទិញផ្ទះម្នាក់ចង់បង់រំលស់ $100,000 ដែលមានអត្រាការប្រាក់ 9%។ តើត្រូវបង់ប្រាក់ប្រចាំខែប៉ុន្មានដើម្បីសងប្រាក់កម្ចីក្នុងរយៈពេល30ឆ្នាំ? 20ឆ្នាំ? តើប្រាក់សរុបដែលត្រូវបង់មានចំនួនប៉ុន្មាននៃប្រាក់កម្ចីក្នុងករណីនីមួយៗ។

38. ប្រសិនបើអត្រាការប្រាក់លើការបញ្ចាំរយៈពេល 20ឆ្នាំគឺ 10% និងការទូទាត់ប្រាក់ $1000 ប្រចាំខែដែលអ្នកទិញអាចមានលទ្ធភាពទិញបាន តើប្រាក់បង់រំលស់អតិបរមាចំនួនប៉ុន្មានដែលត្រូវបង់បង់ក្រោមលក្ខខណ្ឌទាំងនេះ?

39. អ្នកទិញផ្ទះម្នាក់ចង់បានតម្លៃនៃការទិញដោយបានបញ្ចាំ $95,000 ក្នុងរយៈពេល 20ឆ្នាំ។ តើអត្រាការប្រាក់អតិបរមាចំនួនប៉ុន្មានដែលអ្នកទិញអាចមានលទ្ធភាពទិញបាន បើប្រាក់ដែលត្រូវបង់ប្រចាំខែមិនលើសពី $900?

ជំពូកទី៣ សមីការលីនេអ៊ែលំដាប់ពីរ

សមីការលីនេអ៊ែលំដាប់២គឺមានសារៈសំខាន់យ៉ាងសំខាន់ក្នុងការសិក្សាអំពីសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល សម្រាប់ហេតុផលសំខាន់ពីរ។ ទីមួយគឺថាសមីការលីនេអ៊ែរមានទ្រឹស្តីសម្បូរបែបរចនាសម្ព័ន្ធដែលផ្អែកលើវិធីសាស្ត្រជាប្រព័ន្ធមួយចំនួននៃដំណោះស្រាយ។ លើសពីនេះខ្លឹមសារមួយផ្នែកសំខាន់នៃទម្រង់នេះ និងវិធីសាស្ត្រទាំងនេះគឺអាចយល់បាននៅគណិតវិទ្យាកម្រិតដំបូង។ ដើម្បីបង្ហាញគំនិតសំខាន់ៗក្នុងបរិបទសាមញ្ញបំផុតដែលអាចធ្វើទៅបាន។ យើងពិពណ៌នាពួកវានៅក្នុងជំពូកនេះសម្រាប់សមីការលំដាប់ទីពីរ។ហេតុផលមួយទៀតដើម្បីសិក្សាសមីការលីនេអ៊ែរលំដាប់ទីពីរគឺវាមានសារៈសំខាន់ម្រាប់ការស្រាវជ្រាវណាមួយដែលពិបាកនៃតំបន់បុរាណនៃរូបវិទ្យាគណិតវិទ្យា។មនុស្សម្នាក់មិនអាចទៅឆ្ងាយទេក្នុងការអភិវឌ្ឍន៍ មេកានិចរាវ ចរន្តកំដៅ ចលនារលក ឬបាតុភូតអេឡិចត្រូម៉ាញ៉េទិចដោយគ្មានការស្វែងរកវាចាំបាច់ដើម្បីដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ទីពីរ។ជាឧទាហរណ៍យើងពិភាក្សាអំពីលំយោលនៃប្រព័ន្ធមេកានិចនិងអគ្គិសនីជាមូលដ្ឋានមួយចំនួននៅចុងបញ្ចប់នៃជំពូក។

៣.១ សមីការអូម៉ូហ្សែនជាមួយមេគុណថេរ

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ពីរមានលក្ខណៈដូចខាងក្រោម៖

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) \qquad (1)$$

ដែល f ជាអនុគមន៍ជាធម្មតាយើងកំណត់អថេរមិនអាស្រ័យដោយ t ចាប់ពីពេលដែលអថេរមិនអាស្រ័យមានបញ្ហាក្នុងការដោះស្រាយ។ប៉ុន្តែពេលខ្លះយើងប្រើ x ជំនួសវិញ។យើងប្រើ y រឺអថេរដទៃទៀត ដើម្បីជំកំណត់អថេរអាស្រ័យ។សមីការ (1) ត្រូវបានគេហៅថាជាសមីការលីនេអ៊ែប្រសិនបើអនុគមន៍ f មានទម្រង់៖

$$f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) = g(t) - p(t)\left(\frac{dy}{dt}\right) - q(t)y, \qquad (2)$$

នោះប្រសិនបើ f ជាអនុគមន៍លីនេអ៊ែរនៅក្នុង y និង y' ។សមីការ(2) g , p និង q ជាអនុគមន៍ជាក់លាក់នៃអថេរមិនអាស្រ័យ (t) ប៉ុន្តែមិនអាស្រ័យលើ y ក្នុងករណីនេះយើងសរសេរសមីការ(1)៖

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \qquad (3)$$

ដែលបឋមបង្ហាញពីភាពខុសគ្នាទាក់ទងនិង (t) ជំនួសក្នុងសមីការ (3) ហើយបាន៖

$$P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = G(t) \qquad (4)$$

ករណីប្រសិនបើ $P(t) \neq 0$ យើងអាចចែកសមីការ (4) ដោយ $P(t)$ ដោយហេតុនេះយើងទទួលបានសមីការ ៖

$$p(t) = \frac{Q(t)}{P(t)}, \quad q(t) = \frac{R(t)}{P(t)}, \quad g(t) = \frac{G(t)}{P(t)} \qquad (5)$$

ក្នុងការពិភាក្សាសមីការ(3) ហើយនិងដំណោះស្រាយ យើងនិងដាក់វានៅក្នុង g , p និង q ជាអនុគមន៍បន្តបន្ទាប់។

បញ្ហាតម្លៃដើមនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដូចជាសមីការ (1) (3) ឬ(4)រួមជាមួយលក្ខខណ្ឌដូចជា៖

$$y(t_0)=y_0 \qquad y'(t_0)=y_0' \qquad (6)$$

សមីការលីនេអ៊ែលំដាប់២ជាសមីការអូម៉ូហ្សែនប្រសិនបើក្រុម $g(t)$ នៅសមីការ(3)ឬក្រុម $G(t)$ នៅសមីការ (4)គឺស្មើរសូន្យទាំងអស់នៃ t ។បើមិនដូចច្នេះទេវាមិនមែនជាសមីការអូម៉ូហ្សែនទេ។ដូចហេតុនេះចឹង ក្រុម $g(t)$ ឬ $G(t)$ ពេលខ្លះវាជាក្រុមមិនអូម៉ូហ្សែនទេ។យើងចាប់ផ្តើមពិភាក្សាពីសមីការអូម៉ូហ្សែន ដែលយើងនិងសរសេរក្រោមទម្រង់៖

$$P(t)y''+Q(t)y'+R(t)y=0 \qquad (7)$$

៣.១.១ និយមន័យ

នៅជំពូកនេះយើងនឹងផ្តោតលើសមីការនៅក្នុងអនុគមន៍ P,Q និង R ។ក្នុងសមីការ(7)បានក្លាយជា៖

$$ay''+by'+cy=0 \qquad (8)$$

ពេល a,b និង c ជាចំនួនថេរ។វាជាសមីការអូម៉ូហ្សែនជាមួយមេគុណថេរ (8)តែងតែត្រូវបានដោះស្រាយយ៉ាងងាយស្រួលក្នុងលក្ខខណ្ឌនៃរបៀបនៃការគណនា។វាកាន់តែពិបាកក្នុងការដោះស្រាយសមីការ(7)ប្រសិនបើមេគុណមិនមែនជាចំនួនថេរ ហើយការទទួលបាននៃករណីនេះ ត្រូវបានពន្យាក្នុងការដោះស្រាយរហូតដល់ជំពូកបន្ត។

បន្ទាប់ពីវែកញែកសមីការ(8)ចូលយើងទទួលបទពិសោធន៍ខ្លះៗជាមុនសិនតាមរយៈ

ឧទាហរណ៍១៖ ពិនិត្យសមីការ៖

$$y''-y=0 \qquad (9)$$

ដោយ $a=1,b=0$ និង $c=-1$ នៅសមីការ(9) យើងអាចនិយាយបានថាអនុគមន៍មួយមានលក្ខណៈជាអនុគមន៍ដេរីវេទី២ ដែលជាអនុវត្តន៍ចំពោះខ្លួនឯង។គំនិតតូចមួយប្រហែលជា អនុគមន៍ដែលគេស្គាល់ពីការដោះស្រាយគឺ $y_1(t)=e^t$ ជាអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល។ការគិតបន្តិចបន្តួចក៏អាចបង្កើតបានអនុគមន៍ទី២ គឺ $y_2(t)=e^{-t}$ ។ពេលខ្លះការស្រាវជ្រាវបន្ថែមទៀតបង្ហាញថាមេគុណថេរនៃដំណោះស្រាយទាំងនេះ។ ឧទាហរណ៍អនុគមន៍ $2e^t$ និង $5e^{-t}$ ជាជំនួសសមីការ(9)អាចឲ្យអ្នកផ្ទៀងផ្ទាត់បានដោយការគណនាដេរីវេទី២។ដូចគ្នានេះដែរអនុគមន៍ $c_1y_1(1)=c_1e^t$ និង $c_2y_2(t)=c_2e^{-t}$ ជាចម្លើយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល(9)សម្រាប់គ្រប់តម្លៃថេរទាំងអស់ c_1,c_2 ។ជាងនេះទៅទៀតវាមានសារៈសំខាន់ក្នុងការកត់សំគាល់ផលបូកនៃដំណោះស្រាយសមីការ(9)។ពេលដែល $c_1y_1(t)$ និង $c_2y_2(t)$ ដំណោះស្រាយសមីការ (9)ដូចនេះមានអនុគមន៍៖

$$y=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)=c_1e^t+c_2e^{-t} \qquad (10)$$

សម្រាប់តម្លៃ c_1,c_2 អាចធ្វើការគណនាដោយដេរីវេទី y'' ដោយសមីការ(10)។យើងមាន $y'=c_1e^t-c_2e^{-t}$ និង $y''=c_1e^t+c_2e^{-t}$ នោះ y'' គឺដូច y ចំពោះសមីការ(9)ត្រូវបានបកស្រាយ។

សរុបមក ចូរសង្ខេបនូវអ្វីដែលយើងបានធ្វើកន្លងមកក្នុងឧទាហរណ៍នេះ។យើងកត់សំគាល់ពីអនុគមន៍ $y_1(t)=e^t$ និង $y_2(t)=e^{-t}$ ដំណោះស្រាយនៅសមីការ(9)។វាជាទូទៅជាបន្សំលីនេអ៊ែ(10)

ហើយអនុគមន៍ទាំងនេះក៏ជាដំណោះស្រាយផងដែរ។ពេលដែល មេគុណ c_1, c_2 ក្នុងសមីការ(10) ទាំងនេះជាគ្រួសារអនុគមន៍ជាច្រើន សមីការ(9)។

ឥឡូវនេះយើងអាចគិតពីការជ្រើសរើសដំណោះស្រាយជាក់លាក់ក្នុងការយកមកដោះស្រាយដែលបំពេញតាមលក្ខខណ្ឌ។ឧបមាថាចង់ដោះស្រាយសមីការ(9) ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌដំបូង៖

$$y(0)=2 \qquad y'(0)=-1 \qquad (11)$$

ពាក្យផ្សេងទៀតយើងស្វែងរកដំណោះស្រាយកាត់តាមចំណុច $(0,2)$ ដែលមានមេគុណប្រាប់ទិស -1 ។ដំបូងយើងអោយ $t=0$ ហើយ $y=2$ ក្នុងសមីការ(10) គេបាន៖

$$c_1 + c_2 = 2 \qquad (12)$$

តាមសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល(10)នោះ៖

$$y' = c_1 e^t - c_2 e^{-t}$$

ដោយអោយ $t=0$ និង $y'=-1$ យើងបាន៖

$$c_1 - c_2 = -1 \qquad (13)$$

ដោយការដោះស្រាយសមីការ (12)និង(13)ក្នុងពេលរៀងគ្នា ចំពោះ c_1 និង c_2នោះ៖

$$c_1 = \frac{1}{2}, \qquad c_2 = \frac{3}{2} \qquad (14)$$

ជំនួសក្នុងសមីការ(10)៖

$$y = \frac{1}{2}e^t + \frac{3}{2}e^{-t} \qquad (15)$$

នៅក្នុងដំណោះស្រាយនេះយើងសិក្សាពីបញ្ហាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល(9)ដោយនិងលក្ខខណ្ឌដំបូង(11)

៣.១.២ វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយ

ឥឡូវនេះយើងមានសមីការទូទៅ(8)៖

$$ay'' + by' + cy = 0$$

ដែលមានគុណថេរ។ផ្អែកលើការស្រាវជ្រាវកន្លងមកជាមួយសមីការ (9) អាចឱ្យយើងរកដំណោះស្រាយសមីការ(8)។នោះយើងសន្មតថា $y=e^{rt}$ ពេល r ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្របង្កើតបានជាចំនួនកំណត់។ បន្ទាប់មកធ្វើតាម $y' = re^{rt}$ និង $y'' = r^2 e^{rt}$ ដោយជំនួសសមីការទាំងនេះដោយ y, y' និង y'' ក្នុងសមីការ (8) យើងបាន៖

$$(ar^2 + br + c)e^{rt} = 0 \text{ ដែល } e^{rt} \neq 0$$

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad (16)$$

សមីការ(16)ហៅថា**សមីការសម្គាល់** របស់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល(8)។ហើយវាចំបាច់ប្រសិនបើ r ជាឫសនៃសមីការ (16)។ពេលសមីការ(16) ជាមួយមេគុណជាចំនួនពិត ដែលមានឫសពីរ ដែលអាចជាផ្នែកពិត ឬជាឫសឌុប ឬក៏ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់។យើងពិចារណាករណី ទីមួយនៅទីនេះ និងករណីទី ២ នៅក្នុងផ្នែក ២.៤ និង ២.៥។

សន្មត់ថាឫសនៃសមីការ(16)ជាផ្នែកពិតតាងដោយ r_1 និង r_2 ដែល $r_1 \neq r_2$ ។នោះ $y_1(t) = e^{r_1 t}$ និង $y_2(t) = e^{r_2 t}$ ដែលមានដំណោះស្រាយពីរ(8)។យើងបាន៖

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \qquad (17)$$

ដំណោះស្រាយសមីការ(8)ត្រូវបានដោះស្រាយ ដូច្នេះយើងអាចសរសេរសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល(17)នោះ៖

$$y' = c_1 r_1 e^{r_1 t} + c_2 r_2 e^{r_2 t} \qquad (18)$$

$$y'' = c_1 r_1^2 e^{r_1 t} + c_2 r_2^2 e^{r_2 t} \qquad (19)$$

ជំនួស y, y' និង y'' ក្នុងសមីការ(8)យើងទទួលបាន៖

$$ay'' + by' + cy = c_1\left(ar_1^2 + br_1 + c\right)e^{r_1 t} + c_2\left(ar_2^2 + br_2 + c\right)e^{r_2 t} \qquad (20)$$

កន្សោមដែលនៅក្នុងវង់ក្រចកនៃសមីការ(20)ស្មើ 0 ព្រោះ r_1 និង r_2 ជាឫសនៃសមីការ(16)នោះ y ត្រូវបានផ្តល់ដោយសមីការ(17)ជាដំណោះស្រាយមួយនៃសមីការ(8)ដូចដែលយើងបានផ្ទៀងផ្ទាត់។

ឥឡូវនេះឧបមាថាយើងចង់រកចម្លើយមួយនៃគ្រួសារចម្លើយសមីការ(17)ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌដំបូង(6)គឺ៖

$$y(t_0) = y_0, \qquad y'(t_0) = y'_0$$

ដោយជំនួស $t = t_0$ និង $y' = y'_0$ នៅសមីការ(17);យើងបាន៖

$$c_1 e^{r_1 t_0} + c_2 e^{r_2 t_0} = y_0 \qquad (21)$$

ដូចគ្នាដែលជំនួស $t = t_0$ និង $y' = y'_0$ នៅសមីការ(18);យើងបាន៖

$$c_1 r_1 e^{r_1 t_0} + c_2 r_2 e^{r_2 t_0} = y'_0 \qquad (22)$$

លើដំណោះស្រាយសមីការ(21)និង (22)ដែលមានចំនួនថេររៀងគ្នា c_1 និង c_2 យើងឃើញថា៖

$$c_1 = \frac{y'_0 - y_0 r_2}{r_1 - r_2} e^{-r_1 t_0}, \qquad c_2 = \frac{y_0 r_1 - y'_0}{r_1 - r_2} e^{-r_2 t_0}, \qquad (23)$$

ដូច្នេះមិនថាលក្ខខណ្ឌដំបូងត្រូវបានកំណត់បែបណាទេ នោះគឺមិនគិតពីតម្លៃនៃ $t_0, y_0,$ និង y'_0 សមីការ(6) វាជាចំនួនកំណត់ c_1 និង c_2 ដោយសមីការ(23) បង្ហាញសមីការ(17)នេះជាដំណោះស្រាយនៃបញ្ហាតម្លៃដើម

$$ay'' + by' + cy = 0\ , \qquad y(t_0) = y_0, \qquad y'(t_0) = y'_0 \qquad (24)$$

វាអាចដោះស្រាយបានដើម្បីបង្ហាញទ្រឹស្តីបទមូលដ្ឋានដែលបានលើកឡើងនៅផ្នែកបន្ទាប់នៃដំណោះស្រាយទាំងអស់ទាំងអស់សមីការ(8) ត្រូវបានបង្ហាញសមីការ(17) យ៉ាងហោចណាស់ករណីដែល ឫសនៃសមីការ(16)ជាចំនួនពិតឬនិម្មិត ។ដូច្នេះយើងហៅសមីការ(17)ជាដំណោះស្រាយទូទៅនៃសមីការ (8)។ជាការពិតដែលថាលក្ខខណ្ឌដំបូងត្រូវបានគេជ្រើសយកជាជម្រើសត្រឹមត្រូវនៃអថេរក្នុងសមីការ (17) ធ្វើអោយគំនិតនេះកាន់តែជឿទុកចិត្តបាន ។កន្សោមនេះបញ្ចូលដំណោះស្រាយបញ្ចូលគ្នានៃសមីការ (8)។

ឧទាហរណ៍១៖ រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការអូម៉ូហ្សែន

$$y'' + 5y' + 6y = 0 \qquad (25)$$

ចម្លើយ

ដោយ $y = e^{rt}$ ហើយអោយ r ជាឫសនៃសមីការ

$$r^2 + 5r + 6 = (r+2)(r+3) = 0$$

នោះតម្លៃនៃ r មាន $r_1 = -2$ និង $r_2 = -3$ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺមានទម្រង់៖

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} \qquad (26)$$

ឧទាហរណ៍២៖ រកចម្លើយមួយនៃសមីការអូម៉ូហ្សែនតាមលក្ខខណ្ឌ

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \qquad y(0) = 2 \qquad y'(0) = 3 \qquad (27)$$

ចម្លើយ

ដំណោះស្រាយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល បានបង្កើតនៅឧទាហរណ៍ទី១ លក្ខខណ្ឌដំបូងយើងអោយ $t = 0$ និង $y = -2$ នៅសមីការ(26)

នោះ c_1 និង c_2 កំណត់ដោយ៖

$$c_1 + c_2 = 2 \qquad (28)$$

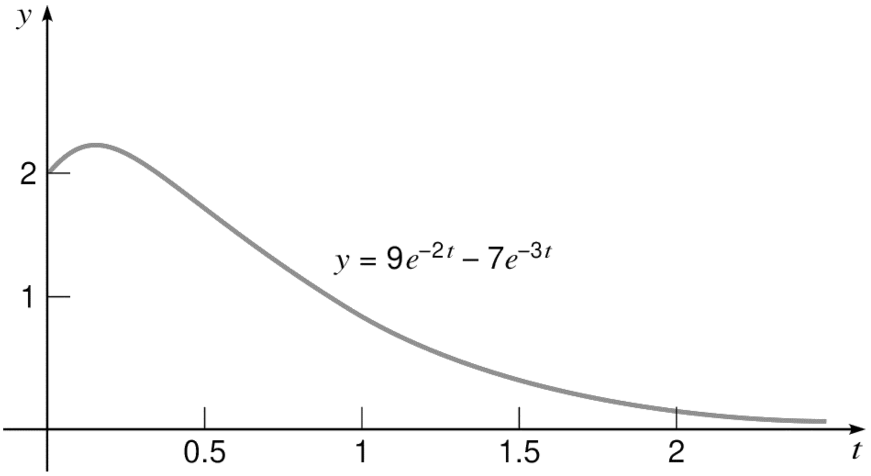
ដោយប្រើលក្ខខណ្ឌទី២មុនដំបូងយើងត្រូវ ឌីផេរ៉ង់ស្យែលសមីការ(26)។អោយ $y' = -c_1 e^{-2t} - 3c_2 e^{-3t}$ នោះ $t = 0; y' = 3$ យើងបាន៖

$$-2c_1 - 3c_2 = 3 \qquad (29)$$

ដំណោះស្រាយសមីការ(28) និង (29)យើងឃើញថា $c_1 = 9$ និង $c_2 = -7$ នោះតម្លៃដែលបង្កើតបាននៅសមីការ(26) យើងបានដំណោះស្រាយ៖

$$y = 9e^{-2t} - 7e^{-3t} \qquad (30)$$

នៅបញ្ហាតម្លៃដើម(27) ក្រាបត្រូវបានបកស្រាយនៅរូប 2.1.1



រូបភាព 2.1.1

ឧទាហរណ៍៣៖ រកចម្លើយមួយនៃសមីការអូម៉ូហ្សែនតាមលក្ខខណ្ឌ

$$4y'' - 8y' + 3y = 0, \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = \frac{1}{2} \qquad (31)$$

ចម្លើយ

ប្រសិនបើ $y = e^{rt}$ នោះសមីការ $4r^2 - 8r + 3 = 0$

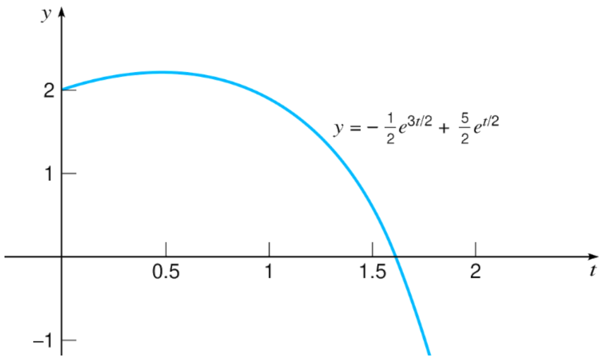
មានឫស $r = 3/2$ ហើយ $r = 1/2$ ទាំងនេះជាដំណោះស្រាយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$y = c_1 e^{3t/2} + c_2 e^{t/2} \qquad (32)$$

តាមលក្ខខណ្ឌ យើងបានពីរសមីការសម្រាប់ c_1 និង c_2 ៖ $c_1 + c_2 = 2, \qquad \frac{3}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 = \frac{1}{2}$

ដំណោះស្រាយសមីការនេះគឺ $c_1 = -\frac{1}{2}, c_2 = \frac{5}{2}$ និងដំណោះស្រាយនៃបញ្ហា សមីការ (31)

$$y = -\frac{1}{2}e^{3t/2} + \frac{5}{2}e^{t/2}$$



រូបភាព 2.2.2

លំហាត់

លំហាត់ពី 1ដល់ 8 រកដំណោះស្រាយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

1. $y'' + 2y' - 3y = 0$
2. $y'' + 3y' + 2y = 0$
3. $6y'' - y' - y = 0$
4. $2y'' - 3y' + y = 0$
5. $y'' + 5y' = 0$
6. $4y'' - 9y = 0$
7. $y'' - 9y' + 9y = 0$
8. $y'' - 2y' - 2y = 0$

នៅលំហាត់ទី 9 ដល់ 16 រកចម្លើយមួយ រួចគូសក្រាហ្វ នៃដំណោះស្រាយតាមលក្ខខណ្ឌសមស្រប ករណី t កើនឡើង។

9. $y''+y'-2y=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=1$

10. $y''+4y'+3y=0,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=-1$

11. $6y''-5y'+y=0,\quad y(0)=4,\quad y'(0)=0$

12. $y''+3y'=0,\quad y(0)=-2,\quad y'(0)=3$

13. $y''+5y'+3y=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0$

14. $2y''+y'-4y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1$

15. $y''+8y'-9y=0,\quad y(1)=1,\quad y'(1)=0$

16. $4y''-y=0, y(-2)=1,\quad y'(-2)=-1$

17.រកសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនិងដំណោះស្រាយទូទៅ $y=c_1e^{2t}+c_2e^{-3t}$

18.រកសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនិងដំណោះស្រាយទូទៅ $y=c_1e^{-t/2}+c_2e^{-2t}$

19.រកដំណោះស្រាយនៃ បញ្ហាតម្លៃដើម

$$y''-y=0,\qquad y(0)=\frac{5}{4},\qquad y'(0)=-\frac{3}{2}\quad ,$$

សង់ក្រាហ្វសម្រាប់ $0\le t\le 2$ និងកំណត់តម្លៃអប្បបរិមា

20.រកដំណោះស្រាយនៃ បញ្ហាតម្លៃដើម

$$2y''-3y+y=0,\qquad y(0)=2,\qquad y'(0)=\frac{1}{2}\ ,$$

កំណត់តម្លៃអតិបរិមា និងរកចំណុចដែលធ្វើអោយតម្លៃអនុគមន៍ស្មើ0។

21.ដំណោះស្រាយបញ្ហាតម្លៃដើម $y''-y'-2y=0\quad ,\quad y(0)=\alpha,\quad y'(0)=-2$ រកតម្លៃ α តម្លៃអនុគមន៍ខិតទៅរក0 ដែល $t\to\infty$

22.ដំណោះស្រាយនៃ បញ្ហាតម្លៃដើម $4y''-y=0\quad ,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=\beta$ រកតម្លៃ α តម្លៃអនុគមន៍ខិតទៅរក0 ដែល $t\to\infty$

នៅក្នុងលំហាត់ 23 និង24 កំណត់តម្លៃនៃ α ប្រសិនបើដំណោះស្រាយទាំងមូលខិតទៅជិត0។

៣.២ ដំណោះស្រាយគ្រឹះនៃសមីការលីនេអ៊ែរអូម៉ូហ្សែន

នៅក្នុងផ្នែកមុន យើងបានបង្ហាញពីរបៀបដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលមានទម្រង់

$$ay''+by'+cy=0$$

ដែល a,b,c ជាចំនួនថេរ។ ឥឡូវនេះយើងធ្វើលទ្ធផលទាំងនោះ ដើម្បីផ្តល់នូវរូបភាពជាក់លាក់មួយក្នុងការរកដំណោះស្រាយនៃគ្រប់សមីការលីនេអ៊ែរលំដាប់ពីរអូម៉ូហ្សែន។ ការយល់ដឹងនេះនឹងជួយយើងក្នុងការស្វែងរកដំណោះស្រាយបញ្ហាផ្សេងទៀតដែលយើងនឹងជួបនៅពេលក្រោយ។

ក្នុងការអភិវឌ្ឍទ្រឹស្តីសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរ វាមានសារប្រយោជន៍ក្នុងការណែនាំសញ្ញាណការីឌីផេរ៉ង់ស្យែល។ តាង p និង q ជាអនុគមន៍ជាប់នៅលើចន្លោះបើក I សម្រាប់ $\alpha<t<\beta$ ។ ករណី $\alpha=-\infty,\beta=\infty$ ឬទាំងពីរនឹងគឺនៅក្នុង នោះសម្រាប់អនុគមន៍ណាមួយណា ϕ ដែលឌីផេរ៉ង់ស្យែលពីរដងនៅលើ I យើងកំណត់ការីឌីផេរ៉ង់ស្យែល L ដោយសមីការ

$$L(\phi)=\phi''+p\phi'+q\phi \qquad (1)$$

ចំណាំថា $L[\phi]$ ជាអនុគមន៍បើកលើ I ។ តម្លៃនៃ $L[\phi]$ នៅត្រង់ចំណុច t គឺ

$L[\phi](t)=\phi''(t)+p(t)\phi'(t)+q(t)\phi(t)$

ជាឧទាហរណ៍ បើ $p(t)=t^2, q(t)=1+t, \phi(t)=\sin 3t$ នោះ

$$L[\phi](t)=(\sin 3t)''+t^2(\sin 3t)'+(1+t)\sin 3t$$
$$=-9\sin 3t+3t^2\cos 3t+(1+t)\sin 3t$$

ការី L គេច្រើនសរសេរ $L=D^2+pD+q$ ដែល D ដេរីវេ។

នៅក្នុងផ្នែកនេះយើងនឹងសិក្សាពីរសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ពីរអូម៉ូហ្សែន $L[\phi](t)=0$ ។ យើងទម្លាប់ប្រើប្រាស់និមិត្តសញ្ញា y សម្គាល់ $\phi(t)$ ដែលយើងនឹងប្រើប្រាស់ការសរសេរសមីការនេះជាទម្រង់

$L[y]=y''+p(t)y'+q(t)y=0$ (2)

ជាមួយនឹងសមីការ(2) យើងនឹងផ្តុំសំណុំនៃលក្ខខណ្ឌដំបូង

$y(t_0)=y_0, y'(t_0)=y'_0$ (3)

ដែល t_0 ជាចំណុចណាមួយនៅចន្លោះ I និង y_0 , y'_0 ជាចំនួនពិត។ យើងចង់ដឹងថា តម្លៃដំបូងក្នុងបញ្ហា(២) ,(៣) តែងតែមានដំណោះស្រាយ ហើយវាប្រហែលជាមានដំណោះស្រាយលើសពីមួយ។ យើងក៏ចង់ដឹងថា ទម្រង់និង វិធីដោះស្រាយដែលមានសារប្រយោជន៍ នៅក្នុងការស្វែងរកដំណោះស្រាយនៃបញ្ហាពិសេស។ ចម្លើយនៃសំណួរទាំងនេះគឺមាននៅក្នុងទ្រឹស្តីបទនៅក្នុងផ្នែកនេះ។

ទ្រឹស្តីបទ ២.២.១ ពិចារណាតម្លៃបញ្ហាតម្លៃដើម

$y''+p(t)y'+q(t)y=g(t)$ $y(t_0)=y_0, y'(t_0)=y'_0$ (4)

ដែល p,q និង g ជាអនុគមន៍លើចន្លោះបើក I នោះមានចម្លើយប្រាកដមួយគឺ $y=\phi(t)$ ក៏ជាប់នៅចន្លោះបើក I ដែរ។

សម្រាប់បញ្ហាមួយចំនួន ការអះអាងមួយចំនួន គឺងាយស្រួលក្នុងការដោះស្រាយ។ ជាទាហរណ៍ យើងបានរកឃើញនៅក្នុងផ្នែក ២.១ ដែលបញ្ហាតម្លៃដំបូង

$y''-y=0$ $y(0)=2$ $y'(0)=-1$ (5)

មានចម្លើយ $y=\frac{1}{2}e^t+\frac{3}{2}e^{-t}$ (6)

ឧទាហរណ៍១៖រកចន្លោះដែលវែងជាងគេនៅក្នុងដំណោះស្រាយនៃតម្លៃបញ្ហាដំបូង

$(t^2-3t)y''+ty'-(t+3)y=0$ $y(1)=2,$ $y'(1)=1$

គឺប្រាកដជាមានប្រសិនបើសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលបានផ្តល់ឱ្យគឺ សរសេរក្នុងទម្រង់នៃសមីការ(៤) នោះ $p(t)=1/(t-3), q(t)=-(t+3)/t(t-3), g(t)=0$ ។ ចំណុចតែមួយគត់នៃភាពមិនជាប់នៃមេគុណគឺ $t=0$, $t=3$ ។ ដូច្នេះបើកដែលវែងជាងគេ មានចំណុចដំបូង $t=1$ ដែលគ្រប់មេគុណទាំងអស់គឺជាប់ក្នុងចន្លោះ $0<t<3$។ ដូចនេះ នេះគឺជាចន្លោះដែលវែងជាងគេនៅក្នុងទ្រឹស្តីបទ ២.២.១ ធានាថា ដំណោះស្រាយគឺមាន។

ឧទាហរណ៍២៖រកចម្លើយតែមួយគត់នៃយម្លៃបញ្ហាដំបូង

$y'' + p(t)y' + q(t) = 0$, $y(t_0) = 0$, $y'(t_0) = 0$

ដែល p និង q ជាប់នៅចន្លោះបើក I មាន t_0 ។

អនុគមន៍ $y = \phi(t) = 0$ សម្រាប់គ្រប់ t នៅក្នុង I ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល និងលក្ខខណ្ឌដំបូង។ តាមផ្នែកតែមួយគត់នៃទ្រឹស្តីបទ ២.២.១ វាគឺមានចម្លើយតែមួយគត់។យើងសន្មតថា y_1 និង y_2 ជាបីរចម្លើយនៃសមីការ(2) ឬអាចសរសេរបានថា

$$L[y_1] = y_1'' + py_1' + qy_1 = 0 \qquad (7)$$

និងស្រដៀងគ្នាសម្រាប់ y_2 ។ នោះ ដូចនៅក្នុងឧទាហរណ៍នៅក្នុងផ្នែក ២.១ យើងអាចបង្កើតចម្លើយថែមទៀតតាមទម្រង់ការរួមបញ្ចូលលីនេអ៊ែរនៃ y_1 និង y_2 ។ យើងបញ្ជាក់លទ្ធផលនេះដូចទ្រឹស្តី។

ទ្រឹស្តីបទ ២.២.២៖ បើ y_1 និង y_2 ជាពីរចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល(2)

$L[y]] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$

នោះបន្សំលីនេអ៊ែរ $c_1y_1 + c_2y_2$ ក៏ជាចម្លើយសមីការ(2)ដែរ គ្រប់ចំនួនថេរ c_1, c_2 ។

ករណីពិសេសនៃទ្រឹស្តីបទ ២.២.២ កើតឡើងប្រសិនបើ c_1 ឬ c_2 ស្មើសូន្យ។ នោះយើងអាចសរុបបានថា ផលគុណណាមួយនៃដំណោះស្រាយមួយនៃសមីការ(2) ក៏មានចម្លើយ។

ដើម្បីសម្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ ២.២.២ យើងត្រូវជំនួសតែមួយគត់

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) \qquad (8)$$

សម្រាប់ y នៅក្នុងសមីការ(2) ចម្លើយគឺ

$$\begin{aligned} L[c_1y_1 + c_2y_2] &= [c_1y_1 + c_2y_2]'' + p[c_1y_1 + c_2y_2]' + q[c_1y_1 + c_2y_2] \\ &= c_1y_1'' + c_2y_2'' + c_1py_1' + c_2py_2' + c_1qy_1 + c_2qy_2 \\ &= c_1[y_1'' + py_1' + qy_1] + c_2[y_2'' + py_2' + qy_2] \\ &= c_1L[y_1] + c_2L[y_2] \end{aligned}$$

ដោយ $L[y_1] = 0$ និង $L[y_2] = 0$ នោះ $L[c_1y_1 + c_2y_2] = 0$ ។ ដូច្នេះ ដោយមិនគិតពីតម្លៃនៃ c_1 ,c_2 , y បានផ្តល់ដោយសមីការ(8)ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល(2)និង ភស្តុតាងនៃទ្រឹស្តីបទ២.២.២ ។

ទ្រឹស្តីបទ ២.២.២ បញ្ជាក់ថា ការចាប់ផ្តើមជាមួយចម្លើយតែពីរគត់នៃសមីការ(២)យើងអាចបង្កើតគ្រួសារនៃចម្លើយទ្វេដងគ្មានដែនកំណត់ ដោយតាមរយៈសមីការ(៨)។ សំណួរបន្ទាប់គឺ គ្រប់ចម្លើយទាំងអស់នៃសមីការ(2) គឺត្រូវបានបញ្ចូលនៅក្នុងសមីការ(8) ឬ ប្រហែលជាមានដំណោះស្រាយផ្សេងទៀតនៃទម្រង់ផ្សេង។ យើងចាប់ផ្តើមកំណត់សំណួរនេះដោយពិនិត្យមើលចំនួនថេរ c_1 ,c_2 នៅក្នុងសមីការ(8) អាចត្រូវបានជ្រើសរើស ដូចនេះដើម្បីផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដំបូង(3)។ លក្ខខណ្ឌដំបូងទាំងនេះតម្រូវឲ្យ c_1 ,c_2 ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

$$\begin{aligned} c_1y_1(t_0) + c_2y_2(t_0) &= y_0 \\ c_1y_1'(t_0) + c_2y_2'(t_0) &= y_0' \end{aligned} \qquad (9)$$

នៅពេលដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ(9) សម្រាប់ c_1 ,c_2 យើងស្វែងរក

$$c_1 = \frac{y_0 y_2'(t_0) - y_0 y_2'(t_0)}{y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0)}, \quad c_2 = \frac{-y_0 y_1'(t_0) + y_0' y_1(t_0)}{y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0)} \qquad (10)$$

ឬក្នុងលក្ខខណ្ឌនៃឌីទែមីណង់

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(t_0) \\ y_0' & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_0 \\ y_1'(t_0) & y_0' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix}} \qquad (11)$$

ជាមួយនឹងតម្លៃទាំងនេះសម្រាប់ c_1, c_2 កន្សោម(8) ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដំបូង(៣) ដូចនឹងសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល(2)។

នៅក្នុងលំដាប់កន្សោមសម្រាប់ c_1, c_2 នៅក្នុងសមីការ(10) ឬ (11) ដើម្បីធ្វើឲ្យយល់ វាមានសារៈសំខាន់ដែលភាគបែងមិនសូន្យ។ ទាំង c_1, c_2 ភាគបែងគឺដូចគ្នា ពោលគឺ ឌីទែមីណង់

$$W(y_1, y_2)(t_0) = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} = y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0) \qquad (12)$$

W ហៅថា ដេទែមីណង់ហ្វ្រង់ស្គៀន (*Wronskian*)

ទ្រឹស្តីបទ២.២.៣៖ សន្មត់ថា y_1, y_2 ជាពីរចម្លើយនៃសមីការ (2) ដែល

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

នោះហ្វ្រង់ស្គៀន $W = y_1 y' - y_1' y_2$

គឺមិនសូន្យត្រង់ចំណុច t_0 ដែលជាលក្ខខណ្ឌដំបូង(3)

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0'$$

គឺត្រូវបានកំណត់។ នោះមានជម្រើសនៃ ចំនួនថេរ c_1, c_2 សម្រាប់ $y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល(2) និងលក្ខខណ្ឌដំបូង(3)។

ឧទាហរណ៍៣៖ នៅក្នុងឧទាហរណ៍១ ក្នុងផ្នែក ២.១ យើងបានរកឃើញ $y_1(t) = e^{-2t}, \ y_2(t) = e^{-3t}$ ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$y'' + 5y' + 6y = 0$ ចូររកហ្វ្រង់ស្គៀននៃ y_1, y_2 ។

ហ្វ្រង់ស្គៀននៃអនុគមន៍ទាំងនេះគឺ

$$W = \begin{vmatrix} e^{-2t} & e^{-3t} \\ -2e^{-2t} & -3e^{-3t} \end{vmatrix} = -e^{-5t}$$

ដោយ W មិនសូន្យសម្រាប់គ្រប់តម្លៃ t អនុគមន៍ y_1, y_2 អាចត្រូវបានប្រើប្រាស់ដើម្បីបង្កើតដំណោះស្រាយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលផ្តល់ឲ្យ ដែលជាមួយលក្ខខណ្ឌដំបូងត្រូវបានបញ្ជាក់នៃ t ។

ទ្រឹស្តីបទ២.២.៤៖ បើ y_1, y_2 ជាពីរចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

ហើយបើមានគ្រប់ចំណុច t_0 ដែល $W(y_1, y_2)$ មិនសូន្យ នោះគ្រួសារនៃចម្លើយគឺ

$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ មេគុណណាមួយ c_1, c_2 ជាចម្លើយនៃសមីការ។

ឧទាហរណ៍៤៖ យើងគណនាប្រូង់ស្គៀននៃ $y_1,\ y_2$

$$W=\begin{vmatrix} e^{r_1t} & e^{r_2t} \\ r_1e^{r_1t} & r_2e^{r_2t}\end{vmatrix}=(r_1-r_2)\exp[(r_1-r_2)t]$$

ដោយនិទស្សន្តអនុគមន៍មិនសូន្យ ហើយ $r_1-r_2\neq 0$ តាមលំនាំនៃបញ្ហា វាដើតាម W គឺមិនសូន្យគ្រប់តម្លៃនៃ t ។ ជាលទ្ធផល $y_1,\ y_2$ បង្កើតបានសំណុំចម្លើយគ្រឹះមួយ។

ឧទាហរណ៍៥៖ បង្ហាញថា $y_1(t)=t^{1/2},\ y_2(t)=t^{-1}$ បង្កើតបានសំណុំចម្លើយគ្រឹះមួយនៃ

$$2t^2y''+3ty'-y=0,\quad t>0 \qquad (14)$$

យើងនឹងបង្ហាញនៅក្នុងផ្នែកបន្ត របៀបក្នុងការដោះស្រាយសមីការនេះទោះបីជាយ៉ាងណាក៏ដោយ ចំណុចនេះយើងនឹងផ្ទៀងផ្ទាត់ដោយជំនួសផ្ទាល់ ដែល $y_1,\ y_2$ ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល។ ដោយ $y_1'(t)=\frac{1}{2}t^{-1/2},\quad y_1''(t)=-\frac{1}{4}t^{-3/2}$ យើងមាន

$$2t^2(-\frac{1}{4}t^{-3/2})+3t(\frac{1}{2}t^{-1/2})-t^{1/2}=\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-1\right)t^{1/2}=0$$

ស្រដៀងគ្នា $y_2'(t)=-t^{-2},\quad y_2''(t)=2t^{-3}$ ដូច្នេះ

$$2t^2(2t^{-3})+3t(-t^{-2})-t^{-1}=(4-3-1)t^{-1}=0$$

បន្ទាប់មកយើងគណនាប្រូនស្គែននៃ $y_1,\ y_2$

$$W=\begin{vmatrix} t^{1/2} & t^{-1} \\ \frac{1}{2}t^{-1/2} & -t^{-2}\end{vmatrix}=-\frac{3}{2}t^{-3/2}$$

ដោយ $W\neq 0$ សម្រាប់ $t>0$ យើងសន្និដ្ឋានថា $y_1,\ y_2$ បង្កើតបានសំណុំចម្លើយគ្រឹះមួយ។

ទ្រឹស្តីបទ២.២.៥ ពិចារណាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $L[y]=y''+p(t)y'+q(t)y=0$ ដែលមេគុណ p និង q ជាប់នៅចន្លោះបើកណាមួយ I ។ ជ្រើសរើសចំណុច t_0 នៅក្នុង I ។ តាង y_1 ជាចម្លើយនៃសមីការ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដំបូង

$y(t_0)=1,\quad y'(t_0)=0$

ហើយតាង ជាចម្លើយនៃសមីការ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដំបូង

$y(t_0)=0,\quad y'(t_0)=1$

នោះ $y_1,\ y_2$ បង្កើតបានសំណុំចម្លើយគ្រឹះនៃសមីការ។

លំហាត់

នៅក្នុងលំហាត់ពី១ ដល់ ៦ចូររកប្រូនស្គែននៃគូរអនុគមន៍ដែលបានផ្តល់ឲ្យដូចខាងក្រោម៖

1. $e^{2t}\quad e^{-3t/2}$
2. $\cos t,\quad \sin t$
3. $e^{-2t},\quad te^{-2t}$
4. $x,\quad xe^{x}$
5. $e^{t}\sin t,\quad e^{t}\cos t$
6. $\cos^2\theta,\quad 1+\cos 2\theta$

នៅក្នុងលំហាត់ពី ៧ ដល់ ១២ កំណត់ចន្លោះវែងបំផុតនៅក្នុងតម្លៃបញ្ហាដំបូងដែលបានផ្តល់ឱ្យ គឺមានចម្លើយឌីផេរ៉ង់ស្យែលតែពីរគត់។

7. $ty''+3y=t, \quad y(1)=1 \quad y'(1)=2$

8. $(t-1)y''-3ty'+4y=\sin t, \quad y(-2)=2, \quad y'(-2)=1$

9. $t(t-4)y''+3ty'+4y=2, \quad y(3)=0, \quad y'(3)=-1$

10. $y''+(\cos t)y'+3(\ln|x|)y=0, \; y(2)=3, \; y'(2)=1$

11. $(x-3)y''+xy'+(\ln|x|)y=0, \; y(1)=0, \; y'(1)=1$

12. $(x-2)y''+y'+(x-2)(\tan x)y=0, \; y(3)=1, \; y'(3)=2$

13. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $y_1(t)=t^2$ និង $y_2(t)=t^{-1}$ ជាពីរចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $t^2y''-2y=0$ សម្រាប់ $t>0$ ។បន្ទាប់មកបង្ហាញថា $c_1t^2+c_2t^{-1}$ ក៏ជាចម្លើយនៃសមីការសម្រាប់ c_1, c_2 ។

14. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $y_1(t)=1$ និង $y_2(t)=t^{1/2}$ ចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $yy''+(y')^2=0$ សម្រាប់ $t>0$ ។បន្ទាប់មកបង្ហាញថា $c_1+c_2t^{1/2}$ មិនមែនជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការនេះ។ ចូរពន្យល់ហេតុអ្វីបានជាលទ្ធផលនេះមិនផ្ទុយទ្រឹស្តីបទ៣.២.២។

15.បង្ហាញថា ប្រសិនបើ $y=\phi(t)$ ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''+p(t)y'+q(t)y=g(t)$ ដែល $g(t)$ មិនសូន្យជានិច្ច នោះ $y=c\phi(t)$ ដែល c ជាចំនួនថេរណាមួយក្រៅពី 1 គឺមិនមែនជាចម្លើយ។ ចូរពន្យល់ថា ហេតុអ្វីបានជាចម្លើយនេះមិនផ្ទុយពីការកំណត់ចំណាំក្នុងទ្រឹស្តីបទ៣.២.២។

16.តើ $y=\sin(t^2)$ ជាចម្លើយនៅចន្លោះដែលមាន $t=0$ នៃសមីការ $y''+p(t)y'+q(t)y=0$ ជាមួយនឹងមេគុណជាប់? ពន្យល់ចម្លើយរបស់អ្នក។

17. បើហ្វ្រន់ស្គេន W នៃ f និង g គឺ $3e^{4t}$, ហើយបើ $f(t)=e^{2t}$ ចូររក $g(t)$ ។

18. បើហ្វ្រន់ស្គេន W នៃ f និង g គឺ t^2e^t, ហើយបើ $f(t)=t$ ចូររក $g(t)$ ។

19.បើ $W(f,g)$ ជាហ្វ្រន់ស្គេននៃ f,g ហើយបើ $u=2f-g, \; v=f-g$ ចូររកហ្វ្រន់ស្គេននៃ u,v នៅរយៈនៃ $W(f,g)$ ។

20. បើហ្វ្រន់ស្គេននៃ f,g គឺ $t\cos t-\sin t$ ហើយបើ $u=f+3g, \; v=f-g$ ចូររកហ្វ្រន់ស្គេននៃ u, v ។

21. $y''+y'-2y=0, \; t_0=0$

22. $y''+4y'+3y=0, \; t_0=1$

ពីលំហាត់ ២៣ ដល់ ២៦ ផ្ទៀងផ្ទាត់អនុគមន៍ ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលបានផ្តល់ឲ្យ។ តើលំហាត់ខាងក្រោមនេះបង្កើតបានសំណុំចម្លើយគ្រឹះដែរឬទេ?

23. $y''+4y=0, \; y_1(t)=\cos 2t, \quad y_2(t)=\sin 2t$

24. $y''-2y'+y=0, \; y_1(t)=e^t, \quad y_2(t)=te^t$

25. $xy''-x(x+2)y'+(x+2)y=0, \; x>0, \; y_1(x)=x, \quad y_2(x)=xe^x$

26. $(1-x\cot x)y''-xy'+y=0, \; 0<x<\pi, \; y_1(x)=x, \quad y_2(x)=\sin x$

27.**សមីការប្រាកដ** ។ សមីការ $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$ គឺបាននិយាយថា ដើម្បីក្លាយទៅថា ប្រាកដ បើវាអាចសរសេរក្នុងទម្រង់ $\left[P(x)y'\right]'+\left[f(x)y\right]'=0$ ដែល $f(x)$ គឺដើម្បីកំណត់នៅក្នុង $P(x),Q(x),R(x)$ ។សមីការក្រោយ អាចជាការរួមបញ្ចូលតែម្តងភ្លាមៗ ដែលលទ្ធផលនៅក្នុងសមីការលីនេអ៊ែរលំដាប់មួយសម្រាប់ y ដែលអាចត្រូវបានដោះស្រាយដូចនៅក្នុងផ្នែក២.១។ ដោយសមីការមេគុណនៃសមីការមុន ហើយលុបបំបាត់ $f(x)$ ចូរបង្ហាញថាលក្ខខណ្ឌចាំបាច់សម្រាប់ភាពប្រាកដគឺ $P''(x)+Q'(x)+R(x)=0$ ។ វាត្រូវបានបង្ហាញដែលនេះក៏ជាលក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់មួយដែរ។

ពីលំហាត់២៨ ដល់ ៣១ ប្រើប្រាស់លទ្ធផលពីលំហាត់ ២៧ ដើម្បីកំណត់សមីការដែលបានផ្តល់ឲ្យ គឺប្រាកដ។ បើដូច្នេះ ចូរដោះស្រាយសមីការ

28. $y''+xy'+y=0$

29. $y''+3x^2y'+xy=0,$

30. $xy''-(\cos x)y'+(\sin x)y=0, \quad x>0$

31. $x^2y''+xy'-y=0, \quad x>0$

32. **សមីការអែតច័ន (The Adjoint Equation)**។ បើសមីការលីនេអ៊ែរលំដាប់ពីរអូម៉ូហ្សែន មិនប្រាកដ យើងអាចបង្កើតប្រាកដ ដោយគុណបញ្ចូលសមីការជាមួយនឹងកត្តា $\mu(x)$ ។ នោះយើងតម្រូវ $\mu(x)$ យើងបាន៖

$$\mu(x)P(x)y''+\mu(x)Q(x)y'+R(x)y=0$$

អាចសរសេរក្នុងទម្រង់ $\left[\mu(x)P(x)y'\right]'+\left[f(x)y\right]'=0$ ។

ដោយមេគុណសមីការនៅក្នុងសមីការទាំងពីរ ហើយបំបាត់បង្ហាញថាអនុគមន៍ $f(x)$ ត្រូវតែផ្ទៀងផ្ទាត់

$$P\mu''+(2P'-Q)\mu'+(P''-Q'+R)\mu=0$$

សមីការនេះគឺបានស្គាល់ថាជាអែតច័ននៃសមីការដើម និងមានសារៈសំខាន់នៅក្នុងទ្រឹស្តីបទកម្រិតខ្ពស់នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល។ ជាទូទៅ លំហាត់ក្នុងការដោះស្រាយ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលអែតច័ន គឺពិបាកដូចគ្នាទៅនឹងដោះស្រាយសមីការដើម ដូច្នេះមានតែម្តងម្កាលប៉ុណ្ណោះដែលអាចទៅរួចក្នុងការរកកត្តាសមីការសម្រាប់សមីការលំដាប់ពីរ។

ពីលំហាត់ ៣៣ ដល់ ៣៥ ប្រើប្រាស់លទ្ធផលពីលំហាត់៣២ ដើម្បីរក អែតច័ននៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលបានផ្តល់ឲ្យ។

33. $x^2y''+xy'+\left(x^2-v^2\right)y=0$, *Bessel's equation*

34. $\left(1-x^2\right)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0,$ *Legendre's equation*

35. $y''-xy'=0,$ *Airy's equation*

36.សម្រាប់សមីការលីនេអ៊ែរលំដាប់ពីរ $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$ បង្ហាញថាអែតច័ននៃសមីការអែតច័នគឺជាសមីការដើម។

37. សម្រាប់សមីការលីនេអ៊ែរលំដាប់ពីរ $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$ បាននិយាយថា ដើម្បីក្លាយជាស្វ័យអែតច័នបាន ប្រសិនបើ អែតច័នរបស់វាដូចគ្នាទៅនឹងសមីការដើម។ បង្ហាញថាលក្ខខណ្ឌ

ចាំបាច់សម្រាប់សមីការនេះជាស្វ័យអែតច័នគឺ $P'(x)=Q(x)$ ។កំណត់សមីការនៅក្នុងលំហាត់ ៣៣ ដល់ ៣៥គឺជាស្វ័យអែតច័ន។

៣.៣ ភាពអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ និងដេទែមីណង់ (Wronskian)

ការបង្ហាញចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរអូម៉ូហ្សែនលំដាប់ទី២ ពីព្រោះមានបន្សំលីនេអ៊ែរនៃចម្លើយចំនួនពីរដែល ដេទែមីណង់Wronskian មិនសូន្យ គឺទាក់ទងយ៉ាងខ្លាំងទៅនឹងការបង្ហាញភាពអាស្រ័យលីនេអ៊ែរនៃអនុគមន៍ពីរ។ វាមានសារៈសំខាន់ក្នុងកន្សោមពីជគណិត និងក្នុងបរិបទបច្ចុប្បន្ន ។ យើងនឹងពិភាក្សាយ៉ាងខ្លីនៅក្នុងចំណុចនេះ ។

ទ្រឹស្តីបទ២.៣.១ ប្រសិនបើ f និង g ជាអនុគមន៍មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើចន្លោះបើក I ។ ប្រសិនបើ $W(f,g)(t_0)\neq 0$ សម្រាប់ចំណុច t_0 មួយចំនួនក្នុង I នោះ f និង g មានភាពមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរលើ I ។ ហើយបើ f និង g មានភាពអាស្រ័យលីនេអ៊ែរលើ I នោះ $W(f,g)(t_0)=0$ សម្រាប់គ្រប់តម្លៃ t_0 ក្នុង I ។

យើងអាចអនុវត្តន៍ទៅលើអនុគមន៍ $f(t)=e^t$ និង $g(t)=e^{2t}$ ដែលបានពិភាក្សាក្នុងឧទាហរណ៍២ ។ សម្រាប់គ្រប់ចំណុច t_0 ណាមួយ យើងបាន

$$W(f,g)(t_0)=\begin{vmatrix} e^{t_0} & e^{2t_0} \\ e^{t_0} & 2e^{2t_0} \end{vmatrix}=e^{3t_0}\neq 0$$

ដូចនេះ អនុគមន៍ e^t និង e^{2t} គឺមានភាពមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរនៅលើចន្លោះណាមួយ ។

ទ្រឹស្តីបទ២.៣.២ (ទ្រឹស្តីបទ Abel)ប្រសិនបើ y_1 និង y_2 ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$L[y]=y''+p(t)y'+q(t)y=0,$$

ដែល p និង q គឺជាប់នៅលើចន្លោះបើក I នោះដេទែមីណង់វ៉ុងគៀន $W(y_1,y_2)(t)$ ត្រូវបានកំណត់ដោយៈ

$$W(y_1,y_2)(t)=c\exp\left[-\int p(t)dt\right]$$

ដែល c ជាចំនួនថេរមួយដែលអាស្រ័យលើ y_1 និង y_2 ប៉ុន្តែមិនមែនអាស្រ័យលើ t ។ បន្ថែមពីនេះ $W(y_1,y_2)(t)$ គឺអាចស្មើសូន្យសម្រាប់គ្រប់ t នៅក្នុង I (ប្រសិនបើ $c=0$) រឺក្រៅពីសូន្យក្នុង I (ប្រសិនបើ $c\neq 0$) ។

ដើម្បីបង្ហាញទ្រឹស្តីបទ Abel យើងចាប់ផ្តើមដោយកត់សម្គាល់ឃើញថា y_1 និង y_2 ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$y_1''+p(t)y_1'+q(t)y_1=0,$$
$$y_2''+p(t)y_2'+q(t)y_2=0,$$

ប្រសិនបើយើងគុណសមីការទី១នឹង $-y_2$ សមីការទី២នឹង y_1 ហើយបូកលទ្ធផលនៃសមីការទាំងពីរនោះ យើងបាន

$$(y_1y_2''-y_1''y_2)+p(t)(y_1y_2'-y_1'y_2)=0$$

បន្ទាប់មក យើងតាង $W(t)=W(y_1,y_2)(t)$ ហើយសង្កេតឃើញថា

$$W'=y_1y_2''-y_1''y_2$$

រួចយើងអាចសរសេរសមីការ (10) ជាទម្រង់

$$W' + p(t)W = 0$$

សមីការ (12) អាចដោះស្រាយយ៉ាងលឿនពីព្រោះតែវាជាសមីការលីនេអ៊ែរលំដាប់ទី១ (ចំណុច ២.១) សមីការត្រូវបានបំបែក (ចំណុច២.២) ។ ដូចនេះ

$$W(t) = c\exp\left[-\int p(t)dt\right],$$

ដែល c ថេរ ។ តម្លៃ c អាស្រ័យលើគូចម្លើយនៃសមីការណាមួយដែលជាប់ទាក់ទង ។ ទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ ពីព្រោះតែអនុគមន៍ឪផេរ៉ង់ស្យែលគឺមិនសូន្យ នោះ $W(t)$ គឺមិនសូន្យប្រសិនបើ $c \neq 0$ ។ ក្នុងករណីខ្លះ $W(t)$ គឺសូន្យសម្រាប់គ្រប់ t ដែលបំពេញភស្តុតាងនៃទ្រឹស្តីបទ៣.៣.២ ។

កំណត់ចំណាំថាដេទែមីណង់Wronskian នៃសំណុំចម្លើយគ្រឹះពីរណាមួយនៃដំណោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតែមួយអាចខុសត្រឹមតែផលគុណចំនួនថេរ នោះដេទែមីណង់Wronskian នៃសំណុំចម្លើយគ្រឹះណាមួយដែលត្រូវបានកំណត់ បង្កើនផលគុណចំនួនថេរដោយមិនចាំបាច់ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ។

ឧទាហរណ៍៣៖ បង្ហាញថា $y_1(t) = t^{\frac{1}{2}}$ និង $y_2(t) = t^{-1}$ ជាចម្លើយនៃសមីការ

$$2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \qquad t > 0 \qquad (14)$$

សន្មត់ថាដេទែមីណង់Wronskian នៃ y_1 និង y_2 ត្រូវបានផ្តល់អោយដោយសមីការ ។

ពីឧទាហរណ៍ដែលទើបតែលើកឡើង យើងដឹងថា $W(y_1,y_2)(t) = -\left(\frac{3}{2}\right)t^{-\frac{3}{2}}$

ដូចនេះ យើងបាន

$$y'' + \frac{3}{2t}y' - \frac{1}{2t^2}y = 0,$$

ដូច្នេះ $p(t) = \frac{3}{2t}$ ។ គេបាន

$$W(y_1,y_2)(t) = c\exp\left[-\int \frac{3}{2t}dt\right] = c\exp\left(-\frac{3}{2}\ln t\right) = ct^{-\frac{3}{2}}$$

សម្រាប់ចម្លើយជាក់លាក់ដែលត្រូវបានផ្តល់ឱ្យនៅក្នុងឧទាហរណ៍នេះ យើងត្រូវជ្រើសរើស $c = -\frac{3}{2}$ ។

> **ទ្រឹស្តីបទ២.៣.៣៖** តាង y_1 និង y_2 ជាចម្លើយនៃសមីការ $L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$ ដែល p និង q ជាប់នៅលើចន្លោះបើក I ។ នោះ y_1 និង y_2 មានភាពអាស្រ័យលីនេអ៊ែរលើ I លុះត្រាតែ $W(y_1,y_2)(t)$ គឺសូន្យសម្រាប់គ្រប់ t ក្នុង I ។ម្យ៉ាងទៀត y_1 និង y_2 មិនមានភាពអាស្រ័យលីនេអ៊ែរលើចន្លោះ I លុះត្រាតែ $W(y_1,y_2)(t)$ គឺមិនសូន្យក្នុង I ។

ក្នុងការបង្ហាញទ្រឹស្តីបទ៣.៣.២ សង្កេតដំបូងថា បើ y_1 និង y_2 មានភាពអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ នោះ $W(y_1,y_2)(t)$ គឺសូន្យសម្រាប់គ្រប់ t ក្នុង I បានបង្ហាញក្នុងទ្រឹស្តីបទ៣.៣.១ ។ វានៅតែត្រូវបង្ហាញផ្ទុយ ដែលថាបើ $W(y_1,y_2)(t)$ គឺសូន្យតាមរយៈ I នោះ y_1 និង y_2 មានភាពអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ ។ តាង t_0 ជាចំណុចណាមួយនៅក្នុង I នោះចាំបាច់ឱ្យ $W(y_1,y_2)(t_0) = 0$ ។ ហេតុនេះហើយប្រព័ន្ធសមីការ

$$c_1y_1(t_0)+c_2y_2(t_0)=0,$$
$$c_1y_1'(t_0)+c_2y_2'(t_0)=0$$

សម្រាប់ c_1 និង c_2 ដែលមិនមែនជាចម្លើយ ។ ដោយប្រើប្រាស់តម្លៃនៃ c_1 និង c_2 តាង $\phi(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$ ។ នោះ ϕ ជាចម្លើយនៃសមីការ និងដោយសមីការ ϕ ក៏ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដើម $\phi(t_0)=0,\quad \phi'(t_0)=0$

ដូចនេះ ដោយផ្អែកតែមួយនៃទ្រឹស្តីបទ២.២.១ ឬដោយឧទាហរណ៍២ក្នុងចំណុច៣.២ $\phi(t)=0$ សម្រាប់គ្រប់ t ក្នុង I ។ ពីព្រោះតែ $\phi(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$ ដែល c_1 និង c_2 មិនសូន្យ នេះមានន័យថា y_1 និង y_2 មានភាពអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ ។

ឥឡូវយើងសង្ខេបការពិតអំពីសំណុំចម្លើយគ្រឹះ ដេទែមីណង់Wronskian និងភាពមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរតាមវិធីខាងក្រោម ។ តាង y_1 និង y_2 ជាចម្លើយនៃសមីការ

$$y''+p(t)y'+q(t)=0,$$

ដែល p និង q ជាប់លើចន្លោះបើក I ។ នោះដំហានទាំង៤ខាងក្រោម

១. អនុគមន៍ y_1 និង y_2 គឺជាសំណុំចម្លើយគ្រឹះលើ I ។

២. អនុគមន៍ y_1 និង y_2 គឺមិនមានភាពអាស្រ័យលីនេអ៊ែរលើ I ។

៣. $W(y_1,y_2)(t_0)\neq 0$ ចំពោះ t_0 មួយចំនួនក្នុង I ។

៤. $W(y_1,y_2)(t)\neq 0$ ចំពោះគ្រប់ t ក្នុង I ។

លំហាត់

ក្នុងលំហាត់ទី១ ដល់ទី៨ខាងក្រោម កំណត់ថាតើគូនៃអនុគមន៍ដែលឱ្យមានភាពអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ ឬមានភាពមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ ។

1. $f(t)=t^2+5t,\qquad g(t)=t^2-5t$

2. $f(\theta)=\cos 3\theta,\qquad g(\theta)=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

3. $f(t)=e^{\lambda t}\cos\mu t,\qquad g(t)=e^{\lambda t}\sin\mu t,\qquad \mu\neq 0$

4. $f(x)=e^{3x},\qquad g(x)=e^{3(x-1)}$

5. $f(t)=3t-5,\qquad g(t)=9t-15$

6. $f(t)=t,\qquad g(t)=t^{-1}$

7. $f(t)=3t,\qquad g(t)=|t|$

8. $f(x)=x^3,\qquad g(x)=|x|^3$

9. ដេទែមីណង់Wronskian នៃអនុគមន៍ពីរគឺ $W(t)=t\sin^2 t$ ។ តើអនុគមន៍នេះមានភាពអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ រឺមានភាពមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ? ហេតុអ្វី?

10. ដេទែមីណង់Wronskian នៃអនុគមន៍ពីរគឺ $W(t)=t^2-4$ ។ តើអនុគមន៍នេះមានភាពអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ រឺមានភាពមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ? ហេតុអ្វី?

11. ប្រសិនបើអនុគមន៍ y_1 និង y_2 ជាចម្លើយភាពមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរនៃ $y''+p(t)y'+q(t)y=0$ បង្ហាញថា c_1y_1 និង c_2y_2 ក៏ជាចម្លើយភាពមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរដែរ ។ ដោយ c_1 និង c_2 ខុសពីសូន្យ ។

12. ប្រសិនបើអនុគមន៍ y_1 និង y_2 ជាចម្លើយភាពមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរនៃ $y''+p(t)y'+q(t)y=0$ បង្ហាញថា $y_3=y_1+y_2$ និង $y_4=y_1-y_2$ ក៏មានទម្រង់សំណុំចម្លើយភាពមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរដែរ ។

13. ប្រសិនបើ y_3 និង y_4 ជាចម្លើយភាពមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល បង្ហាញថា y_1 និង y_2 ក៏ដូច្នឹងដែរ ។

14. ប្រសិនបើអនុគមន៍ y_1 និង y_2 ជាចម្លើយភាពមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរនៃ $y''+p(t)y'+q(t)y=0$ កំណត់ថាតើលក្ខខណ្ឌអ្វីដែលធ្វើឱ្យអនុគមន៍ $y_3=a_1y_1+a_2y_2$ និង $y_4=b_1y_1+b_2y_2$ ក៏ជាទម្រង់សំណុំចម្លើយភាពមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ ?

(a) បង្ហាញថាវ៉ិចទ័រទំហំពីរណាមួយអាចសរសេរជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃ $i+j$ និង $i-j$ ។

(b) បង្ហាញថាបើវ៉ិចទ័រ $X=x_1i+x_2j$ និង $Y=y_1i+y_2j$ មានភាពមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ នោះមានវ៉ិចទ័រ $z=z_1i+z_2j$ ណាមួយដែលអាចចាត់ទុកជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃ X និង Y ។ កំណត់ចំណាំថា៖បើ X និង Y មានភាពមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ នោះ $x_1y_2-x_2y_1\neq 0$ ។ ហេតុអ្វី ?

នៅក្នុងលំហាត់ពីទី១៥ ដល់ទី១៨ រកដេទែមីណង់Wronskian នៃគូចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ដែលឱ្យដោយមិនចំបាច់ដោះស្រាយសមីការនោះទេ ។

15.$t^2y''-t(t+2)y'+(t+2)y=0$

16.$(\cos t)y''+(\sin t)y'-ty=0$

17.$x^2y''+xy'+\left(x^2-v^2\right)y=0,$ សមីការរបស់ *Bessel*

18.$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0,$ សមីការរបស់ *Legendre*

19.បង្ហាញថាប្រសិនបើ p មានឌីផេរ៉ង់ស្យែល ហើយ $p(t)>0$ នោះដេទែមីណង់Wronskian $W(t)$ ជាចម្លើយពីរនៃ $\left[p(t)y'\right]'+q(t)y=0$ គឺ $W(t)=\dfrac{c}{p(t)}$ ដែល c ជាចំនួនថេរ ។

20. ប្រសិនបើ y_1 និង y_2 ជាចម្លើយភាពមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរនៃ $ty''+2y'+te^ty=0$ ហើយបើ $W(y_1,y_2)(1)=2$ ។ រកតម្លៃនៃ $W(y_1,y_2)(5)$ ។

21.ប្រសិនបើ y_1 និង y_2 ជាចម្លើយភាពមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរនៃ $ty''-2y'+(3+t)y=0$ ហើយបើ $W(y_1,y_2)(2)=3$ ។ រកតម្លៃនៃ $W(y_1,y_2)(4)$ ។

22. ប្រសិនបើដេទែមីណង់ Wronskian នៃចម្លើយពីរណាមួយនៃ $y''+p(t)y'+q(t)y=0$ ជាចំនួនថេរ តើអ្វីនឹងកំណត់អំពីមេគុណ p និង q ?

23.ប្រសិនបើ f, g និង h ជាអនុគមន៍មានឌីផេរ៉ង់ស្យែល បង្ហាញថា $W(fg,\, fh)=f^2W(g,h)$ ។

នៅក្នុងលំហាត់ទី២៤ ដល់ទី២៦ សន្មត់ថា p និង q ជាប់ ហើយអនុគមន៍ y_1 និង y_2 ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''+p(t)y'+q(t)=0$ លើចន្លោះបើក I មួយ

24. បង្ហាញថា y_1 និង y_2 ស្មើសូន្យនៅចំណុចដូចគ្នានៅក្នុង I ដែលមិនមែនជាសំណុំគ្រឹះនៃចម្លើយនៅចន្លោះនោះ។

25. បង្ហាញថា y_1 និង y_2 មានអតិបរមាឬអប្បបរមានៅចំណុចដូចគ្នាក្នុង I ដែលមិនមែនជាសំណុំគ្រឹះនៃចម្លើយលើចន្លោះនោះ។

26. បង្ហាញថា y_1 និង y_2 មានចំណុចរួមមួយនៃធ្មិតឆ្លុះ t_0 ក្នុង I ដែលមិនមែនជាសំណុំគ្រឹះនៃចម្លើយលើ I លុះត្រាតែ p និង q ស្មើសូន្យនៅខណៈ t_0 ។

27. បង្ហាញថា t និង t^2 ជាភាពមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរលើចន្លោះ $-1<t<1,$ ជាកាពិត វាជាភាពមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរគ្រប់ចន្លោះ។ រួចបង្ហាញថា $w(t,t^2)$ ស្មើសូន្យនៅខណៈ $t=0$។ តើអ្នកអាចសន្និដ្ឋានអ្វីខ្លះ អំពីលទ្ធភាពដែល t និង t^2 ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''+p(t)y'+q(t)y=0$? ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា t និង t^2 ជាចម្លើយនៃសមីការ $t^2y''-2ty'+2y=0$ ។ តើផ្ទុយពីការសន្និដ្ឋានរបស់អ្នកដែរឬទេ ?តើលក្ខណៈនៃ *Wronskian* នៃ t និង t^2 ផ្ទុយពីទ្រឹស្តីបទ3.3.2 ដែរឬទេ ?

28. បង្ហាញថាអនុគមន៍ $f(t)=t^2|t|$ និង $g(t)=t^3$ មានភាពអាស្រ័យលីនេអ៊ែរលើចន្លោះ $0<t<1$ និង $-1<t<0$ ។ ប៉ុន្តែមានភាពមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរលើចន្លោះ $-1<t<1$។ ទោះបីជា f និង g មានភាពមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ ចូរបង្ហាញថា $w(f,g)$ ស្មើសូន្យគ្រប់ t ក្នុងចន្លោះ $-1<t<1$។ ដូច្នេះ f និង g មិនមែនជាចម្លើយនៃសមីការ $y''+p(t)y'+q(t)y=0$ ដែល p និង q ជាប់លើចន្លោះ $-1<t<1$។

៣.៤ ឫសកុំផ្លិចនៃសមីការសម្គាល់

យើងមានសមីការ $ay''+by'+cy=0$ (1) ដែល a,b និង c ជាចំនួនពិត។ ក្នុងផ្នែក 3.1 យើងឃើញថា បើយើងស្វែងរកចម្លើយនៃទម្រង់ $y=e^{rt}$ ហើយ r ត្រូវតែជាឫសនៃសមីការសម្គាល់

$$ar^2+br+c=0 \quad (2)$$

បើឫស r_1 និង r_2 ជាចំនួនពិតខុសគ្នាដែលជាចម្លើយនៃឌីសគ្រីមីណង់ $b^2-4ac>0$ នោះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ(1)គឺ $y=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t}$ (3)

បើ $b^2-4ac<0$ នោះឫសនៃសមីការ (2) ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់ យើងកំណត់សរសេរ

$$r_1=\lambda+i\mu,\ r_2=\lambda-i\mu \quad (4)$$

ដែល λ និង μ ជាចំនួនពិត។ការបង្ហាញដែលត្រូវគ្នាសម្រាប់ y គឺ

$$y_1(t)=\exp[(\lambda+i\mu)t], \qquad y_2(t)=\exp[(\lambda-i\mu)t] \quad (5)$$

ប្រសិនបើ $\lambda=-1$, $\mu=2$ និង $t=3$ នោះពីសមីការ (5) ខាងលើគឺ $y_1(3)=e^{-3+6i}$ (6) ។

រំលឹកឡើងវិញពីការគណនាស៊េរី *Taylor* សម្រាប់ e^t បើ $t=0$ គឺ

$$e^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!},-\infty<t<\infty \quad (7)$$

សន្មតបានថាយើងអាចជំនួស t ដោយ it ក្នុងសមីការ (7) នោះយើងបាន៖

$$e^{it}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^{2n-1}}{(2n-1)!}\ , \qquad (8)$$

ចំពោះចំណុចដែលយើងបានបំបែកផលបូកទៅជាផ្នែកនិមិត្តនិងផ្នែកពិត។ ការបង្កើតការប្រើប្រាស់នៃភាពពិតដែល $i^2=-1,\ i^3=-i\ ,\ i^4=1$ ជាដើម។ ស៊េរីដំបូងក្នុងសមីការ (8) គឺយ៉ាងជាក់លាក់ស៊េរី *taylor* សម្រាប់ $\cos t$ បើ $t=0$ និងទី 2 ជាស៊េរី *taylor* សម្រាប់ $\sin t$ បើ $t=0$ ដូច្នេះយើងបាន:

$$e^{it}=\cos t+i\sin t \qquad (9)$$

$$e^{-it}=\cos t-i\sin t \qquad (10)$$

បន្ថែមពីនេះបើ t ត្រូវបានជំនួសដោយ μt ក្នុងសមីការ (9) នោះយើងទទួលបានសមីការទូទៅនៃរូបមន្ត *Euler* គឺ

$$e^{i\mu t}=\cos\mu t+i\sin\mu t \qquad (11)$$

បន្ទាប់ទៀត យើងចង់ពង្រីកនិយមន័យនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលទៅជានិទស្សន្តកុំផ្លិចនៃទម្រង់ $(\lambda+i\mu)t$ ។ នៅពេលដែលយើងចង់បានលក្ខណៈទូទៅនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលដែលមាននិទស្សន្តជាចំនួនកុំផ្លិច។ យើងត្រូវការ $e^{(\lambda+i\mu)t}$ ដើម្បីបំពេញ

$$e^{(\lambda+i\mu)t}=e^{\lambda t}e^{i\mu t} \qquad (12)$$

បន្ទាប់មកជំនួស $e^{i\mu t}$ ដោយ $e^{(\lambda+i\mu)t}$ ក្នុងសមីការ (11) យើងទទួលបាន

$$e^{(\lambda+i\mu)t}=e^{\lambda t}(\cos\mu t+i\sin\mu t)=e^{\lambda t}\cos\mu t+ie^{\lambda t}\sin\mu t \qquad (13)$$

ចម្លើយទូទៅ អនុគមន៍ $y_1(t)$ និង $y_2(t)$ ត្រូវបានផ្តល់ដោយសមីការ (5) ដែលអត្ថន័យបានបង្ហាញដោយសមីការ (13) ជាចម្លើយនៃសមីការ (1) នៅពេលដែលឫសនៃសមីការសម្គាល់ (2) ជាចំនួនកុំផ្លិច $\lambda\pm i\mu$ ។ ផ្ទុយទៅវិញចម្លើយ y_1 និង y_2 ជាអនុគមន៍តម្លៃកុំផ្លិចដែលជាទូទៅយើងគួរតែមានចម្លើយតម្លៃពិតបើអាចទៅរួច ពីព្រោះសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានមេគុណពិត។ ចម្លើយផ្សេងទៀតអាចត្រូវបានរកឃើញជាការសន្និដ្ឋានមួយនៃទ្រឹស្តីបទ២.២.២ដែលបានបង្ហាញថាបើ y_1 និង y_2 ជាចម្លើយនៃសមីការ (1) នោះបន្សំលីនេអ៊ែរនៃ y_1 និង y_2 ក៏ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការផងដែរ។ ជាពិសេស ចូរយើងបង្កើតផលបូកនិងផលដកនៃ y_1 និង y_2 ។

យើងមាន $y_1(t)+y_2(t)=e^{\lambda t}(\cos\mu t+i\sin\mu t)+e^{\lambda t}(\cos\mu t-i\sin\mu t)=2e^{\lambda t}\cos\mu t$

និង $y_1(t)-y_2(t)=e^{\lambda t}(\cos\mu t+i\sin\mu t)-e^{\lambda t}(\cos\mu t-i\sin\mu t)=2ie^{\lambda t}\sin\mu t$ ។ យើងអាចដកចេញមេគុណ 2 និង $2i$ រៀងគ្នា បន្ទាប់មកយើងសរសេរបានគូនៃចម្លើយតម្លៃពិត

$$u(t)=e^{\lambda t}\cos\mu t\ ,\ v(t)=e^{\lambda t}\sin\mu t \ (15)$$

សង្កេតថា u និង v ជាផ្នែកនិមិត្តនិងផ្នែកពិតរៀងគ្នានៃ y_1 ។ ការគណនាដោយផ្ទាល់អ្នកអាចបង្ហាញថា *Wronskian* នៃ u និង v គឺ

$$W(u,v)(t)=\mu e^{2\lambda t} \qquad (16)$$

ចម្លើយទូទៅគឺ $y=c_1e^{\lambda t}\cos\mu t+c_2e^{\lambda t}\sin\mu t$ (17)

ដែល c_1 និង c_2 ជាចំនួនថេរ។

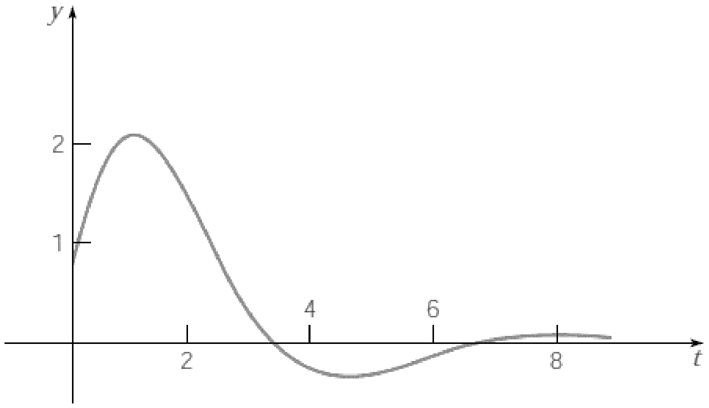
ឧទាហរណ៍ទី១៖ រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y''+y'+y=0$

ចម្លើយ

គេបានសមីការសម្គាល់គឺ $r^2+r+1=0$

នោះ $r=\dfrac{-1\pm(1-4)^{\frac{1}{2}}}{2}=-\dfrac{1}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ នាំឲ្យ $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ និង $\mu=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ដូច្នេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (18) គឺ $y=c_1e^{-\frac{t}{2}}\cos(\sqrt{3}t/2)+c_2e^{-\frac{t}{2}}\sin(\sqrt{3}t/2)$ ។



រូបភាព 3.4.1: ចម្លើយទូទៅនៃ $y''+y'+y=0$

ឧទាហរណ៍ទី២៖ ស្វែងរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''+9y=0$

ចម្លើយ

សមីការសម្គាល់គឺ $r^2+9=0$

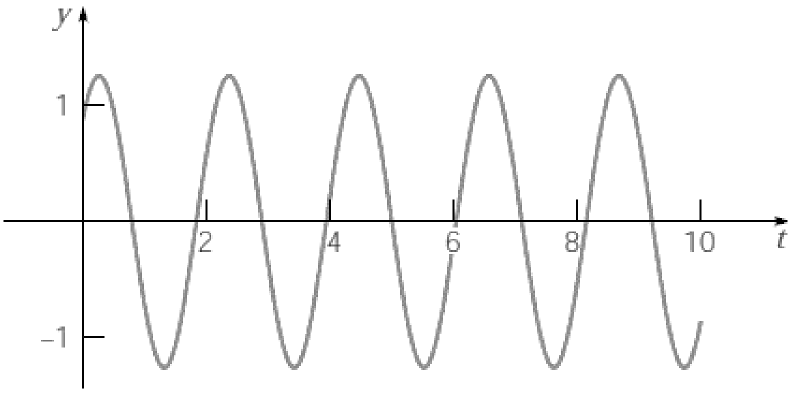
$r^2=-9$

$r=\pm\sqrt{-9}$

$r=\pm3i=0\pm3i$

នោះ $\lambda=0$ និង $\mu=3$

ដូច្នេះចម្លើយទូទៅគឺ $y=c_1\cos3t+c_2\sin3t$



រូបភាព 2.4.2 : ចម្លើយទូទៅនៃ $y''+9y=0$

ឧទាហរណ៍ទី៣៖ រកចម្លើយប្រាកដនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានលក្ខខណ្ឌ

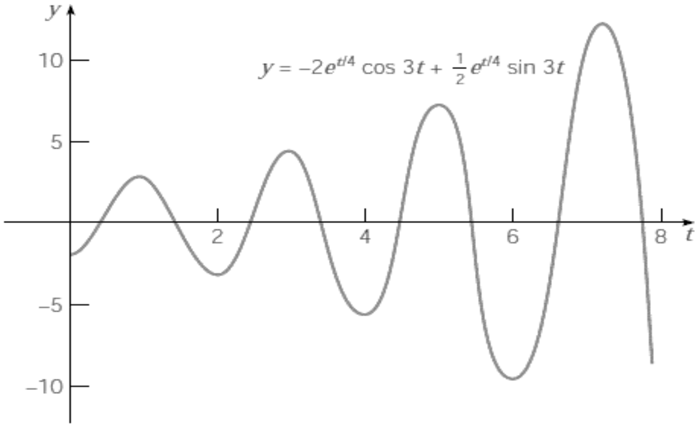
$16y''-8y'+145y=0$, $y(0)=-2$, $y'(0)=1$

ចម្លើយ

សមីការសម្គាល់គឺ $16r^2-8r+145=0$ ហើយឫសរបស់វាគឺ $r=\frac{1}{4}\pm 3i$ ។

ដូច្នេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលគឺ $y=c_1e^{\frac{t}{4}}\cos 3t+c_2e^{\frac{t}{4}}\sin 3t$

ដើម្បីដាក់លក្ខខណ្ឌដំបូងយើងឲ្យ យើងទទួល $y=-2e^{\frac{t}{4}}\cos 3t+\frac{1}{2}e^{\frac{t}{4}}\sin 3t$ (24) បានជាចម្លើយនៃសមីការមានលក្ខខណ្ឌ



រូបភាព 2.4.3: ចម្លើយទូទៅនៃ $16y''-8y'+145y=0$, $y(0)=-2$, $y'(0)=1$

លំហាត់

ក្នុងលំហាត់នីមួយៗពី 1 ដល់ 6 ប្រើរូបមន្តរបស់ *Euler* ដើម្បីសរសេរកន្សោមដែលផ្ដល់ឲ្យក្នុងទម្រង់ $a+ib$ ។

1. e^{1+2i} 2. e^{2-3i}

3. $e^{i\pi}$ 4. $e^{2-(\frac{\pi}{2})i}$

5. 2^{1-i} 6. π^{-1+2i}

ក្នុងលំហាត់នីមួយៗពី 7 ដល់ 16 ។ រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

7. $y''-2y'+2y=0$
8. $y''-2y'+6y=0$
9. $y''+2y'-8y=0$
10. $y''+2y'+2y=0$
11. $y''+6y'+13y=0$
12. $4y''+9y=0$
13. $y''+2y'+1.25y=0$
14. $9y''+9y'-4y=0$
15. $y''+y'+1.25y=0$
16. $y''+4y'+6.25y=0$

ក្នុងលំហាត់នីមួយៗពី 17 ដល់ 22 ។ រកចម្លើយនៃសមីការដែលមានលក្ខខណ្ឌ។ គូសក្រាបនៃចម្លើយនិងពណ៌នាពីលក្ខណៈរបស់វាសម្រាប់ការកើនឡើង t ។

17. $y''+4y=0$, $y(0)=0,\ y'(0)=1$

18. $y''+4y'+5y=0$, $y(0)=1,\ y'(0)=0$

19. $y''-2y'+5y=0$, $y(\frac{\pi}{2})=0$, $y'(\frac{\pi}{2})=2$

20. $y''+y=0,\ y(\frac{\pi}{3})=2$, $y'(\frac{\pi}{3})=-4$

21. $y''+y'+1.25y=0$, $y(0)=3$, $y'(0)=1$

22. $y''+2y'+2y=0$, $y(\frac{\pi}{4})=2,\ y'(\frac{\pi}{4})=-2$

23. គេមានសមីការមានលក្ខខណ្ឌ: $3u''-u'+2u=0$, $u(0)=2$, $u'(0)=0$

$a)$ រកចម្លើយ $u(t)$ នៃលំហាត់នេះ

$b)$ រកពេលដំបូងពេលដែល $|u(t)|=10$ ។

24. គេឱ្យសមីការមានលក្ខខណ្ឌ : $5u''+2u'+7u=0$, $u(0)=2$, $u'(0)=1$

$a)$ រកចម្លើយ $u(t)$ លំហាត់នេះ

$b)$ រក T តូចបំផុតដែល $|u(t)|\le 0.1$ គ្រប់ $t>T$ ។

25. គេឱ្យសមីការមានលក្ខខណ្ឌ: $y''+2y'+6y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=\alpha\ge 2$

$a)$ រកចម្លើយ $y(t)$ នៃលំហាត់នេះ

$b)$ រក α ដើម្បីឱ្យ $y=0$ នៅពេល $t=1$ ។

$c)$ រកអនុគមន៍មួយនៃ α តម្លៃវិជ្ជមានតូចបំផុតនៃ t ដែល $y=0$

$d)$ កំណត់លីមីតនៃកន្សោមដែលបានរកឃើញក្នុងផ្នែក (c) ពេល $\alpha\to\infty$ ។

26. គេមានសមីការមានលក្ខខណ្ឌដូចខាងក្រោម៖

$y''+2ay'+(a^2+1)y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$

$a)$ រកចម្លើយ $y(t)$ នៃលំហាត់នេះ

$b)$ បើ $a=1$ រក T តូចបំផុតពេលដែល $|y(t)|<0.1$ ដែល $t>T$

$c)$ ជួសក្នុងផ្នែក (b) បើ $a=\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ និង 2

$d)$ ប្រើលទ្ធផលក្នុងផ្នែក (b) និង (c) ចូរប្រៀបធៀប T និង a ហើយពិពណ៌នាពីទំនាក់ទំនងរវាង T និង a ។

27. បង្ហាញថា $W(e^{\lambda t}\cos\mu t, e^{\lambda t}\sin\mu t)=\mu e^{2\lambda t}$ ។

28. ក្នុងលំហាត់នេះយើងនឹងធ្វើផលដកដេរីវេនៃរូបមន្តរបស់ $Euler$ ។

$a)$ បង្ហាញថា $y_1(t)=\cos t$ និង $y_2(t)=\sin t$ ជាសំណុំគ្រឹះនៃចម្លើយរបស់សមីការ $y''+y=0$ ហើយបង្ហាញថាវាជាចម្លើយនិង $Wronskian$ របស់វាមិនស្មើសូន្យនោះទេ។

$b)$ បង្ហាញថា $y=e^{it}$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $y''+y=0$ នាំឲ្យ $e^{it}=c_1\cos t+c_2\sin t$ (i) សម្រាប់ចំនួនពិត c_1 និង c_2 ។ ហេតុអ្វីដូច្នោះ ?

$c)$ បើ $t=0$ ក្នុងសមីការ (i) ដើម្បីបង្ហាញថា $c_1=1$ ។

$d)$ សន្មតថាសមីការ (14) គឺពិតដោយបែងចែកសមីការ (i) និងឲ្យ $t=0$ ដើម្បីសន្និដ្ឋានថា $c_2=i$ ។ ប្រើតម្លៃ c_1 និង c_2 ក្នុងសមីការ (i) ឆ្ពោះទៅរករូបមន្តរបស់ $Euler$ ។

29. ប្រើរូបមន្ត $Euler$ បង្ហាញថា: $\cos t=(e^{it}+e^{-it})/2$, $\sin t=(e^{it}-e^{-it})/2i$

30. បើ e^{rt} ត្រូវបានផ្តល់ដោយសមីការ (13) បង្ហាញថា $e^{(r_1+r_2)t}=e^{r_1t}e^{r_2t}$ សម្រាប់ចំនួនកុំផ្លិច r_1 និង r_2 ។

31. បើ e^{rt} ត្រូវបានផ្តល់ដោយសមីការ (13) បង្ហាញថា $\frac{d}{dt}e^{rt}=re^{rt}$ សម្រាប់ចំនួនកុំផ្លិច r ។

32. តាងអនុគមន៍មានតម្លៃពិត p និង q ជាប់លើចន្លោះបើក I និងតាង $y=\phi(t)=u(t)+iv(t)$ ជាចម្លើយមានតម្លៃជាកុំផ្លិចនៃសមីការ $y''+p(t)y'+q(t)y=0$ (i) ដែល u និង v ជាអនុគមន៍មានតម្លៃពិត។ បង្ហាញថា u និង v ក៏ជាចម្លើយនៃសមីការ (i) ។

គន្លឹះដំណោះស្រាយ៖ ជំនួស $y=\phi(t)$ ក្នុងសមីការ (i) និងបែងចែកផ្នែកពិតនិងផ្នែកនិមិត្ត។

33. បើអនុគមន៍ y_1 និង y_2 ជាចម្លើយមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរនៃសមីការ $y''+p(t)y'+q(t)y=0$ ។ បង្ហាញថារវាងសូន្យជាប់គ្នានៃ y_1 មានមួយនិងសូន្យតែមួយនៃ y_2 ។ សម្គាល់ថាលទ្ធផលនេះត្រូវបានបង្ហាញដោយចម្លើយ $y_1(t)=\cos t$ និង $y_2(t)=\sin t$ នៃសមីការ $y''+y=0$ ។

បម្រែបម្រួលអថេរ

គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលជាមួយនឹងមេគុណអថេរ

$$y''+p(t)y'+q(t)y=0 \qquad (i)$$

អាចដាក់បានក្នុងទម្រង់សមស្របច្រើនសម្រាប់ការស្វែងរកចម្លើយដោយធ្វើឲ្យមានការប្តូរអថេរឯករាជ្យ និងឬក៏អថេរមិនឯករាជ្យ។ យើងបង្ហាញគំនិតទាំងនេះក្នុងលំហាត់ 34 ដល់ 42 ។ ជាពិសេសក្នុងដំណោះស្រាយលំហាត់ 34 យើងកំណត់លក្ខខណ្ឌដែលសមីការ (i) អាចបម្លែងទៅជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមួយដែលមានមេគុណជាចំនួនថេរនិងដោយហេតុនេះវាមានភាពងាយស្រួលក្នុងការដោះស្រាយ។ លំហាត់ 35 ដល់ 42 ផ្តល់ការអនុវត្តនៃវិធីសាស្ត្រនេះ។

34. ក្នុងលំហាត់នេះយើងកំណត់លក្ខខណ្ឌនៅលើ p និង q ដូចដែលសមីការ (i) អាចបម្លែងទៅជាសមីការមួយដែលមានមេគុណជាចំនួនថេរដោយផ្លាស់ប្តូរនៃអថេរឯករាជ្យ។ តាង $x=u(t)$ ជាអថេរឯករាជ្យថ្មីដែលទំនាក់ទំនងរវាង x និង t នឹងត្រូវបានបញ្ជាក់នៅពេលក្រោយ។

$a)$ បង្ហាញថា

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dx}\ ,\ \frac{d^2y}{dt^2}=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{dx}$$

$b)$ បង្ហាញថាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (i) មានទម្រង់

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{d^2x}{dt^2}+p(t)\frac{dx}{dt}\right)\frac{dy}{dx}+q(t)y=0 \qquad (ii)$$

$c)$ ក្នុងលំដាប់សម្រាប់សមីការ (ii) មានមេគុណជាចំនួនថេរ មេគុណនៃ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ហើយត្រូវតែសមាមាត្រ។ បើ $q(t)>0$ នោះយើងអាចជ្រើសរើសយកចំនួនពិតនៃសមាមាត្រទៅនឹង 1 ដូច្នេះ

$$x=u(t)=\int [q(t)]^{\frac{1}{2}}dt \qquad (iii)$$

$d)$ តម្លៃ x ដែលបានជ្រើសរើសក្នុងផ្នែក (c) បង្ហាញថាមេគុណនៃ $\frac{dy}{dx}$ ក្នុងសមីការ (ii) ក៏ជាចំនួនថេរ ដែលបានផ្តល់ជាកន្សោមៈ

$$\frac{q'(t)+2p(t)q(t)}{2[q(t)]^{\frac{3}{2}}} \qquad (iv)$$

ជាចំនួនថេរមួយ។ ដូច្នេះសមីការ (i) អាចបម្លែងទៅជាសមីការមួយដែលមានមេគុណជាចំនួនថេរដោយផ្លាស់ប្តូរអថេរឯករាជ្យដែលផ្តល់ថាអនុគមន៍ៈ $(q'+2pq)/q^{\frac{3}{2}}$ ជាចំនួនថេរមួយ។

តើលទ្ធផលនេះត្រូវកែប្រែយ៉ាងដូចម្តេចបើ $q(t)<0$?

ក្នុងលំហាត់នីមួយៗ 35 ដល់ 37 បម្លែងសមីការដែលផ្តល់ឲ្យទៅជាសមីការមួយដែលមានមេគុណជាចំនួនថេរដោយវិធីសាស្ត្រនៃលំហាត់ទី 34។ បើវាអាចទៅរួច រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការដែលគេឲ្យ:

35. $y''+y'+e^{-t^2}y=0 \quad -\infty<t<\infty$

36. $y''+3ty'+t^2y=0 \quad -\infty<t<\infty$

37. $ty''+(t^2-1)y'+t^3y=0 \quad 0<t<\infty$

សមីការ Euler :

38 គេមានសមីការមួយនៃទម្រង់ $t^2y''+\alpha ty'+\beta y=0$, $t>0$ ដែល α,β ជាចំនួនថេរត្រូវបានគេហៅថាសមីការ *Euler* ។ បង្ហាញថាការជំនួស $x=\ln t$ បម្លែងសមីការ *Euler* មួយទៅជាសមីការដែលមានមេគុណថេរមួយ។ សមីការ *Euler* ត្រូវបានគេសិក្សាស៊ីជម្រៅក្នុងផ្នែកបន្ត។

ក្នុងលំហាត់នីមួយៗពី 39 ដល់ 42 ។ប្រើលទ្ធផលនៃលំហាត់ 38 ដើម្បីដោះស្រាយសមីការដែលឱ្យសម្រាប់ $t>0$ ។

39. $t^2y''+ty'+y=0$

40. $t^2y''+4ty'+2y=0$

41. $t^2y''+3ty'+1.25y=0$

42. $t^2y''-4ty'-6y=0$

៣.៥ ឫសឌុប និង ការបន្ថយលំដាប់

ក្នុងផ្នែកដំបូង យើងបង្ហាញពីរបៀបដោះស្រាយនៃសមីការ

$$ay''+by'+cy=0 \qquad (1)$$

នៅពេលឫសនៃសមីការសម្គាល់

$$ar^2+br+c=0 \qquad (2)$$

អាចជាចំនួនពិតខុសគ្នា ឬជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់ ។ ឥឡូវយើងគិតករណីទីបីដែលអាចទៅរួច ពេលគឺថាឫសទាំងពីរ r_1 និង r_2 គឺស្មើគ្នា ។ ករណីនេះអាចកើតឡើង ពេលឌីគ្រីមីណង់ $b^2-4ac=0$ ហើយវាធ្វើតាមរូបមន្តកាដ្រាទីក

$$r_1=r_2=\frac{-b}{2a} \qquad (3)$$

ឫសទាំងពីរផ្តល់ចម្លើយដូចគ្នា

$$y_1(t)=e^{-bt/2a} \qquad (4)$$

នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (1) ហើយវា អាចរកចម្លើយទីពីរបាន $y_2=y_1\int\frac{e^{-\int Pdx}}{y_1^2}dx$

$y_2(t)=te^{-bt/2a}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១៖ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$y''+4y'+4y=0 \qquad (5)$$

សមីការសម្គាល់

$$r^2+4r+4=(r+2)^2=0$$

ដូចនេះ $r_1=r_2=-2$ ។ ដូច្នេះចម្លើយមួយនៃសមីការ (5) គឺ $y_1(t)=e^{-2t}$ ។ ដើម្បីរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (5) យើងត្រូវរកចម្លើយលើកទីពីរដែលមិនមែនជាពហុគុណនៃ y_1 ។ ចម្លើយទីពីរអាចរកបានតាមដោះស្រាយជំនួស $y=v(t)y_1(t)$ ក្នុងសមីការ (1) ហើយប្រើចម្លើយសមីការដើម្បីរក $v(t)$ ដោយចាប់ផ្តើម

$$y=v(t)y_1(t)=v(t)e^{-2t} \qquad (6)$$

យើងមាន

$$y'=v'(t)e^{-2t}-2v(t)e^{-2t} \qquad (7)$$

និង

$$y''=v''(t)e^{-2t}-4v'(t)e^{-2t}+4v(t)e^{-2t} \qquad (8)$$

ដោយជំនួសកន្សោម (6),(7)& (8) ក្នុងសមីការ (5) យើងទទួលបាន

$$\left[v''(t)-4v'(t)+4v'(t)-8v(t)+4v(t)\right]e^{-2t}=0$$

ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់បាន

$$v''(t)=0 \qquad (9)$$

ដូច្នេះ $v'(t)=c_1$

និង $v(t)=c_1t+c_2$ (10)

ដែល $c_1 \& c_2$ ជាចំនួនថេរណាមួយ ។ ចុងក្រោយ ជំនួស $v(t)$ ក្នុងសមីការ (6) យើងមាន

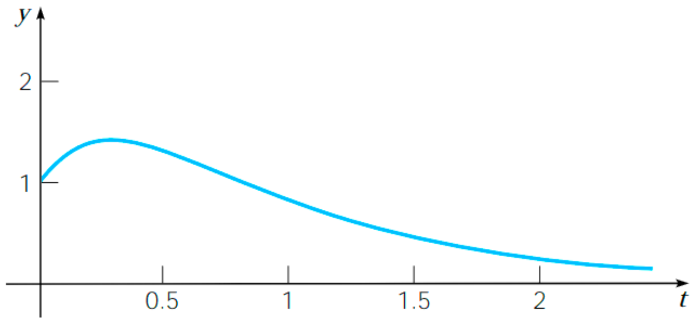
$$y=c_1te^{-2t}+c_2e^{-2t} \qquad (11)$$

ក្នុងផ្នែកទីពីរ នៅខាងស្តាំនៃសមីការ (11) ដែលចម្លើយត្រូវគ្នានឹង $y_1(t)=\exp(-2t)$ ប៉ុន្តែចម្លើយទីមួយកើតឡើងពីចម្លើយទីពីរ ពោលគឺ $y_2(t)=t\exp(-2t)$ ។ ចម្លើយទាំងពីរជាក់ស្តែងគឺមិនសមាមាត្រ ប៉ុន្តែយើងអាចផ្ទៀងផ្ទាត់ថាចម្លើយទាំងពីរជាលីនេអ៊ែរមិនអាស្រ័យ ដោយគណនាតាម Wronskian

$$W(y_1,y_2)(t)=\begin{vmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ -2e^{-2t} & (1-2t)e^{-2t} \end{vmatrix}=e^{-4t}-2te^{-4t}+2te^{-4t}=e^{-4t}\neq 0$$

ដូច្នេះ $y_1(t)=e^{-2t}$, $y_2(t)=te^{-t}$ (12)

ទម្រង់បង្កើតជាសំណុំនៃចម្លើយគ្រឹះនៃសមីការ (5) ហើយចម្លើយទូទៅនៃសមីការផ្តល់ដោយ សមីការ (11) ។ ចំណាំថា $y_1(t)$ និង $y_2(t)$ ទាំងពីរខិតជិតសូន្យ កាលណា $t\to\infty$ ជាលទ្ធផលគ្រប់ចម្លើយទាំងអស់នៃសមីការ (5) មានក្នុងវិធីធ្វើនេះ។ ក្រាបនៃចម្លើយគឺបង្ហាញក្នុងរូប 2.5.1



រូបភាព 2.5.1

៣.៥.១ វិធីសាស្រ្តដោះស្រាយទូទៅ

វិធីដែលប្រើក្នុងឧទាហរណ៍១ អាចត្រូវបានប្រើក្នុងចម្លើយទូទៅដែលមានសមីការសម្គាល់មានឫសឌុប ។ នេះយើងអាចសន្មតថា មេគុណក្នុងសមីការ (1) ផ្ទៀងផ្ទាត់ $b^2-4ac=0$ ក្នុងករណីដែល

$$y_1(t)=e^{-bt/2a}$$

គឺជាចម្លើយមួយ ។ បន្ទាប់មកយើងសន្មតថា

$$y=v(t)y_1(t)=v(t)e^{-bt/2a} \qquad (13)$$

និងជំនួសក្នុងសមីការ (1) ដើម្បីកំណត់ $v(t)$ ។ យើងមាន

$$y'=v'(t)e^{-bt/2a}-\frac{b}{2a}v(t)e^{-bt/2a} \qquad (14)$$

និង

$$y''=v''(t)e^{-bt/2a}-\frac{b}{a}v'(t)e^{-bt/2a}+\frac{b^2}{4a^2}v(t)e^{-bt/2a} \qquad (15)$$

បន្ទាប់មក ជំនួសក្នុងសមីការ (1) ។ យើងមាន

$$\left\{a\left[v''(t)-\frac{b}{a}v'(t)+\frac{b^2}{4a^2}v(t)\right]+b\left[v'(t)-\frac{b}{2a}v(t)\right]+cv(t)\right\}e^{-bt/2a}=0 \qquad (16)$$

លុបចោលកត្តា $e^{-bt/2a}$ ដែលមិនសូន្យ ហើយយើងទទួលបាន

$$av''(t)+(-b+b)v'(t)+\left(\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{2a}+c\right)v(t)=0 \qquad (17)$$

តួទាក់ទង $v'(t)$ គឺច្បាស់ជាសូន្យ ។ ម្យ៉ាងទៀត មេគុណនៃ $v(t)$ គឺ $c-(b^2/4a)$ គឺសូន្យផងដែរ ព្រោះ $b^2-4ac=0$ ក្នុងលំហាត់ដែលយើងដោះស្រាយ ។ នោះគ្រាន់តែជា**ឧទាហរណ៍១**សមីការ (17) ទទួលបាន

$$v''(t)=0$$

ដូច្នេះ $\qquad v(t)=c_1t+c_2$

តាមសមីការ (13) យើងមាន

$$y=c_1te^{-bt/2a}+c_2e^{-bt/2a} \qquad (18)$$

នោះ y គឺជាលីនេអ៊ែរបន្សំនៃពីរចម្លើយ

$$y_1(t)=e^{-bt/2a} \quad , \quad y_2(t)=te^{-bt/2a} \qquad (19)$$

Wronskian នៃពីរចម្លើយនេះគឺ

$$W(y_1,y_2)(t)=\begin{vmatrix} e^{-bt/2a} & te^{-bt/2a} \\ -\frac{b}{2a}e^{-bt/2a} & \left(1-\frac{bt}{2a}\right)e^{-bt/2a}\end{vmatrix}=e^{-bt/a} \qquad (20)$$

តាម $W(y_1,y_2)(t)$ គឺមិនសូន្យ ចម្លើយ y_1 និង y_2 ផ្តល់ដោយសមីការ (19) គឺជាសំណុំចម្លើយគ្រឹះ ។ ម្យ៉ាងវិញទៀត សមីការ (18) គឺជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (1) ពេលឫសនៃសមីការសម្គាល់គឺស្មើគ្នា។

ឧទាហរណ៍ទី២៖ រកចម្លើយនៃតម្លៃដំបូង ដែលផ្តល់ឱ្យក្នុងលំហាត់

$$y''-y'+0.25y=0, \quad y(0)=2, \quad y'(0)=\frac{1}{3} \qquad (21)$$

សមីការសម្គាល់ $\qquad r^2-r+0.25=0$

ដូចនេះឫសគឺ $r_1=r_2=1/2$ ។ នោះចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលគឺ

$$y=c_1e^{t/2}+c_2e^{t/2} \qquad (22)$$

លក្ខខណ្ឌតម្លៃដំបូងគឺ

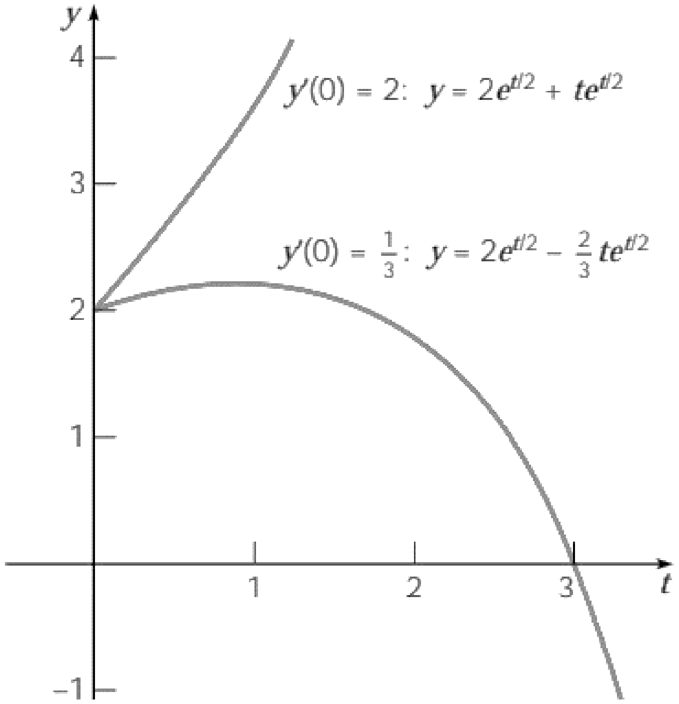
$$y(0)=c_1=2$$

លក្ខខណ្ឌទីពីរ ដំបូងយើងឌីផេរ៉ង់ស្យែលសមីការ (22) ហើយបន្ទាប់មកកំណត់ $t=0$

នេះបាន $\qquad y'(0)=\frac{1}{2}c_1+c_2=\frac{1}{3}$

ដូចនេះ $c_2=-2/3$ ។ នោះ ចម្លើយនៃតម្លៃដំបូងនៃលំហាត់គឺ $\qquad y=2e^{t/2}-\frac{2}{3}te^{t/2} \qquad (23)$

ក្រាបនៃចម្លើយបង្ហាញក្នុងរូបភាព 2.5.2



រូបភាព 2.5.2

សង្ខេបខ្លឹមសារ

យើងអាចសង្ខេបលទ្ធផលដែលយើងមានសម្រាប់សមីការលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែនលំដាប់ពីរដែលមានមេគុណជាចំនួនថេរ $ay'' + by' + cy = 0$ (1)

តាង r_1, r_2 ជាឫសនៃសមីការសម្គាល់ពហុធា

$$ar^2 + br + cy = 0 \qquad (2)$$

បើ r_1, r_2 ជាចំនួនពិតប៉ុន្តែមិនស្មើគ្នា នោះចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (1) គឺ

$$y = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t} \qquad (24)$$

បើ r_1, r_2 ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់ $\lambda \pm i\mu$ នោះចម្លើយទូទៅគឺ

$$y = c_1e^{\lambda t}\cos\mu t + c_2e^{\lambda t}\sin\mu t \qquad (25)$$

បើ $r_1 = r_2$ នោះចម្លើយទូទៅគឺ

$$y = c_1e^{r_1t} + c_2te^{r_1t} \qquad (26)$$

៣.៥.២ បន្ថយលំដាប់

វិធីប្រើពីមុន នៅក្នុងផ្នែកសម្រាប់សមីការមានមេគុណថេរ គឺជាវិធីធម្មតា ។ សន្មតថាយើងដឹងចម្លើយមួយ $y_1(y)$ ដែលមិនសូន្យនៃ

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \qquad (27)$$

ដើម្បីរកចម្លើយទីពីរ តាង

$$y = v(t)y_1(t); \qquad (28)$$

នោះ

$$y' = v'(t)y_1(t) + v(t)y_1'(t)$$

និង

$$y'' = v''(t)y_1t + 2v'(t)y_1'(t) + v(t)y_1''(t)$$

ជំនួស y, y', y'' ក្នុងសមីការ (27) មេគុណនៃ ក្នុងសមីការ គឺសូន្យ ដូចនេះសមីការទទួលបាន

$$y_1v'' + (2y_1' + py_1)v' + (y_1'' + py_1' + qy_1)v = 0 \qquad (29)$$

ដែល y_1 ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (27) មេគុណនៃ v ក្នុងសមីការ (29) គឺសូន្យ ដូចនេះសមីការ (29) ក្លាយជា

$$y_1v'' + (2y_1' + py_1)v' = 0 \qquad (30)$$

ផ្ទុយពីការបង្ហាញ សមីការ (30) គឺពិតជាសមីការលំដាប់មួយ សម្រាប់អនុគមន៍ v' ហើយអាចដោះស្រាយបានទាំងសមីការលីនេអ៊ែរតាមលំដាប់ ឬសមីការញែកចេញ ។ មួយទៀត v' ត្រូវបានរកឃើញ ហើយ v គឺមានដោយការធ្វើអាំងតេក្រាល ។ ចុងក្រោយ y គឺកំណត់ដោយសមីការ (28) ។ វិធិនេះគឺហៅថាវិធីនៃការបង្រួមលំដាប់ ព្រោះជំហានសំខាន់គឺ ចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់មួយសម្រាប់ v' ជាជាងសមីការដើមលំដាប់ពីរសម្រាប់ y ។ ទោះបីជាយ៉ាងណា វាអាចទៅរួចក្នុងការសរសេរទម្រង់សម្រាប់ $v(t)$ យើងនឹងជំនួសដោយបង្ហាញពីរបៀបដែលវិធិដោះស្រាយដោយឧទាហរណ៍។

ឧទាហរណ៍ទី៣ ដោយថា $y_1(t) = t^{-1}$ គឺជាចម្លើយមួយនៃ

$$2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \qquad t > 0 \qquad (31)$$

ចូររកចម្លើយមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរទីពីរ

យើងកំណត់ $y = v(t)t^{-1}$ នោះ

$$y' = v't^{-1} - vt^{-2}, \qquad y'' = v''t^{-1} - 2v't^{-2} + 2vt^{-3}$$

ជំនួស y, y' & y'' ក្នុងសមីការ (31) ហើយផ្តុំតួ យើងបាន

$$2t^2\left(v''t^{-1} - 2v't^{-2} + 2vt^{-3}\right) + 3t\left(v't^{-1} - vt^{-2}\right) - vt^{-1}$$

$$= 2tv'' + (-4+3)v' + \left(4t^{-1} - 3t^{-1} - t^{-1}\right)v$$

$$= 2tv'' - v' = 0 \qquad (32)$$

ចំណាំថា មេគុណនៃ v គឺសូន្យ វាអាចទៅរួច នេះផ្តល់នូវការពិនិត្យដ៏មានប្រយោជន៍លើពីជគណិតរបស់អ្នក។

ញែកចេញពីអថេរក្នុងសមីការ (32) និងរក $v'(t)$ យើងឃើញថា

$$v'(t) = ct^{1/2}$$

នោះ $$v(t) = \frac{2}{3}ct^{3/2} + k$$

យើងបាន $y=\frac{2}{3}ct^{1/2}+kt^{-1}$ (33)

ដែល c,k ជាចំនួនថេរណាមួយ ។ ហើយផ្នែកទីពីរ នៅខាងស្តាំនៃសមីការ (33) គឺជាពហុគុណនៃ $y_1(t)$ ហើយអាចធ្លាក់ចុះ ប៉ុន្តែតួដំបូងផ្តល់ចម្លើយមិនអាស្រ័យថ្មីមួយ ។ ការជ្រើសប្រហែសគុណនឹងចំនួនថេរ យើងមាន $y_2(t)=t^{1/2}$

លំហាត់

នៅក្នុងលំហាត់ 1 ដល់ 12 ចូររកចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលផ្តល់ឱ្យ និងមានសុពលភាពក្នុងចន្លោះពេលណាមួយ មិនរាប់បញ្ចូលចំណុចឯកតា

1. $y''-2y'+y=0$
2. $y''+6y'+y=0$
3. $4y''-4y'-3y=0$
4. $4y''+12y'+9y=0$
5. $y''-2y'+10y=0$
6. $y''-6y'+9y=0$
7. $4y''+17y'+4y=0$
8. $16y''+24y'+9y=0$
9. $25y''-20y'+4y=0$
10. $2y''+2y'+y=0$

ក្នុងលំហាត់ 11ដល់14 ចូរដោះស្រាយលំហាត់ចំពោះតម្លៃដំបូងដែលផ្តល់ឱ្យ។ គូរក្រាបនៃចម្លើយ និងពណ៌នាពេល t កើន

11. $9y''-12y'+4y=0,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=-1$
12. $y''-6y'+9y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=2$
13. $9y''+6y'+82y=0,\quad y(0)=-1,\quad y'(0)=2$
14. $y''+4y'+4y=0,\quad y(-1)=2,\quad y'(-1)=1$
15. គិតពីតម្លៃដំបូងនៃលំហាត់

$$4y''+12y'+9y=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=-4$$

ចូរដោះស្រាយតម្លៃដំបូងលំហាត់ និងដៅចំណុចរបស់វាចំពោះ $0\le t\le 5$

B...កំណត់ទីតាំងនៃចម្លើយមានតម្លៃសូន្យ

កំណត់កូអរដោនេ (t_0,y_o) នៃចំណុចអប្បបរមា

ប្តូរតម្លៃលក្ខខណ្ឌទីពីរនៃ $y'(0)=b$ ហើយរកចម្លើយនៃអនុគមន៍ b ។ បន្ទាប់មករកតម្លៃសំខាន់នៃ b ដែលញែកចម្លើយតែងតែវិជ្ជមានដល់អវិជ្ជមាន។

16. គិតពីការប្រែប្រួលខាងក្រោម នៃតម្លៃលំហាត់ ក្នុងឧទាហរណ៍ 2

$$y''-y'+0.25y=0,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=b$$

រកចម្លើយនៃអនុគមន៍ និងកំណត់តម្លៃសំខាន់នៃ ដែលញែកចម្លើយពីវិជ្ជមានដល់អវិជ្ជមាន ។

17. គិតពីតម្លៃដំបូងនៃលំហាត់

$$4y''+4y'+y=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=b$$

ដោះស្រាយតម្លៃដំបូងលំហាត់ និងដៅចម្លើយ

កំណត់កូអរដោនេ (t_0, y_o) នៃចំណុចអតិបរមា

a) ប្តូរលក្ខខណ្ឌដំបូងទីពីរ $y'(0)=b>0$ ហើយរកចម្លើយនៃអនុគមន៍ b

b) រកកូអរដោនេ (t_M, y_M) នៃចំណុចអតិបរមាក្នុងតួនៃ b ។ ពិពណ៌នាចំណុចអាស្រ័យ t_M និង y_M លើ b កាលណា b កើន ។

18. គិតពីតម្លៃដំបូងនៃលំហាត់

$$9y''+12y'+4y=0, \quad y(0)=a>0, \quad y'(0)=-1$$

ដោះស្រាយតម្លៃដំបូងលំហាត់

ចូររកតម្លៃសំខាន់នៃ a ដែលញែកចម្លើយពីអវិជ្ជមាន ទៅវិជ្ជមាន

19. បើឫសនៃសមីការសម្គាល់ជាចំនួនពិត បង្ហាញថាចម្លើយនៃ $ay''+by'+cy=0$ អាចយកតម្លៃសូន្យបានច្រើនបំផុតតែម្តង ។

លំហាត់ 20 ដល់ 22 បង្ហាញពីវិធីផ្សេងៗនៃការរកចម្លើយទីពីរ នៅពេលសមីការសម្គាល់មាន ឫសឌុប

20. គិតពីសមីការ $y''+2ay'+a^2y=0$ ។ បង្ហាញថាឫសនៃសមីការសម្គាល់គឺ $r_1=r_2=-a$ ដូចនេះចម្លើយមួយនៃសមីការគឺ e^{-at}

ប្រើរូបមន្តAbel ចូរបង្ហាញថា Wronskian នៃចម្លើយពីរនៃសមីការផ្តល់ឱ្យគឺ

$W(t)=y_1(t)y_2'(t)-y_1'(t)y_2(t)=c_1e^{-2at}$ ដែល c_1 ជាចំនួនថេរ។

តាង $y_1(t)=e^{-at}$ និងចម្លើយនៃផ្នែក (b) បង្ហាញថាចម្លើយពីរគឺ $y_2(t)=te^{-at}$

21. ឧបមាថា r_1 និង r_2 ជាឫសនៃ $ar^2+br+c=0$ និង $r_1\neq r_2$ ហើយ e^{r_1t} និង e^{r_2t} ជាចម្លើយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $ay''+by'+cy=0$ ។ បង្ហាញថា $\phi(t;r_1,r_2)=\left[\exp(r_2t)-ext(r_1t)\right]/(r_2-r_1)$ ជាចម្លើយនៃសមីការផងដែរ ចំពោះ $r_1\neq r_2$ ។ បន្ទាប់មកគិតចំពោះ r_1 គឺជាចំណុចនឹង និងប្រើច្បាប់ L'Hospital ដើម្បីកំណត់ $\phi(t;r_1,r_2)$ កាលណា $r_2\to r_1$ ដោយមានចម្លើយទីពីរក្នុងករណីឫសស្មើគ្នា ។

22.

បើ $ar_2+br+c=0$ មានឫសស្មើ r_1 បង្ហាញថា

$$L\left[e^{rt}\right]=a\left(e^{rt}\right)''+b\left(e^{rt}\right)'+ce^{rt}=a(r-r_1)^2e^{rt} \qquad (i)$$

នៅផ្នែកខាងស្តាំនៃសមីការ (i) គឺសូន្យ ពេល $r=r_1$ គឺថា $\exp(r_1t)$ ជាចម្លើយនៃ $L[y]=ay''+by'+cy=0$

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (i) ដែលតម្លៃ r ហើយផ្លាស់ប្តូរឌីផេរ៉ង់ស្យែលជាមួយតម្លៃ r នឹងតម្លៃ r_1 ដូចនេះបង្ហាញថា

$$\frac{\partial}{\partial r}L\left[e^{rt}\right]=L\left[\frac{\partial}{\partial r}e^{rt}\right]=L\left[e^{rt}\right]=ate^{rt}\left(r-r_1\right)^2+2ae^{rt}\left(r-r_1\right) \qquad (ii)$$

ដែលផ្នែកខាងស្តាំនៃសមីការ (ii) គឺសូន្យ ពេល $r=r_1$ រួមបញ្ចូលទាំង $\exp(r_1t)$ ជាចម្លើយមួយផងដែរនៃ $L[y]=0$

ក្នុងលំហាត់ 23 ដល់ 30 ប្រើវិធីសាស្រ្តការបង្រួមនៃលំដាប់ ដើម្បីរកចម្លើយទីពីរដែលផ្តល់ដោយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

23. $t^2y''-4ty'+6y=0, \quad t>0; \quad y_1(t)=t^2$
24. $t^2y''+2ty'-2y=0, \quad t>0; \quad y_1(t)=t$
25. $t^2y''+3ty'+y=0, \quad t>0; \quad y_1(t)=t^{-1}$
26. $t^2y''-t(t+2)y'+(t+2)y=0, \quad t>0; \quad y_1(t)=t$
27. $xy''-y'+4x^3y=0, \quad x>0; \quad y_1(x)=\sin x^2$
28. $(x-1)y''-xy'+y=0, \quad x>1; \quad y_1(x)=e^x$
29. $x^2y''-(x-0.1875)y=0, \quad x>0; \quad y_1(x)=x^{1/4}e^{2\sqrt{x}}$
30. $x^2y''+xy'+\left(x^2-0.25\right)y=0, \quad x>0; \quad y_1(x)=x^{-1/2}\sin x$
31. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $xy''-(x+N)y'+Ny=0$

ដែល N ជាអាំងតេក្រាលមិនអវិជ្ជមាន ដែលបានពិភាក្សាដោយអ្នកនិពន្ធជាច្រើន។ ហេតុផលមួយទៀត វាគឺគួរឱ្យចាប់អារម្មណ៍ដែលថា ចម្លើយអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និងចម្លើយជាពហុធា ។

a) ផ្ទៀងផ្ទាត់ចម្លើយមួយគឺ $y_1(x)=e^x$

b) បង្ហាញថាចម្លើយទីពីរមានទម្រង់ $y_2(x)=ce^x\int x^Ne^{-x}dx$ ។ គណនា $y_2(x)$ ចំពោះ $N=1$ និង $N=2$ ដែល $c=-1/N!$

$$y_2(x)=1+\frac{x}{x!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^N}{N!}$$

ចំណាំថា $y_2(x)$ ជាតួដំបូង $N+1$ ក្នុង $x=0$ ចំពោះស៊េរីតៃល័រ e^x គឺចំពោះ $y_1(x)$

32. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$y''+\delta\left(x'y+y\right)=0$$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $y_1(x)=\exp\left(-\delta x^2/2\right)$ ជាចម្លើយមួយ និងរកចម្លើយទូទៅក្នុងទម្រង់នៃអាំងតេក្រាល

33. វិធីសាស្រ្តលំហាត់20 អាចបញ្ចូលសមីការលំដាប់ពីរ ជាមួយមេគុណអថេរ។ បើ y_1

ជាចម្លើយមិនមែនជាចម្លើយនៃ $y''+p(t)y'+q(t)y=0$ បង្ហាញថាចម្លើយទីពីរ y_2 ផ្ទៀងផ្ទាត់

$(y_2/y_1)'=W(y_1,y_2)/y_1^2$ ដែល $W(y_1,y_2)$ ជា Wronskian នៃ y_1 និង y_2 ។ បន្ទាប់មកប្រើទម្រង់ Abel សមីការ(8)ផ្នែក3.3 កំណត់ y_2

ក្នុងលំហាត់ 34ដល់37 ប្រើវិធីសាស្ត្រនៃលំហាត់ កំណត់ចម្លើយមិនអាស្រ័យដែលផ្តល់ដោយសមីការ

34. $t^2y''+3ty'+y=0,\quad t>0;\quad y_1(t)=t^{-1}$

35. $ty''-y'+4t^3y=0,\quad t>0;\quad y_1(t)=\sin(t^2)$

៣.៦. សមីការមិនអូម៉ូសែននិង វិធីសាស្ត្រនៃមេគុណមិនកំណត់

បើយើងត្រឡប់ទៅមើលសមីការមិនអូម៉ូហ្សែន

$$L[y]=y''+p(t)y'+q(t)y=g(t) \qquad (1)$$

ដែល p,q និង g ត្រូវបានអោយអនុគមន៍នៅលើចន្លោះបើក I ។ សមីការ

$$L[y]=y''+p(t)y'+q(t)y=0, \qquad (2)$$

ដែល $g(t)=0$ ហើយ p និង q គឺដូចនៅក្នុងសមីការ (1) ហៅថា សមីការអូម៉ូសែនត្រូវគ្នានឹងសមីការ (1) ។ លទ្ធផលពីរខាងក្រោម បកស្រាយពីរចនាសម្ព័ន្ធនៃដំណោះស្រាយនៃសមីការមិនអូម៉ូសែន (1) ហើយផ្តល់ជាមូលដ្ឋានគ្រឹះសម្រាប់បង្កើតដំណោះស្រាយទូទៅ។

ទ្រឹស្តីបទ2.6.1៖ បើ Y_1 និង Y_2 គឺជាចម្លើយពីរនៃសមីការមិនអូម៉ូហ្សែន (1) នោះភាពខុសគ្នារវាង Y_1-Y_2 គឺជាដំណោះស្រាយនៃសមីការមិនអូម៉ូសែនត្រូវគ្នា (2) ។ លើសពីនេះផលបូក បើ Y_1 និង Y_2 គឺជាសំណុំចម្លើយគ្រឹះនៃសមីការ (2) នោះ

$$Y_1(t)-Y_2(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t), \qquad (3)$$

ដែល c_1 និង c_1 គឺជាចំនួនថេរ។

ដើម្បីបញ្ជាក់លទ្ធផលនេះ សូមកត់សម្គាល់ថា Y និង Y_2 បំពេញសមីការ

$$L[Y_1](t)=g(t),\qquad L[Y_2](t)=g(t) \qquad (4)$$

ដកសមីការទីពីរនៃសមីការនេះចេញពីទី១ យើងបាន

$$L[Y_1](t)-L[Y_2](t)=g(t)-g(t)=0 \qquad (5)$$

ទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ

$$L[Y_1]-L[Y_2]=L[Y_1-Y_2],$$

ដូចនេះ សមីការ (5) ទៅជា $L[Y_1-Y_2](t)=0, \qquad (6)$

សមីការ (6) បញ្ជាក់ថា $Y_1 - Y_2$ គឺជាដំណោះស្រាយនៃសមីការ (2) ។ ជាចុងក្រោយ ដំណោះស្រាយទាំងអស់នៃសមីការ (2) អាចបង្ហាញជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃសំណុំមូលដ្ឋាននៃដំណោះស្រាយតាមទ្រឹស្តី 2.2.4, តាមដំណោះស្រាយ $Y_1 - Y_2$ អាចមានកស្តុតាងពេញលេញ។ ដូចនេះ សមីការ (3) គឺត្រូវបានដោះស្រាយ។

ទ្រឹស្តីបទ2.6.2 ចម្លើយទូទៅនៃសមីការមិនអូម៉ូសែន (1) អាចសរសេរជាទម្រង់

$$y = \phi(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + Y(t) \qquad (7)$$

ដែល y_1 និង y_2 គឺជាសំណុំគ្រឹះនៃសមីការអូម៉ូសែនត្រួតស៊ីគ្នា (2) c_1 និង c_2 គឺជាចំនួនថេរណាមួយ ហើយ Y គឺជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការមិនអូម៉ូសែន (1) ។

សម្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ

កត់សម្គាល់ថា សមីការ (3) រក្សាទុកប្រសិនបើយើងកំណត់ Y ជាមួយនឹងដំណោះស្រាយនៃចំនួនថេរ ϕ នៃសមីការ (1) ហើយ y_2 ជាមួយនឹងចម្លើយពិសេស Y ។ តាមសមីការ (3) យើងបាន

$$\phi(t) - Y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \qquad (8)$$

ដែលសមមូលទៅនឹងសមីការ (7) ។ ដោយ ϕ គឺជាចម្លើយថេរនៃសមីការ (1) កន្សោមដែលនៅខាងស្តាំនៃសមីការ (7) រាប់បញ្ចូលចម្លើយទាំងអស់នៃសមីការ (1) ដូចនេះគេហៅថា ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (1) ។

៣.៦.១វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយ

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការមិនអូម៉ូសែន $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$ យើងត្រូវធ្វើតាមជំហាន ៣ ខាងក្រោម៖

១. រកចម្លើយទូទៅ $y_c = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ នៃសមីការលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែន។ ចម្លើយនេះហៅថា ចម្លើយបំពេញ ដែលកំណត់សរសេរដោយ $y_c(t)$។

២. រកចម្លើយមួយ $y_p(t)$ នៃសមីការមិនអូម៉ូសែន។ ជាទូទៅ ចម្លើយនេះ គឺសំដៅលើសមីការជាក់លាក់មួយមានរាងដូច $g(t)$។

៣. បូកអនុគមន៍ $y(t) = y_p(t) + y_c(t)$ បញ្ចូលគ្នា។

ចំណាំ៖ ការតាង $y_p(t)$

អនុគមន៍ $g(t)$	តាង $y_p(t)$ ដោយ
$h_n(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + a_{n-2}t^{n-2} + \ldots + a_1 t + a_0$	$y_p(t) = t^s\left(A_n t^n + A_{n-1}t^{n-1} + A_{n-2}t^{n-2} + \ldots + A_1 t + A_0\right)$
$h_n(t)e^{\alpha t}$	$y_p(t) = t^s\left(A_n t^n + A_{n-1}t^{n-1} + A_{n-2}t^{n-2} + \ldots + A_1 t + A_0\right)e^{\alpha t}$
$h_n(t)e^{\alpha t}\cos\beta t$ $h_n(t)e^{\alpha t}\sin\beta t$	$y_p(t) = t^s\left(A_n t^n + A_{n-1}t^{n-1} + \ldots + A_1 t + A_0\right)e^{\alpha t}\cos\beta t$ $+t^s\left(B_n t^n + B_{n-1}t^{n-1} + \ldots + A_1 t + A_0\right)e^{\alpha t}\sin\beta t$

ចំណាំ៖ ដែល $s = 0,1,2,\ldots$ ។បើគ្មានតម្លៃ $y_c(t)$ ដូចគ្នានឹង $g(t)$ នោះ $s = 0$ ។ ប៉ុន្តែបើមានតម្លៃ $y_c(t)$ ណាមួយដូចគ្នានឹង $g(t)$ នោះ $s = 1$

ឧទាហរណ៍១៖ រកចម្លើយពិសេសនៃ $y''-3y'-4y=3e^{2t}$ (9)

ចម្លើយ

សមីការសម្គាល់ $y''-3y'-4y=0$ គឺ $r^2-3r-4=0$ មានឬស $r_1=-1, r_2=4$

អនុគមន៍ចម្លើយ $y_c=a_1e^{-t}+a_2e^{4t}$

ហើយ $g(t)=3e^{2t}\neq y_c \Rightarrow s=0$ នោះចម្លើយពិសេស $y_p=Ae^{2t}\Rightarrow y_p'=2Ae^{2t}\Rightarrow y_p''=4Ae^{2t}$

យកជំនួសសមីការ(9)យើងទទួលបាន

$$(4A-6A-4A)e^{2t}=3e^{2t}\Rightarrow A=-\frac{1}{2}$$

ចម្លើយពិសេសនៃ (9) គឺ $y_p=-\frac{1}{2}e^{2t}$ (10)

ឧទាហរណ៍២៖ រកចម្លើយពិសេសនៃ $y''-3y'-4y=2\sin t$ (11)

ចម្លើយ

យើងអាចសន្មតថា

$$y_p(t)=A\sin t+B\cos t$$

ដែល A និង B គឺត្រូវបានកំណត់ នោះ

$$y_p'(t)=A\cos t-B\sin t,\qquad y_p''(t)=-A\sin t-B\cos t$$

ដោយជំនួសកន្សោមទាំងនេះដោយ y, y' និង y'' ក្នុងសមីការ (11) ហើយផ្ទុំគ្នា យើងបាន៖

$$(-A+3B-4A)\sin t+(-B-3A-4B)\cos t=2\sin t \qquad (13)$$

A និង B ត្រូវតែបំពេញសមីការ

$$-5A+3B=2,\qquad -3A-5B=0$$

គេបាន $A=-\frac{5}{17}$ និង $B=\frac{3}{17}$ ។

ដូចនេះ ចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (11) គឺ $y_p(t)=-\frac{5}{17}\sin t+\frac{3}{17}\cos t$ ។

វិធីសាស្រ្តបានបង្ហាញនៅក្នុងឧទាហរណ៍មុនអាចត្រូវបានប្រើនៅពេលសមីការខាងស្តាំគឺជាពហុធា។ ដូចនេះ ដើម្បីរកចម្លើយជាក់លាក់នៃ

$$y''-3y'-4y=4t^2-1 \qquad (14)$$

ដំបូងសន្មតថា $y_p(t)$ គឺជាពហុធានៃដឺក្រេដូចគ្នាដែលជាតួមិនអូម៉ូសែននោះ $y_p(t)=At^2+Bt+C$ ។

ដើម្បីសង្ខេបការសន្និដ្ឋានរបស់យើងរហូតដល់ចំណុចនេះ ប្រសិនបើតួមិនអូម៉ូសែន $g(t)$ ក្នុងសមីការ (1) គឺជាអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $e^{\alpha t}$ នោះគេអាចសន្មត់បានថា $y_p(t)$ គឺសមាមាត្រទៅនឹងអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលដូចគ្នា។ បើ $g(t)$ គឺជាពហុធា នោះគេសន្មត់ថា $y_p(t)$ គឺជាពហុធានៃដឺក្រេដូចគ្នា។ គោលការណ៍ដូចគ្នានេះ បន្លាយទៅករណីដែល $g(t)$ គឺជាផលគុណនៃ២ចំនួន ឬ៣ នៃប្រភេទអនុគមន៍ទាំងនេះ ដូចនៅក្នុងឧទាហរណ៍បន្ទាប់នឹងបង្ហាញ។

ឧទាហរណ៍ទី៣៖ រកចម្លើយជាក់លាក់នៃ $y''-3y'-4y=-8e^{t}\cos 2t$ (15)

ក្នុងករណីនេះ យើងសន្មត់ថា $y_p(t)$ គឺជាផលគុណនៃ e^{t} ហើយជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃ $\sin t$ និង $\cos t$ គេបាន

$$y_p'(t)=Ae^{t}\cos 2t+Be^{t}\sin 2t$$

កន្សោមពីជគណិតនេះ មានលក្ខណៈស៊ាំញ៉ាំជាងក្នុងឧទាហរណ៍មុនៗ ប៉ុន្តែវាធ្វើតាម

$$y_p'(t)=(A+2B)e^{t}\cos 2t+(-2A+B)e^{t}\sin 2t$$ និង

$$y_p''(t)=(-3A+4B)e^{t}\cos 2t+(-4A-3B)e^{t}\sin 2t$$

ដោយជំនួសកន្សោមទាំងនេះក្នុងសមីការ (15) យើងរកឃើញថា A និង B ត្រូវតែផ្ទៀងផ្ទាត់

$10A+2B=8,\qquad 2A-10B=0$

នោះ $A=\dfrac{10}{13}$ និង $B=\dfrac{2}{13}$

ដូចនេះ ចម្លើយជាក់លាក់នៃសមីការ គឺ $Y(t)=\dfrac{10}{13}e^{t}\cos 2t+\dfrac{2}{13}e^{t}\sin 2t$ ។

ឧបមាថា $g(t)$ គឺជាផលបូកពីរតួ $g(t)=g_1(t)+g_2(t)$ ហើយតាង Y_1 និង Y_2 គឺជាចម្លើយនៃសមីការ

$$ay''+by'+cy=g_1(t) \qquad (16)$$

និង

$$ay''+by'+cy=g_2(t) \qquad (17)$$

នោះ Y_1+Y_2 គឺជាចម្លើយនៃសមីការ $ay''+by'+cy=g(t)$ (18) ។

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការទាំងនេះ ជំនួស $zY_1(t)+Y_2(t)$ ដោយ ក្នុងសមីការ (18) ហើយប្រើប្រាស់សមីការ (16) និង (17) ។ ស្រដៀងគ្នា ប្រសិនបើ $g(t)$ គឺជាផលបូកនៃចំនួនកំណត់ណាមួយនៃតួ។ ការអនុវត្តដែលសំខាន់នៃលទ្ធផលនេះគឺសម្រាប់សមីការដែលអនុគមន៍មិនអូម៉ូសែនរបស់ $g(t)$ អាចជាផលបូក អាចជំនួសសមីការសាមញ្ញមួយចំនួន ហើយបន្ថែមចម្លើយទាំងអស់។ ឧទាហរណ៍ខាងក្រោមគឺជាការបកស្រាយនៃដំណើរការ។

ឧទាហរណ៍ទី៤៖ រកចម្លើយពិសេសនៃ $y''-3y'-4y=3e^{2t}+2\sin t-8e^{t}\cos 2t$ (19)

ដោយបំបែកខាងស្តាំនៃសមីការ (19) យើងមានសមីការបានចំនួន៣ខាងក្រោម៖

$y''-3y'-4y=3e^{2t}$

$y''-3y'-4y=2\sin t$

$y''-3y'-4y=-8e^{t}\cos 2t$

ចម្លើយនៃសមីការទាំង៣នេះត្រូវបានរកឃើញនៅក្នុងឧទាហរណ៍ ១, ២ និង ៣ ។

ដូចនេះ ចម្លើយជាក់លាក់នៃសមីការ (19) គឺជាផលបូករបស់វា

$Y(t)=-\dfrac{1}{2}e^{2t}+\dfrac{3}{17}\cos t-\dfrac{5}{17}\sin t+\dfrac{10}{13}e^{t}\cos 2t-\dfrac{2}{13}e^{t}\sin 2t$ ។

លំហាត់

ក្នុងលំហាត់ពី 1 – 12 រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលឱ្យ។

1. $y''-2y'-3y=3e^{2t}$
2. $y''+2y'+5y=3\sin 2t$
3. $y''-2y'-3y=-3te^{-t}$
4. $y''+2y'=3+4\sin 2t$
5. $y''+9y=6+t^2e^{3t}$
6. $y''+2y'+y=2e^{-t}$
7. $2y''+3y'+y=t^2+3\sin t$
8. $y''+y=3\sin 2t+t\cos 2t$
9. $u''+\omega_0^2u=\cos\omega t;\quad \omega^2\neq\omega_0^2$
10. $u''+\omega_0^2u=\cos\omega_0 t;$
11. $y''+y'+4y=2\sinh t;\quad \left(\sinh t=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}\right)$
12. $y''-y'-2y=\cosh 2t;\quad \left(\cosh t=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\right)$

ក្នុងលំហាត់ពី 13 – 18 រកចម្លើយតាមតម្លៃដើមដែលបានផ្តល់ឲ្យ។

13. $y''+y'-2y=2t,\qquad y(0)=0,\qquad y'(0)=1$
14. $y''+4y'=t^2+3e^t,\qquad y(0)=0,\qquad y'(0)=2$
15. $y''-2y'+y=te^t+4,\qquad y(0)=1,\qquad y'(0)=1$
16. $y''-2y'-3y=3te^{2t},\qquad y(0)=1,\qquad y'(0)=0$
17. $y''+4y=3\sin 2t,\qquad y(0)=2,\qquad y'(0)=-1$
18. $y''+2y'+5y=4e^{-t}\cos 2t,\qquad y(0)=1,\qquad y'(0)=0$

លំហាត់ពី 19 – 26 កំណត់ទម្រង់ចម្លើយពិសេស $y_p(t)$ នៃសមីការប្រើវិធីនៃមេគុណមិនកំណត់៖

19. $y''+3y'=2t^4+t^2e^{-3t}+\sin 3t,$
20. $y''+y'=t(1+\sin t)$
21. $y''-5y'+6y=e^t\cos 2t+e^{2t}(3t+4)\sin t;$
22. $y''+2y'+2y=3e^{-t}-2e^{-t}\cos t+4e^{-t}t^2\sin t,$
23. $y''-4y'+4y=2t^2+4te^{2t}+t\sin 2t,$
24. $y''+4y=t^2\sin 2t+(6t+7)\cos 2t$
25. $y''+3y'+2y=e^t(t^2+1)\sin 2t+3e^{-t}\cos t+4e^t,$
26. $y''+2y'+5y=3t^2e^{-t}\cos 2t-2te^{-2t}\cos t$

៣.៧ បម្រែបម្រួលប៉ារ៉ាម៉ែត្រ (Variation of Parameters)

នៅក្នុងផ្នែកនេះ យើងនឹងបកស្រាយអំពីវិធីមួយទៀតក្នុងការរកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការមិនអូម៉ូសែន ។ ចំណុចសំខាន់នៃវិធីបម្រែបម្រួលប៉ារ៉ាម៉ែត្រគឺថាវាជាវិធីទូទៅមួយដែលអាចអនុវត្តចំពោះសមីការណាមួយក៏បាន ហើយវាមិនទាមទារការសន្មត់លម្អិតលើទម្រង់នៃចម្លើយរបស់វានោះទេ។ ជាការពិតណាស់ យើងនឹងប្រើវាដើម្បីទាញរករូបមន្តនៃចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ទីពីរមិនអូម៉ូសែន។

ឧទាហរណ៍១៖ រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $y''+4y=3\csc t$ (1)

យើងសង្កេតឃើញថា សមីការនេះមានទម្រង់ខុសពីសមីការមុនៗដែលមិនអាចប្រើ**វិធីសាស្ត្រមេគុណមិនកំណត់បាន** ដើម្បីរកចម្លើយពិសេសមួយបានទេ ពីព្រោះផ្នែកមិនអូម៉ូសែន $3\csc t$ ជាទម្រង់ផលចែក (មិនមែនជាផលបូក ឬផលគុណ) នៃ $\sin t$ ឬ $\cos t$ ។ ដោយឡែក យើងឃើញថា សមីការអូម៉ូសែនដែលត្រូវនឹងសមីការ (1) គឺ៖

$$y''+4y=0 \quad (2)$$

គេបានចម្លើយទូទៅនៃ (2) គឺ៖

$$y_c(t)=c_1\cos 2t+c_2\sin 2t \quad (3)$$

ដោយប្រើវិធីបម្លែងប៉ារ៉ាម៉ែត្រ យើងជំនួសចំនួនថេរ c_1,c_2 ក្នុងសមីការ (3) ដោយអនុគមន៍ $u_1(t),u_2(t)$ រៀងគ្នា ហើយបន្ទាប់មក កំណត់អនុគមន៍ទាំងពីរនេះ គេបាន

$$y=u_1(t)\cos 2t+u_2(t)\sin 2t \quad (4)$$

ជាចម្លើយមួយនៃសមីការមិនអូម៉ូសែន (1) ។

ដើម្បីកំណត់ u_1 និង u_2 , យើងត្រូវការជំនួស y ពីសមីការ (4) ទៅក្នុងសមីការ (1) ។

ដោយធ្វើឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើ (4) យើងបាន៖

$$y'=-2u_1(t)\sin 2t+2u_2(t)\cos 2t+u_1'(t)\cos 2t+u_2'(t)\sin 2t \quad (5)$$

ដោយលទ្ធភាពក្នុងការជ្រើសរើស u_1 និង u_2 មានច្រើន ដូច្នេះយើងនឹងតម្រូវឲ្យ ពីរតួខាងចុងនៃ (5) ស្មើសូន្យ គេបាន៖

$$u_1'(t)\cos 2t+u_2'(t)\sin 2t=0 \quad (6)$$

គេបានសមីការ (5) ក្លាយទៅជា ៖

$$y'=-2u_1(t)\sin 2t+2u_2(t)\cos 2t \quad (7)$$

ដោយធ្វើឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើ (7) គេបាន៖

$$y''=-4u_1(t)\cos 2t-4u_2(t)\sin 2t-2u_1'(t)\sin 2t+2u_2'(t)\cos 2t \quad (8)$$

ជំនួស (4) និង (8) នៅក្នុង (1)៖

$$-2u_1'(t)\sin 2t+2u_2'(t)\cos 2t=3\csc t \quad (9)$$

ដោយប្រើ (6) និង (9) ដើម្បីដោះស្រាយរក $u_1(t)$ និង $u_2(t)$ ៖

តាម (6) គេបាន $u_2'(t)=-u_1'(t)\dfrac{\cos 2t}{\sin 2t}$ (10)

យក (10) ជំនួសក្នុង (9) គេបាន៖

$$u_1'(t)=-\frac{3\csc t\sin 2t}{2}=-3\cos t \quad (11)$$

រួចជំនួសរក $u_2'(t)$ គេបាន៖

$$u_2'(t)=\frac{3\cos t\cos 2t}{\sin 2t}=\frac{3\left(1-2\sin^2 t\right)}{2\sin t}=\frac{3}{2}\csc t-3\sin t \quad (12)$$

ដើម្បីទទួលបាន $u_1(t)$ និង $u_2(t)$ យើងត្រូវធ្វើអាំងតេក្រាលលើ (11) និង (12) គេបាន៖

$$u_1(t) = -3\sin t + c_1 \quad (13) \text{ និង } u_2(t) = \frac{3}{2}\ln\left|\csc t - \cot t\right| + 3\cos t + c_2 \quad (14)$$

ដោយជំនួស (13) និង (14) នៅក្នុង (4) និងធ្វើការសម្រួលកន្សោម គេបាន៖

$$y = 3\sin t + \frac{3}{2}\ln\left|\csc t - \cot t\right|\sin 2t + c_1\cos 2t + c_2\sin 2t \quad (15)$$

គេបាន $Y(t) = 3\sin t + \frac{3}{2}\ln\left|\csc t - \cot t\right|\sin 2t$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (1) និង $y_c = c_1\cos 2t + c_2\sin 2t$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការអូម៉ូសែននៃ (1) និង (15) ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (1) ។

៣.៧.១ វិធីបម្រែបម្រួលប៉ារ៉ាម៉ែត្រ

ការរកចម្លើយពិសេសនិងចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានរាង $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$ ដោយប្រើវិធីបម្រែបម្រួលប៉ារ៉ាម៉ែត្រ៖

គេមាន $$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \quad (16)$$

ដែល p និង q ជាអនុគមន៍ជាប់ ។ យើងសន្មតថា

$$y_c(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) \quad (17)$$

ជាសមីការទូទៅនៃសមីការអ៊ូម៉ូសែនរបស់វា ៖

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (18)$$

យើងជំនួសចំនួនថេរ c_1, c_2 ដោយអនុគមន៍ $\mu_1(t), \mu_2(t)$ រៀងគ្នា គេបាន៖

$$y = \mu_1(t)y_1(t) + \mu_2(t)y_2(t) \quad (19)$$

ដើម្បីរក $\mu_1(t), \mu_2(t)$ យើងធ្វើដេរីវេ (19) គេបាន៖

$$y' = \mu_1'(t)y_1(t) + \mu_1(t)y_1'(t) + \mu_2'(t)y_2(t) + \mu_2(t)y_2'(t) \quad (20)$$

ដូចនៅក្នុងឧទាហរណ៍ខាងលើ យក ៖

$$\mu_1'(t)y_1(t) + \mu_2'(t)y_2(t) = 0 \quad (21)$$

គេបាន (20) ក្លាយជា $y' = \mu_1(t)y_1'(t) + \mu_2(t)y_2'(t)$ (22)

ដោយធ្វើឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើ (22) គេបាន

$$y'' = \mu_1'(t)y_1'(t) + \mu_1(t)y_1''(t) + \mu_2'(t)y_2'(t) + \mu_2(t)y_2''(t) \quad (23)$$

យក (19),(22),(23) ទៅជំនួស (16) គេបាន៖

$$\mu_1(t)\left[y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t)\right] + \mu_2(t)\left[y_2''(t) + p(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t)\right]$$
$$+\mu_1'(t)y_1'(t) + \mu_2'(t)y_2'(t) = g(t) \quad (24)$$

ដោយ $y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t) = 0$ និង $y_2''(t) + p(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t) = 0$ (សមីការទូទៅអូម៉ូសែន) នោះ (24) ក្លាយជា $\mu_1'(t)y_1'(t) + \mu_2'(t)y_2'(t) = g(t)$ (25)

ដោយដោះស្រាយប្រព័ន្ធនៃសមីការ (21) និង (25) យើងបាន៖

$$u_1'(t) = -\frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1,y_2)(t)} \quad , \quad u_2'(t) = -\frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1,y_2)(t)} \qquad (26)$$

ដែល $W(y_1,y_2)(t)$ ជាដេទែមីណង់វ៉ុងគៀន នៃ y_1 និង y_2 ហើយដោយ y_1 និង y_2 ជាសំណុំនៃចម្លើយ នោះ W ខុសពីសូន្យជានិច្ច ។ ដោយធ្វើអាំងតេក្រាលលើសមីការ (26)

$$u_1(t) = -\int \frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1,y_2)(t)}\,dt + c_1 \ , \quad u_2(t) = -\int \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1,y_2)(t)}\,dt + c_2 \qquad (27)$$

ដោយយក (27) ជួស (19) យើងបានសមីការទូទៅនៃ (16) ។

ទ្រឹស្តីបទ ២.៧.១៖

បើមានអនុគមន៍ p,q និង g ជាប់លើចន្លោះបើក I , ហើយបើអនុគមន៍ y_1,y_2 ជាចម្លើយមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរនៃសមីការអូម៉ូសែន $y''+p(t)y'+q(t)y=0$ ដែលត្រូវគ្នានឹងសមីការមិនអូម៉ូសែន $y''+p(t)y'+q(t)y=g(t)$ ។គេបានចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ $y''+p(t)y'+q(t)y=g(t)$ គឺ៖

$$Y(t) = -y_1(t)\int \frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1,y_2)(t)}\,dt + y_2(t)\int \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1,y_2)(t)}\,dt$$

ហើយសមីការទូទៅគឺ៖ $y_c(t) = c_1y_1(t)+c_2y_2(t)+Y(t)$ ។

លំហាត់

ក្នុងលំហាត់ពី 1 – 4 រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលឲ្យដោយប្រើវិធីបម្រែបម្រួលប៉ារ៉ាម៉ែត្រ។

1. $y''-5y'+5y=2e^t$
2. $y''-y'-2y=2e^{-t}$
3. $y''+2y'+y=3e^{-t}$
4. $4y''-4y'+y=16e^{t/2}$

ក្នុងលំហាត់ពី 5 – 12 រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលឱ្យដោយប្រើវិធីបម្រែបម្រួលប៉ារ៉ាម៉ែត្រ។លំហាត់11-12 $g(t)$ ជាអនុគមន៍ជាប់

5. $y''+y=\tan t; \quad 0<t<\pi/2$
6. $y''+9y=9\sec^2 3t; \quad 0<t<\pi/6$
7. $y''+4y'+4y=t^{-2}e^{-2t}, \quad t>0$
8. $y''+4y=3\csc 2t, \quad 0<t<\pi/2$
9. $4y''+y=2\sec(t/2), \quad -\pi<t<\pi$
10. $y''-2y'+y=e^t/(1+t^2)$
11. $y''-5y'+6y=g(t)$
12. $y''+4y=g(t)$

ក្នុងលំហាត់ពី 13 – 20 បញ្ជាក់ថា y_1,y_2 ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលអូម៉ូហ្សែន រួចរកចម្លើយពិសេសឱ្យដោយសមីការមិនអូម៉ូហ្សែន។

13. $t^2y''-2y=3t^2-1,\qquad t>0,\quad y_1(t)=t^2,\qquad y_2(t)=t^{-1}$

14. $t^2y''-t(t+2)y'+(t+2)y=2t^3,\quad t>0,\quad y_1(t)=t,\qquad y_2(t)=te^t$

15. $ty''-(1+t)y'+y=t^2e^{2t},\qquad t>0,\quad y_1(t)=t+1,\quad y_2(t)=e^t$

16. $(1-t)y''+ty'-y=2(t-1)^2e^{-t},\quad 0<t<1\qquad y_1(t)=e^t,\qquad y_2(t)=t$

17. $x^2y''-3xy'+4y=x^2\ln x,\qquad x>0\quad y_1(t)=x^2,\qquad y_2(t)=x^2\ln x$

18. $x^2y''+xy'+(x^2-0.25)y=3x^{3/2}\sin x,\qquad x>0,\; y_1(t)=x^{-1/2}\sin x,\qquad y_2(t)=x^{-1/2}\cos x$

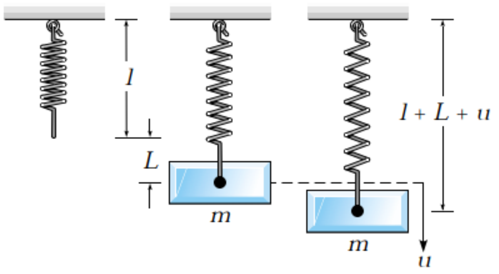
៣.៨. រំញ័រមេកានិច និង អគ្គិសនី (Chanical And Electrical Vibrations)

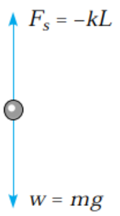
ហេតុផលមួយក្នុងចំណោមហេតុផលដែលសមីការលីនេអ៊ែរលំដាប់ទីពីរជាមួយនឹងមេគុណថេរមានតម្លៃសិក្សាគឺថាពួកវាបម្រើជាគំរូគណិតវិទ្យានៃដំណើរការសំខាន់ៗមួយចំនួន។ ផ្នែកសំខាន់ពីរនៃការអនុវត្តគឺនៅក្នុងវិស័យនៃលំយោលមេកានិច និងអគ្គិសនី។ ឧទាហរណ៍ ចលនានៃម៉ាស់នៅលើផ្ទៃរាងមូល រំញ័រ ការយោលបង្វិលនៃអ័ក្ស លំហូរនៃចរន្តអគ្គិសនីនៅក្នុងសៀគ្វីស៊េរីសាមញ្ញ និងបញ្ហារូបវន្តជាច្រើនទៀតត្រូវបានពិពណ៌នាដោយដំណោះស្រាយនៃបញ្ហាតម្លៃក្រោមទម្រង់

$$ay''+by'+cy=g(t)\ ,\ y(0)=y_0\ ,\ y'(0)=y_0' \qquad (1)$$

នេះបង្ហាញពីទំនាក់ទំនងជាមូលដ្ឋានរវាងគណិតវិទ្យា និងរូបវិទ្យា។ បញ្ហាជាច្រើនអាចមានគំរូគណិតវិទ្យាដូចគ្នា។ ដូច្នេះនៅពេលដែលយើងដឹងពីរបៀបដោះស្រាយបញ្ហា (1) វាគ្រាន់តែជាការចាំបាច់ក្នុងការធ្វើការបកស្រាយត្រឹមត្រូវនៃចំនួនថេរ a b និង c និងអនុគមន៍ y និង g ដើម្បីទទួលបានដំណោះស្រាយនៃបញ្ហារូបវន្តផ្សេងៗ។

យើងនឹងសិក្សាអំពីចលនារបស់ម៉ាស់នៅលើផ្ទៃរាងមូលមួយយ៉ាងលម្អិត ពីព្រោះការយល់ដឹងអំពីលក្ខណៈនៃប្រព័ន្ធសាមញ្ញនេះគឺជាជំហានដំបូងក្នុងការស៊ើបអង្កេតលើប្រព័ន្ធរំញ័រដែលស្មុគស្មាញជាងនេះ។ លើសពីនេះ គោលការណ៍ដែលពាក់ព័ន្ធគឺជារឿងធម្មតាសម្រាប់បញ្ហាជាច្រើន។ ពិចារណាម៉ាស់ m ព្យួរនៅលើចុងបញ្ឈរនៃប្រវែងដើម L ដូចបង្ហាញក្នុងរូបភាព 3.8.1 ។ ម៉ាស់លូតបាន L នៃទំពក់ក្នុងទិសដៅធ្លាក់ចុះ (វិជ្ជមាន) ។ មានកម្លាំងពីរដែលធ្វើសកម្មភាពនៅចំណុចដែលម៉ាស់ត្រូវបានភ្ជាប់ទៅនឹងទំពក់សូមមើលរូបភាព 3.8.2 ។ កម្លាំងទំនាញ ឬទម្ងន់នៃម៉ាស់ ធ្វើសកម្មភាពចុះក្រោម និងមានរ៉ិចទ័រ mg ដែល g គឺជាការបង្កើនល្បឿនដោយសារទំនាញ។ វាក៏មានកម្លាំង F ដោយសារតែទំពក់ដែលធ្វើសកម្មភាពឡើងលើ។ ប្រសិនបើយើងសន្មត់ថាការពន្លូត L នៃទំពក់គឺតូចកម្លាំងទំនាញគឺស្មើរតែសមាមាត្រទៅនឹង L នេះត្រូវបានគេស្គាល់





ដូចច្បាប់របស់ Hooke។ ដូច្នេះយើងសរសេរ $F=-kL$ ដែលថេរនៃសមាមាត្រ k ត្រូវបានគេហៅថាថេរនៃផ្ទៃរាងមូល ហើយសញ្ញាដកគឺដោយសារតែការពិតដែលថាកម្លាំងនៃផ្ទៃរាងមូលធ្វើសកម្មភាពក្នុងទិសដៅខាងលើ (អវិជ្ជមាន) ។ ដោយសារម៉ាស់ស្ថិតនៅក្នុងលំនឹង កម្លាំងទាំងពីរមានតុល្យភាពគ្នាទៅវិញទៅមក ដែលមានន័យថា $mg-kL=0$ (2)

សម្រាប់ទម្ងន់ដែលបានផ្តល់ឱ្យ $w=mg$ មួយអាចវាស់ L ហើយបន្ទាប់មកប្រើ (2) ដើម្បីកំណត់ k ។ ចំណាំថា k មានឯកតានៃប្រវែងកម្លាំង។

នៅក្នុងបញ្ហាឌីណាមិកដែលត្រូវគ្នា យើងចាប់អារម្មណ៍ក្នុងការសិក្សាអំពីចលនានៃម៉ាស់ នៅពេលដែលវាត្រូវបានធ្វើសកម្មភាពដោយកម្លាំងខាងក្រៅ ឬត្រូវបានផ្លាស់ទីដំបូង។ តាង $u(t)$ ដែលវាស់វែងជាវិជ្ជមានចុះក្រោម បង្ហាញពីការផ្លាស់ទីរបស់ម៉ាស់ពីទីតាំងលំនឹងរបស់វានៅពេល t សូមមើលរូបភាព 3.8.1 ។ បន្ទាប់មក $u(t)$ គឺទាក់ទងទៅនឹងកម្លាំងដែលធ្វើសកម្មភាពលើម៉ាស់ដែលឆ្លងកាត់ច្បាប់នៃចលនារបស់ញូតុន $mu''(t)=f(t)$, (3)

ដែល u'' គឺជាការបង្កើនល្បឿននៃម៉ាស់ ហើយ f គឺជាកម្លាំងសុទ្ធដែលធ្វើសកម្មភាពលើម៉ាស់។ សង្កេតថាទាំង u និង f គឺជាមុខងារនៃពេលវេលា។ ក្នុងការកំណត់ f មានកម្លាំងបួនដាច់ដោយឡែកដែលត្រូវតែពិចារណា៖

ទម្ងន់ $w=mg$ នៃម៉ាសតែងតែធ្វើសកម្មភាពចុះក្រោម។

កម្លាំងទំនាញ F_s ត្រូវបានគេសន្មត់ថាសមាមាត្រទៅនឹងការពន្លូតសរុប $L+u$ នៃការលូតហើយតែងតែធ្វើសកម្មភាពដើម្បីស្តារទៅទីតាំងធម្មតារបស់វា។ ប្រសិនបើ $L+u>0$ នោះទំនាញបានពង្រីកហើយកម្លាំងត្រូវបានដឹកនាំឡើងលើ។ ក្នុងករណីនេះ $F_s=-k(L+u)$ (4)

ម្យ៉ាងវិញទៀត បើ $L+u<0$ នោះកម្លាំងត្រូវបានបង្ហាប់ពីចម្ងាយ $|L+u|$ ហើយកម្លាំងត្រូវចុះក្រោមត្រូវបានផ្តល់ដោយ $F_s=k|L+u|$ ។ ទោះយ៉ាងណាក៏ដោយនៅពេលដែល $L+u<0$ នោះ $|L+u|=-(L+u)$ ដូច្នេះ F_s ត្រូវបានផ្តល់ឱ្យម្តងទៀតដោយ (4) ។ ដូចនេះ ដោយមិនគិតពីទីតាំងនៃម៉ាស់ កម្លាំងដែលបញ្ចេញត្រូវបានបង្ហាញដោយ (4) ។

កម្លាំងសើម ឬធន់ F_d តែងតែធ្វើសកម្មភាពក្នុងទិសដៅផ្ទុយទៅនឹងទិសដៅនៃចលនារបស់ម៉ាស។ កម្លាំងនេះអាចកើតឡើងពីប្រភពជាច្រើន៖ ការតស៊ូពីខ្យល់ ឬឧបករណ៍ផ្ទុកផ្សេងទៀតដែលម៉ាស់ផ្លាស់ទី ការរលាយថាមពលខាងក្នុងដោយសារការបន្ថែមឬការបង្ហាប់នៃរបស់ណាមួយ ការកកិតរវាងម៉ាស់និងមគ្គុទ្ទេសក៍ (ប្រសិនបើមាន) ដែលរារាំងចលនារបស់វាទៅ វិមាត្រមួយ ឬឧបករណ៍មេកានិច (ផ្ទាំងគ្រប់គ្រង) ដែលផ្តល់កម្លាំងទប់ទល់ទៅនឹងម៉ាស់។ ក្នុងករណីណាក៏ដោយ យើងសន្មត់ថាកម្លាំងទប់ទល់គឺសមាមាត្រទៅនឹងល្បឿន $\left|\frac{du}{dt}\right|$ នៃម៉ាស់។ នេះជាធម្មតាត្រូវបានគេហៅថា viscous damping ។ ប្រសិនបើ $\frac{du}{dt}>0$ នោះ u កើន ដូច្នេះម៉ាស់រំកិលចុះក្រោម។បន្ទាប់មក F_d ត្រូវបានដឹកនាំឡើងលើ ហើយត្រូវបានផ្តល់ដោយ $F_d(t)=-\gamma u'(t)$ (5)

ដែល γ ជាថេរវិជ្ជមាននៃសមាមាត្រដែលគេស្គាល់ថាជាថេរ damping ។ ម៉្យាងវិញទៀត ប្រសិនបើ $\frac{du}{dt}>0$ នោះ u ថយចុះ ម៉ាស់កំពុងឡើងលើ ហើយ F_d ចុះក្រោម ។ ក្នុងករណីនេះ $F_d=\gamma|u'(t)|$ ដោយ $|u'(t)|=-u'(t)$ វាដូច $F_d(t)$ ត្រូវបានផ្តល់ឱ្យម្តងទៀតដោយ (5) ។ ដូច្នេះដោយមិនគិតពីទិសដៅនៃចលនានៃម៉ាស់ កម្លាំងតែងតែត្រូវបានបង្ហាញដោយ (5) ។

កម្លាំងអាចមានភាពស្មុគស្មាញបន្តិច ហើយការសន្មត់ ត្រូវបានយកគំរូតាមដោយ (5) អាចបើកចំហចំពោះសំណួរ។ dashpots មួយចំនួនមានលក្ខណៈជា (5) states បើផ្សេងពីនេះនោះមានតិចតួច វាអាចនឹងមិនមានទាំងស្រុង ឬកែតម្រូវថេរ γ ដើម្បីប្រហាក់ប្រហែលពួកគេ។ អត្ថប្រយោជន៍សំខាន់នៃការសន្មត់ (5) គឺថាវានាំទៅរកសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរ (ជាជាងមិនមែនលីនេអ៊ែរ) ។ នៅក្នុងនេះមានន័យថាការវិភាគហ្មត់ចត់នៃប្រព័ន្ធគឺត្រង់ដូចដែលយើងនឹងបង្ហាញនៅក្នុងផ្នែកនេះ និងបន្ទាប់។

កម្លាំងខាងក្រៅដែលបានអនុវត្ត $F(t)$ ត្រូវបានដឹកនាំចុះក្រោម ឬឡើងលើ ដោយសារ $F(t)$ វិជ្ជមាន ឬអវិជ្ជមាន។ នេះអាចជាកម្លាំងមួយដោយសារតែចលនារបស់រ៉ឺស័រត្រូវបានភ្ជាប់ ឬវាអាចជាកម្លាំងដែលអនុវត្តដោយផ្ទាល់ទៅលើម៉ាស់។ ជារឿយៗកម្លាំងខាងក្រៅគឺតាមកាលកំណត់។

ដោយគិតពីកម្លាំងទាំងនេះ ឥឡូវនេះយើងអាចសរសេរឡើងវិញនូវច្បាប់របស់ញូតុន (3) ជា

$$mu''(t)=mg+F_s(t)+F_d(t)+F(t)$$
$$=mg-k\left[L+u(t)\right]-\gamma u'(t)+F(t) \qquad (6)$$

ដោយ $mg-kL=0$ តាមសមីការ (2) វាគោរពតាមសមីការនៃម៉ាសគឺ

$$mu''(t)+\gamma u'(t)+ku(t)=F(t) \qquad (7)$$

ដែល ថេរ m , γ , k ជាចំនួនវិជ្ជមាន ។ ចំណាំ សមីការ (7) មានទម្រង់ដូចសមីការ (1)

វាជាការសំខាន់ដែលត្រូវយល់ថាសមីការ (7) គ្រាន់តែជាសមីការប្រហាក់ប្រហែលសម្រាប់ការផ្លាស់ទីរបស់ $u(t)$ ប៉ុណ្ណោះ។ ជាពិសេសសមីការ(4) និង (5) គួរតែត្រូវបានគេមើលថាជាការប្រហាក់ប្រហែលសម្រាប់កម្លាំងទំនាញរ៉ឺស័រ និងកម្លាំងរៀងគ្នា។ នៅក្នុងការទាញយករបស់យើង យើងក៏បានធ្វេសប្រហែសទៅលើម៉ាស់នៃរ៉ឺស័រ នៅក្នុងការប្រៀបធៀបជាមួយនឹងម៉ាស់នៃរូបរាងដែលភ្ជាប់មកជាមួយ។

ការបង្កើតពេញលេញនៃបញ្ហារំញ័រតម្រូវឱ្យយើងបញ្ជាក់លក្ខខណ្ឌដំបូងពីរគឺទីតាំងដំបូង u_0 និងល្បឿនដំបូង v_0 នៃម៉ាស់ $u(0)=u_0$, $u'(0)=v_0$ (8)

វាគោរពតាម ទ្រឹស្តីបទ 3.2.1 ដែលលក្ខខណ្ឌទាំងនេះឱ្យដោយបញ្ហានៃគណិតវិទ្យាដែលមានដំណោះស្រាយ ។ នេះគឺស្របជាមួយនឹងការពិចារណារូបរបស់យើងដែលថា ប្រសិនបើម៉ាសត្រូវបានកំណត់ក្នុងចលនាជាមួយនឹងការផ្លាស់ទី និងល្បឿនដំបូងដែលបានផ្តល់ឱ្យនោះ ទីតាំងរបស់វានឹងត្រូវបានកំណត់តែមួយគត់នៅពេលខាងមុខ។ ទីតាំងម៉ាស់ត្រូវបានផ្តល់ឱ្យ (ប្រហែល) ដោយដំណោះស្រាយនៃ (7) លក្ខខណ្ឌដំបូងដែលបានចេញគោរពតាម (8) ។

ឧទាហរណ៍១: ម៉ាស់ដែលមានទម្ងន់ 4 ផោនលាតសន្ទឹងលើរ៉ឺស័រ 2 អ៊ិញ។ ឧបមាថាម៉ាស់ត្រូវបានផ្លាស់ទីបន្ថែម 6 អិញ។ ក្នុងទិសដៅអវិជ្ជមាន ។ ម៉ាស់គឺស្ថិតនៅក្នុងឧបករណ៍ផ្ទុក 6 ផោននៅពេលដែលម៉ាស់មានល្បឿន $3\ fit/s$ ។នៅក្រោមការសន្មត់ដែលបានពិភាក្សានៅក្នុងផ្នែកនេះ បង្កើតបញ្ហាតម្លៃដំបូងដែលគ្រប់គ្រងចលនានៃម៉ាស់។

បញ្ហាតម្លៃដំបូងដែលត្រូវការមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (7) និងលក្ខខណ្ឌដំបូង (8) ដូច្នេះភារកិច្ចរបស់យើងគឺដើម្បីកំណត់ចំនួនថេរផ្សេងៗដែលលេចឡើងក្នុងសមីការទាំងនេះ។ ជំហានដំបូងគឺជ្រើសរើសឯកតារង្វាស់។ ដោយផ្អែកលើបញ្ហាក្នុងការប្រើប្រាស់ភាសាអង់គ្លេសជាជាងប្រព័ន្ធម៉ែត្រនៃឯកតា។ ឯកតាពេលវេលាតែមួយគត់ដែលបានលើកឡើងគឺទីពីរ ដូច្នេះយើងនឹងវាស់ t ជាវិនាទី។ម្យ៉ាងវិញទៀតទាំងហ្វីតនិងអ៊ីញ បង្ហាញជាឯកតានៃប្រវែង។ វាមិនសំខាន់ទេថាមួយណាដែលយើងប្រើ ប៉ុន្តែដោយបានធ្វើការជ្រើសរើស វាសំខាន់ដើម្បីឲ្យស្រប។ ដើម្បីឱ្យច្បាស់លាស់ អនុញ្ញាតឱ្យយើងវាស់ការផ្លាស់ទីរបស់អ្នកជាហ្វីត។

ដោយសារមិនគិតអំពីកម្លាំងទប់ខាងក្រៅ យើងសន្មត់ថា $F(t)=0$ ។ កំណត់ m ចំណាំថា

$$m=\frac{w}{g}=\frac{4\ lb}{32\ ft/\sec^2}=\frac{1}{8}\frac{lb\sec^2}{ft}$$

មេគុណ γ គឺត្រូវបានគណនាតាមទម្រង់ $\gamma u'$ គឺស្មើ $6lb$ ពេល u' ស្មើ $ft/\sec$ ។

ដូច្នេះ $\gamma=\dfrac{6lb}{3\ ft/\sec}=2\dfrac{lb\sec}{ft}$

ថេរ k នៃរ៉ឺស័រ រកតាមទម្រង់ដែលម៉ាស់នៃរ៉ឺស័រលូតបាន $2\ inch$ ឬ ដោយ $\dfrac{1}{6\ ft}$ ។

ដូច្នេះ $k=\dfrac{4lb}{\dfrac{1}{6\ ft}}=24\dfrac{lb}{ft}$

ជាលទ្ធផល សមីការ (7) ទៅជា $\frac{1}{8}u''+2u'+24u=0$

ឬ $u''+16u'+192u=0 \qquad (9)$

លក្ខខណ្ឌដំបូងគឺ $u(0)=\frac{1}{2}\quad,\quad u'(0)=0 \qquad (10)$

លក្ខខណ្ឌទីពីរគឺបង្កប់ន័យដោយពាក្យ $(released)$ ក្នុងបញ្ហា ដែលយើងបកប្រែថា ម៉ាសត្រូវបានកំណត់ក្នុងចលនាដោយគ្មានល្បឿនចុងក្រោយ ។

រំញ័រមិនបាត់បង់ថាមពល (Undamped Free Vibrations)

ប្រសិនបើគ្មានកម្លាំងក្រៅ នោះ $F(t)=0$ ក្នុងសមីការ (7) យើងឧបមាថាគ្មានកម្លាំងលូត ដែល $\gamma=0$ នេះគឺជាចំណុចសំខាន់មួយនៃប្រព័ន្ធ កម្រអាចសម្រេចបានក្នុងការអនុវត្ត។ ទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ បើកម្លាំងលូតកាន់តែតូច ការឧបមាប្រហែលគ្មានតម្លៃ ជាលទ្ធផលមធ្យមខ្លី។ នោះសមីការនៃ (7) មកត្រឹមជា $mu''+ku=0 \qquad (11)$

ដំណោះស្រាយទូទៅនៃសមីការនៃ (11) គឺ $u=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t \qquad (12)$

ដែលមាន $$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad (13)$$
ចំនួនថេរ A, B អាចគណនាតាមលក្ខខណ្ឌ តាមទម្រង់នៃសមីការ (8) ដែលបានផ្តល់ដោយ ។

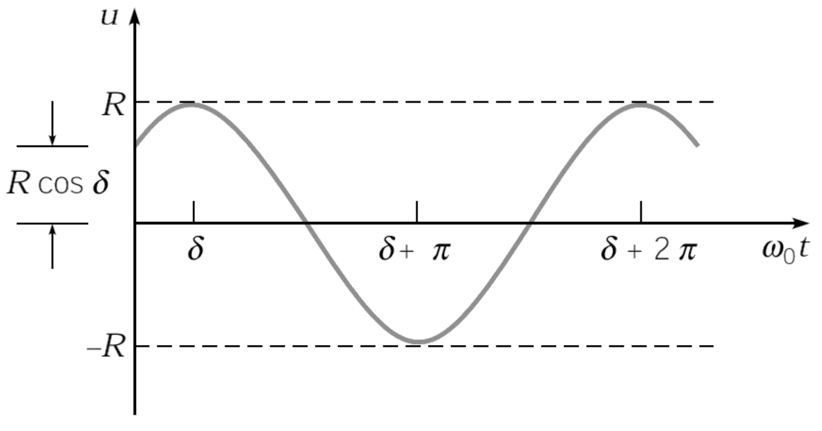
ក្នុងការពិភាក្សារកដំណោះស្រាយនៃសមីការ (11) វាមានភាពងាយស្រួលក្នុងការសរសេរសមីការ (12) ក្នុងទម្រង់ $$u = R\cos(\omega_0 t - \delta) \qquad (14)$$
ឬ $$u = R\cos\delta\cos\omega_0 t + R\sin\delta\sin\omega_0 t \qquad (15)$$
ដោយប្រៀបធៀបសមីការ (15) ជាមួយសមីការ (12)

យើងរក A , B , R , δ គឺទាក់ទងនឹងសមីការ $A = R\cos\delta$, $B = R\sin\delta$ (16)

ដូច្នេះ $$R = \sqrt{A^2 + B^2} \quad , \quad \tan\delta = \frac{B}{A} \qquad (17)$$
ក្នុងការគណនា δ គេគិតលើកាជ្រង់ អាចកំណត់ដោយការពិនិត្យសញ្ញានៃ $\cos\delta$ និង $\sin\delta$ ក្នុងសមីការ (16)

ក្រាបនៃសមីការ (14) ឬសមមូលសមីការ (12) ជាធម្មតាសំណុំដំបូងនៃលក្ខខណ្ឌគឺត្រូវបានបង្ហាញក្នុងរូបភាព 3.8.3 ។ ក្រាបនៃ cos រាងជារលកដែលពណ៌ពីខួបឬអាក់ម៉ូនិកធម្មតាម៉ូតនៃម៉ាស់។

ខួបនៃអនុគមន៍គឺ $$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (18)$$
ប្រេកង់នៃរង្វង់ $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ គិតជារ៉ាដ្យង់ក្នុងមួយឯកតា ហៅថា **ប្រេកង់ធម្មជាតិ** នៃរំញ័រ។ ការផ្លាស់ទីអតិបរមា R នៃម៉ាស់ពីលំនឹងគឺ **អំព្លីទីត** ។ វិមាត្រប៉ារ៉ាម៉ែត្រ δ ហៅថា **ផាស** ឬមុំផាស និងរង្វាស់នៃបំលាស់ទីនៃរលកពីទីតាំងធម្មតារបស់វាគឺ $\delta = 0$ ។



ឧទាហរណ៍២៖ ឧបមាថាម៉ាសវត្ថុមួយមានទម្ងន់ $10\ lb$ លូតបាន $2\ inch$ ។ បើម៉ាសផ្លាស់ទីបន្ថែម $2\ inch$ ទៀតដោយចលនានៃល្បឿនចុះក្រោម $1\ ft/\sec$ គណនាទីតាំងនៃម៉ាស់ ខួប អំព្លីទុត និងផាសនៃចលនា ។

ថេរនៃរ៉ឺស័រគឺ $k = 10\ lb/2\ inch = 60\ lb/ft$ ហើយម៉ាស់គឺ $m = \frac{w}{g} = \frac{10}{32\ lb.\sec^2/ft}$

ដូច្នេះ សមីការនៃចលនាកំណត់ដោយ $u''+192u=0$ (19)

ហើយដំណោះស្រាយទូទៅគឺ $u=A\cos\left(8\sqrt{3}t\right)+B\sin\left(8\sqrt{3}t\right)$

ចម្លើយនៃមីការផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $u(0)=\dfrac{1}{6\,ft}$ ហើយ $u'(0)=-1\,ft/\sec$

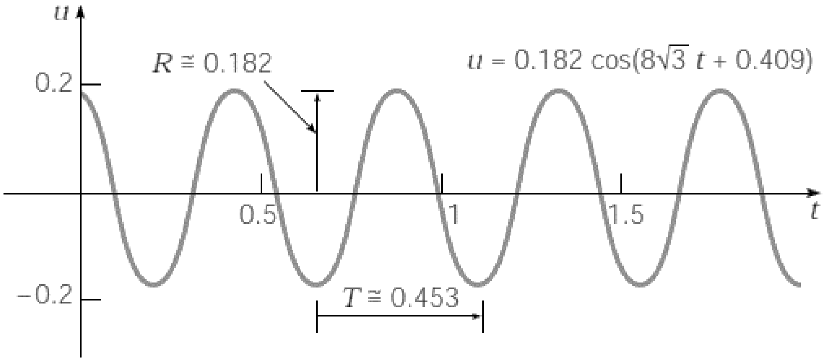
គឺ $u=\dfrac{1}{6}\cos\left(8\sqrt{3}t\right)-\dfrac{1}{8\sqrt{3}}\sin\left(8\sqrt{3}t\right)$ (20)

ប្រេកង់ធម្មជាតិគឺ $\omega_0=\sqrt{192}\cong 13.856\ rad/\sec$ នោះខួប $T=\dfrac{2\pi}{\omega_0}\cong 0.45345\sec$ អំព្លីទុត R និង ផាស δ រកតាមសមីការ (17) យើងមាន $R^2=\dfrac{1}{36}+\dfrac{1}{192}=\dfrac{19}{576}$

ដូច្នេះ $R\cong 0.18162\ ft$

ដំណាក់កាលទីពីរនៃសមីការ (17) $\tan\delta=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ ។ មានដំណោះស្រាយពីរ មួយក្នុងកាជ្រង់ទីពីរ ហើយមួយទៀតក្នុងកាជ្រង់ទីបួន។ បញ្ហាធម្មតា $\cos\delta>0$, $\sin\delta<0$ ដូចនេះ δ ក្នុងកាជ្រង់ទីបួន ឱ្យដោយ $\delta=-arc\tan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)\cong -0.40864\ rad$

ក្រាបនៃចម្លើយរបស់សមីការ (20) គឺ



រំញ័រមិនបាត់បង់ថាមពល (Undamped Free Vibrations)

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃម៉ាស់គឺ $mu''+\gamma u'+ku=0$ (21)

យើងចាប់អារម្មណ៍ជាពិសេសលើឥទ្ធិពលនៃបម្រែបម្រួលរបស់ថេរ γ សម្រាប់តម្លៃរបស់ម៉ាស់ m ហើយនិងថេររ៉ឺស័រ k ។ឫសរបស់សមីការគឺ

$$r_1\ ,\ r_2=\frac{-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-4km}}{2m}=\frac{\gamma}{2m}\left(-1\pm\sqrt{1-\frac{4km}{\gamma^2}}\right) \qquad (22)$$

ដោយអាស្រ័យ γ^2-4km ដំណោះស្រាយ u មួយឱ្យដោយទម្រង់

$$\gamma^2-4km>0\ ,\quad u=Ae^{r_1t}+Be^{r_2t} \qquad (23)$$

$$\gamma^2-4km=0\ ,\quad u=\left(A+Bt\right)e^{-\frac{\gamma t}{2m}} \qquad (24)$$

$$\gamma^2-4km<0\ ,\quad u=e^{-\frac{\gamma t}{2m}}\left(A\cos\mu t+B\sin\mu t\right)\ ,\ \mu=\frac{\left(4km-\gamma^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2m}>0 \qquad (25)$$

ដូច្នេះ

1. $m\,,\gamma\,,k>0\ \gamma^2-4km<\ \gamma^2$
2. បើ $\gamma^2-4km\geq 0$ នោះតម្លៃនៃ $r_1\,,r_2$ ឱ្យដោយសមីការ (22) គឺអវិជ្ជមាន
3. បើ $\gamma^2-4km<0$ នោះតម្លៃនៃ $r_1\,,r_2$ ជាកុំផ្លិចហើយផ្នែកពិតជាចំនួនអវិជ្ជមាន

ដូច្នេះ គ្រប់ករណី ដំណោះស្រាយ u ខិតជិត 0 , $t\to\infty$

ករណីដែលសំខាន់ក្នុងចំណោមបី ពេលកម្លាំងយឺតតូច ។ បើគេតាង $A=R\cos\delta$, $B=R\sin\delta$ ក្នុងសមីការ (25) នោះយើងទទួលបាន

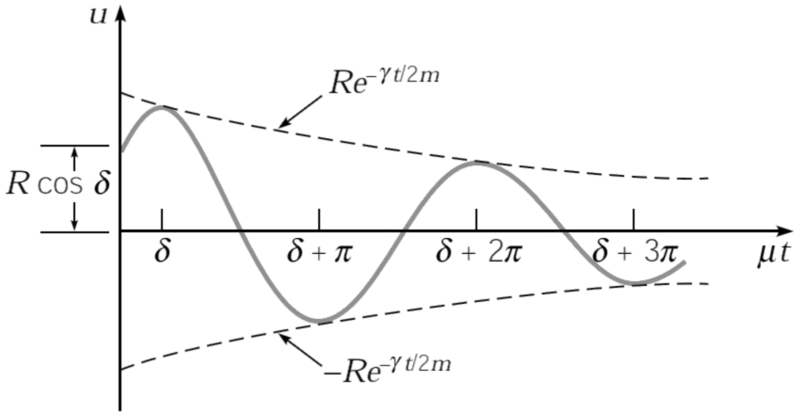
$$u=Re^{-\frac{\gamma t}{2m}}\cos(\mu t-\delta)\qquad(26)$$

u ផ្លាស់ទីចន្លោះខ្សែកោង $u=\pm Re^{-\frac{\gamma t}{2m}}$ ។ អំព្លីទុតកត្តា R អាស្រ័យលើ $m\,,\gamma\,,k$ ហើយនិងលក្ខខណ្ឌដំបូង ។

ទោះបីជាចលនាមិនខួប ប៉ារ៉ាម៉ែត្រ μ គណនាប្រេកង់ជាមួយនឹងម៉ាស់ណាមួយលំយោលត្រឡប់ទៅមក ។ សន្និដ្ឋាន μ ហៅថា quasi frequency ។ ដោយការប្រៀបធៀប μ ជាមួយប្រេកង់ ω_0 ដែលគ្មានចលនា យើងរកវាដោយ $\dfrac{\mu}{\omega_0}=\dfrac{\frac{\sqrt{4km-\gamma^2}}{2m}}{\sqrt{\frac{k}{m}}}=\left(1-\dfrac{\gamma^2}{4km}\right)^{\frac{1}{2}}\cong 1-\dfrac{\gamma^2}{8km}\qquad(27)$

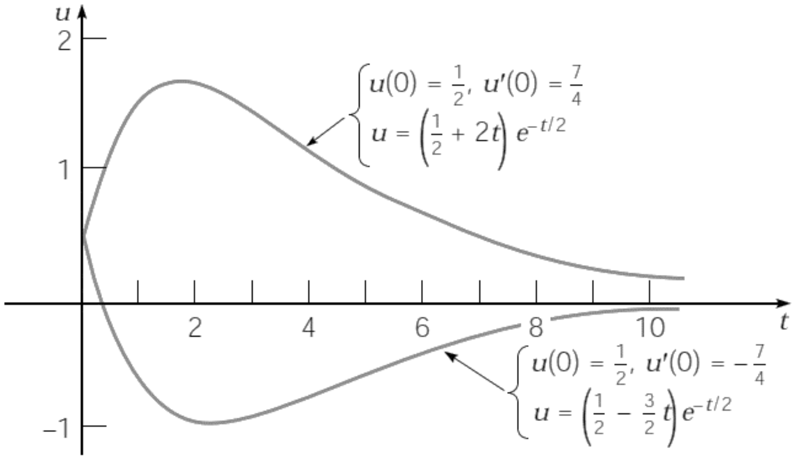
តម្លៃប៉ាន់ស្មានត្រឹមត្រូវនៅពេលដែល $\dfrac{\gamma^2}{4km}$ តូច ។ តាមរយៈជាមួយសមីការ (18) បរិមាណ $T_d=\dfrac{2\pi}{\mu}$ ហៅថា quasi period ។ វាជាពេលនៅចន្លោះអតិបរមាឬអប្បបរមានៃទីតាំងនៃម៉ាស់ ។ ទំនាក់ទំនងរវាង T_d និង T ឱ្យដោយ

$$\frac{T_d}{T}=\frac{\omega_0}{\mu}=\left(1-\frac{\gamma^2}{4km}\right)^{-\frac{1}{2}}\cong\left(1+\frac{\gamma^2}{8km}\right)\qquad(28)$$



ការប៉ាន់ស្មានត្រឹមត្រូវនៅពេលដែល $\frac{\gamma^2}{4km}$ តូច ។ ដូច្នេះ តម្លៃធ្លាក់តូចកើនឡើង quasi period

សមីការ (27) និង (28) ពង្រឹងសារៈសំខាន់រិមាត្រសមាមាត្រ $\frac{\gamma^2}{4km}$ ។ ពេល $\frac{\gamma^2}{4km}$ តូចនោះ យើងអាចធ្វើឱ្យមានឥទ្ធិពលលើការទម្លាក់ក្នុងការគណនា quasi frequency និង quasi period នៃចលនា ។ $\frac{\gamma^2}{4km}$ កើនឡើង quasi frequency μ ថយចុះហើយ quasi period T_d កើនឡើង ។ តាមពិតទៅ $\mu \to 0$ ហើយ $T_d \to \infty$ គឺ $\gamma \to 2\sqrt{km}$ ។



ឧទាហរណ៍៖ចលនានៃម៉ាស់រ៉ឺស័រមួយប្រព័ន្ធកំណត់ដោយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$u''+0.125u'+u=0$ (29)

វង្វាស់ u គិតជាហ្វីតហើយ t គិតជាវិនាទី ។ រកប្រេកង់ quasi និង ខួប quasi ស្របពេលដែលម៉ាស់ប៉ះផ្ទាល់ទៅលើទីតាំងលំនឹងរបស់វា ។ ហើយរកថេរពេល τ ដែល $|u(t)|<0.1$ គ្រប់ $t>\tau$ ។

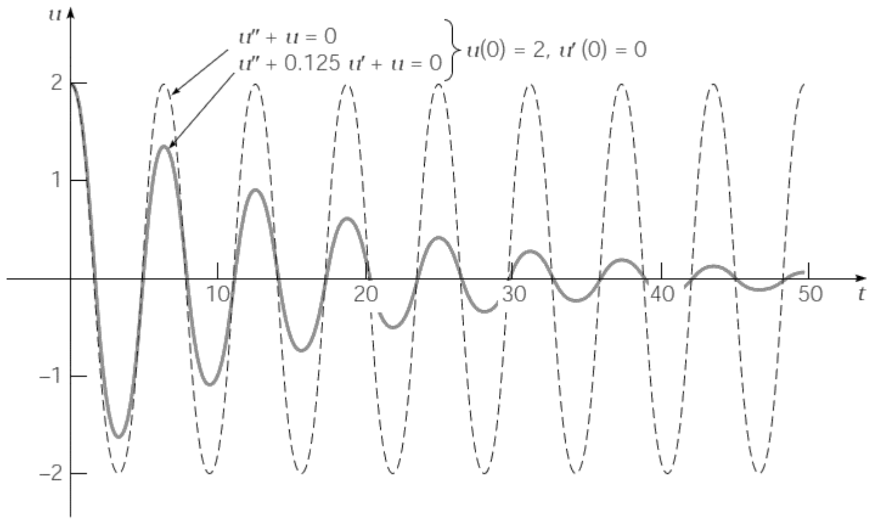
ដំណោះស្រាយ

$$u=e^{-\frac{t}{16}}\left[A\cos\frac{\sqrt{255}}{16}t+B\sin\frac{\sqrt{255}}{16}t\right]$$

ដើម្បីផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដំបូង យើងយក ដំណោះ $A=2$, $B=\frac{2}{\sqrt{255}}$ ស្រាយនៃបញ្ហាដំបូងមានតម្លៃ

$$u=e^{-\frac{t}{16}}\left(2\cos\frac{\sqrt{255}}{16}t+\frac{2}{\sqrt{255}}\sin\frac{\sqrt{255}}{16}t\right)$$

$$=\frac{32}{\sqrt{255}}e^{-\frac{t}{16}}\cos\left(\frac{\sqrt{255}}{16}t-\delta\right) \qquad (30)$$

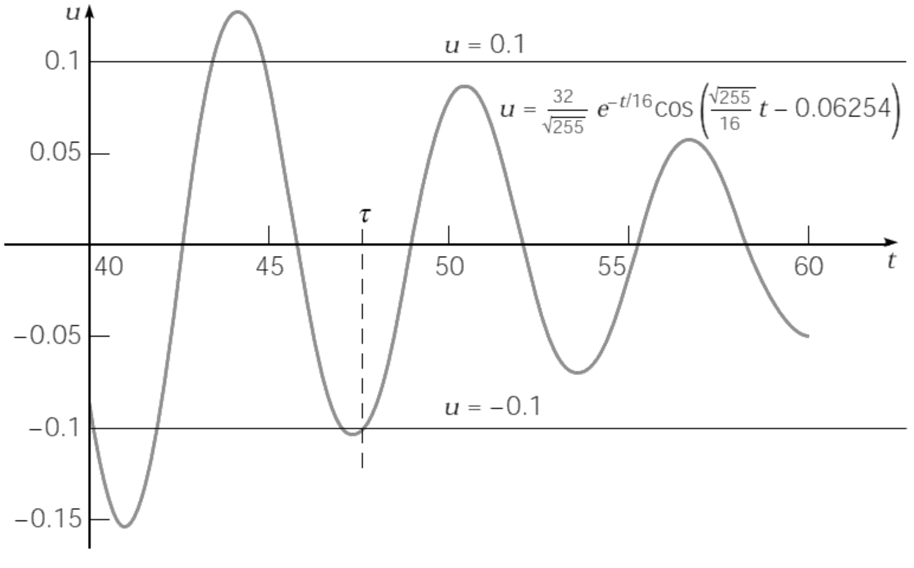


$\tan\delta = \frac{1}{\sqrt{255}}$ នោះ $\delta \cong 0.06254$ ។ បំលាស់ទីនៃម៉ាស់ជាអនុគមន៍ពេល បង្ហាញក្នុងរូបភាព 3.8.7 ។ ប្រេកង់ quasi គឺ $\mu = \frac{\sqrt{255}}{16} \cong 0.998$ ហើយ ខួប quasi គឺ $T_d = \frac{2\pi}{\mu} \cong 6.295\sec$ ។

រូបភាព 3.8.8 បង្ហាញពីក្រាបនៃដំណោះស្រាយរបស់ $40 \le t \le 60$ ក្រាបទាំងអស់នៃ $u = \pm 0.1$ ។ ទម្រង់ក្រាបរបស់វាលេចឡើងដែល τ អំពី 47.5 ហើយដំណោះស្រាយច្បាស់លាស់ យើងរក $\tau \cong 47.5149\sec$ ។

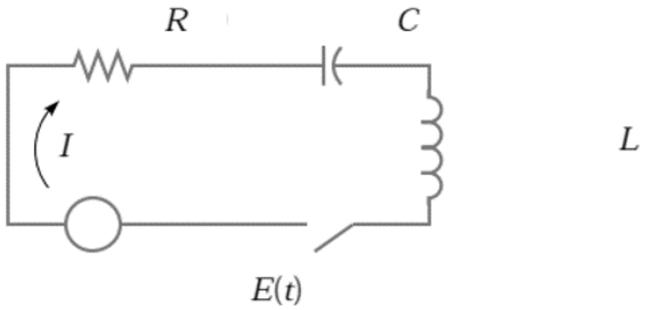
ដើម្បីរកពេលណាមួយដែលម៉ាស់ប៉ះដំបូងទៅនឹងទីតាំងលំនឹង យើងយោងទៅតាមសមីការ (30) ហើយ $\frac{\sqrt{255}t}{16} - \delta = \frac{\pi}{2}$ រិដ្ឋមានសូន្យតូចបំផុតនៃអនុគមន៍កូស៊ីន ។ នោះដំណោះស្រាយ t ផ្តល់ឱ្យយើងដោយ

$$t = \frac{16}{\sqrt{255}}\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right) \cong 1.637\sec$$



Electric Circuits សៀគ្វីអគ្គិសនី ឧទាហរណ៍ទី២កើតឡើងពីសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ពីរជាមួយនឹងចំនួនថេរ គឺជាគំរូនៃលំហូរនៃអគ្គិសនីសៀគ្វីតជាសេរីបង្ហាញក្នុងរូបភាព 3.8.9 ។ I គិតជាអំពែ (A) ជាអនុគមន៍នៃពេល t ។ រេស៊ីស្តង់ R គិតជាអូម $(ohms)$ កាប៉ាស៊ីតេ C គិតជាផារ៉ាត $(farads)$ និងអាំងឌុចតង់ L គិតជា $(henry)$ គឺវិជ្ជមាន ហើយឧបមាថាស្គាល់ចំនួនថេរ ។ E $(volts)$ ឱ្យដោយអនុគមន៍នៃពេល ។ ក្នុងបរិមាណរូបវិទ្យាផ្សេងទៀតដែលពិភាក្សាគឺ Q $(coulombs)$ លើកាប៉ាស៊ីតេនៃពេល t ។ ទំនាក់ទំនងរវាង Q និង I គឺ

$$I=\frac{dQ}{dt} \qquad (31)$$



លំហូរនៃសៀគ្វីគោរពតាមច្បាប់ទីពីរ *Kirchhoff* ក្នុងសៀគ្វីបិទ តង់ស្យុងអគ្គិសនីស្មើនឹងផលបូកនីមួយៗនៃតង់ស្យុងដែលរត់ទៅតាមសៀគ្វី។យោងទៅលើច្បាប់បឋមនៃអគ្គិសនី យើងស្គាល់ថា

តង់ស្យុងទម្លាក់ទៅតាមរេស៊ីស្តង់គឺ IR

តង់ស្យុងទម្លាក់ទៅតាមកាប៉ាស៊ីតេគឺ $\frac{Q}{C}$

តង់ស្យុងទម្លាក់ទៅតាមអាំងឌុចតង់គឺ $L\frac{dI}{dt}$

ដូច្នេះ តាមតាមច្បាប់ *Kirchhoff*

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{1}{C}Q=E(t) \qquad (32)$$

ឯកតា $1\,volt=1\,ohm\cdot 1\,ampere=1coulomb/1\,farard=1henry\cdot 1ampere/1\sec$

ជំនួស I ពីសមីការ (31) យើងផ្តល់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$LQ''+RQ'+\frac{1}{C}Q=E(t) \qquad (33)$$

សម្រាប់បន្ទុកអគ្គិសនី Q លក្ខខណ្ឌដើមគឺ

$$Q(t_0)=Q_0 \quad , \quad Q'(t_0)=I(t_0)=I_0 \qquad (34)$$

ជាជម្រើសយើងអាចផ្តល់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលសម្រាប់ចរន្ត I ដោយការធ្វើឌីផេរ៉ង់ស្យែលសមីការ (33) ធៀបនឹង t ហើយជំនួស $\frac{dQ}{dt}$ ពីសមីការ (31) ។ ជាលទ្ធផលគឺ

$$LI''+RI'+\frac{1}{C}I=E'(t) \qquad (35)$$

លក្ខខណ្ឌដើម

$I(t_0)=I_0 \quad , \quad I'(t_0)=I_0^{'} \qquad (36)$

ពីសមីការ (32) វាដើរតាម

$$I_0^{'}=\frac{E(t_0)-RI_0-\left(\frac{I}{C}\right)Q_0}{L} \qquad (37)$$

ដូច្នេះ $I_0^{'}$ គឺគណនាដោយបន្ទុកអគ្គិសនីដើមនិងចរន្តដើមណាមួយគឺជាបរិមាណរង្វាស់នៃរូបវិទ្យា

៣.៩. កម្លាំងលំញ័រ (Forced Vibrations)

ពិចារណាក្នុងករណីដែលកម្លាំងខួបក្រៅ $F_0\cos\omega t$ ដែល $w>0$ គឺអនុវត្តចំពោះប្រព័ន្ធម៉ាសរ៉ូស័រ (spring-mass)។ គេបានសមីការចលនាគឺ

$$mu''+yu'+ku=F_0\cos\omega t \qquad (1)$$

ដំបូងឧបមាថាគ្មានដាម(damping) នោះសមីការ(1)ប្រែទៅជា

$$mu''+ku=F_0\cos\omega t \qquad (2)$$

បើ $\omega_0=\sqrt{k/m}\neq\omega$ នោះដំណោះស្រាយជាទូទៅនៃសមីការ(2)គឺ

$$u=c_1\cos\omega_0 t+c_2\sin\omega_0 t+\frac{F_0}{m\left(\omega_o^2-\omega^2\right)}\cos\omega t \qquad (3)$$

អថេរ c_1 និង c_2 ត្រូវបានកំណត់ដោយលក្ខខណ្ឌដើម។ ជាទូទៅ ចលនាដែលកើតពីផលបូកនៃចលនាខួបពីរនៃប្រេកង់ខុសគ្នា (ω_0 និង ω)និងអំព្លីទុត មានការចាប់អារម្មណ៍ជាពិសេសចំនួនពីរករណីៈ Beats ឧបមាថាដំបូងម៉ាសគឺសល់ ដូចនេះ $u(0)=0$ និង $u'(0)=0$ ។ នោះអថេរ c_1 និង c_2 ក្នុងសមីការ (3)គេបាន

$$c_1=-\frac{F_0}{m\left(\omega_0^2-\omega_0\right)}, \quad c_2=0 \qquad (4)$$

ដំណោះស្រាយនៃសមីការ(2)គឺ

$$u=\frac{F_0}{m\left(\omega_0^2-\omega_0\right)}\left(\cos\omega t-\cos\omega_0 t\right) \qquad (5)$$

នេះគឺជាផលបូកនៃអនុគមន៍ខួបពីរនៃខួបខុសគ្នា ប៉ុន្តែមានអំព្លីទុតដូចគ្នា។ ប្រើប្រាស់លក្ខណៈត្រីកោណមាត្រសម្រាប់ $\cos(A\pm B)$ដែល $A=(\omega_0+\omega)t/2$ និង $B=(w_0-w)t/2$ ។

យើងអាចសរសេរសមីការ(5)ក្នុងទម្រង់

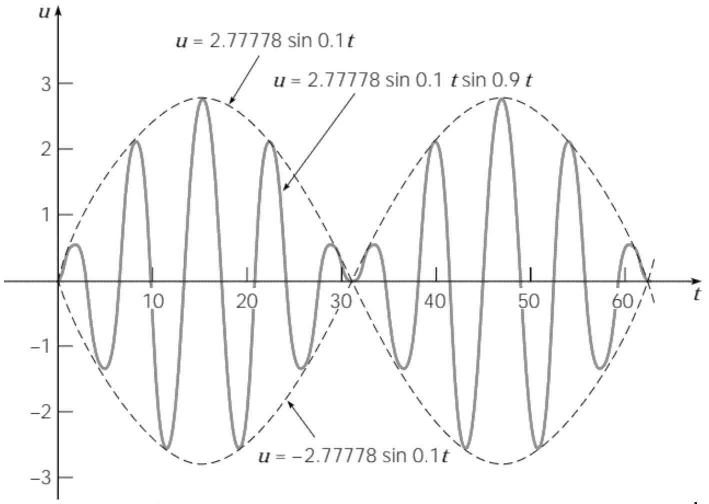
$$u=\left[\frac{2F}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\sin\frac{(\omega_0-\omega)t}{2}\right]\sin\frac{(\omega_0+\omega)t}{2} \qquad (6)$$

បើ $|\omega_0-\omega|$ តូច នោះ $\omega_0+\omega$ គឺធំជាង $|\omega_0-\omega|$ ។ $\sin(\omega_0+\omega)t/2$ គឺជាអនុគមន៍លំយោលលឿនប្រៀបធៀបជាមួយ $\sin(\omega_0-\omega)t/2$ ។ ដូចនេះ ចលនាគឺជាលំយោលលឿនជាមួយប្រេកង់ តែអំព្លីទុតស៊ីនុសសូអ៊ីតផ្លាស់ប្តូរយឺត

$$\frac{2F_0}{m\left(\omega_0^{\,2}-\omega^2\right)}\sin\frac{\left(\omega_0-\omega\right)t}{2}$$

ផ្នែកនៃចលនានេះ មានបម្រែបម្រួលខួបនៃអំព្លីទុត ហៅថា Beat។ បាតុភូតនេះកើតឡើងនៅក្នុងសូរស័ព្ទ ពេលដែលចំណុចរបត់ពីរមានប្រេកង់ជិតស្មើគ្នាត្រូវបានបន្លឺឡើងក្នុងពេលដំណាលគ្នា។ ក្នុងករណីនេះ បម្រែបម្រួលខួបនៃអំព្លីទុតគឺវាច្បាស់លាស់ចំពោះត្រចៀកដែលគ្មានជំនួយ។ នៅក្នុងអេឡិចត្រូនិចបម្រែបម្រួលនៃអំព្លីទុតជាមួយពេលវេលាត្រូវបានហៅថាម៉ូឌុលអំព្លីទុត (amplitude modulation)។ ក្រាបនៃ u ដូចដែលបានឱ្យក្នុងសមីការ (6) ក្នុងករណីធម្មតាត្រូវបានបង្ហាញក្នុងរូបភាព3.9.1។

រូបភាព3.9.1 Beat $u''+u=0.5\cos 0.8t, u\left(0\right)=0, u'\left(0\right)=0;\ u=2.77778\sin 0.1t\sin 0.9t$

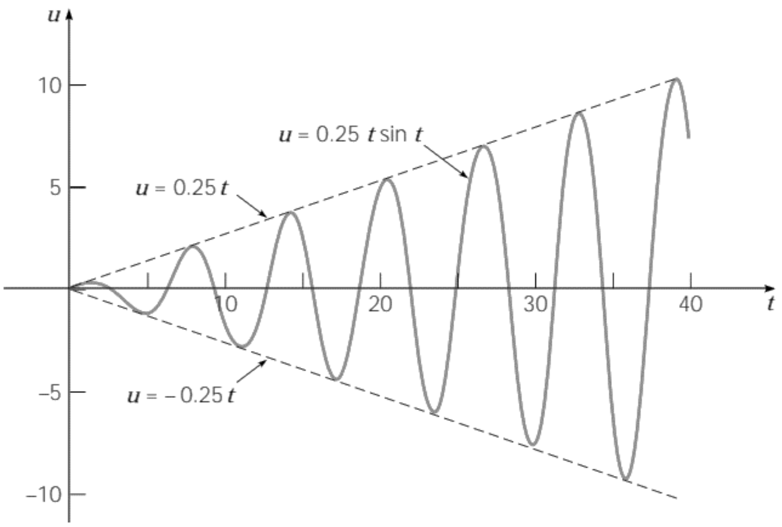


អនុភាព ដូចក្នុងឧទាហរណ៍ទី២ ពិចារណាក្នុងករណី $\omega=\omega_0$ នោះប្រេកង់នៃអនុគមន៍កម្លាំងគឺដូចគ្នាទៅនឹងប្រេកង់ដើមនៃប្រព័ន្ធ។ នោះក្រុមមិនអូម៉ូសែន $F_0\cos\omega t$ គឺជាដំណោះស្រាយនៃសមីការអូម៉ូសែន។ ក្នុងករណីនេះ ដំណោះស្រាយនៃសមីការ(2)គឺ

$$u=c_1\cos\omega_0 t+c_2\sin\omega_0 t+\frac{F_0}{2m\omega_0}t\sin\omega_0 t \qquad (7)$$

ពីព្រោះតែក្រុម $t\sin\omega_0 t$ ដំណោះស្រាយ (7) សន្មតថាខួបនឹងក្លាយជាមិនទ័ល $t\to\infty$ ដោយមិនគិតតម្លៃc_1 និង c_2 ក្នុងរូប3.9.2សម្រាប់ឧទាហរណ៍សាមញ្ញ។ ជាក់ស្តែងមិនទ័ល លំយោលមិនកើតឡើង។ ពេលនោះ u ប្រែជាធំ ម៉ូដែលគណិតវិទ្យាក្នុងសមីការ(1) មានមូលដ្ឋានគឺគ្មានសុពលភាពខ្ពស់ដោយការសន្មតថាកម្លាំងរ៉ូស័រ អាស្រ័យលីនេអ៊ែរលើការផ្លាស់ទីដែលទាមទាu តូច។ ប្រសិនការដាមរួមបញ្ចូលក្នុងម៉ូដែលសន្មតថាខួបទ័ល។ យ៉ាងណាមិញឆ្លើយតបទៅនឹងអនុគមន៍ Input ប្រហែលជាធំបន្តិចប្រសិនបើដាមតូចគឺនៅជិត។ បាតុភូតនេះ ត្រូវបានស្គាល់ថាជា**អនុភាព**។

អនុភាពអាចល្អឬអាក្រក់អាស្រ័យលើកាលៈទេសៈ។ វាត្រូវបានយកចិត្តទុកដាក់យ៉ាងខ្លាំងនៅក្នុងការរចនានៃរចនាសម្ព័ន្ធអគារ ឬស្ពានដែលជាកន្លែងអាចបង្កើតអស្ថិរភាពដែលអាចឱ្យបរាជ័យនៃរចនាសម្ព័ន្ធ។



រូបភាព 3.9.2 អនុភាព $u''+u=0.5\cos t, u(0)=0, u'(0)=0; u=0,25t\sin t$

កម្លាំងលំញ័រដែលដាម (Forced Vibrations with Damping) ខួបនៃប្រព័ន្ធម៉ាសរ៉ឺស័រដែលដាមនិងអនុគមន៍ខួប $F_o\cos\omega t$ អាចកំណត់តាមរបៀបធ្វើបែបត្រង់ៗងាយៗ ទោះបីជាការគណនាវែងបន្តិច។ ដំណោះស្រាយនៃសមីការ (1) គឺ

$$u=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t}+R\cos(\omega t-\delta),\ r_1\neq r_2 \qquad (8)$$

ដែល
$$R=\frac{F_0}{\Delta},\quad \cos\delta=\frac{m\left(\omega_0^{\ 2}-\omega^2\right)}{\Delta},\quad \sin\delta=\frac{\gamma\omega}{\Delta} \qquad (9)$$

និង
$$\Delta=\sqrt{m^2\left(\omega_0^{\ 2}-\omega^2\right)^2+\gamma^2\omega^2} \qquad (10)$$

នៅក្នុងសមីការ (8) r_1 និង r_2 គឺជាការរនៃការផ្តុំអនុគមន៍សម្គាល់ក្នុងសមីការ (1) ពួកវាប្រហែលជាចំនួនពិតអវិជ្ជមាន និងកុំផ្លិចឆ្លាស់ដែលផ្នែកពិតអវិជ្ជមាន។ ក្នុងករណីនេះ ទាំង $\exp(r_1t)$ និង $\exp(r_2t)$ ខិតជិត0 , $t\to\infty$។ ដូចនេះ $t\to\infty$

$$u\to U(t)=\frac{F_0}{\sqrt{m^2\left(\omega_0^{\ 2}-\omega^2\right)^2+\gamma\omega^2}}\cos(\omega t-\delta) \qquad (11)$$

សម្រាប់ហេតុផលនេះ $u_c(t)=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t}$ ត្រូវបានហៅថាដំណោះស្រាយបណ្តោះអាសន្ន (transient solution) ,$U(t)$ដែលតាងឱ្យលំយោលនឹងមានប្រេកង់ដូចគ្នានឹងកម្លាំងក្រៅត្រូវបានហៅថាដំណោះស្រាយស្ថេតនឹង(steady-state solution) ឬកម្លាំងឆ្លើយតប (forced response)។ ដំណោះស្រាយបណ្តោះអាសន្នជួយយើងឱ្យផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដើមត្រូវបានគាំទ្រ។ ការបង្កើនពេលវេលាក្នុងប្រព័ន្ធដោយបំលាស់ទីដើមនិងល្បឿនត្រូវបាត់បង់ដោយកម្លាំងដាម និងចលនា នោះក្លាយជា

ការឆ្លើយតបក្នុងប្រព័ន្ធទៅកម្លាំងក្រៅ។ ដោយគ្មានការជាមឥទ្ធិពលនៃលក្ខខណ្ឌដើមស្ថិតនៅគ្រប់ពេល។

វាពិតជាគួរឱ្យចាប់អារម្មណ៍ដើម្បីស្វែងរករបៀបដែលអំព្លីទុត R នៃលំយោលស្ថេតនឹង (steady-state oscillation) ផ្តោតលើប្រេកង់ ω នៃកម្លាំងក្រៅ។ សម្រាប់រំញោចប្រេកង់ទាបនោះ $\omega \to 0$ តាមសមីការ (9) និង (10) ដែល $R \to F_0 / k$ ។ សម្រាប់រំញោចប្រេកង់ខ្ពស់ សមីការ (9) និង (10) កំណត់ថា $R \to 0, \omega \to \infty$ ។ តម្លៃមធ្យមនៃ ω អំព្លីទុតមានតម្លៃអតិបរមា។ ដើម្បីរកចំណុចអតិបរមា យើងអាចញែកឱ្យឃើញ R ចំពោះ ω និងកំណត់លទ្ធផលឱ្យស្មើសូន្យ។ វិធីនេះ យើងអាចរកឃើញអំព្លីទុតអតិបរមាកើតឡើងពេល $\omega = \omega_{\max}$ ដែល

$$\omega_{\max}^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma}{2m^2} = \omega_0^2 \left(1 - \frac{\gamma}{2km}\right) \qquad (12)$$

ចំណាំ $\omega_{\max} < \omega_0$ និង $\omega_{\max}$ ខិតជិត ω_0 ពេល γ តូច។ តម្លៃអតិបរមានៃ R គឺ

$$R_{\max} = \frac{F_0}{\gamma\omega_0 \sqrt{1 - \left(\gamma^2 / 4mk\right)}} \cong \frac{F_0}{\gamma\omega_0}\left(1 + \frac{\gamma^2}{8mk}\right) \qquad (13)$$

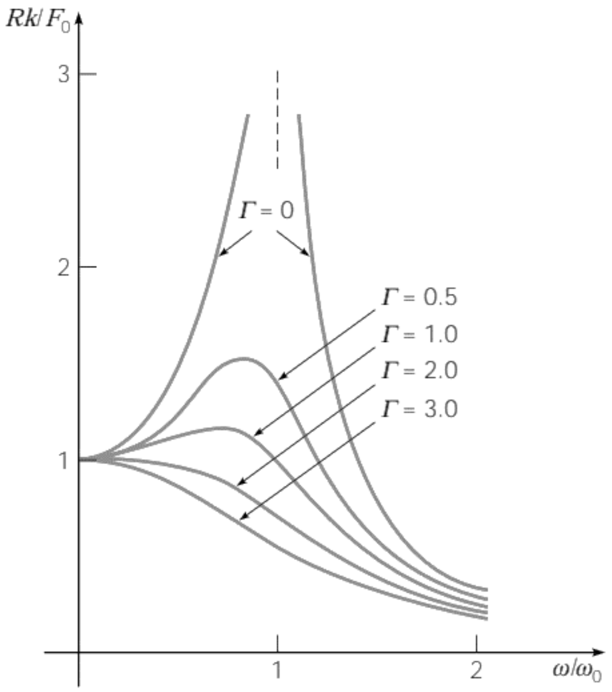
ការបង្ហាញចុងក្រោយគឺជាការប្រៀបធៀបសម្រាប់ γ ។ បើ $\gamma^2 / 2km > 1$ នោះ $\omega_{\max}$ ដូចក្នុងសមីការ (12) គឺនិមិត្ត។ ក្នុងករណីនេះ តម្លៃអតិបរមានៃ R កើតឡើងសម្រាប់ $\omega = 0$ និង R គឺអនុគមន៍ម៉ូណូតូនកើននៃ ω ។ សម្រាប់ γ តូច តាមសមីការ (13) ដែល $R_{\max} \cong F_0 / \gamma\omega_0$ ។ ដូចនេះ អតិបរមាឆ្លើយតបគឺធំជាងអំព្លីទុត F_0 នៃកម្លាំងក្រៅនិងតូចជាងតម្លៃនៃ γ ធំជាងផលធៀប $R_{\max} / F_0$ ។ រូបភាព3.9.3 មានក្រាហ្វតំណាងនៃ Rk / F_0 ជាប់នឹង ω / ω_0 សម្រាប់តម្លៃបីបួននៃ γ ។

មុំផាស δ អាស្រ័យលើការចាប់អារម្មណ៍លើ ω ។ សម្រាប់ ω ជិតសូន្យ តាមសមីការ (9) និង (10) ដែល $\cos\delta \cong 1$ និង $\sin\delta \cong 0$ ។ ដូចនេះ $\delta \cong 0$ ចម្លើយនៅជិតផាសដែលរំញោច មានន័យថាវាកើននិងចុះទាំងអស់ ហើយឧបមាថាជិតអតិបរមានិងអប្បបរមាទាំងអស់។ សម្រាប់ $\omega = \omega_0$ យើងរកថា $\cos\delta = 0$ និង $\sin\delta = 1$ ដូចនេះ $\delta = \frac{\pi}{2}$ ។ ក្នុងករណីនេះ ការឆ្លើយតបយឺតយ៉ាវក្រោយរំញោចដោយ $\frac{\pi}{2}$ នោះកំពូលនៃចម្លើយបាន $\frac{\pi}{2}$ យឺតជាងកំពូលនៃរំញោចហើយស្រដៀងសម្រាប់ជ្រលង។ ចុងក្រោយសម្រាប់ ω ធំ យើងមាន $\cos\delta \cong -1$ និង $\sin\delta \cong 0$ ។ ដូចនេះ $\delta \cong \pi$ នោះចម្លើយគឺជិតផាស មានន័យថាចម្លើយអប្បបរមាពេលរំញោចគឺអតិបរមានិងផ្ទុយមកវិញ។

ក្នុងរូប3.9.4 យើងបង្ហាញក្រាហ្វនៃដំណោះស្រាយនៃតម្លៃបញ្ហាដើម

$$u'' + 0.125u' + u = 3\cos 2t, \;\; u(0) = 2, \;\; u'(0) = 0$$

ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍កម្លាំងត្រូវបានបង្ហាញសម្រាប់ប្រៀបធៀប។ សង្កេតឃើញថាចលនាបណ្តោះអាសន្នដំបូងត្រូវបំផ្លាញដោយកើតឡើង នោះអំព្លីទុតនៃកម្លាំងនឹងឆ្លើយតបគឺខិតជិត 1 និងផាសក្នុងគ្នាចម្លោះរំញោច (excitation) និងចម្លើយ (response) ខិតជិត π ។

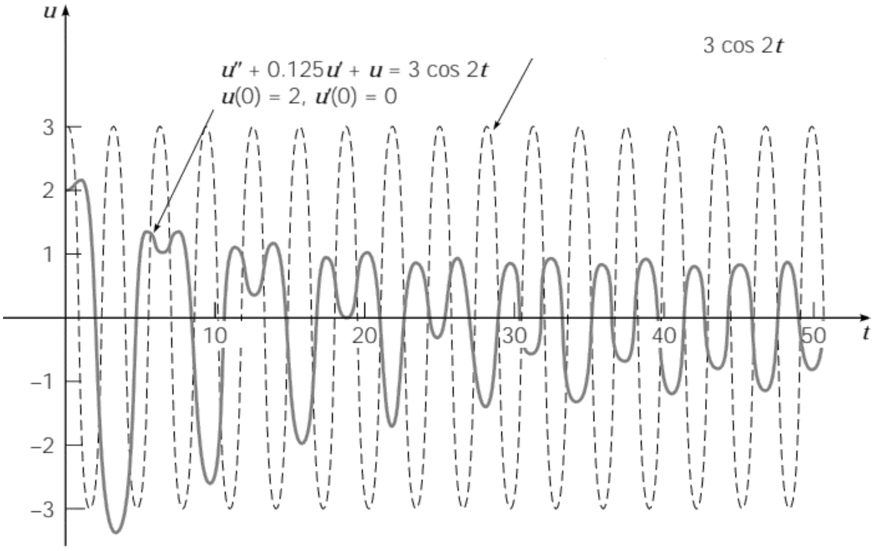


រូបភាព3.9.3 កម្លាំងលំញ័រដែលដាម អំព្លីទុតនៃស្ថេតនឹងឆ្លើយតបធៀបនឹងប្រេកង់នៃកម្លាំងជម្រុញ $\Gamma = \gamma^2 / m^2\omega_0^{\ 2}$

រូបភាពខាងលើ កម្លាំងលំញ័រដែលដាម $u'' + 0.125u' + u = 3\cos 2t, u(0) = 2, u'(0) = 0$ បន្ថែមពីនោះ យើងរកថា $\Delta = \sqrt{145}/4 \cong 3.0104$ នោះ $R = F_0 / \Delta \cong 0.9965$ ។ បន្ថែមទៀត $\cos\delta = -3/\Delta \cong -0.9965$ និង $\sin\delta = 1/4\Delta \cong 0.08305$ នោះ $\delta \cong 3.0585$ ។ ដូចនេះ ការគណនាតម្លៃនៃ R និង δ គឺជិតតម្លៃប៉ាន់ស្មានតាមរយៈក្រាហ្វ។

លំហាត់

លំហាត់ទី1ដល់4 បង្ហាញផលគុណនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រពីរនៃប្រេកង់ខុសគ្នា។



1. $\cos 9t-\cos 7t$
2. $\sin 7t-\sin 6t$
3. $\cos \pi t+\cos 2\pi t$
4. $\sin 3t+\sin 4t$
5. ម៉ាសទម្ងន់ $4lb$ ពន្លាតរ៉ូស័រ $1.5in$ ។ ម៉ាសត្រូវបានប្តូរជា $2in$ ក្នុងទិសដៅវិជ្ជមានពីទីតាំងលំនឹងរបស់វា ហើយបញ្ចេញដោយគ្មានល្បឿនដើម។ សន្មតថាគ្មានដាមហើយម៉ាសត្រូវបានធ្វើសកម្មភាពដោយកម្លាំងក្រៅនៃ $2\cos 3t\ lb$ ។ បង្កើតបញ្ហាតម្លៃដើមដែលបកស្រាយពីខួបនៃម៉ាស។
6. ម៉ាស $5kg$ ពន្លាតរ៉ូស័រ $10cm$ ។ ម៉ាសត្រូវបានធ្វើសកម្មភាពដោយកម្លាំងក្រៅ $10\sin(t/2)N$ និងផ្លាស់ទីល្មមក្នុងកម្លាំងកកិត $2N$ នៅពេលល្បឿននៃម៉ាសគឺ $3cm/\sec$ ។ បង្កើតបញ្ហាតម្លៃដើមដែលបកស្រាយពីខួបនៃម៉ាស។
7. a. រកដំណោះស្រាយនៃលំហាត់ទី5។

   b. ដៅក្រាបនៃដំណោះស្រាយ។

   c. បើគេឱ្យកម្លាំងក្រៅត្រូវបានជំនួសដោយកម្លាំង $4\sin \omega t$ នៃប្រេកង់ ω រកតម្លៃនៃ ω ពេលអនុភាពកើតឡើង។
8. a. រកដំណោះស្រាយនៃបញ្ហាតម្លៃដើមក្នុងលំហាត់ទី6។

   b. កំណត់ចម្លើយទូទៅបណ្តោះអាសន្ន និងចម្លើយជាក់លាក់។

   c. សង់ក្រាបនៃចម្លើយជាក់លាក់។

   d. បើគេឱ្យកម្លាំងក្រៅត្រូវបានជំនួសដោយកម្លាំង $2\cos \omega t$ នៃប្រេកង់ ω រកតម្លៃនៃ ω ដែលកម្លាំងឆ្លើយតបគឺអតិបរមា។
9. បើប្រព័ន្ធម៉ាសរ៉ូស័រគ្មានដាមជាមួយម៉ាស $6lb$ និងរ៉ូស័រ $1lb/in$ ពេលនោះកំណត់ខួប $t=0$ ដោយកម្លាំងក្រៅ $4\cos 7t\ lb$ ។ កំណត់ទិសដៅម៉ាសពេលផ្សេងទៀតនិងគូសក្រាបនៃបំលាសើទីធៀបនឹង t ។
10. ម៉ាស $8lb$ ពន្លាតរ៉ូស័រ $6in$ ។ ប្រព័ន្ធត្រូវបានធ្វើសកម្មភាពដោយកម្លាំងក្រៅ $8\sin 8t\ lb$ ។ បើម៉ាសត្រូវបានទាញទម្លាក់ $3in$ និងលែងចេញ កំណត់ទិសដៅម៉ាសពេលផ្សេងទៀត។ កំណត់ពេលដំបូងបួនដងខណៈពេលល្បឿនម៉ាសស្មើសូន្យ។
11. រ៉ូស័រត្រូវបានពន្លាត $6in$ ដោយទម្ងន់ម៉ាស $8lb$ ។ ម៉ាសត្រូវបានភ្ជាប់នឹងទម្រ ដែលមានការកម្លាំងទប់ $0.25lb-\sec/\ ft$ និងត្រូវបានធ្វើសកម្មភាពដោយកម្លាំងក្រៅ $4\cos 2t\ lb$ ។

a. កំណត់ ចម្លើយជាក់លាក់ត្រូវនឹងប្រព័ន្ធ។

b. បើគេជំនួសម៉ាសដោយម៉ាស m កំណត់តម្លៃនៃ m សម្រាប់អំព្លីទុតនៃចម្លើយជាក់លាក់អប្បបរមា។

12. ប្រព័ន្ធម៉ាសរ៉ូស័រមានផ្ទុករ៉ូស័រ។ ម៉ាសត្រូវបានភ្ជាប់ទៅនឹងរ៉ូស័រនិងចលនាកើតឡើងក្នុងសារធាតុរាវ viscousដែលផ្តល់នូវភាពធន់ជាលេខស្មើនឹងទំហំនៃល្បឿនភ្លាមៗ។ បើប្រព័ន្ធត្រូវបានដឹកនាំដោយកម្លាំងក្រៅ $3\cos 3t - 2\sin 3t\ N$ កំណត់ ចម្លើយជាក់លាក់។ បង្ហាញចម្លើយរបស់អ្នកក្នុងទម្រង់ $R\cos(\omega t - \delta)$។

13. ប្រាប់ព័ត៌មានលម្អិតក្នុងការកំណត់ ចម្លើយជាក់លាក់ តាមសមីការ (11) គឺអតិបរមា។ បង្ហាញថា $\omega_{\max}^2$ និង $R_{\max}$ ដែលឱ្យក្នុងសមីការ (12) និង (13)។

14. a. បង្ហាញថាផាសនៃកម្លាំងឆ្លើយតបនៃសមីការផ្ទៀងផ្ទាត់។

b. ដៅផាស δ ដូចអនុគមន៍នៃកម្លាំងប្រេកង់ ω សម្រាប់កម្លាំងឆ្លើយតបនៃ $u'' + 0.125u' + u = 3\cos\omega t$។

15. រកដំណោះស្រាយនៃបញ្ហាតម្លៃដើម $u'' + u = F(t),\ u(0) = 0,\ u'(0) = 0$

ដែល $F(t) = \begin{cases} F_0 t, & 0 \le t \le \pi \\ F_0(2\pi - t), & \pi < t \le 2\pi \\ 0, & 2\pi < t \end{cases}$

ចាត់ទុករាល់ចន្លោះពេលដាច់ដោយឡែកពីគ្នា និងផ្គូផ្គងដំណោះស្រាយក្នុងចន្លោះពេលផ្សេងៗគ្នាដោយឱ្យ u និង u' ជាអនុគមន៍នៃ t។

16. សៀគ្វីនៃសេរីមានកាប៉ាស៊ីតេ $0.25\times10^{-6}F$ រេស៊ីស្តង់ $5\times10^{3}\Omega$ អាំងឌុចទ័រ $1H$។ កាប៉ាស៊ីតេដំបូងគឺសូន្យ។ បើថ្ម $12V$ ត្រូវបានភ្ជាប់ទៅនឹងសៀគ្វីនិងសៀគ្វីបិទខណៈ $t = 0$។ កំណត់កាប៉ាស៊ីតេខណៈ $t = 0.001\sec$, $t = 0.01\sec$, ពេល t និងលីមីត $t \to \infty$។

17. ពិចារណាប្រព័ន្ធលំញ័រ បកស្រាយដោយបញ្ហាតម្លៃដើម (initial value problem)

$$u'' + \frac{1}{4}u' + 2u = 2\cos\omega t,\quad u(0) = 0,\ u'(0) = 2$$

a. កំណត់ផ្នែកដំណោះស្រាយចម្លើយជាក់លាក់។ ។

b. រកអំព្លីទុត A នៃដំណោះស្រាយចម្លើយជាក់លាក់ ក្នុងក្រុម ω។

c. ដៅ A ធៀប ω។

d. រកតម្លៃអតិបរមានៃ A និងប្រេកង់ ω ដែលកើតឡើង។

18. ពិចារណាកម្លាំងតែប្រព័ន្ធគ្មានដាម បកស្រាយដោយបញ្ហាតម្លៃដើម (initial value problem)

$u'' + u = 3\cos \omega t, \quad u(0) = 0, \;\; u'(0) = 0$

a. រកដំណោះស្រាយនៃ

b. ដៅដំណោះស្រាយ $u(t)$ ធៀបនឹង t សម្រាប់ $\omega = 0.7, \; \omega = 0.8$ និង $\omega = 0.9$ ។ ស្រាយពីរបៀបចម្លើយ $u(t)$ ប្តូរជា ω ប្រែប្រួលក្នុងចន្លោះពេលនេះ។ តើមានអ្វីកើតឡើងពេល ω តម្លៃកាន់តែខិតជិត 1 ? ចំណាំថាប្រេកង់ដើមនៃប្រព័ន្ធគ្មានកម្លាំងគឺ $\omega_0 = 1$ ។

19. ពិចារណាប្រព័ន្ធកម្លាំង បកស្រាយដោយបញ្ហាតម្លៃដើម (initial value problem)

$u'' + u = 3\cos \omega t, \quad u(0) = 1, \;\; u'(0) = 1$

a. រកដំណោះស្រាយសម្រាប់ $\omega \neq 1$

b. ដៅដំណោះស្រាយ $u(t)$ ធៀបនឹង t សម្រាប់ $\omega = 0.7, \; \omega = 0.8$ និង $\omega = 0.9$ ។ ធៀបលទ្ធផលជាមួយលំហាត់ទី១៨ បកស្រាយពីឥទ្ធិពលនៃលក្ខខណ្ឌដើមមិនសូន្យ។

20. សម្រាប់បញ្ហាតម្លៃដើម (initial value problem)ក្នុងលំហាត់ទី១៨ ដៅធៀបសម្រាប់ $\omega = 0.7, \; \omega = 0.8$ និង $\omega = 0.9$ ។ គូសដៅផាសនៃដំណោះស្រាយសម្រាប់តម្លៃ ω ។ ប្រើចន្លោះពេលគឺគ្រប់គ្រាន់ នោះផាសលិចឡើងជិតខ្សែកោង។ ត្រូវប្រាកដថាខ្សែកោងជាមួយនឹងព្រួញដើម្បីបង្ហាញទិសដៅត្រូវបានឆ្លងកាត់នៅពេល t កើនឡើង។

លំហាត់២១ដល់២៣ដោះស្រាយបញ្ហាតម្លៃដើម (initial value problem)ក្នុងលំហាត់នីមួយៗខាងក្រោម

a. ដៅអនុគមន៍កម្លាំង $F(t)$ ធៀបនឹង t និងដៅដំណោះស្រាយ $u(t)$ ធៀបនឹង t នៅលើអ័ក្សតែមួយ។ ប្រើចន្លោះពេល t ដូចនេះ initial transient ត្រូវបានលុបចោល។ សង្កេតទំនាក់ទំនងចន្លោះអំព្លីទុតនិងផាសនៃក្រុមកម្លាំងនិង អំព្លីទុតនិងផាសនៃអនុភាព។ ចំណា $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 1$

b. គូសដៅផាស (phase plot) ដែល plot u' ធៀបនឹង u ។

21. $F(t) = 3\cos t$

22. $F(t) = 3\cos 3t$

23. $F(t) = 3\cos(0.3t)$

ជំពូកទី៤ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ខ្ពស់

ទ្រឹស្តីបទ និងវិធីសាស្ត្រ នៃដំណោះស្រាយដែលបានមាននៅក្នុងជំពូកមុន សម្រាប់សមីការលីនេអ៊ែរលំដាប់ទីពីរ ឈានទៅសមីការលីនេអ៊ែរនៃលំដាប់ទីបី និងខ្ពស់ជាងនេះ។ នៅក្នុងជំពូកនេះ យើងសង្ខេបអំពីលក្ខណៈទូទៅ ដោយយកចំណុចពិសេសនៃករណីទាំងនោះ ដែលមានករណីថ្មីកើតឡើងដោយសារស្ថានភាពផ្សេងៗគ្នាកាន់តែច្រើនដែលអាចកើតឡើងសម្រាប់សមីការនៃលំដាប់ខ្ពស់ ។

៤.១ ទ្រឹស្តីបទទូទៅនៃសមីការលីនេអ៊ែរលំដាប់ n

ទ្រឹស្តីទូទៅនៃសមីការលីនេអ៊ែរលំដាប់ទី n មានទម្រង់ដូចៈ

$$P_0(t)\frac{d^ny}{dx^n}+P_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+P_{n-1}(t)\frac{dy}{dx}+P_n(t)=G(t) \qquad (1)$$

យើងសន្មតថាអនុគមន៍ $P_0,\ldots,P_n$ និង G ជាអនុគមន៍តម្លៃពិតចន្លោះ $I:\alpha<t<\beta$ និង P_0 គឺគ្មានសូន្យក្នុងចន្លោះនេះទេ ។ រួចចែកសមីការ (1) ដោយ $P_0(t)$ យើងទទួលបាន

$$L[y]=\frac{d^ny}{dt^n}+P_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\ldots+P_{n-1}(t)\frac{dy}{dt}+P_n(t)y=g(t) \qquad (2)$$

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរ L នៃលំដាប់ n ដែលកំណត់ដោយសមីការ(2)គឺស្រដៀងគ្នាទៅនឹងសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ពីរដែលបានណែនាំក្នុងជំពូកទី៣ ។ ទ្រឹស្តីគណិតវិទ្យាដែលទាក់ទងនឹងសមីការ(2)គឺស្រដៀងគ្នាទាំងស្រុងគ្នាទៅនិងសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ពីរ។ សម្រាប់ការអះអាងនេះយើងគ្រាន់តែបញ្ជាក់ចម្លើយសម្រាប់លំហាត់លំដាប់ n ។

ភស្តុតាងនៃលទ្ធផលភាគច្រើនគឺស្រដៀងគ្នាទៅនឹងសមីការលំដាប់ 2 ហើយជាធម្មតាត្រូវបានទុកជាលំហាត់ ។ សមីការ (2) ទាក់ទងនឹងដេរីវេទី n នៃ y ជាមួយ t ដូចនេះ គេបានជាទូទៅ n ត្រូវបានដោះស្រាយក្នុងសមីការរួម(2)

$$y(t_0)=y_0 \quad y'(t_0)=y'_0 \;\ldots, y^{(n-1)}(t_0)=y_0^{(n-1)} \qquad (3)$$

ទ្រឹស្តីបទ ៣.១.១៖ ប្រសិនបើអនុគមន៍ $P_1,P_2,\ldots,P_n$ និង g ជាប់នៅលើចន្លោះបើក I នោះមានចម្លើយពិតប្រាកដ $y=\varphi(t)$ នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (2) នោះផ្ទៀងផ្ទាត់តាមលក្ខខណ្ឌ (3) ។ ដំណោះស្រាយនេះមានសំណុំចន្លោះ I ។

សមីការអូម៉ូសែន៖ដូចគ្នានៅក្នុងសមីការលំដាប់ទី២ ដែល ដំបូងយើងត្រូវពិភាក្សាអំពីសមីកាអូម៉ូសែននេះ ។

$$L[y]=y^{(n)}+P_1(t)y^{(n-1)}+\ldots+P_{n-1}(t)y'+P_n(t)y=0. \qquad (4)$$

ប្រសិនបើអនុគមន៍ $y_1,y_2,\ldots,y_n$ វាជាចម្លើយរបស់សមីការ (4) បន្ទាប់មកធ្វើការសរសេរជាបន្សំលីនេអ៊ែរ

$$L[y]=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)+\ldots+c_ny_n(t), \qquad (5)$$

ដែល $c_1,...,c_n$ ជាចំនួនថេរ គឺជាចម្លើយសមីការ(4)ផងដែរ វាជាចំនួនធម្មជាតិដែលជាធម្មតាមានចោទការសួរថា តើដំណោះស្រាយនៃសមីការ(4)អាចត្រូវបានបង្ហាញថាជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃ $y_1,...,y_n$ នេះនឹងក្លាយជាការពិត ប្រសិនបើមិនគិតពីលក្ខខណ្ឌដំបូង (3) ដែលត្រូវបានបង្កើត គឺមានទម្រង់ជ្រើសរើសជាចំនួនថេរ $c_1,...,c_n$ ដូច្នេះ វាជាបន្សំលីនេអ៊ែរ (5) បំពេញលក្ខខណ្ឌដើម។ ជាពិសេសសម្រាប់ការជ្រើសរើសណាមួយនៃ t_0 ក្នុង I និងសម្រាប់ការជ្រើសរើសណាមួយនៃ $y_0, y'_0,..., y^{(n-1)}{}_0$, យើងកំណត់បាន $c_1,...,c_n$ ដូចនេះៈ

$$\begin{aligned} c_1y_1(t_0)+\ldots+c_ny_n(t_0)&=y_0 \\ c_1y_1'(t_0)+\ldots+c_ny_n'(t_0)&=y_0' \\ &\vdots \\ c_1y^{(n-1)}{}_1(t_0)+\ldots+c_ny^{(n-1)}{}_n(t_0)&=y^{(n-1)}{}_0 \end{aligned} \qquad (6)$$

ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ (6) អាចជាដំណោះស្រាយតែមួយសម្រាប់ចំនួនថេរ $c_1,...,c_n$ ដែលជាដេទេមីណង់នៃមេគុណមិនមែនសូន្យ។ ម្យ៉ាងទៀត ប្រសិនបើដេទេមីណង់នៃមេគុណមិនមែនសូន្យ បន្ទាប់មកគេអាចជ្រើសរើសតម្លៃដាច់ខាតនៃ $y_0, y'_0,..., y_0^{(n-1)}$ ។ដូចសមីការ (6) មិនមានដំណោះស្រាយទេ។ ដូច្នេះលក្ខខណ្ឌចាំបាច់នឹងគ្រប់គ្រាន់សម្រាប់ភាពមានចម្លើយនៃសមីការណាមួយ។ សមីការ (6) សម្រាប់តម្លៃនៃ $y_0, y'_0,..., y_0^{(n-1)}$ ប្រើវ៉ុងគៀន

$$W(y_1,\ldots,y_n)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y^{(n-1)}{}_1 & y^{(n-1)}{}_2 & \cdots & y^{(n-1)}{}_n \end{vmatrix} \qquad (7)$$

គឺមិនមានសូន្យ នៅពេល $t=t_0$ ។ ចាប់តាំងពី t_0 នៅត្រង់ចំណុចណាមួយនៃចន្លោះ I វាគឺចាំបាច់ហើយមានលក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់នៅពេល $W(y_1,y_2,...,y_n)$ អាចមិនសូន្យនៅត្រង់ចំណុចណាមួយនៃចន្លោះនោះ។ សម្រាប់សមីការលីនេអ៊ែរលំដាប់ទីពីរ វាអាចត្រូវបានបង្ហាញប្រសិនបើ $y_1,y_2,...,y_n$ គឺតម្លៃសូន្យសម្រាប់គ្រប់ t ក្នុងចន្លោះ I ឬផ្សេងទៀត គឺមិនមានតម្លៃសូន្យនៅទីនោះ។ មើលលំហាត់ទី20 ។ ដូច្នេះយើងបានទ្រឹស្តីបទដូចខាងក្រោម ។

ទ្រឹស្តីបទ ៣.១.២៖ ប្រសិនបើអនុគមន៍ $p_1,p_2,...,p_n$ ជាប់នៅលើចន្លោះបើក I ។ ប្រសិនបើអនុគមន៍ $y_1,y_2,...,y_n$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $y^{(n)}+P_1(t)y^{(n-1)}+...+P_{n-1}(t)y'+P_n(t)y=0$ ហើយបើ $W(y_1,y_2,...,y_n)(t)\neq 0$ សម្រាប់ចំណុចមួយក្នុង I នោះគ្រប់ចម្លើយនៃសមីការ ត្រូវបានបង្ហាញជាទម្រង់បន្សំលីនេអ៊ែរនៃដំណោះស្រាយ $y_1,y_2,...,y_n$ ។

សំណុំនៃដំណោះស្រាយ សមីការ (4) ដែលមិនសូន្យ ជាសំណុំមូលដ្ឋាននៃដំណោះស្រាយ (fundamental set of solutions) ។ អត្ថិភាពនៃសំណុំមូលដ្ឋាននៃដំណោះស្រាយ ជាមូលដ្ឋាន ត្រូវបានបង្ហាញយ៉ាងជាក់លាក់ដូចគ្នាទៅនឹងសមីការលីនេអ៊ែរលំដាប់ទី 2 (ទ្រឹស្តីបទ 3.2.5)។ ចាប់តាំងពីដំណោះស្រាយទាំងអស់របស់សមីការ (4) មានទម្រង់ដូចសមីការ (5) យើងប្រើដំណោះស្រាយទូទៅ ដើម្បីឈានទៅរកបន្សំលីនេអ៊ែរនៃដំណោះស្រាយសំណុំណាមួយនៃសមីការ (4) ។ កាពិភាក្សា

អំពីអាស្រ័យលីនេអ៊ែរនិងមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរដែលបានផ្តល់ឱ្យក្នុងផ្នែក 3.3 ក៏មានលក្ខណៈទូទៅផង ដែរ។ អនុគមន៍ $f_1, f_2, ..., f_n$ ជាដំណោះស្រាយនៃសមីការ (4) បន្ទាប់មកវាបានត្រូវបានបង្ហាញ លក្ខខណ្ឌចាំបាច់និងគ្រប់គ្រាន់សម្រាប់អាស្រ័យលីនេអ៊ែរក្នុង I ។ ប្រសិនសិនបើគេមានសំណុំថេរនៃ k_1 , k_2 ,..., k_n មិនសូន្យទាំងអស់ ដូចនេះ $k_1 f_1 + k_2 f_2 + ... + k_n f_n = 0$ (8) ។
សម្រាប់ t ទាំងអស់នៅ I ក្នុងអនុគមន៍ $f_1, ..., f_n$ ត្រូវបានគេនិយាយថាមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរលើ I ប្រសិនបើមិនមានអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ។ ប្រសិន $y_1, ..., y_n$ ជាដំណោះស្រាយនៃសមីការ (4) បន្ទាប់មក វាបានត្រូវបានបង្ហាញលក្ខខណ្ឌចាំបាច់និងគ្រប់គ្រាន់សម្រាប់អាស្រ័យលីនេអ៊ែរ $W(y_1, ..., y_n)(t_0) \neq 0$ សម្រាប់ t_0 ក្នុង I (សូមមើលលំហាត់ 25) ។
ដូច្នេះ ដំណោះស្រាយជាមូលដ្ឋាននៃសមីការ (4) គឺអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ ហើយអាស្រ័យសំណុំលីនេអ៊ែរនៃ n ដំណោះស្រាយនៃ សមីការ (4) បង្កើតបានជាសំណុំមូលដ្ឋាននៃដំណោះស្រាយ។
សមីការមិនអូម៉ូសែនៈ ឥឡូវនេះពិចារណាសមីការមិនអូម៉ូហ្សែន (2)
$L[y] = y^{(n)} + p_1(t) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(t) y = g(t)$
ប្រសិន Y_1 និង Y_2 ជាដំណោះស្រាយពីរនៃសមីការ (2) បន្ទាប់មកវាធ្វើតាមលីនេអ៊ែរការីលី L
$L[y] = y^{(n)} + p_1(t) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(t) y = g(t)$
ដូច្នេះភាពខុសគ្នានៃដំណោះស្រាយទាំងពីរនៃសមីការមិនអូម៉ូសែន (2) គឺជាដំណោះស្រាយនៃសមី-ការមិនអូម៉ូសែន(4) ចាប់តាំងពីដំណោះស្រាយនៃភាពដូចគ្នាណាមួយនៃសមីការ មិនអូម៉ូសែនអាច បញ្ជាក់ជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃសំណុំមូលដ្ឋាននៃដំណោះស្រាយ $y_1, ..., y_n$ ដោះស្រាយតាមដំណោះស្រាយណាមួយនៃសមីការ (2) គេអាចសរសេរជា
$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \ldots + c_n y_n(t) + Y(t) \qquad (9)$$
ដែល Y ជាដំណោះស្រាយជាក់លាក់មួយចំនួននៃសមីការមិនអូម៉ូស្សែន (2) បន្សំលីនេអ៊ែរ (9) ត្រូវបានគេហៅថាដំណោះស្រាយទូទៅនៃសមីការមិនអូម៉ូសែន(2) ។ ដូច្នេះបញ្ហាចម្បង គឺដើម្បីកំណត់សំណុំមូលដ្ឋាននៃដំណោះស្រាយ $y_1, ..., y_n$ នៃសមីការមិនអូម៉ូហ្សែន (4) ។
ប្រសិនបើមេគុណថេរ នេះគឺជាលំហាត់សាមញ្ញ។ វាត្រូវបានលើកយកមកនិយាយនៅក្នុងផ្នែកបន្ទាប់។ ប្រសិនបើមេគុណថេរ ជាធម្មតាចាំបាច់ត្រូវប្រើវិធីសាស្ត្រជាលេខដូចជាវិធីក្នុងជំពូកទី 8 ឬវិធីស៊េរីស្រដៀងនឹងវិធីក្នុងជំពូកទី 5 ។ ទាំងអស់នេះមានទំនោរទៅកាន់តែស្មុកស្មាញនៅពេលដែលលំដាប់នៃសមីការកើនឡើង ។ វិធីសាស្ត្រនៃការកាត់បន្ថយលំដាប់ (ផ្នែកទី 3.5) ក៏អនុវត្តន៍ចំពោះសមីការលីនេអ៊ែរលំដាប់ទី 1 ផងដែរ។
ប្រសិនបើ y_1 ជាដំណោះស្រាយមួយនៃសមីការ (4) បន្ទាប់មកជំនួស $y = v(t) y_1$ នាំទៅរកសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ $n-1$ សម្រាប់ v' (សូមមើលលំហាត់ 26 សម្រាប់ករណីនៅពេលដែល $n=3$) ។ ទោះយ៉ាងណាក៏ដោយប្រសិនបើ $n=3$ សមីការដែលកាតបន្ថយគឺខ្លួនវាយ៉ាងហោចណាស់នៃលំដាប់ទី 2 ហើយមានតែកម្រណាស់ដែលវានឹងមានលក្ខណៈសាមញ្ញជាងសមីការដើម។

ដូច្នេះក្នុងការអនុវត្តន៍ជាក់ស្តែងការកាត់បន្ថយលំដាប់គឺកម្រមានប្រយោជន៍សម្រាប់សមីការខ្ពស់ ជាង លំដាប់ទី 2 ។

៤.១.១ ការបង្កើតចម្លើយទីពីរចេញពីចម្លើយទីមួយ

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានទម្រង់៖

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \qquad (1)$$

ដែល $P(x)$ និង $Q(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើ I មានអនុគមន៍ចម្លើយ $y_1(x)\neq 0$ បានស្គាល់និតិវិធីក្នុង ការរកសមីការទី២ គឺយើងត្រូវកំណត់

$y=u(x)y_1(x)\Rightarrow y'=uy_1'+u'y_1 \quad \Rightarrow y''=uy_1''+u''y_1+2u'y_1'$ ជំនួសសមីការ (1)

$$(uy_1''+u''y_1+2u'y_1')+P(x)(uy_1'+u'y_1)+Q(x)(uy_1)=0$$

$$u\underbrace{\left[y_1''+Py'+Qy\right]}_{0}+y_1u''+\left(2y_1'+Py_1\right)u'=0$$

$$y_1u''+\left(2y_1'+Py_1\right)u'=0$$

តាង $w=u'\Rightarrow w'=u''$ គេបាន

$$y_1w'+\left(2y_1'+Py_1\right)w=0 \qquad (2)$$

$$y_1\frac{dw}{dx}+\left(2y_1'+Py_1\right)w=0 \qquad \Rightarrow \frac{dw}{w}+2\frac{y_1'}{y_1}dx+Pdx=0$$

$$\int\frac{dw}{w}+2\int\frac{y_1'}{y_1}dx+\int Pdx=\int 0$$

$$\ln\left|wy_1^2\right|=-\int Pdx+c$$

$$wy_1^2=c_1e^{-\int Pdx}$$

តែ $w=u'$ នោះ $u=c_1\int\frac{e^{-\int pdx}}{y_1^2}dx+c_2$ យើងជ្រើសរើសយក $c_1=1,\ c_2=0$ យើងបានចម្លើយទី២គឺ

$$y_2=y_1\int\frac{e^{-\int Pdx}}{y_1^2}dx \qquad (3)$$

ឧទាហរណ៍ទី១៖ចូររកចម្លើយទី២នៃសមីការ $x^2y''-3xy'+4y=0$ មានចម្លើយទីមួយ $y_1=x^2$ ។

ចម្លើយ $y_2=x^2\ln x$

លំហាត់

ក្នុងលំហាត់ទី1-6ចូររកដែនកំណត់នៃសមីការដើម្បីរកចម្លើយ

1. $y^{(4)}+4y'''+3y=t$
2. $ty'''+(\sin t)y''+3y=\cos t$
3. $t(t-1)y^{(4)}+e^ty''+4t^2y=0$
4. $y'''+ty''+t^2y'+t^3y=\ln t$
5. $(x-1)y^{(4)}+(x+1)y''+(tanx)y=0$
6. $\left(x^2-4\right)y^{(6)}+x^2y'''+9y=0$

ក្នុងលំហាត់ទី7-10តើសំណុំអនុគមន៍ខាងក្រោមវាអាស្រ័យឬមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ។បើអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ ចូររកទំនាក់ទំនងរបស់អនុគមន៍ទាំងនេះ។

7. $f_1(t)=2t-3,\quad f_2(t)=t^2+1,\quad f_3(t)=2t^2-t$

8. $f_1(t)=2t-3,\quad f_2(t)=2t^2+1,\quad f_3(t)=3t^2+t$

9. $f_1(t)=2t-3,\quad f_2(t)=t^2+1,\quad f_3(t)=2t^2-t,\quad f_4=t^2+t+1$

9. $f_1(t)=2t-3,\quad f_2(t)=t^3+1,\quad f_3(t)=2t^2-t,\quad f_4=t^2+t+1$

ក្នុងលំហាត់នីមួយៗពីទី11-16។បង្ហាញថាសំណុំអនុគមន៍ជាចម្លើយសមីការលីនេអ៊ែរ រួចគណនាតាមរ៉ុងគៀន

11. $y'''+y'=0;\quad y_1=1,\ y_2=\sin t,\quad y_3=\cos t$

12. $y^{(4)}+y''=0;\quad y_1=1,\quad y_2=\sin t,\quad y_3=\cos t,\quad y_4=t$

13. $y'''+y''-y'-2y=0;\quad y_1=e^t,\quad y_2=e^{-t},\quad y_3=e^{-2t}$

14. $y^{(4)}+2y'''+y''=0;\quad y_1=1,\ y_2=t,\ y_3=e^{-t},\quad y_4=te^{-t}$

15. $xy'''-y''=0;\quad y_1=1,\quad y_2=x,\quad y_3=x^3$

16. $x^3y'''+x^2y''-2xy'+2y=0;\quad y_1=x,\quad y_2=x^2,\quad y_3=\dfrac{1}{x}$

ក្នុងលំហាត់នីមួយៗពីទី16-24ចូររកចម្លើយទី២នៃសមីការ

17. $y''-4y'+4y=0,\quad y_1=e^{2x}$

18. $y''+2y'+4y=0,\quad y_1=xe^{-x}$

19. $y''+16y=0,\quad y_1=\cos 4x$

20. $y''+9y=0,\quad y_1=\sin 3x$

21. $y''-y=0,\quad y_1=\cosh x$

22. $y''-25y=0,\quad y_1=e^{5x}$

23. $9y''-12y'+4y=0,\quad y_1=e^{2x/3}$

24. $6y''+y'-y=0,\quad y_1=e^{x/3}$

៤.២. សមីការអូម៉ូសែនមេគុណថេរ

ពិចារណា សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលអូម៉ូសែនលីនេអ៊ែរលំដាប់ទី n

$$L[y]=a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0,\qquad (1)$$

ដែល $a_0,a_1,...,a_n$ គឺជាចំនួនថេរពិត។ តាមរយៈចំណេះដឹងដែលបានសិក្សាទៅលើសមីការលីនេអ៊ែរលំដាប់ពីរ ដែលមានមេគុណជាចំនួនថេរ ជាធម្មតាត្រូវបានគេរំពឹងទុកថា $y=e^{rt}$ គឺជាចម្លើយនៃសមីការ (1) ជាមួយតម្លៃ r ដែលសមស្រប។ គេបាន

$$L[e^{rt}]=e^{rt}(a_0r^n+a_1r^{n-1}+\cdots+a_{n-1}r+a_n)=e^{rt}Z(r),\qquad (2)$$

សម្រាប់គ្រប់តម្លៃ r ដែល

$$Z(r)=a_0r^n+a_1r^{n-1}+\cdots+a_{n-1}r+a_n\qquad (3)$$

សម្រាប់តម្លៃ r ទាំងនោះ ដែល $Z(r)=0$ នោះ $L[e^{rt}]=0$ និង $y=e^{rt}$ គឺជាចម្លើយនៃសមីការ (1) ។ ពហុធា $Z(r)$ ត្រូវបានហៅថា ពហុធាសម្គាល់ និង សមីការ $Z(r)=0$ ហៅថា សមីការសម្គាល់ នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (1) ។

ពហុធាដឺក្រេទី n មានសូន្យ n គេថា $r_1,r_2,...,r_n$ ខ្លះប្រហែលមានតម្លៃស្មើគ្នា ដូចនេះយើងអាចសរសេរពហុធាសម្គាល់ក្រោមទម្រង់

$$Z(r)=a_0(r-r_1)(r-r_2)\cdots(r-r_n) \qquad (4)$$

៤.២.១ ករណីឫសជាចំនួនពិតនិងមិនស្មើ

បើឫសនៃសមីការសម្គាល់គឺ ជាចំនួនពិត និងមិនស្មើឫសផ្សេងៗទៀត នោះមានចម្លើយ n ផ្សេងគ្នាគឺ $e^{r_1t},e^{r_2t},...,e^{r_nt}$ នៃសមីការ (1)។ បើអនុគមន៍ទាំងនោះមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ នោះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (1) គឺមានទម្រង់

$$y=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t}+\cdots+c_ne^{r_nt} \qquad (5)$$

ឧទាហរណ៍ទី១៖ រកចម្លើយទូទៅនៃ $y''''+y'''-7y''-y'+6y=0$ (6)

រកចម្លើយនៃសមីការដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $y(0)=1$, $y'(0)=0$, $y''(0)=-2$, $y'''(0)=-1$ (7) និងគូសក្រាប

ចម្លើយ

យក $y=e^{rt}$, យើងត្រូវរក ដោយដោះស្រាយ សមីការពហុធា

$$r^4+r^3-7r^2-r+6=0 \qquad (8)$$

ឫសនៃសមីការគឺ $r_1=1, r_2=-1, r_3=2$ និង $r_4=-3$

ដូចនេះចម្លើយនៃសមីការ (6) គឺ

$$y=c_1e^{t}+c_2e^{-t}+c_3e^{2t}+c_4e^{-3t} \qquad (9)$$

តាមលក្ខខណ្ឌដើម (7) $c_1,...,c_4$ ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់ សមីការខាងក្រោម៖

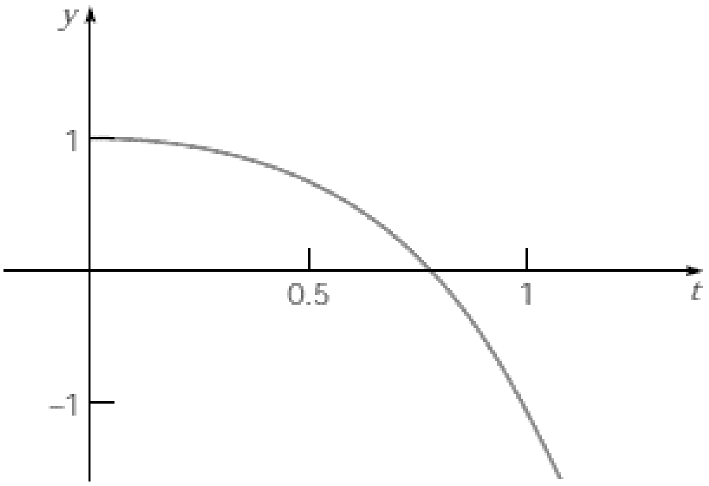
$$\begin{aligned}
c_1+c_2+c_3+c_4&=1,\\
c_1-c_2+2c_3-3c_4&=0,\\
c_1+c_2+4c_3+9c_4&=-2,\\
c_1-c_2+8c_3-27c_4&=-1.
\end{aligned} \qquad (10)$$

ដោយដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ យើងបាន

$$c_1=11/8, \quad c_2=5/12, \quad c_3=-2/3, \quad c_4=-1/8$$

ដូចនេះ សមីការដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌគឺ $y=\frac{11}{8}e^{t}+\frac{5}{12}e^{-t}-\frac{2}{3}e^{2t}-\frac{1}{8}e^{-3t}$ ។ (11)

ក្រាបនៃចម្លើយត្រូវបានបង្ហាញក្នុងរូប 3.2.1



រូប3.2.1 ដំណោះស្រាយលំហាត់តម្លៃដំបូងនៃលំហាត់ទី(1)

តាមរយៈឧទាហរណ៍ទី១ នីតិវិធីក្នុងការដោះស្រាយសមីការលីនេអ៊ែរឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ n ដែលមានមេគុណថេរអាស្រ័យលើការស្វែងរកឫសនៃសមីការពហុធាដឺក្រេទី n ។ ប្រសិនបើលក្ខខណ្ឌដើមត្រូវបានផ្តល់អោយ នោះប្រព័ន្ធសមីការនឹងត្រូវបានដោះស្រាយដើម្បីរកតម្លៃប្រាកដនៃចំនួនថេរ $c_1,\dots,c_n$ ។ ខណៈពេលដែលវារឹតតែស្មុគស្មាញ នៅពេលដែល n កើនឡើង។ យើងអាចដោះស្រាយដោយគ្មានបញ្ហាដោយការប្រើប្រាស់ម៉ាស៊ីនគណនាឬកុំព្យូទ័រ។

សម្រាប់ពហុធាដឺក្រេទី៣ និងទី៤ វាមានរូបមន្តស្រដៀងគ្នាទៅនឹងការដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី២ ប៉ុន្តែស្មុគស្មាញជាង ដែលបង្ហាញពីលក្ខណៈដូចគ្នានឹងក្បួនដោះស្រាយរកឫសដែលអាចប្រើប្រាស់ម៉ាស៊ីនគណនាឬកុំព្យូទ័រ។ ពេលខ្លះវារួមបញ្ចូលការដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ដូចនេះដំណើរការនៃការដាក់ជាកត្តារបស់ពហុធាសម្គាល់ និងចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលត្រូវបានបង្កើតឡើងដោយស្វ័យប្រវត្តិ។

ប្រសិនបើយើងជួបបញ្ហាក្នុងការដាក់ពហុធាសម្គាល់ជាផលគុណកត្តាដោយការគណនាដោយផ្ទាល់ ខាងក្រោមនេះគឺជាលទ្ធផលដែលពេលខ្លះវាមានអត្ថប្រយោជន៍។ សន្មតថាពហុធា

$$a_0r^n + a_1r^{n-1} + \cdots + a_{n-1}r + a_n = 0 \qquad (12)$$

ដែលមានមេគុណជាចំនួនគត់។ បើ $r = p/q$ គឺជាចំនួនសនិទានដែល p និង q គ្មានតួចែករួម នោះ p ត្រូវតែជាតួចែកនៃ a_n និង q ត្រូវតែជាតួចែកនៃ a_0 ។ សម្រាប់ឧទាហរណ៍ ក្នុងសមីការ (8) តួចែកនៃ a_0 គឺ ± 1 និងតួចែកនៃ a_n គឺ $\pm 1, \pm 2, \pm 3,$ និង ± 6 ។ ដូចនេះឫសជាចំនួនសនិទានដែលអាចកើតមានគឺ $\pm 1, \pm 2, \pm 3,$ និង ± 6 ។ ដោយធ្វើតេស្តសាកល្បងឫសទាំងនេះ យើងរកឃើញថា $1, -1, 2$ និង -3 គឺជាឫសពិតប្រាកដ។ ក្នុងករណីនេះគ្មានឫសផ្សេង ពីព្រោះពហុធាមានដឺក្រេ៤។ ប្រសិនបើឫសខ្លះជាចំនួនអសនិទានឬចំនួនកុំផ្លិច ដូចនេះវិធីសាស្ត្រនេះមិនអាចរកបានទេ ប៉ុន្តែយ៉ាងហោចណាស់ដឺក្រេនៃពហុធា គឺត្រូវបានកាត់បន្ថយដោយកត្តាដែលត្រូវនឹងឫសជាចំនួនសនិទាន។

បើឫសនៃសមីការសម្គាល់ គឺជាចំនួនពិត និងខុសគ្នា យើងបានឃើញថាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (5) គឺជាផលបូកនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្បូណង់ស្យែល។ ចំពោះ t មានតម្លៃធំ ចម្លើយនឹងត្រូវបានបង្ហាញដោយតួដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទៅនឹងឫសពិជគណិតធំ។ បើឫសនេះវិជ្ជមាន នោះចម្លើយនឹងក្លាយជាអ៊ិចស្បូណង់ស្យែលមិនទល់ បើឫសជាចំនួនអវិជ្ជមាន នោះចម្លើយនឹងនាំអ៊ិចស្បូណង់ស្យែលខិតជិតសូន្យ។ ចុងក្រោយ បើឫសធំបំផុតស្មើ 0 នោះចម្លើយសម្រាប់ t នឹងមានតម្លៃធំ ត្រូវបានគណនាដោយឫសបន្ទាប់ធំបំផុត។

៤.២.២ ករណីឫសជាចំនួនកុំផ្លិច (Complex Roots)

បើសមីការសម្គាល់មានឫសជាចំនួនកុំផ្លិចត្រូវបានលេចឡើងតាមទម្រង់គូ $\lambda \pm i\mu$ ដោយមេគុណ $a_0,\ldots,a_n$ ជាចំនួនពិត។ យើងដឹងថាគ្មានឫសដូចគ្នា ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (1) គឺនៅតែជាទម្រង់នៃសមីការ (4) ម្យ៉ាងទៀតវាដូចជាសមីការដែលមានលំដាប់២(ក្នុងផ្នែក3.4) យើងអាចជំនួសចម្លើយនៃតម្លៃចំនួនកុំផ្លិច $e^{(\lambda+i\mu)t}$ និង $e^{(\lambda-i\mu)t}$ ដោយចម្លើយតម្លៃពិត(real-valued solutions)

$$e^{\lambda t}\cos\mu t \quad , \quad e^{\lambda t}\sin\mu t \qquad (13)$$

ដែលមានផ្នែកពិត និងផ្នែកនិមិត្តនៃ $e^{(\lambda+i\mu)t}$ ។ ដូចនេះ ទោះបីឫសខ្លះនៃសមីការសម្គាល់ គឺជាចំនួនកុំផ្លិច វានៅតែអាចទៅរួចដើម្បីរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (1) ដូចជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃចម្លើយតម្លៃពិត (real-valued solutions)។

ឧទាហរណ៍ទី២៖ រកចម្លើយទូទៅនៃ $y^{(4)}-y=0$ (14) និងចម្លើយនៃសមីការដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដើម $y(0)=7/2, y'(0)=-4, y''(0)=5/2, y'''(0)=-2$ (15)
និងគូសក្រាបរបស់វា។

ចម្លើយ

ជំនួស y ដោយ e^{rt} យើងបានសមីការសម្គាល់កំណត់ដោយ

$$r^4-1=(r^2-1)(r^2+1)=0$$

ដូចនេះឫសសមីការគឺ $r_1=1, r_2=-1, r_3=i, r_4=-i$ និងអនុគមន៍ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ(14) គឺ

$$y=c_1e^t+c_2e^{-t}+c_3\cos t+c_4\sin t$$

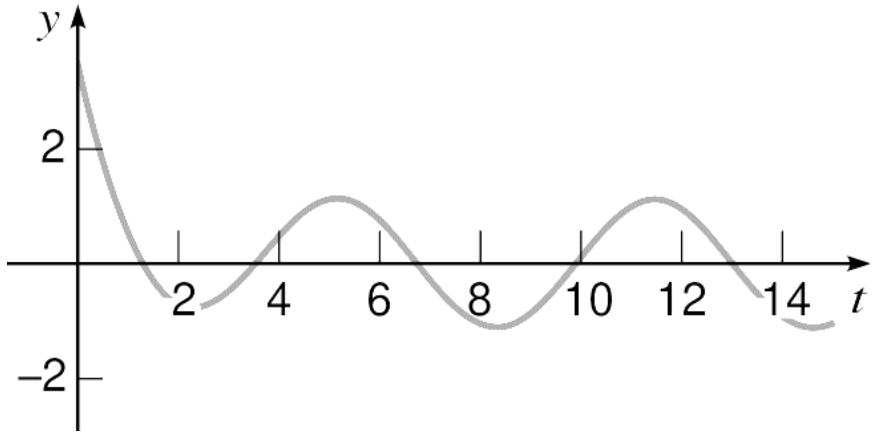
ក្រាបនៃចម្លើយនេះនឹងត្រូវបានបង្ហាញនៅក្នុងរូបភាព 3.2.2

បើយើងដាក់លក្ខខណ្ឌដើម (15) យើងបាន $c_1=0, \quad c_2=3, \quad c_3=1/2, \quad c_4=-1$
ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌគឺ

$$y=0e^t+3e^{-t}+\frac{1}{2}\cos t-\sin t$$

$$y=3e^{-t}+\frac{1}{2}\cos t-\sin t \qquad (16)$$ ។

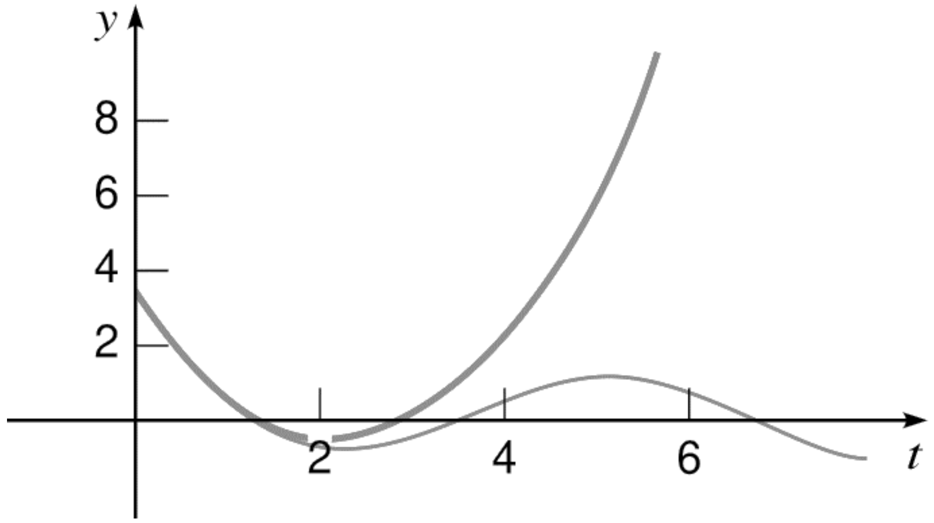
ក្រាបនៃចម្លើយត្រូវបានបង្ហាញក្នុងរូប3.2.3



មេគុណក្នុងសមីការ $y=\frac{1}{32}e^{t}+\frac{95}{32}e^{-t}+\frac{1}{2}\cos t-\frac{17}{16}\sin t$ (17)

ខុសតែបន្តិចពីសមីការ (16) តែតួនៃសមីការអ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលកើន ទោះជាតម្លៃមេគុណតូច 1/32 វាបង្ហាញចម្លើយដោយចំនួនដង t ធំជាងមុន 4 ទៅ 5 ដង នេះគឺបានឃើញយ៉ាងច្បាស់ក្នុងរូប 3.2.3 ដែលបង្ហាញក្រាបនៃចម្លើយទាំងពីរ (16)និង (17) ។

រូប3.2.2 រូបនៃសមីការចម្លើយ(16)រូប3.2.3 នៃសមីការចម្លើយ (ខ្សែកោងស្រាល) និង (17) (ខ្សែកោងដិត)



៤.២.៣ ករណីឫសឌុប(Repeated Root)

បើឫសនៃសមីកាសម្គាល់ គឺមិនផ្សេងគ្នា មានន័យថាបើឫសខ្លះដូចគ្នា នោះចម្លើយ (5) គឺពិតជាមិនមែនជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (1) ។ រំលឹកឡើងវិញ បើ r_1 ជាឫសឌុបសម្រាប់សមីការលីនេអ៊ែរលំដាប់២ $a_0y''+a_1y'+a_2y=0$ នោះចម្លើយពីរនៃលីនេអ៊ែរមិនអាស្រ័យគឺ e^{r_1t} បើ te^{r_1t} សម្រាប់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលមានលំដាប់ n ប្រសិនបើឫសនៃ $Z(r)=0$ នោះ $r_1=r_2=.....=r_s$ ដែល $s\le n$ នោះ

$$e^{r_1t},te^{r_1t},t^2e^{r_1t},\ldots,t^{s-1}e^{r_1t} \qquad (18)$$

ដែលត្រូវនឹងចម្លើយនៃសមីការ បើកាន់តែច្បាស់សូមមើលចំណុច(២.៣.១)គឺ $y_2 = y_1\int \frac{e^{-\int Pdx}}{y_1^2}dx$ ។

បើឫសជាចំនួនកុំផ្លិច $\lambda+i\mu$ ឌុប s ដង និងកុំផ្លិចឆ្លាស់ $\lambda-i\mu$ ឌុប s ដែរ។ ដើម្បីផ្ទៀងផ្ទាត់ចម្លើយតម្លៃចំនួនកុំផ្លិច $2s$ នេះ យើងអាចរកចម្លើយតម្លៃពិត $2s$ ដោយកត់សម្គាល់ថា ផ្នែកពិត និងផ្នែកនិមិត្តនៃ $e^{(\lambda+i\mu)t}, te^{(\lambda+i\mu)t}, \dots, t^{s-1}e^{(\lambda+i\mu)t}$ គឺជាចម្លើយអាស្រ័យលីនេអ៊ែរនៃអនុគមន៍ ៖

$$e^{\lambda t}\cos\mu t\ ,\ e^{\lambda t}\sin\mu t\ ,\ te^{\lambda t}\cos\mu t\ ,\ te^{\lambda t}\sin\mu\ ,$$
$$\dots,\ t^{s-1}e^{\lambda t}\cos\mu t\ ,\ t^{s-1}e^{\lambda t}\sin\mu t.$$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (1) អាចត្រូវបានបង្ហាញជាបន្សំលីនេអ៊ែរ នៃតម្លៃពិត n ។ ពិនិត្យមើលឧទាហរណ៍ខាងក្រោម៖

ឧទាហរណ៍ទី៣៖ រកចម្លើយទូទៅនៃ $y^{(4)}+2y''+y=0$ (19)

ចម្លើយ

យើងបាន សមីការសម្គាល់គឺ

$$r^4+2r^2+1=(r^2+1)(r^2+1)=0$$

ឫសនៃ r គឺ $r=i,i,-i,-i$ ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (19) គឺ

$$y=c_1\cos t+c_2\sin t+c_3t\cos t+c_4t\sin t$$

ក្នុងការគណនាឫសនៃសមីការសម្គាល់វាមានសារៈសំខាន់ដើម្បីបង្ហាញ ឫសគូបឫឫសទី៤ ឫក៏ឫសកាន់តែធំ នៃចំនួន(ចំនួនកុំផ្លិចដែលអាចទៅរួច)។ វាអាចងាយស្រួលដោយប្រើប្រាស់ រូបមន្ត Euler $e^{it}=\cos t+i\sin t$ និងច្បាប់នៃពិជគណិតដែលបានផ្តល់អោយក្នុងផ្នែក 2.4 វាត្រូវបានបង្ហាញក្នុងឧទាហរណ៍ខាងក្រោម។

ឧទាហរណ៍ទី៤៖ រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y^{(4)}+y=0$ (20)

យើងបានសមីការសម្គាល់ $r^4+1=0$

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការ យើងត្រូវគណនាឫសទី៤ នៃ -1 ។ គិតថា -1 គឺជាចំនួនកុំផ្លិច $-1+0i$ វាមានម៉ូឌុល 1 និងមុំប៉ូលែ π ។ គេបាន

$$-1=\cos\pi+i\sin\pi=e^{i\pi}$$

ម្យ៉ាងទៀត មុំគឺត្រូវបានកំណត់ត្រឹមតែ ពហុគុណនៃ 2π ។ គេបាន

$$-1=\cos(\pi+2m\pi)+i\sin(\pi+2m\pi)=e^{i(\pi+2m\pi)}$$

ដែល m ស្មើសូន្យ ឫសចំនួនគត់វិជ្ជមាន ឫ អវិជ្ជមាន។ គេបាន

$$(-1)^{1/4}=e^{i(\pi/4+m\pi/2)}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{m\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{m\pi}{2}\right)$$

ឫសទី៤ ទាំងបួននៃ -1 ទទួលបានដោយយក $m=0,1,2$ និង 3 ពួកវាគឺ

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}},\frac{-1+i}{\sqrt{2}},\frac{-1-i}{\sqrt{2}},\frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

វាងាយស្រួលដើម្បីផ្ទៀងផ្ទាត់ តម្លៃផ្សេងទៀតនៃ m យើងទទួលបានមួយក្នុងចំណោមឫសទាំង៤

ជាឧទាហរណ៍ បើ $m=4$ យើងបាន $\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (20) គឺ

$$y = e^{t/\sqrt{2}}(c_1\cos\frac{t}{\sqrt{2}} + c_2\sin\frac{t}{\sqrt{2}}) + e^{-t/\sqrt{2}}(c_3\cos\frac{t}{\sqrt{2}} + c_4\sin\frac{t}{\sqrt{2}}) \qquad (21)$$

សន្និដ្ឋាន យើងកត់សម្គាល់ថា បញ្ហានៃការរកឫសនៃសមីការសំគាល់ ប្រហែលជាមិនត្រង់ៗនោះទេ ទោះបីជាមានកុំព្យូទ័រជាជំនួយ។ ផ្ទុយពីនេះវាមានការលំបាកប្រសិនបើឫសពីរស្មើគ្នា ឬក៏មានតម្លៃប្រហាក់ប្រហែលគ្នា។ រំលឹកឡើងវិញថា ទម្រង់នៃចម្លើយទូទៅគឺខុសគ្នាក្នុងករណីទាំងពីរនេះ។ បើមេគុណ $a_0, a_1, ..., a_n$ ក្នុងសមីការទី (1) គឺជាចំនួនកុំផ្លិចចម្លើយនៃសមីការនេះនៅតែជាទម្រង់ (4) ។ ក្នុងករណីនេះ ទោះជាឫសនៃសមីការសម្គាល់គឺ ជាទូទៅ ចំនួនកុំផ្លិច និងចំនួនកុំផ្លិចប្រាសមិន មែនជាឫសនៃសមីការ។ ចម្លើយដែលត្រូវនឹងវាគឺ តម្លៃកុំផ្លិច។

លំហាត់

ក្នុងលំហាត់ 1 ដល់ 6 សរសេរ ចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ $R(\cos\theta + i\sin\theta) = \mathrm{Re}^{i\theta}$

1. $1+i$ 2. $-1+\sqrt{3}i$ 3. -3

4. $-i$ 5. $\sqrt{3}-i$ 6. $-1-i$

ក្នុងលំហាត់ 7 ដល់ 10 តាមនិតិវិធីសាស្ត្រដែលបានបង្ហាញក្នុងឧទាហរណ៍៤ ដើម្បីកំណត់ឫស ចំពោះចំនួនកុំផ្លិចដែលបានអោយខាងក្រោម៖

7. $1^{1/3}$ 8. $(1-i)^{1/2}$

9. $1^{1/4}$ 10. $[2(\cos\pi/3 + i\sin\pi/3)]^{1/2}$

ក្នុងលំហាត់ 11 ដល់ 28 រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលបានផ្តល់ឱ្យ៖

11. $y''' - y'' - y' + y = 0$ 12. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

13. $2y''' - 4y'' - 2y' + 4y = 0$ 14. $y^{iv} - 4y''' + 4y'' = 0$

15. $y^{vi} + y = 0$ 16. $y^{iv} - 5y'' + 4y = 0$

17. $y^{vi} - 3y^{iv} + 3y'' - y = 0$ 18. $y^{vi} - y'' = 0$

19. $y^{v} - 3y^{iv} + 3y''' - 3y'' + 2y' = 0$ 20. $y^{iv} - 8y' = 0$

21. $y^{viii} + 8y^{iv} + 16y = 0$ 22. $y^{iv} + 2y'' + y = 0$

23. $y''' - 5y'' + 3y' + y = 0$ 24. $y''' + 5y'' + 6y' + 2y = 0$

25. $18y''' + 21y'' + 14y' + 4y = 0$ 26. $y^{iv} - 7y''' + 6y'' + 30y' - 36y = 0$

27. $12y^{iv} + 31y''' + 75y'' + 37y' + 5y = 0$ 28. $y^{iv} + 6y''' + 17y'' + 22y' + 14y = 0$

ក្នុងលំហាត់ 29 ដល់ 36 រកចម្លើយនៃសមីការតាមលក្ខខណ្ឌដើម ដែលបានឱ្យ និងគូសក្រាបនៃសមីការចម្លើយ។ តើចម្លើយទៅជាយ៉ាងណា ពេល $t \to \infty$?

29. $y''' + y' = 0;$ $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=2$

30. $y^{iv} + y = 0;$ $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=-2$, $y'''(1)=0$

31. $y^{iv} - 4y''' + 4y'' = 0;$ $y(1)=-1$, $y'(1)=2$, $y''(1)=0$, $y'''(1)=0$

32. $y''' - y'' + y' - y = 0;$ $y(0)=2$, $y'(0)=-1, y''(0)=-2$

33. $2y^{iv} - y''' - 9y'' + 4y' + 4y = 0;$ $y(0)=-2$, $y'(0)=0$, $y''(0)=-2$, $y'''(0)=0$

34. $4y''' + y' + 5y = 0;$ $y(0)=2$, $y'(0)=1$, $y''(0)=-1$

35. $6y''' + 5y'' + y' = 0;$ $y(0)=-2$, $y'(0)=2$, $y''(0)=0$

36. $y^{iv} + 6y''' + 17y'' + 22y' + 14y = 0;$ $y(0)=1$, $y'(0)=-2$, $y''(0)=0$, $y'''(0)=3$

37. បង្ហាញថាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y^{iv} - y = 0$ អាចសរសេរជាទម្រង់

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 \cosh t + c_4 \sinh t$$

គណនាចម្លើយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទៅនឹងលក្ខខណ្ឌដើម $y(0)=0, y'(0)=0, y''(0)=1$ ។ ហេតុអ្វីបានជាវាមានភាពងាយស្រួលដោយប្រើចម្លើយ $\cosh t$ និង $\sinh t$ ជាជាង e^t និង e^{-t} ?

38. យើងមានសមីការ $y^{iv} - y = 0$

ប្រើរូបមន្ត Abel ដើម្បីរក រ៉ុងគៀន នៃសំណុំគ្រឹះចម្លើយនៃសមីការដែលអោយ។

គណនា The Wronskian នៃចម្លើយ e^t , e^{-t} , $\cos t$, និង $\sin t$ ។

គណនា The Wronskian នៃចម្លើយ $\cosh t$, $\sinh t$, $\cos t$, និង $\sin t$ ។

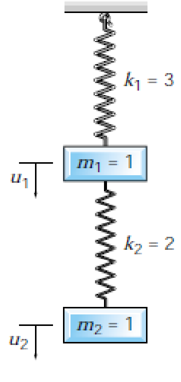
39. យើងមាន ប្រព័ន្ធ spring-mass ដូចបានបង្ហាញក្នុង**រូប3.2.4** ដែលមានម៉ាស២ព្យួរពីរ៉ឺស័រ ដែលមាន ថេររ៉ឺស័រ3 និង 2 រៀងគ្នា។ សន្មតថាគ្មាន damping ក្នុងប្រព័ន្ធ។

បង្ហាញថាការជំនួស (displacements) u_1 និង u_2 នៃម៉ាសពីទីតាំងលំនឹងផ្ទៀងផ្ទាត់និងសមីការ

$$u_1'' + 5u_1 = 2u_2, \quad u_2'' + 2u_2 = 2u_1 \qquad \text{(i)}$$

ដោះស្រាយសមីការ (i) ទីមួយ សម្រាប់ u_2 និងជំនួសក្នុង សមីការទី២ នោះគេបាន សមីការលំដាប់៤ សម្រាប់ u_1 : $u_1^{iv} + 7u_1'' + 6u_1 = 0$ (ii)

រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (ii) ។



រូប3.2.4 ប្រព័ន្ធ spring-mass ដឺក្រេសេរី២

គេឱ្យលក្ខខណ្ឌដើម

$$u_1(0)=1\,,\ u_1'(0)=0\ ,\ u_2(0)=1\ ,\ u_2''(0)=0 \qquad (iii)$$

ប្រើសមីការដំបូង នៃសមីការ (i) និងលក្ខខណ្ឌដើម (iii) ដើម្បីរកតម្លៃសម្រាប់ $u_1''(0)$ និង $u_2'''(0)$ រួច បង្ហាញថាចម្លើយនៃសមីការ (ii) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់និងលក្ខខណ្ឌដើមទាំង៤ លើ u_1 គឺ $u_1(t)=\cos t$ ។ បង្ហាញថាចម្លើយដែលត្រូវនឹង u_2 គឺ $u_2(t)=2\cos t$ ។

ឥឡូវនេះសន្មតថាលក្ខខណ្ឌដើមគឺ $u_1(0)=-2, u_1'(0)=0, u_2(0)=1, u_2'(0)=0$ (iv)

ធ្វើដូចគ្នា (c) ខាងលើបង្ហាញថាចម្លើយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់គឺ $u_1(t)=-2\cos\sqrt{6}t$ និង

សង្កេតចម្លើយដែលទទួលបានក្នុង (c) និង (d) ពិពណ៌នាវិធីពីរផ្សេងគ្នានៃរំញ័រ។ ដំបូងប្រេកង់នៃចលនាគឺ 1 និងម៉ាសទាំងពីរផ្លាស់ទីក្នុងរយៈពេលខួបឡើងនិងចុះដូចទាំងពីរ។ ចលនាទី២មាន ប្រេកង់ $\sqrt{6}$ ហើយម៉ាសទាំងពីរផ្លាស់ប្តូរចេញពីខួប មួយផ្លាស់ទីចុះ មួយទៀតផ្លាស់ទីឡើងផ្ទុយគ្នា។ សម្រាប់លក្ខខណ្ឌដើមចលនានៃម៉ាសជាបន្សំនៃ mode ទាំងពីរនេះ។

40. ក្នុងលំហាត់យើងគ្រោង វិធីមួយដើម្បីបង្ហាញថា បើ $r_1,....,r_n$ គឺពិតនិងខុសគ្នានោះ $e^{r_1t},...,e^{r_nt}$ មិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ លើ $-\infty<t<+\infty$ ។ ដើម្បីបង្ហាញ យើងសន្មត់ទំនាក់ទំនងលីនេអ៊ែរ៖

$$c_1e^{r_1t}+\cdots+c_ne^{r_nt}=0, \quad -\infty<t<\infty \qquad \text{(i)}$$

និងបង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនថេរគឺសូន្យ។

គុណ សមីការ (i) ដោយ e^{-r_1t} និងបែងចែកជាមួយតម្លៃនៃ t នោះគេបាន

$$c_2(r_2-r_1)e^{(r_2-r_1)t}+\cdots+c_n(r_n-r_1)e^{(r_n-r_1)t}=0$$

គុណលទ្ធផលនៃផ្នែក (a) ដោយ $e^{-(r_2-r_1)t}$ បែងចែកជាមួយតម្លៃនៃ t ដើម្បីបាន

$$c_3(r_3-r_2)(r_3-r_1)e^{(r_3-r_2)t}+\cdots c_n(r_n-r_2)(r_n-r_1)e^{(r_n-r_2)t}=0$$

បន្តនីតិវិធីពីផ្នែក (a) និង (b) នៅទីបំផុត យើងបានទទួលបាន

$$c_n(r_n-r_{n-1})\cdots(r_n-r_1)e^{(r_n-r_{n-1})t}=0$$

ដូចនេះ $c_n=0$ គេបាន $c_1e^{r_1t}+\cdots+c_{n-1}e^{r_{n-1}t}=0$

ធ្វើឡើងវិញនៅការបង្ហាញខាងលើ ដើម្បីបង្ហាញថា $c_{n-1}=0$ ។ តាមវិធីស្រដៀងគ្នានោះ $c_{n-2}=\cdots=c_1=0$ នោះអនុគមន៍ $e^{r_1t},...,e^{r_nt}$ មិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ។

៤.៣. វិធីសាស្ត្រមេគុណមិនកំណត់

ដំណោះស្រាយពិសេស y នៃជាតុមិនសុទ្ធលំដាប់ n សមីការបន្ទាត់ក្នុងករណីមេគុណថេរ

$$L[y]=a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=g(t) \qquad (1)$$

វាអាចអនុវត្តបានដោយវិធីសាស្ត្រនៃការកំណត់មេគុណនេះ ដោយ $g(t)$ គឺជារូបមន្តសមស្រប។ ខណៈពេលដែលវិធីសាស្ត្រនៃការកំណត់មេគុណមិនជាទូទៅដូចទៅនឹងវិធីសាស្ត្របម្រែបម្រួលប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ដែលនឹងបកស្រាយនៅក្នុងផ្នែកបន្ទាប់ វាគឺពិតជាងាយស្រួលនៅពេលដែលយើងអាចអនុវត្តបាន។

លំដាប់ទី២នៃសមីការបន្ទាប់ នៅពេលដែលសមីការបន្ទាត់ឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានមេគុណថេរបង្កើត L គឺអនុវត្តនៅប៉ូលីណូម៉ាល់ $A_0t^m + A_1t^{m-1} + \cdots + A_m$ អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $e^{\alpha t}$ អនុគមន៍ស៊ីនុស $\sin\beta t$ ឬក៏អនុគមន៍កូស៊ីនុស $\cos\beta t$ ដូចនេះវាគឺជាអនុគមន៍ពហុធា អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ឬអនុគមន៍សមីការបន្ទាត់ដែលបង្កើតឡើងដោយស៊ីនុស កូស៊ីនុស ឬគោរពទៅតាមលក្ខខណ្ឌ។
ដូចនេះបើ $g(t)$ គឺជាផលបូកនៃអនុគមន៍ពហុធា អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល អនុគមន៍ស៊ីនុស អនុគមន៍កូស៊ីនុស ឬអ្វីផ្សេងទៀតដែលដូចទៅនឹងអនុគមន៍ យើងអាចគិតវាមានភាពងាយស្រួលក្នុង $Y(t)$ ដោយការជ្រើសរើសជាតុផ្សំដែលអាចទៅរួចនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលជាដើម បានធ្វើផលគុណដោយចំនួនដែលបានកំណត់ថេរ។ នៅពេលចំនួនថេរត្រូវបានកំណត់ដូចនេះអនុគមន៍ (1) ត្រូវបានកំណត់។
ភាពខុសគ្នានៅក្នុងការប្រើប្រាស់វិធីសាស្ត្រក្នុងការរកលំដាប់ខ្ពស់នៃសមីការដើម មកពីលក្ខណៈពិតនៃឬសនៃលក្ខណៈពហុធាអាចមានផលគុណធំជាង២ ។ ដូច្នេះ គោលបំណងលក្ខខណ្ឌនៃជាតុមិនសុទ្ធ គឺជាផ្នែកមួយនៃដំណោះស្រាយ ដែលយើងត្រូវធ្វើផលគុណដោយមានលំដាប់ស្វ័យគុណខ្ពស់នៃ t ដើម្បីឱ្យវាមានលក្ខណៈខុសពីគ្នាក្នុងដំណោះស្រាយនៃសមីការដែលត្រូវគ្នាដូចគ្នាបេះបិត។

ឧទាហរណ៍ទី១៖ រកចម្លើយទូទៅនៃ $y''' - 3y'' + 3y' - y = 4e^t$ (2)

ចម្លើយ

សមីការសម្គាល់សម្រាប់ជាតុសុទ្ធដែលត្រូវគ្នាទៅនឹងសមីការទី (2) គឺ

$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = (r-1)^3$ មានឬសត្រួតគ្នារហូតបី $r_1 = r_2 = r_3 = 1$

ចម្លើយទូទៅនៃសមីការអូម៉ូសែនគឺ $y_c(t) = c_1e^t + c_2te^t + c_3t^2e^t$ (3)

ដើម្បីរកចម្លើយពិសេស $Y(t)$ នៃសមីការទី (2) យើងបានដោយសន្មត់ថា $Y(t) = Ae^t$ ។ គួរចំណាំថា ដោយសារ e^t , te^t និង t^2e^t ជាចម្លើយទាំងអស់របស់សមីការអូម៉ូសែនដូចគ្នា យើងត្រូវគុណ $Y(t) = Ae^t$ ដោយ t^3 ។
នោះការសន្មតចុងក្រោយរបស់យើងគឺ $Y(t) = At^3e^t$ ដែល A គឺជាមេគុណដែលអាចកំណត់បាន។ ដើម្បីរកចម្លើយត្រឹមត្រូវរបស់ A យើងធ្វើដេរីវេ $Y(t)$ ចំនួនបីដង ហើយជំនួស y ដោយដេរីវេរបស់វាទៅក្នុងសមីការ (2) ហើយប្រមូលលក្ខខណ្ឌទាំងអស់នៅក្នុងលទ្ធផលនៃសមីការ។ តាមវិធីនេះ យើងទទួលបាន

$6Ae^t = 4e^t$ នោះ $A = \frac{2}{3}$ ហើយចម្លើយពិសេសគឺ

$$Y(t) = \frac{2}{3}t^3e^t \qquad (4)$$

ចម្លើយទូទៅនៃសមីការទី (2) គឺជាផលបូកនៃ $y_c(t)$ ដែលបានមកពីសមីការទី (3) និង $Y(t)$ បានមកពីសមីការទី (4) ។

$$y(t) = y_c(t) + Y(t)$$

$$y(t) = c_1e^t + c_2te^t + c_3t^2e^t + \frac{2}{3}t^4e^t$$

ឧទាហរណ៍ទី២៖ រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $y^{(4)}+2y''+y=3\sin t-5\cos t$ (5) ។

ចម្លើយ

ចម្លើយទូទៅនៃសមីការអូម៉ូសែនត្រូវបានរកឃើញនៅក្នុងឧទាហរណ៍ទី (3) នៃផ្នែក 3.2 ។ ពេលគឺ

$$y_c(t)=c_1\cos t+c_2\sin t+c_3t\cos t+c_4t\sin t \qquad (6)$$

ដែលត្រូវគ្នាទៅនឹងឫសនៃ $r=i$, i , $-i$ និង $-i$ នៃសមីការសម្គាល់។

ការសន្មត់ដំបូងរបស់យើងសម្រាប់ចម្លើយពិសេសមួយគឺ $Y(t)=A\sin t+B\cos t$ ប៉ុន្តែយើងត្រូវគុណ $Y(t)=A\sin t+B\cos t$ នេះដោយ t^2 ដើម្បីធ្វើវាឱ្យខុសគ្នាពីចម្លើយទាំងអស់របស់សមីការអូម៉ូសែន។ ចុងក្រោយយើងតាងគឺ

$$Y(t)=At^2\sin t+Bt^2\cos t$$

បន្ទាប់មកយើងដេរីវេ $Y(t)$ ចំនួនបួនដង ជំនួសទៅក្នុងសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (4) ហើយបាន

$$-8A\sin t-8B\cos t=3\sin t-5\cos t$$

នោះ $A=-\frac{3}{8}$, $B=\frac{5}{8}$ ហើយចម្លើយពិសេសនៃសមីការទី (4) គឺអនុគមន៍ចម្លើយ

$$y(t)=c_1\cos t+c_2\sin t+c_3t\cos t+c_4t\sin t-\frac{3}{8}t^2\sin t+\frac{5}{8}t^2\cos t$$

ឧទាហរណ៍ទី៣៖ រកកចម្លើយពិសេសនៃ $y'''-4y'=t+3\cos t+e^{-2t}$ (8)

ដំបូងយើងត្រូវបង្ហាញសមីការអូម៉ូសែន។ សមីការលក្ខខណ្ឌគឺ $r^3-4r=0$ ហើយឫសរបស់វាគឺ 0 , ± 2 ដូច្នេះ

$$y_c(t)=c_1+c_2e^{2t}+c_3e^{-2t}$$

យើងអាចសរសេរសមីការពិសេសនៃសមីការ (8) គឺជាផលបូកសមីការទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$y'''-4y'=t\ , \quad y'''-4y'=3\cos t\ , \quad y'''-4y'=e^{-2t}$$

ជម្រើសដំបូងរបស់យើងនៃសមីការពិសេសគឺ $Y_1(t)$ នៃសមីការដំបូងគឺ A_0t+A_1 ប៉ុន្តែនៅពេលចំនួនថេរគឺជាចម្លើយនៃសមីការអូម៉ូសែន យើងគុណវាដោយ t នោះ $Y_1(t)=t(A_0t+A_1)$

សម្រាប់សមីការទីពីរ យើងជ្រើសរើស

$$Y_2(t)=B\cos t+C\sin t$$

ហើយមិនចាំបាច់កែប្រែជម្រើសដំបូងនេះទេ ព្រោះតម្លៃ $\cos t$ និង $\sin t$ មិនមែនជាចម្លើយនៃសមីការអូម៉ូសែនឡើយ។ ចុងក្រោយសម្រាប់សមីការទី៣ តម្លៃ e^{-2t} គឺជាចម្លើយនៃសមីការអូម៉ូសែន យើងសន្មត់ថា $Y_3(t)=Ete^{-2t}$

តម្លៃថេរត្រូវបានកំណត់ដោយការជំនួសទៅក្នុងសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតែមួយគត់។

$A_0=-\frac{1}{8}$, $A_1=0$, $B=0$, $C=-\frac{3}{5}$ និង $E=\frac{1}{8}$ នោះចម្លើយពិសេសនៃសមីការទី (8) គឺ

$$Y(t)=-\frac{1}{8}t^2-\frac{3}{5}\sin t+\frac{1}{8}te^{-2t} \qquad (9)$$

លំហាត់

ក្នុងលំហាត់ 1ដល់ 8 កំណត់រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលបានផ្តល់អោយៈ

1. $y'''-y''-y'+y=2e^{-t}+3$

2. $y^{iv}-y=3t+\cos t$

3. $y'''+y''+y'+y=e^{-t}+4t$

4. $y'''-y'=2\sin t$

5. $y^{iv}-4y''=t^2+e^t$

6. $y^{iv}+2y''+y=3+\cos 2t$

7. $y^{iv}+y'''=t$

8. $y^{iv}+y'''=\sin 2t$

ក្នុងលំហាត់ 9ដល់ 12 កំណត់រកចម្លើយមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលបានផ្តល់អោយតាមលក្ខខណ្ឌដើម រួចគូសក្រាបៈ

9. $y'''+4y'=t, \quad y(0)=y'(0)=0, \quad y''(0)=1$

10. $y^{iv}+2y''+y'=3t+4, \quad y(0)=y'(0)=0, \quad y''(0)=y'''(0)=1$

11. $y'''-3y''+2y'=t+e^t, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=-\dfrac{1}{4}, \quad y''(0)=-\dfrac{3}{2}$

12. $y^{iv}+2y'''+y''+8y'-12y=12\sin t-e^{-t}, \quad y(0)=3, \quad y'(0)=0, \quad y''(0)=-1, \quad y'''(0)=2$

ក្នុងលំហាត់ 13ដល់ 18 កំណត់រកចម្លើយមួយ $Y(t)$ នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលបានផ្តល់អោយតាមវិធីសាស្ត្រមេគុណមិនកំណត់ៈ

13. $y'''-2y''+y'=t^3+2e^t$

14. $y'''-y'=te^{-t}+2\cos t$

15. $y^{iv}-2y''+y=e^t+\sin t$

16. $y^{iv}+4y''=\sin 2t+te^t+4$

17. $y^{iv}-y'''-y''+y'=t^2+4+t\sin t$

18. $y^{iv}-2y'''+2y''=3e^t+2te^{-t}+e^{-t}\sin t$

៤.៤ វិធីបម្រែបម្រួលប៉ារ៉ាម៉ែត្រ

វិធីបម្រែបម្រួលប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃការកំណត់ដំណោះស្រាយដោយឡែកមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរមិនអូម៉ូសែនលំដាប់ទីn

$$L[y]=y^{(n)}+p_1(t)y^{(n-1)}+...+P_{n-1}(t)y=g(t) \qquad (1)$$

គឺជាផ្នែកបន្ថែមមួយលើទ្រឹស្តីបទសម្រាប់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទីពីរ។

ឧបមាថា យើងដឹងសំណុំចម្លើយដែលជាមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃដំណោះស្រាយ $y_1, y_2, ..., y_n$ នៃសមីការអូម៉ូសែន។ ចម្លើយទូទៅបន្ទាប់នៃសមីការអូម៉ូសែនគឺ

$$y_c(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)+...+c_ny_n(t) \qquad (2)$$

ទ្រឹស្តីបទនៃបម្រែបម្រួលប៉ារ៉ាម៉ែត្រ សម្រាប់ការកំណត់រកចម្លើយពិសេសមួយនៃឧទាហរណ៍ (1) ពឹងផ្អែកលើលទ្ធភាពនៃការកំណត់ n អនុគមន៍ $u_1, u_2, ..., u_n$ នោះ $Y(t)$ នៃទម្រង់

$$Y(t)=u_1(t)y_1(t)+u_2(t)y_2(t)+...+u_n(t)y_n(t) \qquad (3)$$

$$Y'=(u_1y_1'+u_2y_2'+...+u_ny_n')+(u_1'y_1+u_2'y_2+...+u_n'y_n) \qquad (4)$$

លក្ខខណ្ឌមុនៗដែលយើងដាក់នោះគឺកំណត់

$$u'_1y_1+u'_2y_2+...+u'_ny_n=0 \qquad (5)$$

$$Y'' = (u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + \ldots + u_n y_n'') + (u_1' y_1' + u_2' y_2' + \ldots + u_n' y_n')$$

លក្ខខណ្ឌមុនៗដែលយើងដាក់នោះគឺកំណត់ $(u_1' y_1' + u_2' y_2' + \ldots + u_n' y_n') = 0$ (5*)

$$Y''' = (u_1 y_1''' + u_2 y_2''' + \ldots + u_n y_n''') + (u_1' y_1'' + u_2' y_2'' + \ldots + u_n' y_n'')$$

លក្ខខណ្ឌមុនៗដែលយើងដាក់នោះគឺកំណត់ $(u_1' y_1'' + u_2' y_2'' + \ldots + u_n' y_n'') = 0$ (5**)

យើងបន្តដំណើរការនេះស្រដៀងៗគ្នា ដោយដេរីវេទី $n-1$ នៃ Y គេបាន

$$Y^{(m)} = u_1 y_1^{(m)} + u_2 y_2^{(m)} + \ldots + u_n y_n^{(m)}, \quad m = 0,1,2,\ldots,n-1 \qquad (6)$$

ហើយតាម $n-1$ លក្ខខណ្ឌនៅលើអនុគមន៍ $u_1, \ldots, u_n$:

$$u'_1 y_1^{(m-1)} + u'_2 y_2^{(m-1)} + \ldots + u'_n y_n^{(m-1)} = 0 \quad m = 1,2,3,\ldots,n-1 \quad (7)$$

ដេរីវេទី n នៃ Y គឺ

$$Y^{(n)} = (u_1 y_1^{(n)} + \ldots + u_n y_n^{(n)}) + (u'_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + u'_n y_n^{(n-1)}) \qquad (8)$$

ចុងក្រោយយើងដាក់កំណត់ថា Y ត្រូវតែជាដំណោះស្រាយនៃឧទហរណ៍ (1) នៅលើការជំនួសសម្រាប់ដេរីវេនៃ Y ពីឧទាហរណ៍ (6) និង (8) ដែលប្រមូលកន្សោម និងការប្រើប្រាស់ពិតថា $L[y_i] = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ យើងបាន

$$u'_1 y_1^{(n-1)} + u'_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + u'_n y_n^{(n-1)} = g \qquad (9)$$

តាមសមីការ(5),(5*),(5**),(7) (9) គូជាមួយ $n-1$ សមីការ (7) ឱ្យ n ក្នុងដំណាលគ្នាលីនេអ៊ែគ្មានសមីការពីជគណិតអូម៉ូសែនសម្រាប់ $u_1', u_2', \ldots, u_n'$

$$\begin{aligned}
y_1 u'_1 + y_2 u'_2 + \ldots + y_n u'_n &= 0,\\
y_1 u'_1 + y'_2 u'_2 + \ldots + y_n u'_n &= 0,\\
y_1 u'_1 + y''_2 u'_2 + \ldots + y_n u'_n &= 0,\\
&\vdots\\
y_1^{(n-1)} u'_1 + \ldots + y_n^{(n-1)} u'_n &= g,
\end{aligned} \qquad (10)$$

ប្រើប្រាស់រូបមន្ត Cramer យើងកំណត់ថាដំណោះស្រាយនៃប្រព័ន្ធសមីការ (10) គឺ

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$W_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & y_2 & \cdots & y_n \\ 0 & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g & y_2^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}, W_2(t) = \begin{vmatrix} y_1 & 0 & \cdots & y_n \\ y_1' & 0 & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{n-1} & g & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}, W_m(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & 0 \\ y_1' & y_2' & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \cdots & g \end{vmatrix}$$

យើងទាញបានចម្លើយ $u_1'(t), u_2'(t), u_3'(t), \ldots, u_m'(t)$ គឺ

$$u'_m(t) = \frac{g(t) W_m(t)}{W(t)} \quad , \quad m = 1, 2, \ldots, n \qquad (11)$$

ចម្លើយដោយផ្នែកគឺ $$Y(t)=\sum_{m=1}^{n} y_m(t)\int_{t_0}^{t}\frac{g(s)W_m(s)}{W(s)}ds \qquad (12)$$

ដែល t_0 គឺរើសតម្លៃណាក៏បាន។ កំឡុងពេលនិតិវិធី គឺត្រង់ការគណនានៃពីជគណិតពាក់ព័ន្ធក្នុងការកំណត់ $Y(t)$ ពីឧទាហរណ៍ (12) កាន់តែស្មុគស្មាញដូចកំណើន n ។ ក្នុងករណីខ្លះការគណនាប្រហែលជាសម្រួលទៅវិសាលភាពខ្លះដោយប្រើប្រាស់អត្តសញ្ញាណ Abel

$$W(t)=W(y_1,...,y_n)(t)=c\,e^{\left[-\int p_1(t)dt\right]}$$

តម្លៃថេរនៃ c អាចត្រូវបានកំណត់ដោយការវាយតម្លៃ W នៅចំណុចងាយស្រួលមួយចំនួន។

ឧទាហរណ៍ទី១៖ មាន $y_1(t)=e^t, y_2(t)=te^t$ និង $y_3(t)=e^{-t}$ គឺចម្លើយនៃសមីការអូម៉ូសែនដែលត្រូវគ្នាទៅនឹង

$$y'''-y''-y'+y=g(t) \qquad (13)$$

ចូរកំណត់ចម្លើយដោយផ្នែកពិសេសមួយនៃសមីការ (13)

ចម្លើយ

ដំបូងយើងមាន

$$W(t)=W(e^t,te^t,e^{-t})=\begin{vmatrix} e^t & te^t & e^{-t} \\ e^t & (t+1)e^t & -e^{-t} \\ e^t & (t+2)e^t & e^{-t}\end{vmatrix}$$

$$W(t)=e^t\begin{vmatrix} 1 & t & 1 \\ 1 & t+1 & -1 \\ 1 & t+2 & 1\end{vmatrix}$$

យកជួរដេកទី២ ដកជួរដេកទី១

យកជួរដេកទី៣ ដកជួរដេកទី១ យើងទទួលប

$$W(t)=e^t\begin{vmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0\end{vmatrix}=e^t\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0\end{vmatrix}=4e^t$$

$$W(t)=4e^t\neq 0$$

បន្ទាប់មក

$$W_1(t)=\begin{vmatrix} 0 & te^t & e^{-t} \\ 0 & (t+1)e^t & -e^{-t} \\ 1 & (t+2)e^t & e^{-t}\end{vmatrix}$$

ការប្រើប្រាស់ ដែលតូចបានផ្តុំគ្នាជាមួយជួរឈរ យើងទទួលបាន

$$W_1(t)=\begin{vmatrix} te^t & e^{-t} \\ (t+1)e^t & -e^{-t}\end{vmatrix}=-2t-1$$

ក្នុងមធ្យោបាយស្រដៀងគ្នាមួយ

$$W_2(t)=\begin{vmatrix} e^t & 0 & e^{-t} \\ e^t & 0 & -e^{-t} \\ e^t & 1 & e^{-t} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = 2$$

និង

$$W_3(t)=\begin{vmatrix} e^t & te^t & 0 \\ e^t & (t+1)e^t & 0 \\ e^t & (t+2)e^t & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & (t+1)e^t \end{vmatrix} = e^{2t}$$

ការជំនួសលទ្ធផលនេះក្នុងឧទាហរណ៍ (12) យើងមាន

$$Y(t)=e^t\int_{t_0}^{t}\frac{g(s)(-1-2s)}{4e^s}ds+te^t\int_{t_0}^{t}\frac{g(s)(2)}{4e^s}ds+e^{-t}\int_{t_0}^{t}\frac{g(s)\,\mathrm{e}^{2s}}{4e^s}ds$$
$$=\frac{1}{4}\int_{t_0}^{t}\{e^{t-s}[-1+2(t-s)]+e^{-(t-s)}\}g(s)ds$$

លំហាត់

ក្នុងលំហាត់ទី 1 ដល់ 6 ការប្រើប្រាស់វិធីសាស្ត្រនៃបម្រែបម្រួលប៉ារ៉ាម៉ែត្រដើម្បីកំណត់ដំណោះស្រាយទូទៅនៃការផ្តល់ឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល។

1. $y'''+y'=\tan t,\quad 0<\mathrm{t}<\pi$ 2. $\mathrm{y}'''-y'=\mathrm{t}$

3. $y'''-2y''-y'+2\mathrm{y}=e^{4t}$ 4. $y'''+y'=\sec t,\ -\pi/2<t<\pi/2$

5. $y'''-y''-y'+\mathrm{y}=\mathrm{e}^{-t}\sin t$ 6. $y^{iv}+2y''+y=\sin t$

នៅក្នុងលំហាត់ទី 7 និង 8 រកដំណោះស្រាយទូទៅនៃការផ្តល់ឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល។ ចេញពីចម្លើយរបស់អ្នកក្នុងកន្សោមនៃអាំងតេក្រាលមួយឬច្រើន។

7. $y'''-y''+y'-y=\sec t,\quad -\pi/2<t<\pi/2$

8. $y'''-y'=\csc t,\qquad 0<t<\pi$

នៅក្នុងលំហាត់ទី 9 ដល់ 12 រកដំណោះស្រាយនៃចំណោទតម្លៃដើមដែលបានផ្តល់ឱ្យ។ បន្ទាប់មកដៅចំណុចនៅលើក្រាហ្វនៃដំណោះស្រាយ

9. $y'''+y'=\sec t \qquad y(0)=2\ ,\ y'(0)=1\ ,\ y^{n}(0)=-2$

10. $y^{iv}+2y^{n}+y=\sin t \qquad y(0)=2\ ,\ y'(0)=0\ ,\ y''(0)=-1\ ,\ y'''(0)=1$

11. $y'''-y''+y'-y=\sec t \qquad y(0)=2\ ,\ y'(0)=-1\ ,\ y''(0)=1$

12. $y'''-y'=\csc t \qquad y(\pi/2)=2\ ,\ y'(\pi/2)=1\ ,\ y''(\pi/2)=-1$

13. ឱ្យ x, x^2 និង $\frac{1}{x}$ គឺដំណោះស្រាយនៃសមីការអូម៉ូសែនដែលត្រូវគ្នានឹង

$$x^3y'''+x^2y''-2xy'+2\mathrm{y}=2\mathrm{x}^4,\quad x>0$$

កំណត់ដំណោះស្រាយពិសេសមួយ។

14. រករូបមន្តមួយដែលពាក់ព័ន្ធអាំងតេក្រាល សម្រាប់ដំណោះស្រាយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'''-y''+y'-\mathrm{y}=g(t)$

15. រករូបមន្តមួយដែលពាក់ព័ន្ធអាំងតេក្រាល សម្រាប់ដំណោះស្រាយពិសេសមួយនៃសមីការ

ឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y^{iv}-y=g(t)$
ដូច្នេះ អនុគមន៍ $\sin t$, $\cos t$, $\cot t$, $\tan t$ ទម្រង់នៃសំណុំដែលជាមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃដំណោះស្រាយសមីការអូម៉ូសែន។
16. រករូបមន្តមួយដែលពាក់ព័ន្ធអាំងតេក្រាល សម្រាប់ដំណោះស្រាយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'''-3y''+3y'-y=g(t)$
បើ $g(t)=t^{-2}e^{t}$ កំណត់ $Y(t)$
17. រករូបមន្តមួយដែលពាក់ព័ន្ធអាំងតេក្រាល សម្រាប់ដំណោះស្រាយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $x^3y'''-3x^2y''+6xy'-6y=g(x),\quad x>0$
ដូច្នេះ ផ្ទៀងផ្ទាត់មើលថា x , x^2 , x^3 គឺដំណោះស្រាយសមីការមិនអូម៉ូសែន។

៤.៥ សមីការ អឺលែរ (Euler Equation)

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានទម្រង់៖ $x^2y''+axy'+by=0$ (1)
ហៅថា សមីការអ៊ឺលែរ ដែល a,b ជាចំនួនថេរ។ ទម្រង់ចម្លើយរបស់សមីការ(1) គឺ
$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ ដែល y_1,y_2 មានភាពអាស្រ័យលីនេអ៊ែរគ្នា ហើយ y_1,y_2 មានទម្រង់

$$y=x^r \qquad (2)$$

យើងធ្វើដេរីវេ y',y'' គេបាន $y=x^r$, $y'=rx^{r-1}$, $y''=r(r-1)x^{r-2}$ សមីការ(1)៖

$$x^2\left[r(r-1)x^{r-2}\right]+ax\left(rx^{r-1}\right)+bx^r=0$$

$$r(r-1)x^r+arx^r+bx^r=0$$

$$r^2+(a-1)r+b=0 \qquad (3)$$

សមីការខាងលើជាសមីការសម្គាល់ មានឫសដូចខាងក្រោម៖

$$r_1,r_2=\frac{-(a-1)\pm\sqrt{(a-1)^2-4b}}{2} \qquad (4)$$

សមីការ(3)អាចមានឫស ជាចំនួនពិតពីរផ្សេងគ្នា ជាពិចំនួនតពីរដូចគ្នា និង ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់។

៤.៥.១ មានឫសជាចំនួនពិតពីរផ្សេងគ្នា

ប្រសិនបើសមីការ(3)មានឫស ជាចំនួនពិតពីរផ្សេងគ្នា $r_1\neq r_2$ នោះ $y_1=x^{r_1},y_2=x^{r_2}$ ហើយ $W(y_1,y_2)=(r_2-r_1)^{r_1+r_2-1}\neq 0$ វាអាស្រ័យលីនេអ៊ែរគ្នា ដូចនេះចម្លើយទូទៅគឺ

$$y(x)=c_1x^{r_1}+c_2x^{r_2} \quad , \quad c_1,c_2\in\mathbb{R} \qquad (5)$$

ឧទាហរណ៍១៖ដោះស្រាយសមីការ $2x^2y''+3xy'-y=0,\quad x>0$ (7)
ចម្លើយ
ដោះស្រាយសមីការ $2x^2y''+3xy'-y=0\Rightarrow x^2y''+\frac{3}{2}xy'-\frac{1}{2}y=0$
សមីការស្គាល់ $r^2+\left(\frac{3}{2}-1\right)r-\frac{1}{2}=0 \quad \Rightarrow r^2+\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}=0$
ឫសសមីការ $r_1=\frac{1}{2},r_2=-1$

ដូចនេះ អនុគមន៍ចម្លើយទូទៅគឺ $y=c_1x^{1/2}+c_2x^{-1}, \qquad c_1,c_2\in\mathbb{R} \qquad (8)$

ឧទាហរណ៍២៖ដោះស្រាយសមីការ $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-2xy'-4y=0$

ចម្លើយ

ដោះស្រាយសមីការ $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-2xy'-4y=0$

សមីការស្គាល់ $r^2-3r-4=0$

ឫសសមីការ $r_1=4, r_2=-1$

ដូចនេះ អនុគមន៍ចម្លើយទូទៅគឺ $y=c_1x^4+c_2x^{-1}, \qquad c_1,c_2\in\mathbb{R}$

៤.៥.២. មានឫសជាចំនួនពិតពីរដូចគ្នា

ប្រសិនបើសមីការ(3)មានឫស ជាចំនួនពិតពីរដូចគ្នា $r_1=r_2$ នោះ $y_1=x^{r_1}$ ហើយយើងទាញរកចម្លើយទី២គឺ $y_2=x^{r_1}\ln x$ ដូចនេះចម្លើយទូទៅគឺ

$$y(x)=c_1x^{r_1}+c_2x^{r_2}\ln x \qquad (9)$$

ឧទាហរណ៍៣៖ដោះស្រាយសមីការ $x^2y''+5xy'+4y=0, \qquad x>0 \qquad (10)$

ចម្លើយ

ដោះស្រាយសមីការ $x^2y''+5xy'+4y=0, \quad x>0$

សមីការស្គាល់ $r^2+(5-1)r+4=0 \quad \Rightarrow r^2+4r+4=0$

ឫសសមីការ $r_1=r_2=-2$

ចនេះ អនុគមន៍ចម្លើយទូទៅគឺ $y=c_1x^{-2}+c_2x^{-2}\ln x, \quad c_1,c_2\in\mathbb{R} \qquad (11)$

ឧទាហរណ៍៤៖ដោះស្រាយសមីការ $4x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+8x\dfrac{dy}{dx}+y=0$

ចម្លើយ

ដោះស្រាយសមីការ $4x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+8x\dfrac{dy}{dx}+y=0 \quad \Rightarrow x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+2x\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{4}y=0$

សមីការស្គាល់ $r^2+(2-1)r+\dfrac{1}{4}=0 \quad \Rightarrow r^2+r+\dfrac{1}{4}=0$

ឫសសមីការ $r_1=r_2=\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ អនុគមន៍ចម្លើយទូទៅគឺ $y=c_1x^{\frac{1}{2}}+c_2x^{\frac{1}{2}}\ln x, \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$

ចំណាំ៖ បើសមីការមានឫសត្រួតគ្នាចំនួន k នោះចម្លើយគឺ

$$y=c_1x^r+c_2x^r\ln x+\ldots+c_kx^r(\ln x)^{k-1} \quad ; \qquad c_1,c_2\ldots c_k\in\mathbb{R}$$

៤.៥.៣ មានឬសជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់

ប្រសិនបើសមីការ(3)មានឫស ជាចំនួនកុំផ្លិច $r_1=\alpha+\beta i,\quad r_2=\alpha-\beta i$ នោះ $y_1=x^{\alpha+\beta i},\quad y_2=x^{\alpha-\beta i}$ ហើយយើងទាញ

$$y_1=x^{\alpha+\beta i}=e^{(\alpha+\beta i)\ln x}=e^{\alpha\ln x}e^{i\beta\ln x}=x^{\alpha}\left[\cos(\beta\ln x)+i\sin(\beta\ln x)\right],\quad x>0$$

$$y_2=x^{\alpha-\beta i}=e^{(\alpha-\beta i)\ln x}=e^{\alpha\ln x}e^{i(-\beta\ln x)}=x^{\alpha}\left[\cos(\beta\ln x)-i\sin(\beta\ln x)\right],\qquad x>0$$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅគឺ $y(x)=x^{\alpha}\left[c_1\cos(\beta\ln x)+c_2\sin(\beta\ln x)\right],\quad x>0 \qquad (12)$

ឧទាហរណ៍៥៖ដោះស្រាយសមីការ $x^2y''+xy'+y=0,\qquad x>0 \qquad (13)$ ។

ចម្លើយ

ដោះស្រាយសមីការ $x^2y''+xy'+y=0,\qquad x>0$

សមីការស្គាល់ $r^2+(1-1)r+1=0 \qquad \Rightarrow r^2+1=0$

ឫសសមីការ $r_1=-i,\ r_2=i$

ចនេះ អនុគមន៍ចម្លើយទូទៅគឺ $y=c_1\cos(\ln x)+c_2\sin(\ln x),\ c_1,c_2\in\mathbb{R} \qquad (14)$

ឧទាហរណ៍៦៖ដោះស្រាយសមីការ $4x^2y''+17y=0,\qquad y(1)=-1,\qquad y'(1)=-\frac{1}{2}$ ។

ចម្លើយ

$y=x^{1/2}\left[c_1\cos(2\ln x)+c_2\sin(2\ln x)\right],\qquad c_1,c_2\in\mathbb{R}$

$y=-x^{1/2}\cos(2\ln x)$

ឧទាហរណ៍៧៖ដោះស្រាយសមីការ $x^3y'''+5x^2y''+7y'+8y=0$

ចម្លើយ

$y=c_1x^{-2}+c_2\cos(2\ln x)+c_3\sin(2\ln x),\qquad c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$

ឧទាហរណ៍៨៖ដោះស្រាយសមីការ $x^2y''-3xy'+3y=2x^4e^x$

ចម្លើយ

$x^2y''-3xy'+3y=0$ មានចម្លើយ $y_c=Ax+Bx^3$ ហើយចម្លើយផ្នែកមួយទៀត $y_p=u_1y_1+u_2y_2$ បម្លែងសមីការដើម $y''-\frac{3}{x}y'+\frac{3}{x^2}y=2x^2e^x$ នោះ $P(x)=\frac{3}{x},g(x)=2x^4e^x,y_1=x,y_2=x^3$ តាមវិធីបម្រែបម្រួលប៉ារ៉ាម៉ែត្រ៖

$$w=\begin{vmatrix}x & x^3\\ 1 & 3x^2\end{vmatrix}=2x^3,\quad w_1=\begin{vmatrix}0 & x^3\\ 2x^2e^x & 3x^2\end{vmatrix}=-2x^5e^x,\quad w_2=\begin{vmatrix}x & 0\\ 1 & 2x^2e^x\end{vmatrix}=2x^2e^x$$

$$u_1'=\frac{w_1}{w}=\frac{-2x^5e^x}{2x^3}=-x^2e^x \qquad \Rightarrow u_1=-x^2e^x+2xe^x-2e^x$$

$$u_2'=\frac{w_2}{w}=\frac{2x^3e^x}{2x^3}=e^x \qquad \Rightarrow u_2=e^x$$

ចម្លើយផ្នែកមួយ $y_p=u_1y_1+u_2y_2=\left(-x^2e^x+2xe^x-2e^x\right)x+e^xx^3=2x^2e^x-2xe^x$

ចម្លើយទូទៅមួយ $y=y_c+y_p=Ax+Bx^3+2x^2e^x-2xe^x$

ចំណាំ ៖សមីការ $(x-x_o)^2y''+\alpha(x-x_o)y'+\beta y=0$ យើងតាង $t=x-x_0$

មានអនុគមន៍ចម្លើយទូទៅ $y=(x-x_0)^r$

៤.៤ មេគុណមិនកំណត់និងវិធីសាស្ត្រធ្វើឱ្យសូន្យ (Undetermined Coefficients-Annihilator Approach)

យើងបានដឹងរួចមកហើយថា សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី n មានទម្រង់៖

$$a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+a_{n-2}y^{(n-2)}+....+a_2y''+a_1y'+a_0y=g(x)$$

សមីការខាងលើ អាចសរសេរមកជាទម្រង់ខាងក្រោម៖

$$a_nD^ny+a_{n-1}D^{n-1}y+a_{n-2}D^{(n-2)}y+....+a_2D^2y+a_1Dy+a_0y=g(x) \qquad (1)$$

ដែល $y^{(n)}=\dfrac{d^ny}{dx^n}=D^ny, \quad y^{(n-1)}=\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=D^{n-1}y,......,y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}=D^2y, \quad y'=\dfrac{dy}{dx}=Dy$

សមីការ(1)អាចសរសេរជាទម្រង់ខ្លី $L(y)=g(x)$ ដែល L តាងដោយកន្សោមលីនេអ៊ែរដីក្រេទី n ឬពហុធា គេបាន៖

$$L(y)=a_nD^ny+a_{n-1}D^{n-1}y+a_{n-2}D^{(n-2)}y+....+a_2D^2y+a_1Dy+a_0y \qquad (2)$$

ឧទាហរណ៍៖ចូរសរសេរសមីការ $y''+5y'+6y=g(x)$ ជាទម្រង់សមីការ(1)

ចម្លើយ $D^2y+5Dy+6y=g(x)$

លំហាត់

ក្នុងលំហាត់ 1ដល់ 12 កំណត់រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការអ៊ឺលែរដែលបានផ្តល់អោយ៖

1. $x^2y''+4xy'+2y=0$
2. $(x+1)^2y''+3(x+1)y'+0.75y=0$
3. $x^2y''-3xy'+4y=0$
4. $x^2y''+3xy'+5y=0$
5. $x^2y''-xy'+y=0$
6. $(x-1)^2y''+8(x-1)y'+12y=0$
7. $x^2y''+6xy'-y=0$
8. $2x^2y''-4xy'+6y=0$
9. $x^2y''-5xy'+9y=0$
10. $(x-2)^2y''+5(x-2)y'+8y=0$
11. $x^2y''+2xy'+4y=0$
12. $x^2y''-4xy'+4y=0$

ក្នុងលំហាត់ 13ដល់ 16 កំណត់រកចម្លើយមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលបានផ្តល់អោយតាមលក្ខខណ្ឌដើម។ សង់ក្រាបរួចពណ៌នាពេល $x\to 0$

13. $2x^2y''+xy'-3y=0, \quad y(1)=1, \quad y'(1)=4$
14. $4x^2y''+8xy'+17y=0 \quad y(1)=2, \quad y'(1)=-3$
15. $x^2y''-3xy'+4y=0 \quad y-(1)=2, \quad y'(-1)=3$
16. $x^2y''+3xy'+5y=0 \quad y(1)=1, \quad y'(1)=-1$

ក្នុងលំហាត់ 17ដល់ 22 កំណត់រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលបានផ្តល់អោយ៖

17. $xy''-4y'=x^4$,

18. $2x^2y''+5xy'+y=x^2-x$

19. $x^2y''-xy'+y=2x$

20. $x^2y''-2xy'+2y=x^4e^x$

21. $x^2y''+xy'-y=\ln x$

22. $x^2y''+xy'-y=\dfrac{1}{x+1}$

៤.៤.១ ការដាក់ផលគុណកត្តា

ក្នុងសមីការឌីផេរ៉ង់ស្រែល(1)មានពហុធា

$L(y)=a_nD^ny+a_{n-1}D^{n-1}y+a_{n-2}D^{(n-2)}y+....+a_2D^2y+a_1Dy+a_0y$

ដែលយើងអាចបំបែកពហុធាជាផលគុណកត្តាដែលមានលក្ខណៈដូចខាងក្រោម៖

1. $L(y)$ អាចដាក់ជាផលគុណកត្តាជីក្រេទាប
2. $L(y)$ មានលក្ខណៈត្រឡប់

ឧទាហរណ៍១៖ ចូរដាក់កន្សោមខាងក្រោមជាផលគុណកត្តា៖

1. $L(y)=D^2+D$
2. $L(y)=D^2-1$
3. $L(y)=D^2+5D+6$
4. $L(Y)=D^2+4D+4$
5. $L(y)=D^2+1$

ចម្លើយ

ដាក់កន្សោមខាងក្រោមជាផលគុណកត្តា

1. $L(y)=D^2+D=D(D+1)=(D+1)D$
2. $L(y)=D^2-1=(D+1)(D-1)=(D-1)(D+1)$
3. $L(y)=D^2+5D+6=(D+2)(D+3)=(D+3)(D+2)$
4. $L(y)=D^2+4D+4=(D+2)^2$
4. $L(y)=D^2+1$មិនអាចដាក់ជាកត្តាដោយប្រើចំនួនពិតបានទេ។

ឧទាហរណ៍២៖សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''+4y'+4y=0$ យើអាចសសេរបាន

$D^2y+4Dy+4y=0$

$(D^2+4D+4)y=0$

$(D+2)^2y=0$

យើងបង្រួមលំដាប់បានដោយតាង $w=(D+2)y$ គេបាន

$(D+2)w=0 \quad \Rightarrow w'+2w=0$

៤.៤.២ វិធីសាស្ត្រធ្វើឱ្យសូន្យ

១.ការីឌីផេរ៉ង់ស្យែល D^{n+1} ធ្វើឱ្យសូន្យប្រភេទអនុគមន៍៖

$1, \quad x, \quad x^2, ..., x^n \qquad (1)$

$c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_nx^n \qquad (2)$

ឧទាហរណ៍១៖ រកការីឌីរ៉ង់ស្យែល ដែលធ្វើអោយអនុគមន៍ខាងក្រោមស្មើសូន្យ៖

$a/\ 2023 \qquad b/\ 4x \qquad c/\ -7x^4 \qquad d/2023+2x^3-7x^5$

ចម្លើយ

$a/\ 2023$ យើងសង្កេតឃើញតម្លៃ $n=0$ នោះការីឌីរ៉ង់ស្យែលគឺ $D(2023)=0$

$b/\ 4x$ យើងសង្កេតឃើញតម្លៃ $n=1$ នោះការីឌីរ៉ង់ស្យែលគឺ $D^2(4x)=0$

$c/\ -7x^4$ យើងសង្កេតឃើញតម្លៃ $n=4$ នោះការីឌីរ៉ង់ស្យែលគឺ $D^5(-7x^4)=0$

$d/2023+2x^3-7x^5$ យើងសង្កេតឃើញតម្លៃ $n=5$ នោះការីឌីរ៉ង់ស្យែលគឺ
$D^6(2023+2x^3-7x^5)=0$

២.ការីឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(D-\alpha)^{n+1}$ ធ្វើឱ្យសូន្យប្រភេទអនុគមន៍៖

$e^{\alpha x}, \quad xe^{\alpha x}, \quad x^2e^{\alpha x}, ..., x^ne^{\alpha x} \qquad (3)$

$c_0e^{\alpha x} + c_1xe^{\alpha x} + c_2x^2e^{\alpha x} + ... + c_nx^ne^{\alpha x} \qquad (4)$

ឧទាហរណ៍២៖ រកការីឌីរ៉ង់ស្យែល ដែលធ្វើអោយអនុគមន៍ខាងក្រោមស្មើសូន្យ៖

$a/\ 2023e^{4x} \qquad b/\ 4xe^{-2x} \qquad c/\ -7x^4e^x \qquad d/2x^3e^{-x}-7x^5e^{-x}$

ចម្លើយ

$a/\ 2023e^{4x}$ យើងសង្កេតឃើញតម្លៃ $n=0, \quad \alpha=4$ នោះការីឌីរ៉ង់ស្យែលគឺ $(D-4)(2023e^{4x})=0$

$b/\ 4xe^{-2x}$ យើងសង្កេតឃើញតម្លៃ $n=1, \quad \alpha=-2$ នោះការីឌីរ៉ង់ស្យែលគឺ $(D+2)^2(4xe^{-2x})=0$

$c/\ -7x^4e^x$ យើងសង្កេតឃើញតម្លៃ $n=4, \quad \alpha=1$ នោះការីឌីរ៉ង់ស្យែលគឺ $(D-1)^5(-7x^4e^x)=0$

$d/\ 2x^3e^{-x}-7x^5e^{-x}$ យើងសង្កេតឃើញតម្លៃ $n=5, \quad \alpha=-1$ នោះការីឌីរ៉ង់ស្យែលគឺ
$(D+1)^6(2x^3e^{-x}-7x^5e^{-x})=0$

ឧទាហរណ៍៣៖ រកការីឌីរ៉ង់ស្យែល ដែលធ្វើអោយអនុគមន៍ខាងក្រោមស្មើសូន្យ៖

$a/e^{4x}-e^x \qquad b/\ 4xe^{-2x}+5e^x \qquad c/\ -7x^4e^x+x^2 \qquad d/2x^3e^{-x}-7x^5e^x+x$

ចម្លើយ

$a/\ e^{4x}-e^x$ យើងសង្កេតឃើញ e^{4x} មានតម្លៃ $n=0, \quad \alpha=4$ និង e^x មានតម្លៃ $n=0, \quad \alpha=1$
នោះការីឌីរ៉ង់ស្យែលគឺ $(D-4)(D-1)(e^{4x}-e^x)=0$

$b/\ 4xe^{-2x}+5e^x$ យើងសង្កេតឃើញ xe^{-2x} មានតម្លៃ $n=1, \quad \alpha=-2$ និង $5e^x$ មានតម្លៃ $n=0, \quad \alpha=1$
នោះការីឌីរ៉ង់ស្យែលគឺ $(D+2)^2(D-1)(4xe^{-2x}+5e^x)=0$

$c/ -7x^4e^x + x^2$ យើងសង្កេតឃើញ $-7x^4e^x$ មានតម្លៃ $n=4, \quad \alpha=1$ និង x^2 មានតម្លៃ $n=2$ នោះការីឌីរ៉ង់ស្យែលគឺ $D^3(D-1)^5\left(-7x^4e^x+x^2\right)=0$

$d/ 2x^3e^{-x} - 7x^5e^x + x$ យើងសង្កេតឃើញ $2x^3e^{-x}$ មានតម្លៃ $n=3, \quad \alpha=-1$ និង $7x^5e^x$ មានតម្លៃ $n=5, \quad \alpha=1$ និង x មានតម្លៃ $n=1$ នោះការីឌីរ៉ង់ស្យែលគឺ $D^2\left(D+1\right)^4(D-1)^6\left(2x^3e^{-x}-7x^5e^x+x\right)=0$

៣.ការីឌីផេរ៉ង់ស្យែល $\left(D^2-2\alpha D+\alpha^2+\beta^2\right)^{n+1}$ ធ្វើឱ្យសូន្យប្រភេទអនុគមន៍៖

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad xe^{\alpha x}\cos\beta x,\quad x^2e^{\alpha x}\cos\beta x,..........,x^ne^{\alpha x}\cos\beta x \qquad (5)$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\quad xe^{\alpha x}\sin\beta x,\quad x^2e^{\alpha x}\sin\beta x,..........,x^ne^{\alpha x}\sin\beta x \qquad (6)$$

ឧទាហរណ៍៤៖ រកការីឌីរ៉ង់ស្យែល ដែលធ្វើអោយអនុគមន៍ខាងក្រោមស្មើសូន្យ៖

$a/ e^x\cos x$ $\quad b/ 4x\sin 3x$ $\quad c/ -7x^4e^x\cos x$ $\quad d/\sin x+2x^3e^{-x}+x$

ចម្លើយ

$a/ e^x\cos x$ យើងសង្កេតឃើញតម្លៃ $n=0, \quad \alpha=1, \quad \beta=1$ នោះការីឌីរ៉ង់ស្យែលគឺ $\left(D^2+2D+2\right)\left(e^x\cos x\right)=0$

$b/ 4x\sin 3x$ យើងសង្កេតឃើញតម្លៃ $n=1, \quad \alpha=0, \quad \beta=3$ នោះការីឌីរ៉ង់ស្យែលគឺ $\left(D^2+9\right)^2\left(4x\sin 3x\right)=0$

$c/ -7x^4e^x\cos x$ យើងសង្កេតឃើញតម្លៃ $n=4, \quad \alpha=1, \quad \beta=1$ នោះការីឌីរ៉ង់ស្យែលគឺ $\left(D^2-2D+2\right)^5\left(-7x^4e^x\cos x\right)=0$

$d/\sin x+2x^3e^{-x}+x$ យើងសង្កេតឃើញតម្លៃការីឌីរ៉ង់ស្យែលគឺ $\left(D^2+1\right)\left(D+1\right)^4\left(D^2\right)\left(\sin x+2x^3e^{-x}+x\right)=0$

៤.៤.៣ អនុវត្តសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

ឧទាហរណ៍៥៖រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y''+3y'+2y=4x^2$ $\qquad (1)$

ចម្លើយ

មាន $y''+3y'+2y=4x^2$ យើងអាចបម្លែងបាន

$$D^2y+3Dy+2y=4x^2$$

$$\left(D^3\right)\left(D^2+3D+2\right)y=D^3\left(4x^2\right)$$

$$\left(D^3\right)\left(D^2+3D+2\right)y=0 \qquad (2)$$

សមីការ(2)ជំនួសដោយសមីការសម្គាល់

$r^3\left(r^2+3r+2\right)=0$ មានឫស $r_1=-1, r_2=-2, \quad r_3=r_4=r_5=0$

អនុគមន៍ចម្លើយទូទៅគឺ $y=y_c+y_p=\underbrace{c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}}_{y_c}+\underbrace{A+Bx+Cx^2}_{y_p}$ $\qquad (3)$

យើងត្រូវបន្តរកតម្លៃមេគុណ A,B,C ដោយរក $y_p', \quad y_p''$ ជំនួសមីការ(1)យនឹងទទួលបានតម្លៃ៖

$A=7, \quad B=-6, \quad C=2$

ដូចនេះ អនុគមន៍ចម្លើយទូទៅគឺ $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+7-6x+2x^2$ $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ (4)

ឧទាហរណ៍៦៖រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y''-3y'=8e^{3x}+4\sin x$ (5)

ចម្លើយ

មាន $y''-3y'=8e^{3x}+4\sin x$ យើងអាចបម្លែងបាន

$$D^2y-3Dy=8e^{3x}+4\sin x$$

$$(D-3)(D^2+1)(D^2-3D)y=(D-4)(D^2+1)(8e^{3x}+4\sin x)$$

$$(D-3)(D^2+1)(D^2-3D)y=0 \quad (6)$$

សមីការ(6)ជំនួសដោយសមីការសម្គាល់

$(r-3)(r^2+1)(r^2-3r)=0$ មានឫស $r_1=0,\ r_2=3,\ r_3=3,$ $r_4=0+i, r_5=0-i$

អនុគមន៍ចម្លើយទូទៅគឺ $y=y_c+y_p=\underbrace{c_1+c_2e^{-3x}}_{y_c}+\underbrace{Axe^{3x}+B\cos x+C\sin x}_{y_p}$ (7)

យើងត្រូវបន្តរកតម្លៃមេគុណ A,B,C ដោយរក y_p', y_p'' ជំនួសមីការ(1)យនឹងទទួលបានតម្លៃ៖

$A=8/3,\quad B=6/5,\quad C=-2/5$

ដូចនេះ អនុគមន៍ចម្លើយទូទៅគឺ

$$y=c_1+c_2e^{3x}+\frac{8}{3}xe^{3x}+\frac{6}{5}\cos x-\frac{2}{5}\sin x \qquad c_1,c_2\in\mathbb{R} \quad (8)$$

ប្រតិបត្តិ

រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ

a. $y''+y'=x\cos x-\cos x$

$$\left(y=c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{1}{4}x\cos x-\frac{1}{2}x\sin x+\frac{1}{4}x^2\sin x\right)$$

b. $y''+8y=5x-2e^{-x}$,

$$\left(y=c_1\cos 2\sqrt{2}x+c_2\sin 2\sqrt{2}x+\frac{5}{8}x+\frac{2}{9}e^{-x}\right)$$

ចំណាំ៖

វិធីសាស្ត្រខាងលើមិនអាចអនុវត្តចំពោះសមីការលីនេអ៊ែរ

$$a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+a_{n-2}y^{(n-2)}+....+a_0y=g(x)$$

ប្រសិនបើ $g(x)=\ln x,\quad g(x)=\frac{1}{x},\quad g(x)=\tan x,\quad g(x)=\sin^{-1}x$ បានឡើយ។

លំហាត់

ក្នុងលំហាត់1-10ចូរសរសេរសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរជាទម្រង់ $L(y)=g(x)$ និងដាក់ជាផលគុណកត្តាអង្គខាងឆ្វេង៖

1. $9y''-4y=\sin x$
2. $y''-5y=x^2-2x$
3. $y''-4y'-12y=x-6$
4. $2y''-3y'-2y=1$
5. $y'''+10y''+25y'=e^x$
6. $y'''+2y''-13y'+10y=xe^{-x}$
7. $y'''+4y'=e^x\cos 2x$
8. $y'''+4y''+3y'=x^2\cos x-3x$
9. $y^{(4)}+8y'=4$
10. $y^{(4)}-8y''+16y=\left(x^2-2x\right)e^{4x}$

ក្នុងលំហាត់11-14 ចូរបញ្ជាក់ថាការីឌីផេរ៉ង់ស្យែលធ្វើឲ្យសូន្យអនុគមន៍ដែលបានផ្តល់៖

11. $D^4,\quad y=19x^3-2x$
12. $2D-1,\quad y=4e^{x/2}$
13. $(D-2)(D+5),\quad y=e^{2x}+3e^{-5x}$
14. $D^2+64,\quad y=2\cos 8x+5\sin 8x$

ក្នុងលំហាត់15-26 ចូររកការីឌីផេរ៉ង់ស្យែលធ្វើឲ្យសូន្យអនុគមន៍ដែលបានផ្តល់៖

15. $1+6x-2x^2$
16. $x^3(1-5x)$
17. $1+7e^{2x}$
18. $x+3xe^{6x}$
19. $\cos 2x$
20. $1+\sin x$
21. $13x+9x^2-\sin 4x$
22. $8x-\sin x+10\cos 5x$
23. $e^{-x}+2xe^x-x^2e^x$
24. $\left(2-e^x\right)^2$
25. $3+e^x\cos 2x$
26. $e^{-x}\sin x-e^{2x}\cos x$

ក្នុងលំហាត់27-34 ចូររកអនុគមន៍ដែលត្រូវនឹងការីឌីផេរ៉ង់ស្យែលធ្វើឲ្យសូន្យខាងក្រោម៖

27. D^5
28. D^2-4d
29. $(D-3)(2D+3)$
30. $D^2-9D-36$
31. D^2+5
32. $D^2-6D+10$
33. D^3-10D^2+25D
34. $D^2(D-5)(D-7)$

ក្នុងលំហាត់35-44 ចូររកអនុគមន៍ចម្លើយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមេគុណមិនកំណត់៖

35. $y''-9y=54$
36. $2y''-7y'+5y=-29$
37. $y'''+2y''+y'=10$
38. $y'''+y''=8x^2$
39. $y''+2y'+2y=5e^{6x}$
40. $y''+6y''+8y=3e^{-2x}+2x$
41. $y''-2y'+5y=e^x\sin x$
42. $y'''-y''+y'-y=xe^x-e^{-x}+7$
43. $2y'''-3y''-3y'=\left(e^x+e^{-x}\right)^2$
44. $y^{(4)}-2y'''+y''=10$

ក្នុងលំហាត់45-49ចូររកអនុគមន៍ចម្លើយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមេគុណមិនកំណត់តាមលក្ខខ័ណ្ឌដើម ៖

45. $y''-64y=16,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0$

46. $y''-5y'=x-2,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=4$

47. $y''+5y'-6y=10e^{x},\quad y(0)=1,\quad y'(0)=1$

48. $y'''-2y''+y'=xe^{x}1+5,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=2,\quad y''(0)=-1$

49. $y^{(4)}-y'''=x+e^{x}16,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0,\quad y''(0)=0,\quad y'''(0)=0$

ឯកសារយោង

1. វចនានុក្រម គណិតវិទ្យា អង់គ្លេស-ខ្មែរ ,RUPP (2017)
2. វចនានុក្រម សម្ដេចសង្ឃ ជួន ណាត
3. លោកគ្រូ លី ស្រួច: គណនាឌីផេរ៉ង់ស្យែល ២ ,RUPP (2018)
4. លោកគ្រូ លាវ ផារុន និង យឹម អយុវឌ្ឍន៍
5. John K. Hunter, Bruno Nachtergaele:
   Applied Analysis, University of California at Davis September 12, 2000
6. Léonard Todjihounde:
   Calcul différentiel, CEPAD 2004.
7. HENRY CARTAN:
   CALCUL DIFFÉRENTIEL, HERMANN, PARIS 1971.
8. Jacqueline Lelong-Ferrand, Jean-Marie Arnaudiès:
   Cours de mathématiques, Dunod, Paris, 2001.
9. Paul Dawkins:
   DIFFERENTIAL EQUALTION, PAUL DAWKINS,2007.
10. -William E.Boyce, Richard C.DiPrima:
    Elementary Differential Equaltions and Boundary Value Problems,New York,2001, 7 edition.